TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Joonas Juhani Lahtinen

SUPERANALYYSIÄ HYPERBOLISELLA KONFORMISELLA YKSIKKÖPALLOLLA

Diplomityö

Tarkastaja: dos. Heikki Orelma
Tarkastaja: leht. Janne Kauhanen
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Teknis-luonnontieteellisen
tiedekunnan tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 01.03.2017

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Joonas Juhani Lahtinen: Superanalyysiä hyperbolisella konformisella yksikköpallolla
Diplomityö, 75 sivua
Maaliskuu 2018
Pääaine: matematiikka
Tarkastajat: dosentti Heikki Orelma & lehtori Janne Kauhanen
Avainsanat: Harmoninen funktio, Laplacen operaattori, Clifford-Weylin algebra, Superanalyysi, Superalgebra, Grassmann algebra

Hyperbolinen konforminen yksikköpallo on pallo, jonka säde on yksi ja pallon sisäpisteiden väliset etäisyydet on määritelty riippuvaksi niiden euklidisesta etäisyydestä pallon keskipisteeseen. Tämä avaruus voidaan onnistuneesti yleistää superavaruuksiin – eli Grassmann algebroihin pohjautuviin vektoriavaruuksiin.

Tämän diplomityön tavoitteena on hyperbolisen konformisen yksikkösäteisen pallon geometristen ominaisuuksien tutkiminen ja kyseiseen avaruuteen määriteltyjen tietynlaisten harmonisten superfunktioiden tarkastelu.

Riemannin geometriaa soveltamalla saadaan selville, että hyperbolinen konforminen yksikköpallo on konformisesti laakea. Superanalyysin näkökulmasta saadaan johdettua esitykset Diracin ja Laplacen operaattoreille Clifford-Weylin algebrassa, joka on superavaruuden esitys geometrisena algebrana. Lopuksi johdetaan esitys Laplacen operaattorille hyperboliseen konformiseen yksikköpalloon ja sopivasti valitun yritteen kautta saadaan Laplacen yhtälöä vastaava differentiaaliyhtälöryhmä, jolla ei ole vastinetta vastaavassa reaalianalyysin ongelmassa. Tälle differentiaaliyhtälöryhmälle löydetään ratkaisuita tapauksissa, joissa yhtälöitä on yksi ja kaksi.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Master's Degree Programme in Science and Engineering
Joonas Juhani Lahtinen: Superanalysis on the Hyperbolic Conformal Unit Sphere
Master of Science Thesis, 75 pages
March 2018
Major: Mathematics
Examiners: Docent Heikki Orelma & Lecturer Janne Kauhanen
Keywords: Harmonic function, Laplace's operator, Clifford-Weyl algebra, Superanalysis, Superalgebra, Grassmann algebra

Hyperbolic conformal unit sphere is a sphere of radius 1, and the distance between its inner points depend on their Euclidean distance to the center of the sphere. This space can be successfully adapted to superspaces – the vector spaces based on Grassmann algebras.

The aim of this master's thesis is to investigate the geometrical properties of the hyperbolic conformal unit sphere, and to study a particular type of harmonic superfunctions defined in the corresponding space.

One of the main results of the thesis is the fact that the hyperbolic conformal unit sphere is conformally flat. This is shown by application of Riemannian geometry. From the viewpoint of superanalysis, the representations of the Dirac and Laplace operators are derived in the Clifford-Weyl algebra, which is a geometric algebraic representation of superspace. Finally, the representation of the Laplace operator on the hyperbolic conformal unit sphere is given, and with a suitable ansatz, the Laplace's equation can be expressed as a system of differential equations. This does not have a counterpart in the corresponding problem in real spaces. The solution of the Laplace's equation is found in cases of one and two equations in the Clifford-Weyl algebra.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on kirjoitettu Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitokselle. Työhön liittyvän teorian opiskelu alkoi heinäkuussa 2016 ja monien vaiheiden jälkeen työ saatettiin päätökseen maaliskuun ensimmäisenä päivänä 2018.

Diplomityön aihe on vaatinut valtavasti uuden tiedon opettelua ja kokemusmaailmaani nähden täysin uudenlaisia menettelyitä. Se on haastanut ajattelemaan ja erityisesti kehittänyt lähdekriittisyyttä: työn näkökulma on matemaattisesti erittäin abstrakti, joten lähdekirjallisuuden valitsemiseen on tarvittu erityistä tarkkuutta.

Haluan kiittää ohjaajiani lehtori Janne Kauhasta ja dosentti Heikki Orelmaa työn ohjauksesta, monista keskusteluista ja kärsivällisyydestä. Lisäkiitokset haluan antaa Orelmalle mielenkiintoisesta ja sopivan haastavasta aiheesta, jonka parissa olen saanut oppia paljon. Kiitän myös perhettäni ja läheisiäni avusta ja neuvoista opintojen aikana.

SISÄLLYS

1. JOHDANTO

Superanalyysi on varsin tuore matematiikan osa-alue. Sen perustana olevan superalgebran juuret voidaan jäljittää vuoteen 1959, jolloin brittiläinen fyysikko J. L. Martin ehdotti Hamiltonin systeemien ja Poissonin monistojen algebrojen laajentamista Grassmann algebralla teoksissaan [18] ja [19]. Puolestaan superanalyysin isänä voidaan kiistatta pitää Felix Alexandrovich Bereziniä, joka konstruoi analyysin perustan: differentiaali- ja integraalilaskennan superalgebraan. Berezin julkaisi aktiivisesti supermatematiikkaan liittyen vuodesta 1961 aina kuolinvuoteensa 1980. Berezin tunnetaan parhaiten hänen nimeään kantavasta integraalista, jota käytetään fysiikassa integroitaessa fermionien historioiden yli. Supermatematiikan merkittävänä kehittäjänä mainittakoon vielä Tchavdar Dimitrov Palev, joka tiedettävästi ensimmäisenä esitti Clifford-Weylin algebran ja superalgebran yhteyden vuonna 1993 julkaistussa artikkelissa [22]. Fysiikaalisemmasta näkökulmasta merkittäviksi superavaruuksien tutkijoiksi mainitaan lähteessä [12, s. 7194] Bryce DeWitt ja Alice Rogers, jotka lähestyivät aihetta differentiaaligeometrian keinoin. Varsinaisen "SuperCliffordin analyysin" itseoikeutettu kehittäjä on Frank Sommen, jonka ensimmäinen aiheeseen liittyvä paperi [23] julkaistiin vuonna 2000.

Tässä työssä keskitytään pääosin Clifford-Weylin superalgebraan ja superanalyysiin sen alaisuudessa. Lukijalta ei vaadita esitietoutta käytetyistä algebroista tai muista erityisrakenteista, vaan asiaan syventyminen alkaa yleisistä vektoriavaruuksista ja sen päälle rakennetaan Grassmann- sekä Cliffordin algebrat, joista saadaan superalgebra ja sen päälle rakentuva teoria. Työssä on panostettu loogiseen ja konstruktiiviseen esitysjärjestykseen, jossa uutta tietoa rakennetaan vanhan päälle. Työn päätulokset liittyvät hyperbolisen konformisen yksikköpallon Riemannin geometriaan ja superavaruuden Laplacen yhtälön ratkaisuihin samaisessa yksikköpallossa. Aihealueet ovat sikäli liitoksissa, että hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen operaattori tullaan johtamaan Riemannin geometriaa käyttäen, josta se laajennetaan Clifford-Weylin algebraan.

