

Petrus Kivi

KVATERNIOT

Rotaatiot kolmiulotteisessa avaruudessa

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Toukokuu 2019

TIIVISTELMÄ

Petrus Kivi: Kvaterniot
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Toukokuu 2019

Kolmiulotteista geometriaa analysoidaan tyypillisesti vektorilaskennan ja geometrisen analyysin työkalujen avulla. Kvaterniot jätetään usein analyysissä mainitsematta niiden hyödyllisyydestä huolimatta. Tämän opinnäytetyön lähtökohtana on esitellä ja määritellä kvaterniot sekä tarkastella niiden tärkeimpiä ominaisuuksia erityisesti tietokonegrafiikassa.

Yksi tietokonegrafiikan ydinongelmista on kolmiulotteisten kappaleiden pyörittäminen kolmiulotteisessa avaruudessa. Pyörittämistä eli rotaatiota tarvitaan esimerkiksi eri kappaleiden sisäisten koordinaatistojen yhdenmukaistamisessa sekä virtuaalisen kameran orientaation muuttamisessa. Rotaatiot voidaan toteuttaa rotaatiomatriisien avulla, mutta haasteita tuovat sekä gimbal lock -ilmiö että rotaatioiden interpolointi. Gimbal lock syntyy, kun kaksi pyörähdysakselia asettuvat samansuuntaisiksi, jolloin menetetään yksi vapausaste rotaatiosta. Rotaatioiden interpoloinnin tavoitteena on määrittää kahden rotaatioakselin välinen mielekkäästi jatkuva rotaatio.

Kvaterniot ovat kompleksilukujen laajennus neljään ulottuvuuteen, ja niiden avulla pystytään kuvaamaan rotaatioita ilman rotaatiomatriisien haasteita. Tässä opinnäytetyössä kvaternioiden havaittiin olevan laskennallisesti tehokkaampia kuin rotaatiomatriisit, kun suoritettiin useampi peräkkäinen rotaatio. Lisäksi kvaternioiden muistikuormituksen todettiin olevan jopa puolet pienempi verrattuna rotaatiomatriisiin.

Avainsanat: kvaternio, kompleksiluku, rotaatio, tietokonegrafiikka, interpolointi

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

SISÄLLYSLUETTELO

1	Johdanto	1
2	Kvaterniot \mathbb{R}^4 -avaruudessa	3
2.1	Kompleksiluvut	4
2.2	Kompleksilukujen laajentaminen \mathbb{R}^4 -vektoriavaruuteen	9
2.3	Kvaternioiden määrittely	12
3	Rotaatiot tietokonegrafiikassa	19
3.1	Eulerin kulmat	20
3.2	Matriisimuunnokset	21
3.3	Rotaatiot kvaternioilla	21
3.4	Rotaatiomenetelmien vertailu	22
4	Yhteenveto	24
	Lähteet	25

LYHENTEET JA MERKINNÄT

CPU	Central Processing Unit
GPU	Graphics Processing Unit
(s, \mathbf{v})	Skalaarin ja vektorin muodostama järjestetty pari
*	Operaatio joukon alkioille
$:=$	Merkintää kuvaava yhtäsuuruus
$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$	N -ulotteisen vektorin komponenttinotaatio
\mathbb{A}, \mathbb{B}	Mielivaltainen joukko
$a, b, c, d, p, q, w, x, y, z$	Skalaariarvoinen muuttuja
\forall	Kaikilla -kvanttori
\mathbb{C}	Kompleksilukujen joukko
e	Eulerin luku
\exists	On olemassa -kvanttori
f, g, h	Skalaariarvoinen funktio
$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$	Vektoriarvoinen funktio
\mathbb{H}	Kvaternioiden joukko
\mathbb{I}	Imaginaarilukujen joukko
i	Imaginaariyksikkö tai peruskvaternio
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Peruskvaterniot
Im	Kompleksiluvun imaginaariosa, kuvaus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
\mathbb{R}	Reaalilukujen joukko
\mathbb{R}^n	n -ulotteinen reaalinen vektoriavaruus
Re	Kompleksiluvun reaaliosa, kuvaus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
$\sum_{i=n}^m$	Summa luvusta n lukuun m
\mathbf{u}, \mathbf{v}	Vektoriarvoinen muuttuja

1 JOHDANTO

Matematiikan hyödyllisimpiin löytöihin luetellaan tyypillisesti *kompleksiluvut*. Kompleksilukujen tärkeyttä kuvaa niiden hyödyntäminen sähkötekniikassa ja -teoriassa sekä ydin-fysiikassa. Kompleksiluvuilla ja kvaternioilla on kuitenkin läheinen yhteys, sillä kvaterniot laajentavat kompleksilukujen teorian neljään ulottuvuuteen. Vielä yleistetympi lukujoukko on *oktonionit*. Kvaternioiden, kompleksi- sekä reaalityölkujen kanssa ne muodostavat ainoat *ei-assosiatiiviset jakoalgebrat*. Lähisukulaisistaan poiketen kvaternioilla on merkittävä asema sovelletussa matematiikassa, sillä niillä kyetään kuvaamaan kolmiulotteisten kappaleiden pyörähdyksiä. Sir William Rowan Hamilton, yksi kvaternioiden teorian löytäjistä [9], pyrki kehittämään kvaternioita kolmiulotteisen avaruuden muunnosten kuvaamiseen. Kvaternioiden aseman syrjäytti kuitenkin jo varhaisessa vaiheessa vektorianalyysin nopea kehitys, mikä on johtanut vektorilaskennan nykyiseen standardiasemaan yleisesti usean ulottuvuuden ja erityisesti kolmen ulottuvuuden analyysissä [15, s. 49–52].

Kvaternioiden kiinnostavuus ei rajoitu pelkästään niiden matemaattisiin ominaisuuksiin. Kvaternioilla on tärkeä merkitys robotiikassa, ohjauk- ja lentotekniikassa sekä tietokonegrafiikassa. Yhteistä näille tekniikan aloille on kappaleiden kiertäminen kolmiulotteisessa avaruudessa, mikä voidaan toteuttaa kvaternioilla. Tavanomaiset menetelmät kuten *Eulerin kulmat* ja *rotaatiomatriisit* ovat intuitiivisia tapoja kuvata ja mallintaa kappaleiden rotaatioita, mutta niillä on rajoituksensa.

Gimbal lock -ilmiö lentoalusten orientaatiojärjestelmissä on tyypillinen ongelma Eulerin kulmia käytettäessä. Vastaava ongelma tunnetaan robotiikan alalla *wrist lock* -ilmiönä. Kumpikin ilmiö kärsii kallistusta kuvaavien *pyörimisakselien* ”lukkiutumista” yhteen, kun kappaleen kierto jollakin pyörimisakselilla lähestyy ääriasentoa. Vastaava ongelma ilmenee osittain rotaatiomatriiseilla, ja lisäksi niiden kohdalla kahden rotaation välinen interpolointi on työlästä ja johtaa yleensä ei toivottuihin lopputuloksiin. Kvaterniot ratkaisevat sekä gimbal lock -haasteet että interpoloinnin ongelmat. Kvaternioiden tulkinta kolmessa ulottuvuudessa on kuitenkin monisyinen ja se on syytä tehdä huolella.

Hyödyllisyydestään huolimatta kvaternioiden tarkastelu yleensä sivuutetaan tutkittaessa kolmiulotteista geometriaa. Tyypillisempää on hyödyntää vektoreita ja vektorilaskennan tuloksia \mathbb{R}^3 -avaruutta määriteltäessä. Voidaankin kysyä, onko kvaternioilla hyödyllisiä ominaisuuksia, joita vektori- ja matriisilaskennalla ei kolmessa ulottuvuudessa ole.

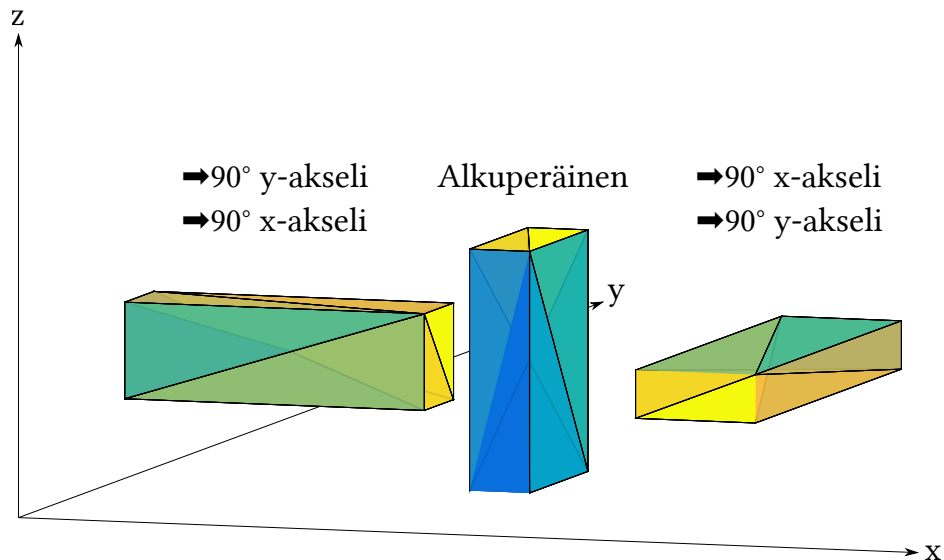
Tämän opinnäytetyön tarkoituksena on muodostaa matemaattisesti perusteellinen ja samalla käytännönläheinen katsaus kvaternioihin. Kvaternioita vertaillaan rotaatiomatriiseihin tietokonegrafiikan rotaatioiden toteuttamisessa, ja kummankin toteutusmenetelmän hyötyjä ja haasteita tuodaan esiin. Lisäksi opinnäytetyössä esitetään tilanteet, joissa kvaternioita kannattaa käyttää muiden menetelmien sijasta.