Vaikka työn aiheeseen liittyy monistojen ja tensorien käsitteet, niin näiden käyttäminen on pyritty pitämään niin vähäisenä kuin mahdollista. Tensorit esitetään yksittäisinä kaavoina matriisi- tai komponenttiesitystä käyttäen ja niihin liitettyjen geometristen ominaisuuksien perustelu jätetään lähdekirjallisuuden ja lukijan harrastuneisuuden varaan. Monistot taas esitetään avaruuksina. Tämä valinta on tehty työn laajuutta silmällä pitäen, mutta se saattaa myös tehdä sisällön omaksumisesta mielekkäämpää.

2. VEKTORIAVARUUDET JA KANNAT

Luvun tarkoitus on rakentaa pohja työssä myöhemmin esiteltyjä vektorialgebroja varten. Luku alkaa vektoriavaruuden määrittelystä edeten askel kerrallaan peruskäsitteistä yhä syvemmälle tarvittaviin rakenteisiin.

2.1 Yleiset vektoriavaruudet

Vektoriavaruuden käsitteen antaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 2.1.1. ([16, s. 3]) *Vektoriavaruus* on joukko V, jonka skalaarit kuuluvat kuntaan K ja jonka alkioita kutsutaan vektoreiksi.

Jokaiselle joukon V vektorille u, v ja w on olemassa yhteenlasku, jolla on ominaisuudet

1. kommutatiivisuus $u + v = v + u$,
2. assosiatiivisuus $u + (v + w) = (u + v) + w$,
3. joukossa V on olemassa yksikäsitteinen vektori 0 siten, että kaikilla joukon vektoreilla on ominaisuus $v + 0 = v$,
4. jokaisella joukon V vektorilla v on vasta-alkio $-v$, jolla $v + (-v) = 0$.

Jokaiselle joukon V vektorille on olemassa tulo skalaarialkion kanssa. Jos $u, v \in V$ ja $\alpha, \beta \in K$, niin tulolla on seuraavat ominaisuudet:

1. assosiatiivisuus $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$,
2. $1v = v$ jokaiselle $v \in V$,
3. distributiivisuus vektorien yhteenlaskun suhteen $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,
4. distributiivisuus skalaarien yhteenlaskun suhteen $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

Yleensä vektoriavaruuden kerroinkunnaksi K valitaan reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$. Työn tässä kohdassa pyritään kuitenkin pysymään niin yleisellä tasolla kuin mahdollista.

Eräät keskeisimmistä vektoriavaruuksien käsitteistä ovat lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus.

Määritelmä 2.1.2. ([16, s. 7]) Äärellinen vektorijoukko $\{v_j\}_{j=1}^{n}$ on *lineaarisesti riippuva*, jos on olemassa sellainen vastaava skalaarijoukko $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n}$, että kaikki sen alkiot eivät ole nollia ja

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0.$$

Vastaavasti

Määritelmä 2.1.3. ([16, s. 7]) Äärellinen vektorijoukko, joka ei ole lineaarisesti riippuva, on *lineaarisesti riippumaton.*

Käytännössä lineaarisesti riippumattomien vektorien lineaarikombinaatio

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$

on nollavektori jos ja vain jos kaikki kertoimet α_j ovat nollia. Tästä syystä lineaarisesti riippumattomat vektorit voivat indusoida vektoriavaruuden kannan.

Määritelmä 2.1.4. ([16, s. 10]) Vektoriavaruuden V *kanta* on sellainen joukko $\mathcal{B}$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita, että jokainen joukon V vektori on lineaarikombinaatio joukon $\mathcal{B}$ alkioista.

Kannan määrittelyn etuna on, että valitussa kannassa $\mathcal{B}$ jokaisen vektorin esitys on yksikäsitteinen. Mikäli vektoriavaruus V on äärellisulotteinen, niin kanta on tällöin äärellinen joukko. Kantavektorien lukumäärän avulla voi määritellä vektoriavaruuden dimension, sillä jokaisessa tietylle vektoriavaruudelle mahdollisessa kannassa on sama määrä vektoreita.

Määritelmä 2.1.5. ([16, s. 14]) Äärellisulotteisen vektoriavaruuden V *dimensio* on vektoriavaruuden kannan vektorien lukumäärä. Dimensiota merkitään $\dim(V)$.

Vektoreita käsiteltäessä hyödyllinen objekti on aliavaruus, joka määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.1.6. ([16, s. 16])) Vektoriavaruuden V ei-tyhjä osajoukko U on *aliavaruus*, jos jokaisen joukkoon U kuuluvan vektoriparin u ja v jokainen lineaarikombinaatio $\alpha u + \beta v$ kuuluu myös joukkoon U, missä α ja β ovat skalaareita.

Halmos huomauttaa teoksessaan [16, s. 16], että aliavaruus sisältää aina nolla-alkion, sillä eräs mahdollinen lineaarikombinaatio on $u - u = 0$.

Seuraavaksi määritellään yleinen tulo-operaatio vektoreiden välille, jota kutsutaan bilineaarikuvaukseksi.

Määritelmä 2.1.7. Olkoot U, V ja W vektoriavaruuksia, joilla on sama kerroinkunta K. *Bilineaarikuvaus* on funktio $B : U \times V \to W$, joka toteuttaa ehdot

1. $B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$,
2. $B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2)$,
3. $B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v)$,
4. $B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v)$,

kaikilla $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$ ja $\alpha \in K$.

Tietynlaisen bilineaarikuvauksen lisääminen vektoriavaruuteen luo tämän työn kannalta yhden oleellisimmista algebrallisista rakenteista: assosiatiivisen renkaan, jota sanotaan K-algebraksi kulloisen skalaarikunnan K mukaan. Mikäli kerroinkunta oletetaan mielivaltaiseksi tai ennalta tunnetuksi, niin rakenteesta voi käyttää nimitystä algebra.

Määritelmä 2.1.8. Olkoot vektoriavaruuden V kerroinkunta K ja B: $V \times V \to V$ vektoriavaruuteen liitetty bilineaarikuvaus. Tällöin paria (V, B) sanotaan *K-algebraksi*.

2.2 Sisätulo-, normi- ja duaaliavaruudet

Kaikki vektoriavaruuksien oleellisimmat käsitteet on käsitelty ja voidaan siirtyä askelta "yksityiskohtaisempaan" avaruuteen – sisätuloavaruuteen. Yleisessä tapauksessa sisätuloavaruus V on vektoriavaruus, johon on määritelty sisätulo $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seuraavaksi tarkempi määritelmä.

Määritelmä 2.2.1. ([16, s. 121]) Vektoriavaruutta V sanotaan *sisätuloavaruudeksi*, jos siihen on liitetty kuvaus $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, jolla on seuraavat ominaisuudet jokaista vektoriavaruuden V vektoria u, v ja w kohden

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$,
2. $\langle \alpha_1 u + \alpha_2 v, w\rangle = \alpha_1 \langle u, w\rangle + \alpha_2 \langle v, w\rangle$, kun $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,
3. $\langle v, v\rangle \geq 0$ ja $\langle v, v\rangle = 0$ jos ja vain jos $v = 0$.

Sisätuloavaruutta voidaan merkitä parina $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Sisätulo on lisättävissä jokaiseen äärellisulotteiseen vektoriavaruuteen. Lisäksi sisätulon avulla saadaan määriteltyä normi.

Määritelmä 2.2.2. Sisätuloavaruuden $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ normi määritellään

$$\|v\|_V := \sqrt{\langle v, v\rangle_V}.$$

Tunnetuin vektorinormeihin ja sisätuloon liittyvä epäyhtälö on Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö.

Lause 2.2.3. *([16, s. 125]) (Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö) Jos u ja v ovat sisätuloavaruuden $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ vektoreita, niin*

$$|\langle u, v\rangle_V| \leq \|u\|_V \cdot \|v\|_V .$$

Halmosin mukaan [16, s. 121] jokainen sisätuloavaruus muodostaa normiavaruuden ainakin edellä esitellyllä normilla. Jokainen normiavaruus ei kuitenkaan ole sisätuloavaruus.

Määritelmä 2.2.4. ([16, s. 126]) *Normiavaruudeksi* määritellään vektoriavaruus V, johon on liitetty sellainen kuvaus $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, että jokaiset vektoriavaruuden V vektorit v ja u täyttävät ehdot

1. $\|v\| \geq 0$ ja $\|v\| = 0$ jos ja vain jos $v = 0$,
2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\, \|v\|$, millä tahansa skalaarikunnan alkiolla α,
3. kolmioepäyhtälö $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

Määritellään lineaarikuvaus seuraavaa lausetta varten.

Määritelmä 2.2.5. Olkoot V ja W reaalikertoimisia vektoriavaruuksia. Kuvaus $f\colon V \to W$ on *lineaarikuvaus*, jos se toteuttaa ehdot

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$,
2. $f(\alpha v) = \alpha f(v)$,

kun $u, v \in V$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sisätuloavaruuksille pätee seuraavaksi esiteltävä Rieszin esityslause.

Lause 2.2.6. *([6, s. 138]) (Rieszin esityslause) Olkoot $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sisätuloavaruus ja $\omega_u\colon V \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen vektoriavaruuden V vektori u, jolla*

$$\omega_u(v) = \langle u, v\rangle\,,$$

jokaiselle vektoriavaruuden V vektorille v.

Rieszin esityslauseen lineaarikuvaukset ω_u muodostavat oman vektoriavaruutensa, koska nollakuvaus on mahdollinen. Samaisen lauseen nojalla sisätuloavaruudelle voidaan määritellä duaaliavaruus ja siellä olevat kovektorit.

Määritelmä 2.2.7. ([16, s. 20]) Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Lineaarikuvauksia $\omega_u\colon V \to \mathbb{R}$ sanotaan *kovektoreiksi* ja niiden muodostamaa vektoriavaruutta vektoriavaruuden V *duaaliksi* ja merkitään V^*.

Duaaliavaruuden normi määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.2.8. Duaaliavaruuden V^* normi on

$$\|\omega\|_{V^*} := \sup\{|\omega(v)| :\ v \in V \text{ ja } \|v\|_V \le 1\}\,,$$

jokaiselle duaaliavaruuden V^* alkiolle ω. Tätä normia sanotaan *duaalinormiksi.*

Rieszin esityslauseen mukaiset kuvaukset ovat siinä mielessä helposti käsiteltäviä, että niiden normilla on ominaisuus $\|\omega_u\|_{V^*} = \|u\|_V$. Tuleva lause todistaa tämän väittämän.

Lause 2.2.9. *Olkoot duaaliavaruuden V^* funktionaalit muotoa $\omega_u(\cdot) = \langle u, \cdot \rangle$ eräille vektoreille u, jotka kuuluvat vektoriavaruuteen V. Tällöin duaaliavaruuden ja sisätuloavaruuden normeilla on ominaisuus*

$$\|\omega_u\|_{V^*} = \|u\|_V \,.$$

Todistus. Duaalinormin määritelmän nojalla

$$\|\omega_u\|_{V^*} := \sup\{|\omega_u(v)| : \quad v \in V \text{ ja } \|v\| \leq 1\} = |\langle u, v\rangle| \,,$$

missä $\|v\| \leq 1$. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_V \cdot \|v\|_V \,.$$

Sisätulon itseisarvon suurin yläraja saavutetaan vektorin v ollessa yksikkövektori. Valitsemalla tällaisista vektoreista $\hat{v} = \pm u/\|u\|_V$ saadaan epäyhtälön yhtäsuuruus

$$\left|\left\langle u, \pm\frac{u}{\|u\|_V}\right\rangle\right| = \frac{\|u\|_V^2}{\|u\|_V} = \|u\|_V = \|u\|_V \cdot \|\hat{v}\|_V$$

ja tällöin

$$\sup_{\|v\|\leq 1} |\langle u, v\rangle| = \|u\|_V \cdot \|\hat{v}\|_V = \|u\|_V \,. \qquad \square$$

Kaksi seuraavaa lausetta esittelevät duaaliavaruuden ominaisuuksia

Lause 2.2.10. *([16, s. 23]) Äärellisulotteisen vektoriavaruuden V ja sen duaalin V^* dimensioilla on yhteys*

$$\dim(V) = \dim(V^*).$$

Lause 2.2.11. *([16, s. 23]) Oletetaan n-ulotteisen vektoriavaruuden V kannan olevan $\{e_1, ..., e_n\}$, niin tällöin kantaa vastaan on olemassa yksikäsitteinen kovektorien kanta $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$, joka valitaan niin, että*

$$\omega^j(e_i) = \delta_{ij},$$

missä δ_{ij} on Kroneckerin delta. Kyseisen kovektorien kannan sanotaan olevan vektoriavaruuden kannan $\{e_1, ..., e_n\}$ duaalikanta.

3. GRASSMANNIN ANALYYSI

Hermann Grassmann (1809-1877) esitteli uudentyyppisen algebran vuonna 1844 julkaisemassaan teoksessa [*Die*] *Ausdehnungslehre.* Ei ole sattumaa, että Grassmannin algebra on osoittautunut hyödylliseksi monilla geometrian ja analyysin osa-alueilla. Grassmannin alkuperäinen ajatus oli muodostaa sellaiset kertolaskusäännöt suorien päätepisteille A, B ja C, että geometrian lause $AB + BC = AC$ toteutuu. [7, s. 56]

Tässä luvussa käsitellään modernia versiota Grassmannin algebrasta, jonka alkioina ovat vektorit pisteiden sijaan. Ensimmäisessä kappaleessa rakennetaan algebra ja toisessa siirrytään itse analyysiin.

3.1 Grassmannin algebra

Kappaleessa jatketaan siitä, mihin edellinen luku jäi ja jatketaan muuntamalla yleinen K-algebra vaihe kerrallaan Grassmann-algebraksi. Ennen kuin voidaan määritellä tarvittu algebra, niin tarvitaan uusia rakenteita ja käsitteitä. Määritellään ensin halutuilla tulon ominaisuuksilla varustettu bilineaarikuvaus.