Opinnäytetyön luvussa 2 määritellään kvaterniot sekä perustellaan ja todistetaan niiden hyödyllisimmät ominaisuudet tietokonegrafiikan näkökulmasta. Luvussa 3 esitellään MATLAB-ohjelmistolla luotu testipeti yksinkertaisten kolmiulotteisten kappaleiden mallintamiseen ja muuntamiseen sekä vertaillaan Eulerin kulmien, rotaatiomatriisien ja kvaternioiden eroja kappaleiden pyörittämisessä. Luvussa 4 kerrataan kvaternioiden tärkeimmät hyödyt ja haasteet muihin rotaatiomenetelmiin verrattuna.

2 KVATERNIOT \mathbb{R}^4 -AVARUUDESSA

Tässä luvussa tarkastellaan kvaternioita niin, että ajatellaan niiden olevan eräänlainen kompleksilukujen laajennus useampaan ulottuvuuteen. Tällöin voidaan kysyä, miten kompleksiluvut tulisi laajentaa korkeampiin ulottuvuuksiin, ja mitä kompleksilukujen ominaisuuksia halutaan säilyttää. Eräs ongelma johon laajennuksessa törmätään on ulottuvuuskien määrän valinta. Tullaan huomaamaan, että vain neljän ja kahdeksan ulottuvuuden laajennukset toimivat siten, että laajennettujen kompleksilukujen summa, tulo, käänteisalkio ja osamäärä ovat suljettuja. Tässä kappaleessa osoitetaan myös, että kolmiulotteisen kappaleen *rotaatiot* vaativat vapausasteiltaan nelikulotteisen vektorin eli kvaternion, jotta kaikki mahdolliset rotaatiot tulevat määritettyä.

Rotaatioiden järjestys kolmiulotteisessa avaruudessa on tärkeä: kappale ei päädy välttämättä samaan asentoon, jos sitä kierretään kahdesti eri järjestyksessä. Kuvassa 2.1 nähdään kuinka palkin loppuasento riippuu kahden kierron keskinäisestä järjestyksestä, ja tämän havainnon perusteella voidaan tehdä valistunut arvaus kvaternioiden ominaisuuksista. Jos kvaternioiden jokin *projisoitu* operaatio tai kuvaus samaistuu kappaleen rotaatioon kolmiulotteisessa avaruudessa, niin kyseinen kvaternioiden operaatio ei voi olla *vaihdannainen*. Tässä kappaleessa tullaan huomaamaan, että vaikka rotaatio ei samaistu pelkkään kvaternioiden kertolaskuun, kertolaskun vaihdannaisuuden poisjättäminen on silti välttämätöntä.



Kuva 2.1. Palkki päätyy eri asentoon riippuen siitä kierretäänkö sitä myötäpäivään 90° ensin y - vai x -akselin ympäri.

2.1 Kompleksiluvut

Kompleksiluvut ovat *imaginaarilukujen* ja *reaalilukujen* yhdistelmä. Reaalilukujen joukko \mathbb{R} määrittää yleisimmät *skalaariarvoiset* luvut, mutta reaalilukujen joukossa ei ole ratkaisua esimerkiksi yhtälölle

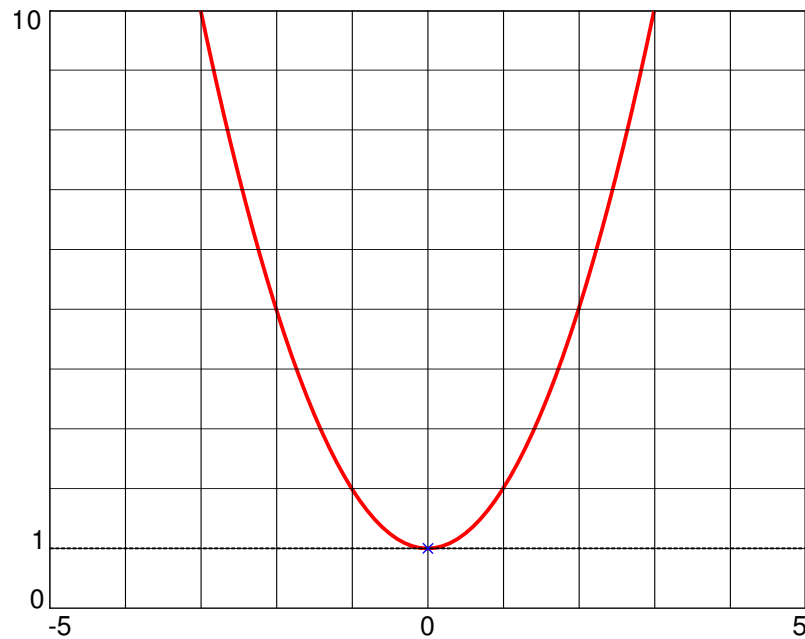
$$x^2 + 1 = 0 .$$

Geometrisesti ajateltuna tämä yhtälö kuvaa paraabelin, jolla ei ole nollakohtaa reaalilukujen joukossa, mikä näkyy kuvassa 2.2. Ratkaisu tälle yhtälölle voidaan kuitenkin löytää määrittelemällä uusi lukujoukko, imaginaariluvut, joita merkitään symbolilla \mathbb{I} . Imaginaarilukujen perusyksikkö i määritellään seuraavasti:

$$i^2 = -1 ,$$

jossa lukua i kutsutaan *imaginaariyksiköksi*, ja i kuvaa geometrisesti imaginaarilukujen *kantavektorin*.

Jos kompleksilukuja tulkitaan geometrisesti, niitä voidaan hyödyntää pisteiden ja pistejoukkojen kiertämiseen kahdessa ulottuvuudessa. Joukkojen \mathbb{I} ja \mathbb{R} kuvaus *vektoriavaruuteen* \mathbb{R}^2 täytyy kuitenkin määritellä erikseen, jotta rotaatio voidaan määritellä huolellisesti. Tämä määritelmä antaa samalla pohjan kvaternioiden rotaatio-ominaisuudelle vektoriavaruudessa \mathbb{R}^3 .



Kuva 2.2. Ylöspäin aukeava paraabeli, jonka minimi on x -akselin yläpuolella

Määritellään kompleksilukujen joukko \mathbb{C} siten että jos

$$z = x + yi ,$$

jossa $x, y \in \mathbb{R}$, niin $z \in \mathbb{C}$ ja $yi \in \mathbb{I}$. Tämän määrittelyn kautta nähdään, että joukot \mathbb{R} ja \mathbb{I} ovat erillisiä *alijoukkoja* joukossa \mathbb{C} . Perustelu tälle saadaan asettamalla $x = 0$ tai $y = 0$, ja samalla huomataan, että $\mathbb{R} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{C}$ sopivalla kuvauksella eli epäformaalisti $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Merkitäänkin tästä lähtien

$$x = \operatorname{Re} z$$

$$y = \operatorname{Im} z .$$

Määritellään seuraavaksi imaginaarilukujen ja sitä kautta kompleksilukujen tärkeimmät laskusäännöt. Osa tulevista laskusäännöistä osoitetaan kvaternioille luvussa 2.3. Tullaan näkemään, että perusoperaatiot kuten summa, tulo ja jakolasku noudattelevat vahvasti reaalilukujen laskusääntöjä.

Määritellään aluksi kompleksilukujen notaatio ja peruslaskusäännöt.

Määritelmä 2.1. Olkoon $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Merkitään

$$z_n = x_n + y_n i, \quad (2.1.1)$$

jossa $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Kompleksilukujen summa ja tulo ovat

$$\text{(summa)} \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \quad (2.1.2)$$

$$\text{(tulo)} \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i \quad (2.1.3)$$

Koska kompleksiluvut toteuttavat reaalityyppisten *kunta-aksiomatt*, reaalityyppisten tunnetut laskusäännöt pätevät myös kompleksiluvuille [5, s. 10–11] [15, s. 10–11].