Määritelmä 3.1.1. Oletetaan, että V on n-ulotteinen vektoriavaruus. Olkoon bilineaarinen assosiatiivinen operaatio $\wedge\colon V \times V \to V \wedge V$ antisymmetrinen, eli jokaiselle vektoriavaruuden V vektoriparille u ja v on voimassa $u \wedge v = -v \wedge u$. Tällöin bilineaarinen operaatio on *ulkotulo* tai *Grassmannin tulo*. Tulon maalijoukosta $V \wedge V$ käytetään yleensä merkintää $\Lambda^2(V)$.

Esitellyn ulkotulon sisältävä vektoriavaruus V ei vielä täytä algebran ehtoja, koska tulon maalijoukko ei ole lähtöjoukko. Lähtökohtaisesti tulo pitäisi olla määritelty myös vektoriavaruuden alkioiden ja $\Lambda^2(V)$ alkioiden välillä ja kaikkien $\Lambda^2(V)$ alkioiden kesken. Tästä syystä tarvitaan uusi joukkokonsepti, jonka avulla voidaan käsitellä ja puhua ulkotulon kuvajoukoista.

Määritelmä 3.1.2. Vektoriavaruuden V indusoimaa joukkoa $\Lambda^k(V)$ sanotaan k-*teräksi* ja sen alkiot ovat muotoa

$$\underbrace{u_1 \wedge \cdots \wedge u_k}_{k \text{ kpl}}$$

ja niitä kutsutaan k-*vektoreiksi*. Erityisesti $\Lambda^1(V) = V$ ja $\Lambda^0(V) = K$, missä K on vektoriavaruuden kerroinkunta.

Jokaiselle k-terälle on määriteltävissä kanta.

Lause 3.1.3. *k-terän $\Lambda^k(V)$ kanta voidaan kirjoittaa vektoriavaruuden V kannan $\{e_1, ..., e_n\}$ avulla seuraavasti*

$$\mathcal{B}_k = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} | \, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\},$$

kun $1 \leq k \leq n$.

0-terän kanta on vektoriavaruuden kerroinjoukon identiteettialkio.

Todistus. Todistus on nähtävillä lähteessä [20, s. 173]. □

Kannan lisäksi k-terän dimensio voidaan laskea.

Lause 3.1.4. *Olkoon n-ulotteinen vektoriavaruus V. Tällöin k-terän dimensio on*

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k},$$

jos $k > n$, niin $\dim \Lambda^k(V) = 0$.

Todistus. Vektoriavaruuden $\Lambda^k(V)$ kanta

$$\mathcal{B}_k = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} | \, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$$

saadaan ottamalla k erilaista kombinaatiota vektoriavaruuden kaikkien n kanta-alkion joukosta. Vektoriavaruuden dimensio on sama kuin k-terän $\Lambda^k(V)$ kanta-alkioiden lukumäärä, eli

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}.$$

Siinä tapauksessa, että $k > n$, niin jokin alkio e_j esiintyy kahdesti k-vektoreissa, joten ne ovat kaikki nollia, jolloin

$$\Lambda^k(V) = \{0\} \Rightarrow \dim \Lambda^k(V) = 0. \qquad \square$$

Esitellään nyt tarkka määritelmä Grassmannin algebralle.

Määritelmä 3.1.5. *(Grassmannin algebra)* Oletetaan, että V on n-ulotteinen reaalivektoriavaruus. Olkoon $\Lambda_n(V)$ assosiatiivinen algebra, jonka identiteettialkio on 1 bilineaariselle assosiatiiviselle operaatiolle $\wedge \colon \Lambda_n(V) \times \Lambda_n(V) \to \Lambda_n(V)$. Joukkoperhettä

$$\Lambda_n(V) := \bigoplus_{j=0}^{n} \Lambda^j(V)$$

sanotaan *Grassmannin algebraksi*, jos kaikkien vektoriavaruuden V vektorien u ja v suhteen operaatio $\wedge$ täyttää ehdot

1. $1 \wedge u = u$,
2. $1 \wedge 1 = 1$,
3. $u \wedge v = -v \wedge u$.

Assosiatiivisen algebran $\Lambda_n(V)$ alkiona olevat k-vektorit ovat k-ulotteiselle vektoriavaruudelle määriteltyjä antisymmetrisiä esityksiä: toisin sanoen ne ovat alternoivia. Antisymmetrisessä esityksessä alkioiden järjestyksen muuttaminen vaikuttaa esityksen etumerkkiin. Matematiikassa alkioiden ja jonojen järjestyksiä kuvataan permutaatioilla.

Määritelmä 3.1.6. Jos kuvaus $\sigma \colon A \to A$ on bijektio, niin kuvauksen σ sanotaan olevan joukon A *permutaatio*.

Työssä käsiteltävät permutaatiot ovat jonoja $(\sigma(1), ..., \sigma(k))$, joissa lukujonon $1, ..., k$ alkiot esiintyvät jossain järjestyksessä.

Määritelmä 3.1.7. Permutaation $\sigma = (j_1, ..., j_k)$ *inversio* on sellainen pari $(j_s, j_t) \subseteq \sigma$, jossa $j_s > j_t$ ja $t > s$.

Määritelmä 3.1.8. *Permutaation merkki* määritellään permutaatiolle σ

$$\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^q,$$

missä q on permutaation σ inversioiden lukumäärä.

Lause 3.1.9. *([20, s. 172]) Olkoon σ jonon $(1, ..., k)$ permutaatio. Tällöin Grassmannin algebran $\Lambda_n(V)$ alkioille voidaan kirjoittaa*

$$u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(k)} = \operatorname{sign}(\sigma) u_1 \wedge \cdots \wedge u_k.$$

Seuraava lause todistaa Grassmannin algebran olemassaolon.

Lause 3.1.10. *Grassmannin algebra on olemassa.*

Todistus. Todistus on saatavilla lähteestä [21, s. 161–163]. □

Koska jokaiselle k-terälle saadaan kanta, niin myös Grassmannin algebralle.

Lause 3.1.11. *Olkoot vektoriavaruuden V ulottuvuus n ja jokaisen k-terän kanta $\mathcal{B}_k$, kun $0 \leq k \leq n$. Tällöin Grassmannin algebran $\Lambda_n(V)$ kanta on*

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{B}_k.$$

Todistus. Todistus seuraa suoraan Grassmannin algebran määritelmästä ja k-terien kantojen esityksestä. □

Seuraavassa lisää Grassmannin algebran ominaisuuksia.

Lemma 3.1.12. *Olkoon $\Lambda(V)$ Grassmannin algebra. Tällöin jokaista vektoriavaruuden V vektoria u, v ja w kohti on voimassa*

1. *$u \wedge u = 0$,*
2. *$(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$,*
3. *$(\alpha u) \wedge v = \alpha(u \wedge v)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,*
4. *jos u on k-vektori ja v puolestaan m-vektori, niin*

$$u \wedge v = (-1)^{mk} v \wedge u,$$

5. *$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k \neq 0$ jos ja vain jos vektorit $u_1, ..., u_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus. Kohta 1. seuraa Grassmannin algebran ominaisuudesta 3.

$$u \wedge u = -u \wedge u \Rightarrow u \wedge u = 0.$$

Koska Grassmannin algebran operaatio $\wedge$ on määritelmänsä mukaan bilineaarinen, niin kohdat 2. ja 3. pätevät. Todistetaan kohta 4. käyttämällä induktiota. Mikäli jompikumpi vektoreista on 0-vektori tai 1-vektori, niin väite on selvästi tosi. Jokainen korkeamman asteen vektori voidaan esittää 1-vektorien ulkotulojen avulla. Olkoot u eräs m-vektori, v jokin k-vektori ja w 1-vektori, jolloin $v \wedge w$ on $(k+1)$-vektori. Näin ollen

$$\begin{aligned} u \wedge v \wedge w = (-1)^{mk} v \wedge u \wedge w &= (-1)^{mk}(-1)^m (v \wedge w) \wedge u \\ &= (-1)^{m(k+1)}(v \wedge w) \wedge u. \end{aligned}$$

Väite on siis tosi. Kohta 5. on yhtäpitävä seuraavan kanssa: "jos ja vain jos joukossa $\{u_1, ..., u_k\}$ on vähintään kaksi toisistaan lineaarisesti riippuvaa vektoria, niin esitys $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ on 0". Väite 5. saadaan todistettua todistamalla edellä oleva väite. Olkoon esityksessä vektorit v ja αv, $\alpha \in \mathbb{R}$. Jos esitykseen käytetään kohtaa 1. ja lausetta 3.1.9 sopivalla permutaatiolla σ, niin päädytään tulokseen

$$\begin{aligned} &u_1 \wedge \cdots \wedge v \wedge \cdots \wedge \alpha v \wedge \cdots \wedge u_k \\ = \operatorname{sign}(\sigma) &u_1 \wedge \cdots \wedge \alpha(v \wedge v) \wedge \cdots \wedge u_k = 0, \end{aligned}$$

koska kaikilla k-vektoreilla x ja y on ominaisuus $0 \wedge y = (0x) \wedge y = 0 \cdot (x \wedge y) = 0$. Grassmannin algebran ominaisuudesta 3. johtuen esitys on 0 vain lineaarisesti riippuvien vektorien tapauksessa. $\square$

Tästä eteenpäin tarkastellaan Grassmannin algebraa, joka on määritelty reaalisille vektoriavaruuksille. Yksinkertaisuuden vuoksi käytetään algebrasta merkintää $\Lambda_n := \Lambda_n(\mathbb{R}^n)$. Jos vektoriavaruus on rajoitettu aliavaruuteen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, niin algebrasta käytetään merkintää $\Lambda_n(\Omega)$. Koska Grassmannin alkioiden välinen tulo voi olla vain ulkotulo, niin voidaan merkitä tätä lyhyemmin $uv := u \wedge v$.

3.2 Parillisuus ja parittomuus Grassmannin algebrassa

Vaikka Grassmannin algebrat $\Lambda_n(V)$ ovat tulon suhteen antikommutoivia, niin samaisissa algebroissa on myös kommutoivia alkioita. Kommutoivat alkiot voidaan muodostaa kahden alkion tulosta, koska alkio $u := u_1 u_2$ kuuluu aina Grassmannin algebraan. On helppo nähdä, että tällä tapaa muodostetut alkiot todella kommutoivat, sillä

$$uv = (u_1u_2)v = -u_1vu_2 = vu_1u_2 = vu$$

kaikilla vektoriavaruuden V vektoreilla v ja siten myös kaikilla alkioilla joukossa $\Lambda_n(V)$.

Mikäli tarkastellaan kommutoivia alkioita Grassmannin algebran generaattorien – vektoriavaruuden V vektorien – tuloina, niin huomataan kommutoivien alkioiden olevan lineaarikombinaatio sellaisista alkioista, jotka voi esittää parillisella määrällä vektoreita. Tämän takia on luonnollista kutsua kommutoivia alkioita parillisiksi ja antikommutoivia parittomiksi.

Määritelmä 3.2.1. Grassmannin algebran Λ_n alkioita, jotka voidaan esittää muodossa

$$u^+ = \sum_{|I| \text{ parillinen}} \alpha_I u_I$$

sanotaan *parillisiksi* ja vastaavasti

$$u^- = \sum_{|I| \text{ pariton}} \alpha_I u_I$$

parittomiksi. Esityksissä $\alpha_I \in \mathbb{R}$ ja

$$u_I := u_{1_1}u_{i_2}\cdots u_{i_k},$$

missä $I = \{i_1, ..., i_k\}$ on kasvavasti järjestetty indeksijoukko, eli $i_1 \leq \cdots \leq i_k$.

Parillisten ja parittomien alkioiden avulla saadaan oleellinen jako Grassmannin algebralle.

Määritelmä 3.2.2. Grassmannin algebra Λ_n on esitettävissä muodossa

$$\Lambda_n = \Lambda_n^+ \oplus \Lambda_n^-,$$

missä

$$\Lambda_n^+ = \{u \in \Lambda_n | \; u \text{ on parillinen}\}$$

ja

$$\Lambda_n^- = \{u \in \Lambda_n |\ u \text{ on pariton}\}.$$

Grassmann-algebrassa Λ_n funktiot voi esittää muodossa

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{1\le j_1 \le n} f_{j_1}(x) u_{j_1} + \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} f_{j_1 j_2}(x) u_{j_1} u_{j_2}$$
$$+ \ldots + \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_{n-1} \le n} f_{j_1 \cdots j_{n-1}}(x) u_{j_1} \cdots u_{j_n} + \cdots + f_{1\ldots n} u_1 \cdots u_n,$$

missä esiintyvät komponenttifunktiot ovat kuvauksia joukosta $\mathbb{R}^m$ reaaliluvuille. Funktion f maalijoukko on tällöin $\mathbb{R}[x] \otimes \Lambda_{2n}$. Algebran tavoin funktiotkin ovat jaettavissa vastaavasti parilliseen ja parittomaan osaan. Käytetään sekaannuksen välttämiseksi ilmaisuja *Grassmann-parillinen* ja *-pariton* näistä osafunktioista.

Määritelmä 3.2.3. *Grassmann-parillinen funktio* määritellään asettamalla

$$f(x) = \sum_{u^+ \in \Lambda^+} f_{u^+}(x) u^+$$

ja *Grassmann-pariton funktio* puolestaan

$$f(x) = \sum_{u^- \in \Lambda^-} f_{u^-}(x) u^-.$$

4. CLIFFORDIN ANALYYSI

Tässä luvussa käydään läpi oleellisimmat käsitteet ja tulokset Cliffordin analyysiin liittyen. Ensimmäisessä osassa rakennetaan Cliffordin algebra. Toisessa osiossa esitellään analyysin tärkeimpiä työkaluja ja lopuksi esitellään työn kannalta oleellisimpia funktiotyyppejä.

4.1 Cliffordin algebra

Cliffordin algebra on vektoriavaruuden generoima assosiatiivinen algebra. Kyseiselle vektoriavaruudelle on määritelty kvadraattinen muoto.