Lause 2.2. Kompleksiluvut toteuttavat *kunta-aksiomatt* eli jos $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned} \text{(liitännäisyys)} \quad & (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ & (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{(vaihdannaisuus)} \quad & z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ & z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{(osittelulaki)} \quad & z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ & (z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{(neutraalialkio)} \quad & \exists 0_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C} : z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = z \\ & \exists 1_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C} : z \cdot 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} \cdot z = z \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{(vasta- ja käänteisluku)} \quad & \exists -z \in \mathbb{C} : z + (-z) = (-z) + z = 0_{\mathbb{C}} \\ & \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{z} = z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1_{\mathbb{C}} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

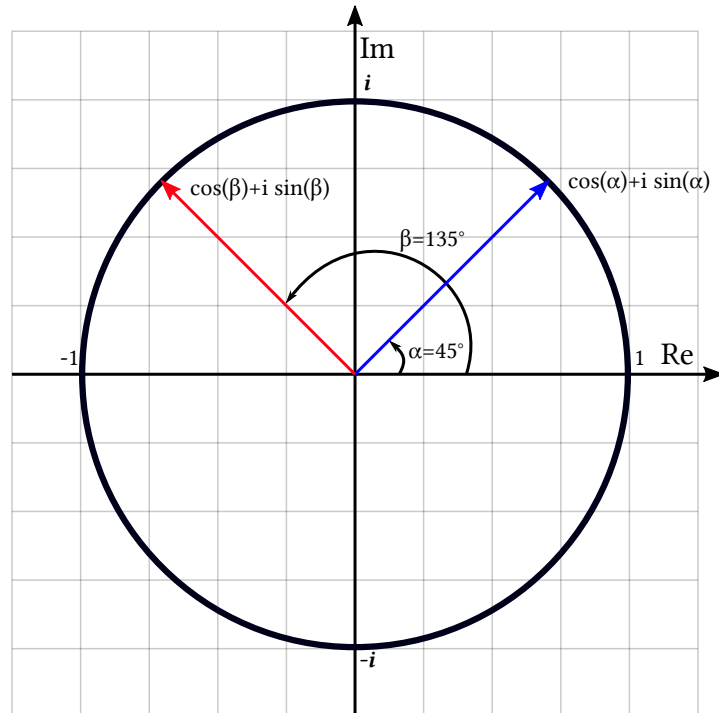
Kompleksilukujen neutraali-alkiot ovat reaalityyppisten vastaavat eli $0_{\mathbb{C}} = 0$ ja $1_{\mathbb{C}} = 1$.

Määritelmä 2.3. Kompleksiluvun $z = x + yi \in \mathbb{C}$ *konjugaatti* on $\bar{z} = x - yi$.

Määritelmä 2.4. Kompleksiluvun $z = x + yi \in \mathbb{C}$ itseisarvo tai *normi* on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Konjugaatin ja normin avulla saadaan seuraavat käänteisluvun ja osamäärän kaavat.

Seuraus 2.5. Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ käänteisluku $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.



Kuva 2.3. Yksikön mittaisella kompleksiluvulla kertominen kiertää lukua 1 vastapäivään α ja β astelukujen verran.

Seuraus 2.6. Olkoon $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja merkitään $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$. Luku z_1 jaettuna luvulla z_2 on

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Kompleksilukujen geometrinen tulkinta on keskeisessä roolissa rotaatioiden kannalta. Tavoitteena on määrittellä kompleksilukujen kuvaus kaksiulotteiseen avaruuteen, jotta kompleksilukujen välisten operaatioiden vaikutusta voidaan tutkia geometrisesti. Määrittelemällä mielekäs kuvaus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ voidaan kysyä, mikä kompleksilukujen funktio samaistuu pisteen kierroksi vektoriavaruudessa \mathbb{R}^2 .

Määritelmä 2.7. Kuvaus $I : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $I(z) = \langle \text{Re}(z), \text{Im}(z) \rangle$ on määritelty kaikille $z \in \mathbb{C}$.

Määritelmä 2.7 on kirjallisuuden [5, s. 10] [15, s. 20–21] kanssa yhdenmukainen, notaa tiota I lukuunottamatta, ja se määrittää vektoriavaruuden \mathbb{R}^2 ortogonaalisen kannan. Ortogonaalisen kannan määritelmä ja todistus sivuutetaan, mutta kuvan 2.3 avulla voidaan kuitenkin vakuuttua, että kantavektoreiden kohtisuoruus on geometrisesti mielekästä.

Kuvaus I siis samaistaa kompleksiluvun vektoriavaruuden \mathbb{R}^2 alkioksi. Ennen kuin siirrytään tutkimaan tällaisen kuvauksen ominaisuuksia, käydään läpi kompleksilukujen tärkein lause, nimittäin *Eulerin lause*.

Lause 2.8 (Eulerin lause). *Kaikille $\phi \in \mathbb{R}$ pätee*

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi,$$

jossa e on Eulerin luku ja i imaginaariyksikkö.

Todistus. Olkoon $\phi \in \mathbb{R}$. Käytetään apuna sinin, kosinin ja eksponenttifunktion sarjakehitelmiä

$$\begin{aligned}\sin \phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} \dots \\ \cos \phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n}}{(2n)!} &&= 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} \dots \\ e^{i\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} &&= 1 + i\phi + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} \dots ,\end{aligned}$$

jossa eksponenttifunktion sarjakehitelmä suppenee itseisesti kaikkialla [2, s. 40] [6, s. 36–38] [13, s. 12].

Eulerin luvun sarjakehitelmä voidaan järjestää uudelleen kompleksilukujen liitännäisyyden ja vaihdannaisuuden sekä eksponenttifunktion sarjakehitelmän suppenevuuden nojalla. Tällöin saadaan asetettua kehitelmän parilliset ja parittomat potenssit erillisiksi summiksi siten, että

$$\begin{aligned}e^{i\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} \stackrel{\text{supp.}}{=} \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2n}}{(2n)!}}^{\text{parilliset potenssit}} + \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2n+1}}{(2n+1)!}}^{\text{parittomat potenssit}} \\ &\stackrel{(2.2.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n \phi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n i \phi^{2n+1}}{(2n+1)!} \stackrel{(2.2.2)}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n}}{(2n)!}}_{\cos \phi} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin \phi} \\ &= \cos \phi + i \sin \phi\end{aligned}$$

□

Huomautus. Eulerin luvun sarjakehitelmän laajentaminen kompleksilukuihin on sivuutettu tässä todistuksessa. Laajennuksen syvällisemmät perustelut löytyvät lähteestä [13, s. 12–14].

Määritelmällä 2.7 ja lauseella 2.8 on ainakin kaksi merkittävää seurausta.

Seuraus 2.9. Eulerin identiteetti $e^{i\pi} + 1 = 0$

Todistus. $e^{i\pi} + 1 \stackrel{2.8}{=} (\cos \pi + i \sin \pi) + 1 = (-1 + 0i) + 1 = -1 + 1 = 0$

□

Eulerin identiteetti yhdistää kolme tärkeää matematiikan osa-aluetta yksinkertaisessa yhtälössä, ja identiteetin todistus on yllättävän yksinkertainen. Siksi sitä pidetään yhtenä matematiikan tunnetuimpana [10, s. 72] ja kauneimpana yhtälönä [6, s. 38] [15, s. 30].

Seuraus 2.10. $I(e^{i\phi}) = \langle \cos \phi, \sin \phi \rangle$ määrittää yksikköympyrän kompleksitasolla.

Todistus. Olkoon mielivaltainen $\phi \in \mathbb{R}$. Nyt pisteen $I(e^{i\phi}) = \langle \cos \phi, \sin \phi \rangle$ Euklidinen etäisyys origosta on $\|\langle \cos \phi, \sin \phi \rangle\| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \sqrt{1} = 1$. \square

2.2 Kompleksilukujen laajentaminen \mathbb{R}^4 -vektoriavaruuteen

Kompleksilukujen geometrinen tulkinta \mathbb{R}^2 avaruudessa herättää mielenkiinnon kompleksilukujen ominaisuuksia ja muunnettavuutta kohtaan. Seuraava kysymys onkin, voiko kompleksilukujen määrittelmää laajentaa korkeampiin ulottuvuuksiin, ja mitä seurauksia laajennuksesta olisi kompleksilukujen ominaisuuksille.

Alaluvussa 2.1 huomattiin, että kompleksiluvut ovat liitännäisiä, vaihdannaisia ja toteuttavat osittelulain. Tässä alaluvussa tullaan huomaamaan, että on luovuttava kompleksilukujen vaihdannaisuudesta, jotta laajennus \mathbb{R}^4 avaruuteen olisi mielekäs; vaihdannaisuuden puuttuminen on itseasiassa suotavaa.

Haastavaksi kompleksilukujen laajentamisen tekee se seikka, että mielivaltaiselle \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ ei pystytä määrittämään kompleksilukujen kaltaista järjestelmää. Tarkemmin sanottuna \mathbb{R}^n viittaa tässä tapauksessa avaruuteen, jossa laajennetuilla kompleksiluvuilla olisi sekä mielekäs geometrinen tulkinta että kunnan tai vähintään *jakoalgebran* kaltaiset ominaisuudet. Jakoalgebrassa luovutaan kunnan tulon kommutatiivisuudesta [10, s. 381–382] [15, s. 11]

Sekaannuksen välttämiseksi todetaan, että $\mathbb{C} \neq \mathbb{R}^2$ ja $I(z) \in \mathbb{R}^2$ eli kompleksiluvut voidaan samaistaa \mathbb{R}^2 vektoriavaruuteen sopivalla kuvauksella. Vaikka samaistuksen kompleksilukujen ja vektoriavaruuden alkioiden välillä voisi tehdä implisiittisesti ilman erillistä kuvauksen määrittelyä, on matemaattisesti mielekkäämpää määrittellä tarkkaan alkiot samaistava kuvaus. Lisäksi mielekkäitä kuvauksia on mahdollista määrittää usealla tavalla, joten on myös selkeyden vuoksi parempi täsmentää mistä kuvauksesta on kyse. Tämä seikka korostuu kvaternioiden sekä kolmi- ja nelilulotteisten vektoriavaruuksien välisiä samaistuksia ja kuvauksia määritettäessä.