Määritelmä 4.1.1. ([13, s. 39]) Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus, jonka kerroinkuntana on K. *Kvadraattinen muoto* vektoriavaruudessa V on kuvaus $q\colon V \to K$, jolla

1. $q(cv) = c^2 q(v)$, kaikilla $v \in V$ ja $c \in K$,
2. kuvaus $B_q\colon V \times V \to K$,

$$B_q(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$$

   on bilineaarinen.

Lähteen [15, s. 6] mukaan Cliffordin algebraan (V, q) määritellän tulo $\otimes$ kvadraattisen muodon bilineaarikuvauksen avulla siten, että vektorien u ja v tulolle voidaan kirjoittaa

$$u \otimes v + v \otimes u = B_q(u, v). \tag{4.1}$$

Tällä tavoin määritelty Cliffordin algebra on yleisyydeltään yli tämän työn tarpeiden. Esimerkiksi kvadraattisen muodon ollessa nollafunktio, Grassmannin algebra olisi Cliffordin algebra.

Yleisin valinta Cliffordin algebran kvadraattiseksi muodoksi on

$$q(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2,$$

missä $p, q \in \mathbb{N}$. Lisäksi alkiot $\{x_1, ..., x_{p+q}\}$ määrätään reaalisiksi.

Propositio 4.1.2. *$p+q$-ulotteisen vektoriavaruuden kuvaus $q\colon V \to \mathbb{R}$,*

$$q(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2$$

on kvadraattinen muoto.

Todistus. Laskemalla

$$q(cx) = \sum_{j=1}^{p} c^2 x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} c^2 x_j^2 = c^2 q(x),$$

huomataan kvadraattisen muodon ensimmäisen ehdon toteutuvan. Lisäksi kuvaukselle

$$\begin{aligned} B_q(x,y) &= \sum_{j=1}^{p}(x_j+y_j)^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q}(x_j+y_j)^2 - \sum_{j=1}^{p} x_j^2 + \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2 - \sum_{j=1}^{p} y_j^2 + \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2 \\ &= 2\sum_{j=1}^{p} x_j y_j - 2\sum_{j=p+1}^{p+q} x_j y_j \end{aligned}$$

pätevät $B_q(x,y) = B_q(y,x)$ ja

$$\begin{aligned} B_q(x, \alpha u + \beta v) &= 2\alpha \sum_{j=1}^{p} x_j u_j + 2\beta \sum_{j=1}^{p} x_j v_j - 2\alpha \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j u_j - 2\beta \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j v_j \\ &= \alpha B_q(x,u) + \beta B_q(x,v), \end{aligned}$$

joten se on bilineaarinen ja siten toinenkin ehto on tosi. □

Propositio 4.1.3. *Olkoon reaalisen vektoriavaruuden V kanta $\{e_1, e_2, ..., e_{p+q}\}$. Jos Cliffordin algebran kvadraattiseksi muodoksi valitaan*

$$q(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2,$$

niin kantavektorien tulolle on oltava

$$e_j^2 = 1,\ \forall j = 1, ..., p,$$
$$e_j^2 = -1,\ \forall j = p+1, ..., p+q$$

ja

$$e_i e_j + e_j e_i = 0,\ \text{kun } i \neq j.$$

Todistus. Cliffordin algebran tulon määrittelystä 4.1 saadaan vektorien neliöille ominaisuus

$$x^2 = \frac{xx + xx}{2} = \frac{B_q(x,x)}{2} = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2 = q(x).$$

Koska jokainen kannan vektori on muotoa

$$x = \sum_{j=1}^{p+q} x_j e_j,$$

missä $x_j \in \mathbb{R}$, niin vektorien neliö on

$$x^2 = \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{i=1}^{p+q} x_j e_j x_i e_i.$$

Osittelemalla summa osiin, joissa $i = j$, $i < j$ ja $j < i$, niin

$$x^2 = \sum_{j=1}^{p+q} x_j^2 e_j^2 + \sum_{i<j} x_j e_j x_i e_i + \sum_{j<i} x_j e_j x_i e_i,$$

josta huomataan, että

$$\sum_{i<j} x_j e_j x_i e_i = \sum_{i<j} x_j x_i e_j e_i = \sum_{j<i} x_i x_j e_i e_j = \sum_{j<i} x_j x_i e_i e_j.$$

Näin saadaan esitys

$$x^2 = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 e_j^2 + \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2 e_j^2 + \sum_{j<i} x_j x_i \left(e_i e_j + e_j e_i\right),$$

jonka pitää olla yhtä kvadraattisen muodon q kanssa, jolloin

$$0 = x^2 - q(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 \left(e_j^2 - 1\right) + \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2 \left(e_j^2 + 1\right) + \sum_{j<i} x_j x_i \left(e_i e_j + e_j e_i\right).$$

Yhtäsuuruus saadaan vain niillä tulon ominaisuuksilla, jotka propositiossa on mainittu. □

Propositiossa viimeisenä esitetyn tulon ominaisuuden takia Cliffordin algebran alkioita sanotaan *antikommutoiviksi*. Kantavektorien tuloista käytetään yleensä merkintää

$$e_{ij} = e_i e_j, \quad i \neq j. \tag{4.2}$$

Itse asiassa myös e_{ij} on kantavektori, sillä se on lineaarisesti riippumaton sen vektoriavaruuden kannasta, johon sen tekijät kuuluvat. Näillä *bivektoreiksi* sanotuilla olioilla on ominaisuus

$$e_{ij}^2 = e_i e_j e_i e_j = -e_i e_j^2 e_i = -e_i^2 e_j^2. \tag{4.3}$$

Edellisten tulosten pohjalta voimme määritellä Cliffordin algebran

Määritelmä 4.1.4. Olkoot $p, q \in \mathbb{N}$, V vektoriavaruus ja $\{e_i\}_{i=1}^{p+q}$ vektoriavaruuden kanta. Cliffordin algebraksi sanotaan assosiatiivista algebraa, jossa kantavektoreilla $\{e_i\}_{i=1}^{p+q}$ on ominaisuudet

1. $e_i e_j + e_j e_i = 0,\ i \neq j,$
2. $e_i^2 = 1,\ i = 1, ..., p,$
3. $e_i^2 = -1,\ i = p+1, ..., p+q.$

Cliffordin algebraa merkitään $C\ell_{p,q}$.

Seuraava lause todistaa Cliffordin algebran olemassaolon ja yksikäsitteisyyden.

Lause 4.1.5. *([14, s. 89–91]) Cliffordin algebra on olemassa ja se on yksikäsitteinen.*

Cliffordin algebra itsessään on vektoriavaruus, jonka kantaan kuuluvat vektoriavaruuden V kannan lisäksi niin skalaari 1 kuin kantavektorien tulojen eri kombinaatiot, joiden esitystä seuraava määritelmä täsmentää.

Määritelmä 4.1.6. Olkoon $I = \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, ..., p+q\}$ järjestetty joukko siten, että $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Oliota

$$e_I = e_{i_1} \cdots e_{i_k}$$

sanotaan k-vektoriksi. 0-vektoriksi määritellään $e_0 = 1$.

Lause 4.1.7. *([15, s. 10–11]) Cliffordin algebran $C\ell_{p,q}$ kanta on*

$$\{e_I |\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_{p+q}\} \cup \{1\}$$

ja alkiot voidaan esittää muodossa

$$x = \sum_{|I| \leq p+q} x_I e_I,$$

missä joukon $I = \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, ..., p+q\}$ mahtavuutta merkitään $|I| := k$.

Cliffordin algebroille on määriteltävissä anti-involuutio, jolla on kompleksikonjugaatin kanssa yhtäläinen käyttötarkoitus.

Määritelmä 4.1.8. ([14, s. 93–94]) Olkoon $e_I = e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ Cliffordin algebran $C\ell_{p,q}$ alkio. Tällöin alkion *anti-involuutio* on

$$\overline{e_I} = \overline{e_{i_k}} \cdots \overline{e_{i_1}},$$

missä $\overline{e_{i_j}} = -e_{i_j}$ jokaisella indeksillä i_j joka kuuluu joukkoon I.

Anti-involuution voi laskea myös seuraavan lauseen mukaisesti.

Lause 4.1.9. *([14, s. 94]) Cliffordin algebran $C\ell_{p,q}$ alkion e_I anti-involuutio on esitettävissä muodossa*

$$\overline{e_I} = (-1)^{\frac{1}{2}|I|(|I|+1)} e_I,$$

jos $I \subset \{1, ..., p+q\}$ on kasvavasti järjestetty indeksijoukko.

Todistus. Jotta anti-involuution jälkeen alkion elementit saadaan järjestettyä alkuperäisen alkion mukaisesti, niin äärimmäistä elementtiä pitää siirtää $|I| - 1$ kertaa, seuraavaa elementtiä $|I| - 2$ kertaa ja niin edelleen. Tällöin järjestyksen vaihdoksia tulee yhteensä $|I| \left(|I| - 1\right)/2$ kappaletta, eli etumerkinvaihdoksia tulee yhtä paljon.

Tämän lisäksi involuutiossa jokainen elementti vaihtaa etumerkkiään, jolloin koko alkion etumerkki vaihtuu vielä $|I|$ kertaa. Matemaattisesti ilmaistuna

$$\overline{e_I} = (-1)^{\frac{1}{2}|I|(|I|-1)}(-1)^{|I|}e_I = (-1)^{\frac{1}{2}|I|(|I|+1)}e_I.$$

Mikä oli todistettava. □

4.2 Analyyttisiä työkaluja

Tässä alaluvussa määritellään analyysille tärkeitä käsitteitä, kuten raja-arvo ja derivaatta. Perinteiseen analyysiin verraten eroa ei juuri ole. Cliffordin algebrassa derivoitaessa on lisäksi huolehdittava vain kommutaatiosäännöistä.

Analyysin pohjalla on raja-arvon käsite. Sen avulla voidaan määritellä funktioiden jatkuvuus ja derivaatta.

Määritelmä 4.2.1. *(Funktion raja-arvo)* Olkoot $(V, \|\cdot\|_V)$ ja $(W, \|\cdot\|_W)$ normiavaruuksia, joille V on mielivaltainen vektoriavaruus ja W Cliffordin algebran $C\ell_{p,q}$ aliavaruus. Lisäksi $U \subset V$ on joukko, jonka sulkeuma sisältää pisteen c. Kyseisessä joukossa määritellyllä funktiolla $f \colon U \to W$ on raja-arvo pisteessä c, jos on olemassa sellainen $L \in W$, että jokaista positiivista ε kohti on olemassa positiivinen δ siten, että

$$\|z - c\|_V < \delta \Rightarrow \|f(z) - L\|_W < \varepsilon.$$

Raja-arvoa merkitään

$$\lim_{z \to c} f(z) = L.$$

Mikäli funktiolla on raja-arvo arvojoukkonsa pisteessä c, niin tällöin sanotaan funktion olevan jatkuva pisteessä c.

Määritelmä 4.2.2. *(Funktion jatkuvuus)* Olkoon funktio $f \colon U \to C\ell_{p,q}$, missä U on avoin pisteen c ympäristö normiavaruudessa $(V, \|\cdot\|_V)$. Normiavaruuden $(C\ell_{p,q}, \|\cdot\|)$ funktio on *jatkuva* pisteessä c, jos jokaista positiivista ε kohti on olemassa sellainen positiivinen δ, että

$$\|z - c\|_V < \delta \Rightarrow \|f(z) - f(c)\| < \varepsilon$$

ja $z \in U$.

Funktion sanotaan olevan kaikkialla jatkuva, jos se on jatkuva koko tarkastelujoukossa. Tavallisen jatkuvuuden lisäksi voidaan määritellä tasainen jatkuvuus.

Määritelmä 4.2.3. Olkoot $U \subset V$ avoin osajoukko sekä $(V, \|\cdot\|_V)$ ja $(W, \|\cdot\|_W)$ normiavaruuksia, joille V on mielivaltainen vektoriavaruus ja W on Cliffordin algebran $C\ell_{p,q}$ aliavaruus. Kuvaus $f\colon U \to W$ on *tasaisesti jatkuva* jos ja vain jos jokaista positiivista ε kohti on olemassa sellainen positiivinen δ, että

$$\|x_1 - x_2\|_V < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\|_W < \varepsilon,$$

kaikilla $x_1, x_2 \in U$.

Nyt voidaan määritellä osittaisderivaatat Cliffordin avaruuden kannan suhteen.

Määritelmä 4.2.4. Olkoot $U \subset \mathbb{R}^m$ avoin joukko ja z sen piste. Joukossa U määriteltyä Cliffordin funktiota $f\colon \mathbb{R}^m \to C\ell_{p,q}$,

$$f(x) = \sum_{|I| \leq p+q} f_I(x) e_I$$

sanotaan *osittaisderivoituvaksi* muuttujan x_j suhteen pisteen z ympäristössä silloin, kun raja-arvot

$$\frac{\partial f_I}{\partial x_j}(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f_I(z_1, ..., z_j + h, ..., z_m) - f_I(z_1, ..., z_j, ..., z_m)}{h}$$

ovat olemassa kaikille komponenttifunktioille $f_I\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Osittaisderivaattaa merkitään Cliffordin funktiolle

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(z) := \sum_{|I| \leq p+q} \frac{\partial f_I}{\partial x_j}(z) e_I$$

tai lyhyemmin $\partial_{x_j} f(z)$.

Kaksi seuraavaa määritelmää koskevat funktioita, jotka ovat osittaisderivoituvia jokaisen muuttujansa suhteen.

Määritelmä 4.2.5. *(Differentioituvuus)* Funktion $f\colon U \to C\ell_{p,q}$ sanotaan olevan differentioituva avoimen joukon U pisteessä c, jos funktion f jokaista muuttujaa vastaava osittaisderivaatta on olemassa jatkuvana pisteen c avoimessa ympäristössä.

Määritelmä 4.2.6. *(Funktion jatkuva derivoituvuus)* Funktio $f\colon U \to C\ell_{p,q}$ on jatkuvasti derivoituva avoimessa joukossa U, jos osittaisderivaatat kaikkien muuttujien suhteen ovat olemassa jatkuvina jokaisessa joukon pisteessä.

Funktion osittaisderivaatoille pätevät Cliffordin algebrassa samat derivointisäännöt kuin reaaliarvoisille vektorimuuttujan funktioille.