Ongelmallista kompleksilukujen laajentamisessa on laajennetun joukon sulkeutuneisuus sille määriteltyjen operaatioiden suhteen. Algebrallisessa mielessä nämä operaatiot vastaavat summan, tulon ja osamäärän operaatiota. Yleisemmin sulkeutuneisuus voidaan määrittellä seuraavalla tavalla:

Määritelmä 2.11. Olkoon \mathbb{A} ja \mathbb{B} epätyhjiä joukkoja ja $n \in \mathbb{N}$. Joukko \mathbb{A} on sulkeutunut operaation $*$: $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{B}$ suhteen, jos $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$. \mathbb{A} on *sulkeutunut*, jos se on suljettu kaikkien joukolla \mathbb{A} määriteltyjen operaatioiden $*$: $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{B}$ suhteen.

Tarkastellaan seuraavaksi \mathbb{R}^3 avaruuteen laajennettujen kompleksilukujen joukkoja. Merkitään tällaista joukkoa symbolilla \mathbb{A} . Ensimmäinen havainto on se, että joukon \mathbb{A} määrittelyssä tarvitaan ainakin toinen imaginaarinen luku, jolla olisi saman tyyppiset ominaisuudet kuin imaginaariyksiköllä i ja imaginaariluvuilla. Olkoon tällainen luku j , ja imaginaariyksikön tavoin $j^2 = -1$.

Kokeillaan seuraavanlaista suoraviivaista määritelmää: $k \in A$, jos

$$k = \alpha + \beta i + \gamma j,$$

jossa $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Samaistetaan intuitiivisesti luku $k \in \mathbb{A}$ vektoriavaruuden pisteeseen $\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ siten, että $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle \leftrightarrow \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$.

Asettamalla $\gamma = 0$ nähdään, että luku k redusoituu kompleksilukujen joukkoon. Alaluvussa 2.1 määrittelimme kompleksilukujen rotaation reaali- ja imaginaarilukujen määrittämällä tasolla yksikön mittaisten kompleksilukujen väliseksi tuloksi, ja esimerkiksi imaginaariyksiköllä i kertominen vastasi pisteen vastapäiväistä kiertoa $\frac{\pi}{2}$ verran. Vastaava ominaisuus halutaan säilyttää, jotta joukko \mathbb{A} ja \mathbb{C} ovat yhteneväisiä rotaation tulkinnessa. Tällöin luvun k kompleksitason projektion tulisi noudatta kompleksilukujen rotaation algebraa.

Olkoon siis $\gamma \neq 0$. Luvun k rotaatio luvulla i tulisi säilyttää j -suuntainen komponentti ennallaan. Tällöin saadaan

$$ik = i(\alpha + \beta i + \gamma j) = \alpha i + \beta i^2 + \gamma ij = \underbrace{-\beta + \alpha i}_{\text{Kompleksitason projektion rotaatio}} + \gamma ij,$$

josta nähdään että mielekäs rotaatio vaatii $\gamma ij = \gamma j \Rightarrow ij = j$ ja kertomalla luvulla j oikealta saadaan $-i = -1 \Rightarrow i = 1$, mikä on selvä ristiriita.

Ongelma voisi olla toisen imaginaarisen luvun j tai \mathbb{R}^3 pisteen samaistuksen määrittelyssä. Voidaan kuitenkin osoittaa, että reaali- ja kahden erillisen imaginaariluvun yhdistelmällä ei kyetä muodostamaan määritelmän 2.11 mukaista sulkeutunutta tulooperaatiota [15, s. 47–49]. Julkaisussa [3, s. 7] osoitetaan elegantilla epäsuoralla todistuksella, että olettamalla tulo ij sulkeutuneeksi päädytään ristiriitaan.

Mikäli kuitenkin lukujoukkoon otetaan mukaan neljäs imaginaariluku, pystytään määrittelemään \mathbb{R}^4 vektoriavaruuteen samaistettava neliulotteinen lukujoukko, joka on sulkeutunut sekä tuloon että osamäärän suhteen. On myös havaittu laajemmin, että 1-, 2- ja 4-lukujoukot ovat ainoita mahdollisia *jakoalgebroita* ja 8-ulotteinen lukujoukko ainoa ei-liitännäinen jakoalgebra [4, s.31–49] [10, s. 381–382] [15, s. 11].

On syytä määritellä mielekäs projektio $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avaruuteen, jotta neliulotteisella kompleksilukujen laajennuksella olisi järkevä tulkinta \mathbb{R}^3 avaruudessa. Projektion määritelmää tullaan hyödyntämään alaluvussa 2.3 \mathbb{R}^3 rotaatioita määriteltäessä. Lisäksi määritelmä on erittäin tärkeä luvussa 3, kun teoriaa varsinaisesti sovelletaan.

Tutkitaan aluksi *homogeenisia* sekä *homogeenioivia* kuvauksia, jotka ovat tietokonegrafii-kan näkökulmasta erittäin hyödyllisiä ja laajasti käytettyjä [1, s. 57–58] [7, s. 21–26] [14, s. 130–132] [15, s. 74].

Määritelmä 2.12. Kuvaus $R : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $R(\mathbf{v}) = \left\langle \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \frac{v_4}{v_1} \right\rangle$ on määritelty kaikilla $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \in \mathbb{R}^4$, $v_1 \neq 0$. Kuvausta R kutsutaan *homogeeniseksi projisoinniksi* [14, s. 253].

On syytä huomata, että määritelmän 2.12 jakavan komponentin valinta ei ole tyypillinen, vaan tietokonegrafiikassa yleensä valitaan neljäs komponentti v_4 homogeenian projisoinnin jakajaksi. Kuvauksen R määrittelyssä voidaan yhtäpitävästi valita mikä tahansa \mathbb{R}^4 vektorin komponentti muiden komponenttien jakajaksi vaikuttamatta oleellisesti kuvauksen ominaisuuksiin. Valinta on kuitenkin tehty yhdenmukaisuuden takia, mikä tullaan näkemään alaluvussa 2.3 kvaternioiden kuvauksia määriteltäessä.

Seuraus 2.13. $R(\alpha \mathbf{v}) = R(\mathbf{v})$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, eli R on invariantti alkion skaalauksen suhteen.

Todistus. Olkoon $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \in \mathbb{R}^4$, $v_1 \neq 0$ ja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} R(\alpha \mathbf{v}) &= R(\alpha \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle) = R(\langle \alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3, \alpha v_4 \rangle) = \left\langle \frac{\alpha v_2}{\alpha v_1}, \frac{\alpha v_3}{\alpha v_1}, \frac{\alpha v_4}{\alpha v_1} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \frac{v_4}{v_1} \right\rangle = R(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

□

Määritelmä 2.14. Kuvaus $\hat{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\hat{R}(\mathbf{u}) = \langle 1, u_1, u_2, u_3 \rangle$ on pisteen tai vektorin \mathbf{u} kuvaus homogeeniseen koordinaatistoon.

Seuraus 2.15. *Homogeenia projektio R on kuvauksen \hat{R} käänteiskuvaus.*

Todistus. Olkoon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Nyt

$$R(\hat{R}(\mathbf{u})) = R(\langle 1, u_1, u_2, u_3 \rangle) \stackrel{2.12}{=} \left\langle \frac{u_1}{1}, \frac{u_2}{1}, \frac{u_3}{1} \right\rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \mathbf{u}$$

□

Käänteinen ei välttämättä ole totta eli \hat{R} ei kaikille alkioille ole kuvauksen R käänteiskuvaus. Tarkemmin sanottuna se on totta vain kun $v_1 = 1$.

Homogeenian kuvauksen tarkoitus on linearisoida *translaatio*-, rotaatio- ja skaalausoperaatiot yhdeksi lineaariseksi matriisiksi ja pistevektorin tuloksi [11, s. 341–345] [15, s. 73–84]. Homogeenisten kuvausten lisäksi tarvitsemme tulevien kvaternioiden ominaisuuksiin paremmin soveltuvan kuvauksen, joka määritellään alaluvussa 2.3.

2.3 Kvaternioiden määrittely

Kvaternioiden mielekäs määrittely ei ole täysin triviaalia. Alaluvun 2.2 pohdinnan perusteella yritettiin saada käsitys siitä, minkälainen lukujoukko havaittujen ominaisuuksien perusteella voitaisiin määrittellä. Alaluvussa huomattiin, että kvaternioiden mielekäs samaistaminen kolmiulotteisen avaruuden pisteeksi ja kvaternioiden hyödyntäminen kolmiulotteisen pisteen rotaatioissa nojautuu vahvasti *epäkommutatiivisuuteen* eli eivaihdannaisuuteen. Tämän ominaisuuden (tai tarkemmin ominaisuuden puutteen) havaittiin olevan totta rotaatioille kolmessa ulottuvuudessa. Voidaankin täten tehdä valistunut arvaus: kvaterniot eivät ole vaihdannaisia tulon suhteen.

Vaikka kvaterniot voitaisiin määrittellä suoraan sen perusteella, mitä ominaisuuksia niiltä toivotaan, on tavanomaisempaa ja selkeämpää määrittellä kvaternioiden joukko \mathbb{H} samaan tapaan kuin kompleksiluvutkin. Määrittely aloitetaan siis notaatiosta, peruskvaternioista ja peruskvaternioiden välisistä suhteista, kuten on tyypillistä kvaternioita käsittelevässä kirjallisuudessa [3] [8] [10] [11] [12] [15].

Määritelmä 2.16. Luku q kuuluu kvaternioiden joukkoon eli $q \in \mathbb{H}$, jos

$$q = a + bi + cj + dk \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (2.16.1)$$

jossa i, j ja k ovat peruskvaternioita, ja peruskvaternioiden tulo on määritelty siten, että

\cdot	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

$$ijk = -1. \quad (2.16.2)$$

Yhtälö (2.16.2) on osittain redundantti, koska osa peruskvaternioiden tulotaulukosta voidaan johtaa sen alitaulukosta. Määritelmässä 2.16 on kuitenkin pyritty selkeyteen ja kattavuuteen kompaktiuden ja minimalismin kustannuksella. Lisäksi määritelmästä 2.16 nähdään asettamalla $b = c = d = 0$ tai $c = d = 0$, että $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Määritelmä 2.17. Olkoon $q_n \in \mathbb{H}$, $n \in \mathbb{N}$. Merkitään

$$q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k, \quad (2.17.1)$$

jossa $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$. Kvaternioiden summa ja tulo ovat

$$\text{(summa)} \quad q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \quad (2.17.2)$$

$$\begin{aligned} \text{(tulo)} \quad q_1 q_2 = & (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ & + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k \end{aligned} \quad (2.17.3)$$

Huomautus. Yhtälöiden (2.16.1) ja (2.17.1) notaatiota käytetään tämän kappaleen määritelmässä ja todistuksissa niihin erikseen viittaamatta.

Ei ole itsestään selvää, miksi yhtälö (2.17.3) on mielekäs määritelmä kvaternioiden tulolle. Perustelu määritelmälle selviää myöhemmin määritelmästä johdettujen tulosten myötä, mutta tässä vaiheessa määritelmä tyydytään hyväksymään sellaisenaan.

Voidaan kuitenkin todeta, että kvaternioiden summan ja tulon määrittelemisen sijaan voitaisiin määritellä joukko \mathbb{H} varustettuna *binäärioperaattoreilla* $+$ ja \cdot kunnaksi. Kunnan määritelmästä seuraisi yhtäläillä määritelmän (2.17.3) mukaiset laskusäännöt. Tämän ja rotaatio-ominaisuuksien toteuttamisen kannalta on mielekkäämpää ensin kiinnittää peruslaskusäännöt ja sitten osoittaa kvaternioiden joukko kunnaksi.

Kirjallisuudessa on edustettuina sekä laskusäännöistä [12] että algebrallisista ominaisuuksista [4] lähteviä määritelmiä kvaternioille. Julkaisussa [3, s. 9–10] hyödynnetään epäsuorasti osittelulakia ja summan vaihdannaisuutta kvaternioiden summan ja tulon johtamiseksi. Hamilton määritteli alunperin kvaterniot teoksessaan *Elements of Quaternions* lähtien peruskvaternioiden laskusäännöistä, ja yhdistämällä vektoreiden ja kvaternioiden ominaisuudet tulon ja summan laskusäännöillä hän osoitti osittelulain ja liitännäisyyden kvaternioille [9].

Tullaan näkemään, että määritelmistä 2.16 ja 2.17 seuraa huolellisella menettelyllä haluttu kvaternioiden rotaatio-ominaisuus. Tulevan rotaatio-ominaisuuden sekä muiden kvaternioiden ominaisuuksien osoittamisen helpottamiseksi voidaan kvaterniot esittää skalaarin ja vektorin *järjestettynä parina*. Tätä lähestymistä on hyödynnetty laaja-alaisesti kvaterniokirjallisuudessa [3] [11] [12].

Määritelmä 2.18. Olkoon kuvaus $Q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ määritelty siten, että kaikille $q \in \mathbb{H}$

$$Q(q) = (a, \langle b, c, d \rangle),$$

ja voidaan merkitä skalaariosaa $a := s$ ja vektoriosaa $\langle b, c, d \rangle := v$.

Kuvaus Q on selvästi *bijektiivinen* ja täten sille on olemassa käänteiskuvaus.

Seuraus 2.19. Olkoon kuvaus $\hat{Q} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$ määritelty siten, että kaikille $s \in \mathbb{R}$ ja $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$

$$\hat{Q}(s, v) = s + v_1 i + v_2 j + v_3 k.$$

Kuvaus \hat{Q} on käänteiskuvaus kuvaukselle Q , ja merkitään $\hat{Q} := Q^{-1}$.

Todistus. Olkoon mielivaltaiset $q \in \mathbb{H}$, $s \in \mathbb{R}$ ja $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$. Nyt

$$\hat{Q}(Q(q)) \stackrel{2.18}{=} \hat{Q}(a, \langle b, c, d \rangle) \stackrel{2.19}{=} a + bi + cj + dk = q$$

ja

$$Q(\hat{Q}(s, v)) \stackrel{2.19}{=} Q(s + v_1 i + v_2 j + v_3 k) \stackrel{2.18}{=} (s, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle) = (s, v).$$

□

Voidaan epäformaalisti todeta, että kuvaukset Q ja Q^{-1} samaistavat kvaternion sekä skalaarin ja vektorin muodostaman järjestetyn parin. Koska kummatkin kuvaukset ovat bijektiivisiä, kvaternioista on yksi yhteen kuvaus skalaarin ja \mathbb{R}^3 vektorin muodostamaan järjestettyyn pariin. Täten tulokset, jotka voidaan osoittaa kvaternioille, voidaan osoittaa myös järjestetyille parille ja päin vastoin. Otetaan tästä eteenpäin käyttöön *indentiteetti* $q \equiv (s, \mathbf{v})$ mukaillen lähteitä [3, s. 9] [15, s. 52–54]. Formaalisti

$$q \equiv (s, \mathbf{v}) \Leftrightarrow Q(q) = (s, \mathbf{v}) \wedge Q^{-1}(s, \mathbf{v}) = q,$$

jossa $s = a$ ja $\mathbf{v} = \langle b, c, d \rangle$. Tätä formalismia käytetään vain lauseen 2.20 todistuksessa, minkä jälkeen samaistus hyväksytään sellaisenaan.

Lause 2.20. *Olkoon $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{v}_1 = \langle v_{11}, v_{12}, v_{13} \rangle$, $\mathbf{v}_2 = \langle v_{21}, v_{22}, v_{23} \rangle \in \mathbb{R}^3$ siten, että $q_1 = s_1 + v_{11}i + v_{12}j + v_{13}k$ ja $q_2 = s_2 + v_{21}i + v_{22}j + v_{23}k$. Nyt*

$$q_1 + q_2 \equiv (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \tag{2.20.1}$$

$$q_1 q_2 \equiv (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2), \tag{2.20.2}$$

jossa \cdot on pistetulo ja \times ristitulo.

Todistus. Summalle pätee

$$\begin{aligned} Q(q_1 + q_2) &\stackrel{(2.17.2)}{=} Q((s_1 + s_2) + (v_{11} + v_{21})i + (v_{12} + v_{22})j + (v_{13} + v_{23})k) \\ &\stackrel{2.18}{=} (s_1 + s_2, \langle v_{11} + v_{21}, v_{12} + v_{22}, v_{13} + v_{23} \rangle) \\ &= (s_1 + s_2, \langle v_{11}, v_{12}, v_{13} \rangle + \langle v_{21}, v_{22}, v_{23} \rangle) = (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

ja täten myös

$$Q^{-1}(s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = Q^{-1}(Q(q_1 + q_2)) \stackrel{2.19}{=} q_1 + q_2.$$

Samoin tulolle pätee

$$\begin{aligned}
Q(q_1 q_2) &\stackrel{(2.17.3)}{=} Q((s_1 s_2 - v_{11} v_{21} - v_{12} v_{22} - v_{13} v_{23}) + (s_1 v_{21} + v_{11} s_2 + v_{12} v_{23} - v_{13} v_{22})i \\
&\quad + (s_1 v_{22} - v_{11} v_{23} + v_{12} s_2 + v_{13} v_{21})j + (s_1 v_{23} + v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21} + v_{13} s_2)k) \\
&\stackrel{2.18}{=} (s_1 s_2 - v_{11} v_{21} - v_{12} v_{22} - v_{13} v_{23}, \\
&\quad \langle s_1 v_{21} + v_{11} s_2 + v_{12} v_{23} - v_{13} v_{22}, \\
&\quad s_1 v_{22} - v_{11} v_{23} + v_{12} s_2 + v_{13} v_{21}, \\
&\quad s_1 v_{23} + v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21} + v_{13} s_2 \rangle) \\
&= (s_1 s_2 - (v_{11} v_{21} + v_{12} v_{22} + v_{13} v_{23}), \\
&\quad \langle s_1 v_{21}, s_1 v_{22}, s_1 v_{23} \rangle + \langle v_{11} s_2, v_{12} s_2, v_{13} s_2 \rangle \\
&\quad + \langle v_{12} v_{23} - v_{13} v_{22}, -v_{11} v_{23} + v_{13} v_{21}, v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21} \rangle) \\
&= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \\
&\quad s_1 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 s_2 + \langle v_{12} v_{23} - v_{13} v_{22}, v_{13} v_{21} - v_{11} v_{23}, v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21} \rangle) \\
&= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)
\end{aligned}$$

ja täten

$$Q^{-1}(s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = Q^{-1}(Q(q_1 q_2)) \stackrel{2.19}{=} q_1 q_2.$$

□

Kvaternioiden esittäminen skalaari-vektori-parina antaa sopivat työkalut jakoalgebrallisten ominaisuuksien todistamiseen. Lauseen 2.20 todistuksen avulla voidaan vakuuttua, että todistamalla jokin ominaisuus skalaari-vektori-pareille vastaava tulos pätee myös kvaternioille.

Lause 2.21. Olkoon $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$. Seuraavat yhtälöt pätevät:

$$\begin{aligned}
(\text{liitännäisyys}) \quad & (q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3) \\
& (q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3)
\end{aligned} \tag{2.21.1}$$

$$(\text{vaihdannaisuus}) \quad q_1 + q_2 = q_2 + q_1 \tag{2.21.2}$$

$$\begin{aligned}
(\text{osittelulaki}) \quad & q_1 (q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3 \\
& (q_2 + q_3) q_1 = q_2 q_1 + q_3 q_1.
\end{aligned} \tag{2.21.3}$$

Todistus. Summan liitännäisyys ja vaihdannaisuus seuraavat suoraan reaalityyppien ja reaalisten vektoreiden summan liitännäisyydestä ja vaihdannaisuudesta:

$$\begin{aligned}
(q_1 + q_2) + q_3 &\stackrel{(2.20.1)}{\equiv} (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + q_3 \stackrel{(2.20.1)}{\equiv} ((s_1 + s_2) + s_3, (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3) \\
&= (s_1 + (s_2 + s_3), \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)) \stackrel{(2.20.1)}{\equiv} q_1 + (q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

ja

$$q_1 + q_2 \stackrel{(2.20.1)}{\equiv} (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (s_2 + s_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \stackrel{(2.20.1)}{\equiv} q_2 + q_1.$$

Tulon liitännäisyyden sekä osittelulain todistamiseen tarvitaan lisäksi \mathbb{R}^3 vektoreiden piste- ja ristitulon ominaisuuksia, erityisesti vektoreiden *kolmoistuloa*:

$$\begin{aligned}
(q_1 q_2) q_3 &\stackrel{(2.20.2)}{\equiv} (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) q_3 \\
&\stackrel{(2.20.2)}{\equiv} ((s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) s_3 - (s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3, \\
&\quad (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 + s_3 (s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \\
&\quad + (s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3) \\
&= ((s_1 s_2) s_3 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) s_3 - (s_1 \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 - (s_2 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_3 - \overbrace{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3}^{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}, \\
&\quad (s_1 s_2 \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 + s_3 (s_1 \mathbf{v}_2) + s_3 (s_2 \mathbf{v}_1) + s_3 (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \\
&\quad + (s_1 \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 + (s_2 \mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_3 + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3) \\
&= (s_1 (s_2 s_3) - s_1 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_1 \cdot (s_2 \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_1 \cdot (s_3 \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3), \\
&\quad s_1 (s_2 \mathbf{v}_3) + s_1 (s_3 \mathbf{v}_2) + s_1 (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) + (s_2 s_3) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times (s_2 \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_1 \times (s_3 \mathbf{v}_2) \\
&\quad - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 + \underbrace{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3}_{\substack{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1 \\ -(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}}) \\
&= (s_1 (s_2 s_3) - s_1 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_1 \cdot (s_2 \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_1 \cdot (s_3 \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3), \\
&\quad s_1 (s_2 \mathbf{v}_3) + s_1 (s_3 \mathbf{v}_2) + s_1 (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) + (s_2 s_3) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times (s_2 \mathbf{v}_3) \\
&\quad + \mathbf{v}_1 \times (s_3 \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \\
&= (s_1 (s_2 s_3 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_1 \cdot (s_2 \mathbf{v}_3 + s_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3), \\
&\quad s_1 (s_2 \mathbf{v}_3 + s_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) + (s_2 s_3 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1 \\
&\quad + \mathbf{v}_1 \times (s_2 \mathbf{v}_3 + s_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)) \\
&\stackrel{(2.20.2)}{\equiv} q_1 (s_2 s_3 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3, s_2 \mathbf{v}_3 + s_3 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \\
&\stackrel{(2.20.2)}{\equiv} q_1 (q_2 q_3)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
q_1(q_2 + q_3) &\stackrel{(2.20.1)}{\equiv} q_1(s_2 + s_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \\
&\stackrel{(2.20.2)}{\equiv} (s_1(s_2 + s_3) - \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3), \\
&\quad s_1(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + (s_2 + s_3)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)) \\
&= (s_1s_2 + s_1s_3 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3, \\
&\quad s_1\mathbf{v}_2 + s_1\mathbf{v}_3 + s_2\mathbf{v}_1 + s_3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3) \\
&= ((s_1s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + (s_1s_3 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3), \\
&\quad (s_1\mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) + (s_1\mathbf{v}_3 + s_3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)) \\
&= (s_1s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1\mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \\
&\quad + (s_1s_3 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3, s_1\mathbf{v}_3 + s_3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3) \\
&\stackrel{(2.20.2)}{\equiv} q_1q_2 + q_1q_3.
\end{aligned}$$

Oikeanpuoleisen osittelulain todistus on symmetrinen. □

Kvaternioiden ominaisuuksien todistamisen helpottamiseksi on syytä määritellä kvaternion konjugaatti.

Määritelmä 2.22. Olkoon $q \in \mathbb{H}$. Kvaternion q konjugaatti on

$$q^* = a - bi - cj - dk \equiv (s, -\mathbf{v}).$$

Asettamalla $c = d = 0$ nähdään, että määritelmä 2.22 on yhdenmukainen kompleksilukujen konjugaatin määritelmän 2.3 kanssa. Konjugaatin määritelmällä on tärkeä seuraus:

Lause 2.23. Olkoon $q \in \mathbb{H}$. On olemassa $\hat{q} = \frac{q^*}{\|q\|} \in \mathbb{H}$ siten, että

$$q\hat{q} = \hat{q}q = 1$$

eli \hat{q} on kvaternion q käänteiskvaternio, ja merkitään $\hat{q} := q^{-1}$.

Todistus. Selvästi $\hat{q} \in \mathbb{H}$ ja

$$\begin{aligned}
q\hat{q} &= q \frac{q^*}{\|q\|} = \frac{1}{\|q\|} qq^* \equiv \frac{1}{\|q\|} (ss - \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{v}), s\mathbf{v} + s(-\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (-\mathbf{v})) \\
&= \frac{1}{\|q\|} (s^2 + \|\mathbf{v}\|^2, s\mathbf{v} - s\mathbf{v}) = \frac{1}{\|q\|} (s^2 + \|\mathbf{v}\|^2, 0) \equiv \frac{1}{\|q\|} \|q\| = 1.
\end{aligned}$$

Todistus vasemmalle käänteiskvaterniolle on symmetrinen. □

Kvaternioiden laskusäännöt noudattelevat vahvasti kompleksilukujen vastaavia laskusääntöjä. Alaluvussa 2.2 esitettyjen perustelujen myötä osoitettiin, että tulon vaihdannaisuus ei kvaternioilla toteudu; itseasiassa *puhtaat* kvaterniot ovat *antikommutatiivisia*. Varsinaisten rotaatioiden määrittämiseksi on rajoituttava *yksikkökvaternioiden* joukkoon.

Määritelmä 2.24. Olkoon $q \in \mathbb{H}$. Jos $\|q\| = 1$, sanotaan että q on yksikkökvaternio.

Lisäksi tarvitaan avuksi *käänteiskvaternion* käsite.

Määritelmä 2.25. Olkoon $p, q \in \mathbb{H}$. Jos $pq = 1$, niin p on kvaternion q käänteiskvaternio, ja voidaan merkitä $p = q^{-1}$.

Määritelmä 2.25 on analoginen algebran käänteisalkion määritelmän kanssa, ja yhdistämälle se määritelmän 2.24 kanssa saadan lopulta määritettyä pisteen rotaatio \mathbb{R}^3 avaruudessa.

Määritelmä 2.26. Olkoon $p = (0, \mathbf{v}_p) \in \mathbb{H}$ piste ja $q = (\cos \alpha, \sin \alpha \mathbf{v}) \in \mathbb{H}$ yksikkökvaternio, jolle on olemassa $q^{-1} \in \mathbb{H}$. Funktio $r : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, r(p, q) = qpq^{-1}$ on pisteen \mathbf{v}_p rotaatio myötäpäivään θ asteen verran vektorin \mathbf{v} ympäri.

3 ROTAATIOT TIETOKONEGRAFIKASSA

Tietokonegrafiikan perustavanlaatuisen tekninen kysymys on, miten kuvata kolmiulotteisen virtuaalimaailman kappaleet kaksiulotteisella näytöllä. Vastaavan kysymyksen asettivat *camera obscura* -ilmiötä tutkineet tutkijat, jotka havaitsivat, että valo muodosti oikean *perspektiiviprojektion* mukaisen kuvan maailmasta kohtisuoralle kankaalle kulkiesaan pienen reiän läpi. Siinä missä oikea maailma projisoituu pienen aukon läpi kankaalle valon ominaisuuksien ansiosta, tietokonegrafiikan virtuaalimaailman perspektiiviprojektio näytölle täytyy mallintaa tietokoneohjelman avulla. Tätä mallintamisprosessia kutsutaan tietokonegrafiikan alalla *renderoinniksi*. [1] [7]

Tietokonegrafiikan alkuaikoina prosessoreiden laskentatehon rajallisuus oli ongelma monimutkaisten kolmiulotteisten *mallien* renderoinnissa. Renderointi suoritettiin keskusprosessointiyksiköllä eli *CPU*:lla, mikä oli hidasta. Tämä johtuu siitä, että *CPU* on pohjimmiltaan *sarjallinen* prosessointiyksikkö. Hyvin pian havaittiin, että renderoinnissa suoritettiin monia keskenään riippumattomia ja lähes identtisiä operaatioita erilaisille *renderointiprimitiiveille*. Tämä havainto laukaisi kehityksen grafiikkarenderointiin erikoistuneille prosessointiyksiköille 1980- ja 1990-luvun vaihteessa. Tällaiset prosessorit tunnetaan nykypäivänä näytönohjaimina eli *GPU*:ina. [1] [7]

GPU:t ovat erikoistuneet *rinnakkaiseen* laskentaan. Jotta *GPU*:ta voidaan hyödyntää tehokkaasti renderoinnissa, täytyy renderointi jakaa toisistaan riippumattomiin osakokonaisuuksiin, jotka voidaan suorittaa rinnakkain. Jaottelu voidaan tehdä ainakin kahdella tavalla: tutkitaan jokaisen renderointiprimitiivin projektion näkyvyyttä näytöllä tai tutkitaan jokaisen näytön *pikselin* läpi kulkevan *kamerasäteen* leikkauskohtia virtuaalimaailman kanssa. Nämä kaksi renderointitekniikkaa tunnetaan *rasterointina* ja *säteenjäljityksenä* [1] [7].

Ennen kuin varsinaista renderointia voidaan suorittaa, täytyy virtuaalimaailman kappaleiden sekä virtuaalisen kameran ja näytön koordinaatit yhdenmukaistaa. Tämä koordinaatiston muutos vastaa osittain projisointia, jota tutkittiin alaluvussa 2.2. Koordinaatistojen yhdenmukaistus koostuu *translaatiosta* eli siirtymästä ja rotaatiosta sekä *perspektiiviprojektioista*, joka ei ole lineaarinen muunnos. Vaikka perspektiiviprojektio ja muut epälineaariset muunnokset ovat tietokonegrafiikan kannalta mielenkiintoisia ja tärkeitä, jätetään niiden tarkastelu tämän opinnäytetyön ulkopuolelle.

3.1 Eulerin kulmat

Leonhard Euler pohti rotaatioiden ongelmaa kolmessa ulottuvuudessa [3, s. 5–6] [15, s. 90]. Haastavaksi rotaatio-operaation tekee sen vaihdannaisuuden puuttuminen, mikä johtaa ongelmiin rotaatioiden intuitiivisen määrittelyn kannalta. Euler formuloi ongelman intuitiivisesti kolmen eri kulman määrittämäksi asennoksi [15, s. 73–74]. Nämä kolme kulmaa kuvaavat kolmiulotteisen kappaleen rotaation suhteessa kappaleen oman koordinaatiston jokaiseen akseliin.

Eulerin kolmea kulmaa merkitään kirjallisuudessa yleensä symboleilla ϕ , θ ja ψ , jotka vastaavat löyhästi pyörähdyksiä x -, y - ja z -akselien ympäri [7, s. 17–19]. Löyhä vastaus viittaa siihen seikkaan, että rotaatiot pyörittävät myös kappaleen sisäistä koordinaatistoa, joten alkuperäinen pyörähdysakseli ei välttämättä viittaa enää samaan jo pyörähtäneeseen akseliin. On myös syytä huomata, että akselien asettaminen on yleensä sopimuskysymys ja standardoidut koordinaattijärjestelmät eri aloilla käyttävät erilaisia käytäntöjä [12].

Gimbal lock -ilmiön historia liittyy lento- ja merialusten orientaatiojärjestelmiin. Koska näkyvyysolosuhteet eivät aina mahdollistaneet aluksen orientaation päättelyä maamerkkien tai taivaan kiintopisteiden avulla ja magneettikentän vaihtelut ajallisesti ja paikallisesti eivät olleet tarkkaan tiedossa, tarvittiin jokin laite, joka mittaisi aluksen orientaatiota suhteessa sen omaan sisäiseen koordinaatistoon. Tähän tehtävään kehitettiin *gimbaali*. [10, s. 19–30, 133–136]

Gimbaali on kappaleen vapaaseen pyörimiseen suunniteltu laite. Gimbaalissa on yleensä kolme akselillista sormusta, jotka mahdollistavat kappaleen pyörähdyksen kolmella pääakselilla. Sormukset on aseteltu sisäkkäin, eli uloimman sormuksen pyörittäminen pyörittää myös kahta sisintä sormusta ja keskimmäisen sormuksen pyörittäminen pyörittää vastaavasti sisintä sormusta. [3, s. 28–29]

Kolmiakselinen gimbaali ei kuitenkaan ole täysin luotettava mittalaite. Tilanne on ongelmallinen, jos gimbaalin keskimmäinen sormus pyörähtää siten, että uloimman ja sisimmän sormuksen pyörähdysakselit asettuvat samansuuntaisiksi. Jos kappale gimbaalin sisällä kääntyy akselilla, joka on kohtisuorassa keskimmäisen ja ulomman sormuksen akselien kanssa, ei gimbaalin tila muutu ollenkaan. Tätä kutsutaan gimbal lock -ilmiöksi. Gimbaalin vapausaste on vähentynyt, ja sen kyky ilmaista orientaatiota yhden akselinsa suhteen on kadonnut. [10, s. 133–136] [14, s. 424]

Valitettavasti kyseinen ongelma ei rajoitu pelkästään todellisen maailman gimbaaliin. Tietokonegrafiikan rotaatioita ohjelmoitaessa täytyy tehdä samanlainen pyörimisakselien hierarkkinen järjestäminen, mikäli pyörähdyksiä kuvataan Eulerin kulmilla. Määritellään pyörähdysakselit missä tahansa järjestyksessä, keskimmäisen akselin pyörähdys vapausasteita degeneroivaan asentoon aiheuttaa ei-deterministisen toiminnallisuuden ohjelmas- sa. [15, s.73] Tälle ongelmalle on kuitenkin ratkaisu sekä kvaternioiden että osittain matriisimuunnosten piirissä.

	Eulerin kulmat				Rotaatioakseli			
	summa	tulo	jako	trig.	summa	tulo	jako	trig.
Rotaatiomatriisi	10	25	0	6	16	30	0	2
Kvaternio	25	42	0	6	21	31	0	2

Taulukko 3.1. Yhden pisteen yksittäisen rotaation liukulukuoperaatioiden määrät MATLAB-toteutuksessa eri menetelmillä riippuvat rotaation esitysmuodosta.

3.2 Matriisimuunnokset

Gimbal lock -ilmiön välttämiseksi tai lievittämiseksi voidaan Eulerin kulmia yrittää kuvata matriisien avulla. Määritellään aluksi millainen matriisioperaatio ylipäätään operoi kolmiulotteisen pisteen tai vektorin kanssa siten, että tuloksena on edelleen piste tai vektori kolmiulotteisessa avaruudessa. Käytetään määrittelyn apuna määritelmän 2.12 homogeenivaa kuvausta R ja seurauksen 2.12 kuvausta \hat{R} homogeeniseen koordinaatistoon. Samaistetaan piste u kolmiulotteisessa avaruudessa homogeenisen koordinaatiston vektoriin $\hat{u} = \hat{R}(u) = \langle 1, u \rangle$.

Määritelmä 3.1. Olkoon $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ja $u \in \mathbb{R}^3$. Matriisia M kutsutaan *muunnosmatriisiksi*, jos $R(M\hat{R}(u)) = R(M\hat{u})$ on hyvin määritelty.

Rotaatiomatriisit ovat muunnosmatriisien alijoukko. Rotaatiomatriiseihin kuuluvat sellaiset muunnosmatriisit, jotka pyörittävät pistettä joidenkin akseleiden suhteen tietyn määrän. Rotaatiomatriisit eivät muuta pisteen etäisyyttä muihin pisteisiin, joita on operoitu vastaavalla matriisilla. Ne eivät myöskään muuta pisteiden etäisyyttä suhteessa rotaatiomatriisin pyörimisakseliin nähden.

Skaalausmatriisit sen sijaan muuttavat pisteitten välistä etäisyyttä jonkin skalaarikertoimen verran. Translaatiomatriisi muuttaa myös pisteiden paikkaa virtuaalimaailmassa origon suhteen.

3.3 Rotaatiot kvaternioilla

Luvussa 2 tutkittiin kvaternioita niiden matemaattisten ominaisuuksien kautta. Kvaternioiden avulla määriteltiin rotaatio-operaatio pisteelle, jonka osoitettiin vastaavan pisteen pyörähdystä jonkin akselin ympäri. Intuitiivinen ajatus kappaleen rotaatiosta onnistuttiin siis samaistamaan johonkin hyvin määriteltyyn kvaternioiden ja pisteiden väliseen operaatioon. Tarkastellaan, mitä hyötyjä tällaisesta rotaation määrittelystä on tietokonegraafikan näkökulmasta.

Eulerin kulmien Gimbal lock -ilmiön lisäksi rotaatiomatriiseilla on haasteita silloin, kun halutaan selvittää kahden rotaation välistä välitilaa. Rotaatiomatriiseilla operointi ei luontaisesti ota kantaa siihen, miten pisteen rotaation alkutilasta päästään sen lopputilaan. Lisäksi rotaatiomatriisien yhdistäminen kahdeksi samaan aikaan tapahtuvaksi rotaatiok-

si ei onnistu, vaan rotaatiot on suoritettava täysin loppuun ennen seuraavan rotaation tekemistä.

Lineaarinen interpolointi rotaatiomatriisien avulla ei tuota suoraan kahden rotaation välistä ennakoitavaa välirotaatiota. Tuloksena on yleensä jotain epäintuitiivista, ja oikeanlaisen interpoloinnin saavuttamiseksi rotaatiomatriisioperaatioita joudutaan tekemään asteittain vuorotellen.

Kvaternioilla kyseinen ennakoitava ja intuitiivinen kahden rotaation välinen interpolointi onnistuu luonnostaan. Interpolointiyhtälö on samaa muotoa skalaareilla tai vektoreilla suoritettavan interpolointiyhtälön kanssa, joten interpoloinnin voimakkuuden säätäminen on hyvin suoraviivaista. On myös mahdollista asettaa kvaternioiden interpolointiyhtälöön ei-lineaaraisia termejä, jolloin rotaatioista voidaan rakentaa monimutkaisempia kappaleiden pyörähdyksiä, kuten liikkuvaa kappaletta seuraavia kamera-ajoja.

3.4 Rotaatiomenetelmien vertailu

Testipeti rotaatiomenetelmien vertailuun toteutettiin *MATLAB*-ohjelmistolla. Tarkoituksena oli vertailla rotaatiomatriisien ja kvaternioiden ominaisuuksia tietokonegrafiikan näkökulmasta. Erityisen mielenkiinnon kohteeksi muodostuivat molempien menetelmien rotaatioiden esitystavat, toteutuksen laskennallinen kuormitus sekä muistin käyttö rotaatioita tallennettaessa.

Testipedissä rotaatiomatriisi rakennettiin $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -matriisien avulla. Kirjallisuudessa rotaatiomatriisit on rakennettu Eulerin kulmista ja vastaavaa muotoa hyödynnettiin tässä toteutuksessa. Piste pyörähtää kolmen Eulerin kulman ympäri astelukujen ϕ , θ ja ψ verran seuraavien matriisien avulla:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rotaatiomatriisit yhdistetään yhteen kompaktiin rotaatiomatriisiin kertomalla ne keskenään, mistä saadaan $R = R_z R_y R_x$. Matriisi R on myös $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ matriisi joten sen tallentaminen muistiin vie 9 liukulukumuistipaikkaa, mikä näkyy taulukosta 3.2. Lopuksi jokainen piste $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ kerrotaan vasemmalta matriisilla R , ja tällöin saadaan pyöritetty piste $\hat{\mathbf{p}} = R\mathbf{p}$. Kun otetaan huomioon kaikki operaatiot, lukuunottamatta nollalla ja ykkösellä kertomista sekä nollalla summaamista, saadaan rotaatiomatriisille taulukon 3.1 mukaiset operaatiomäärät Eulerin kulmia hyödyntämällä.

Esitysmuoto	Muistipaikat
Eulerin kulmat	3
Rotaatioakseli	4
Rotaatiomatriisi	9
Kvaternio	4

Taulukko 3.2. Tarvittavat liukulukumuistipaikkojen määrät rotaatioiden eri esitysmuodoille.

MATLAB-toteutuksessa kvaterniorotaatio noudatteli täsmällisesti määritelmää 2.26. Pisteeseen $v_p \in \mathbb{R}^3$ rotaatio vektorin $v \in \mathbb{R}^3$ ympäri myötäpäivään asteluvun $\alpha \in \mathbb{R}$ saadaan funktiolla $r(p, q) = qpq^{-1}$, jossa $p = (0, v_p) \in \mathbb{H}$ ja $q = (\cos \alpha, \sin \alpha v) \in \mathbb{H}$. Funktion r tulokseksi saadaan kvaternio, jonka vektoriosa on uusi pyöritetty piste. Toteutuksesta nähdään, että kvaterniot vaativat vain neljä muistipaikkaa. Lisäksi summa- ja tulo-operaatioita kertyy kvaternioilla enemmän kuin rotaatiomatriiseilla sekä Eulerin kulmilla että rotaatioakseleilla, mikä näkyy taulukosta 3.1.

Kirjallisuudessa eri menetelmiä on vertailtu myös laskennallisesta näkökulmasta. Lähde [3, s. 27–32] painottaa kvaternioiden hyödyllisyyttä peräkkäisten rotaatioiden kuvaamisessa. Tällöin säästöjä saadaan operaatiomäärissä verrattuna rotaatiomatriiseihin [12, s. 143]. Lähde [3] huomauttaa, että kvaterniot eivät aina ole paras ratkaisu, koska yksittäisten rotaatioiden kohdalla operaatiomäärät ovat korkeampia kvaternioilla laskettaessa. Interpolointi ominaisuuksista ollaan kuitenkin kirjallisuudessa yhtä mieltä sikäli, että rotaatiomatriiseilla niiden toteutus on erittäin hankalaa verrattuna kvaternioihin [3] [10] [15].

4 YHTEENVETO

Rotaatioiden eli kappaleiden ja pistejoukkojen pyörähdyksien mallintaminen on haastava ongelma sekä matematiikan että tekniikan sovellusten näkökulmasta. Rotaatiot eivät ole vaihdannaisia operaatioita eli pyörähdysten järjestyksellä on väliä, mikä asettaa vaatimuksia mallintamiselle. Tietokonegrafiikassa rotaatioiden epävaihdannaisuus johtaa pyörähdysakseleiden hierarkiseen järjestämiseen, mikä avaa uuden ongelma-alueen pyörähdysakselien redusoitumisen eli gimbal lock -ilmiön kanssa. Haasteita voidaan lievittää valitsemalla pyörähdysakselien järjestys järkevästi tai kuvaamalla pyörähdyksiä rotaatiomatriisien avulla. Matriisit eivät kuitenkaan ratkaise kaikkia rotaatioiden ongelmia, sillä luonteva interpolointi eri pyörähdysten välillä ei onnistu rotaatiomatriisien avulla.

Kvaterniot ovat nelikulotteisia algebrallisia lukuja, joiden avulla voidaan mallintaa rotaatioita kolmiulotteisessa avaruudessa mielekkäästi. Kvaternioiden laaja-alainen hyödyntäminen tietokonegrafiikassa on sekä niiden laskennallisen tehokkuuden että interpolointiominaisuuksien ansiota. Tässä opinnäytetyössä pyrittiin valottamaan kvaternioiden monimutkaista, mutta hyödyllistä käyttäytymistä kolmiulotteisessa avaruudessa, mikä mahdollistaa niiden hyödyntämisen monilla eri tekniikan aloilla. Kvaternioiden laskennallista tehokkuutta tutkittiin luvussa 3 kolmiulotteisten kappaleiden rotaatioita varten luodussa testipedissä.

Tämän opinnäytetyön tulosten ja havaintojen sekä kirjallisuuden selvitysten perusteella voidaan todeta, että kvaterniot ovat tehokas tapa mallintaa kappaleiden pyörähdyksiä tietokonegrafiikassa. Kvaternioilla on kuitenkin rajoituksensa, joista oleellisimpana ovat kappaleiden translaatioiden ja monimutkaisempien muunnosten kuvaamisen vajavaisuus. Muiden tietokonegrafiikan tekniikoiden rinnalla kvaterniot ovat siis hyödyllinen työkalu.

LÄHTEET

- [1] T. Akenine-Möller, E. Haines and N. Hoffman. *Real-time rendering*. Englanti. 4th edition. Taylor & Francis Ltd, 2018, 1272 p.
- [2] J. Bak and D. J. Newman. *Complex Analysis*. Englanti. 3rd edition. Springer, 2010, 328 p.
- [3] E. B. Dam, M. Koch and M. Lillholm. *Quaternions, interpolation and animation*. Englanti. 1998. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.30.6788>.
- [4] G. M. Dixon. *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*. Englanti. Vol. 290. Springer, 1994, 236 p.
- [5] E. Freitag and R. Busam. *Complex Analysis*. Englanti. 2nd Edition. Springer, 2009, 532 p.
- [6] J. P. Gilman, I. Kra and R. E. Rodríguez. *Complex Analysis*. Englanti. Springer, 2007, 220 p.
- [7] S. J. Gortler. *Foundations of 3D computer graphics*. Englanti. MIT Press, 2012, 273 p.
- [8] S. Griffin. *Quaternions : theory and applications*. Englanti. Nova Science Publishers, Inc, 2017, 282 p.
- [9] W. R. Hamilton. *Elements of quaternions*. Englanti. Longmans, Green, & Company, 1866.
- [10] A. Hanson. *Visualizing quaternions*. Englanti. Morgan Kaufmann, 2006, 498 p.
- [11] J. B. Kuipers. *Quaternions and rotation sequences : a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. Englanti. Princeton University Press, 1998.
- [12] J. B. Kuipers. Quaternions and rotation sequences. Englanti. *Proceedings of the International Conference on Geometry, Integrability and Quantization 1* (2000), pp. 127–143.
- [13] T. Needham. *Visual complex analysis*. Englanti. Clarendon Press, 1997, 592 p.
- [14] P. Shirley and S. R. Marschner. *Fundamentals of computer graphics*. Englanti. 3rd edition. A K Peters, 2009, 752 p.
- [15] J. Vince. *Quaternions for Computer Graphics*. Englanti. Springer, 2011, 140 p.