4.3 Monogeeniset funktiot

Tässä osiossa pyritään esittämään teoriaa, joka vastaa kompleksianalyysiä ja siellä keskeistä analyyttisyyden käsitettä. Teorian avulla saadaan keino muodostaa ja tutkia integraaleja, osittaisdifferentiaaliyhtälöiden reuna-arvo-ongelmia ja differentiaaliyhtälösysteemejä. Keskeisessä osassa on Diracin operaattori, jonka avulla määritellään Cliffordin analyyttisyys, joka paremmin tunnetaan nimellä monogeenisuus. Alaluku on kirjoitettu lähteen [15] pohjalta.

Määritelmä 4.3.1. ([15, s. 97]) *(Diracin operaattori)* Olkoon $f\colon \Omega \to C\ell_{0,n}$ jatkuvasti derivoituva funktio. *Vasen Diracin operaattori* määritellään

$$Df = \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ja vastaavasti *oikea Diracin operaattori* määritellään

$$fD = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i.$$

Vastaavat konjugaattioperaattorit ovat

$$\overline{D}f = \sum_{i=1}^{n} \overline{e_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ja

$$f\overline{D} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overline{e_i}.$$

Määritellään nyt monogeeniset funktiot.

Määritelmä 4.3.2. ([15, s. 97]) *(Monogeeninen funktio)* Olkoot Ω avoin joukko ja $f\colon \Omega \to C\ell_{0,n}$ jatkuvasti differentioituva funktio. Sanotaan, että funktio f on vasemmalta monogeeninen, jos

$$Df = 0$$

ja oikealta monogeeninen, jos

$$fD = 0.$$

Jos funktion on sekä vasemmalta että oikealta monogeeninen, niin funktio on monogeeninen.

Vektorianalyysistä tunnettu Laplacen operaattori voidaan kirjoittaa Diracin operaattorien avulla.

Lemma 4.3.3. *([15, s. 97]) Cliffordin algebrassa $C\ell_{0,n}$ Laplacen operaattorilla ja Diracin operaattorilla on yhteys*

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = D\overline{D}f = \overline{D}Df$$

kaikilla kahdesti differentioituvilla funktioilla f.

Todistus. Olkoon f kahdesti differentioituva $C\ell_{0,n}$-arvoinen funktio. Huomataan ensin, että

$$D\overline{D}f = D(-D)f = -D^2 f = (-D)Df = \overline{D}Df.$$

Tällöin Diracin ja Laplacen operaattoreiden välinen yhteys saadaan laskemalla

$$\begin{aligned} D\overline{D}f = -D^2 f &= -\sum_{i,j=1}^{m} e_i e_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= -\sum_{j=1}^{m} e_j^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} - \sum_{i>j} e_i e_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i<j} e_i e_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Oikeanpuolimmaisessa summauksessa indeksöinti voidaan vaihtaa päittäin, jolloin

$$\sum_{i<j} e_i e_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{j<i} e_j e_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{j<i} e_j e_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Tästä seuraa, että

$$D\overline{D}f = -\sum_{j=1}^{m} e_j^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} - \sum_{i>j} (e_{ij} + e_{ji}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Koska $e_j^2 = -1$ ja $e_{ij} + e_{ji} = 0$, niin

$$D\overline{D}f = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \Delta f. \qquad \square$$

Laplacen operaattorilla saadaan määriteltyä harmoniset funktiot.

Määritelmä 4.3.4. *(Harmoninen funktio)* Olkoot Ω avoin joukko ja funktio $f \colon \Omega \to C\ell_{p,q}$ kahdesti differentioituva joukossa Ω. Jos

$$\Delta f = 0,$$

niin funktiota f sanotaan *harmoniseksi funktioksi joukossa* Ω.

Yhtälöä $\Delta f = 0$ sanotaan *Laplacen yhtälöksi.*

Lause 4.3.5. *$C\ell_{p,q}$-arvoinen funktio on harmoninen jos ja vain jos sen jokainen komponenttifunktio on harmoninen.*

Todistus. Mielivaltaisen kahdesti differentioituvan funktion Laplacen operaattori on

$$\Delta f = \sum_{|I| \le p+q} \Delta f_I e_I,$$

joka on nollafunktio, jos sen jokainen komponenttifunktio $\Delta f_I e_I$ on nolla. Toisaalta annettu funktion Δf esitys on komponenttiesitys kannassa ja koska esitys on lineaarisesti riippumaton, niin jokaiselle komponenttifunktiolle täytyy olla

$$\Delta f_I = 0,$$

jotta funktio f olisi harmoninen. $\square$

5. SUPERANALYYSI

Otsikon mukaisesti luvussa perehdytään superanalyysiin. Ensimmäisessä osassa esitellään käytettävien muuttujien laskusäännöt ja muuttujista muodostuva superavaruus, joista edetään superfunktioihin ja niiden derivaattojen laskusääntöihin. Toisessa osassa määritellään superanalyysin Laplacen operaattori ja sen sivutuotteena saadaan K-algebra supervektorimuuttujille. Viimeisessä alaluvussa esitellään superanalyysin ja tämän työn kannalta hyödyllisiä differentiaalioperaattoreita ja tuloksia.

5.1 Superalgebra

Superalgebrassa on kahdentyyppisiä muuttujia: *bosonisia* ja *fermionisia*. Bosonisia muuttujia merkitään x_i ja fermionisia $x\grave{}_i$, missä i on muuttujan indeksi. Kaikki superalgebran bosoniset muuuttujat ovat toistensa suhteen kommutoivia ja fermioniset ovat puolestaan antikommutoivia. Keskenään nämä kaksi erityyppistä *supermuuttujaa* ovat kommutatiivisia. Toisin sanoen

$$
\begin{aligned}
x_i x_j &= x_j x_i, \\
x\grave{}_i x\grave{}_j &= -x\grave{}_i x\grave{}_j, \\
x_i x\grave{}_j &= x\grave{}_j x_i.
\end{aligned}
$$

Määrittelystä seuraa, että $(x\grave{}_j)^2 = 0$ ja lisäksi voidaan sanoa bosonisten muuttujien olevan perinteisiä euklidisen koordinaatiston muuttujia. Fermioniset muuttujat ovat Grassmannin muuttujia ja kahden tällaisen muuttujan välisellä tulolla tarkoitetaan ulkotuloa. Täten superavaruuden voi kokonaisuudessaan esittää muun muassa Grassmannin algebran avulla.

Lause ja määritelmä 5.1.1. *(Olemassaolo) Olkoon Λ_N Grassmannin algebra. Merkitään parittomien Grassmannin alkioiden joukkoa Λ_N^- ja vastaavasti parillisten Λ_N^+. Täten algebra Λ_N generoi vektoriavaruuden*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}_N^{m|2n} = \{(x_1, ..., x_m, x\grave{}_1, ..., x\grave{}_{2n}) :\ & x_i \in \Lambda_N^+,\ x\grave{}_j \in \Lambda_N^-, \\
& i = 1, ..., m, j = 1, ..., 2n\},
\end{aligned}
$$

missä

$$x_j = \sum_{|I|=parillinen} x_{j,I} u_I$$

ja

$$x^{\backprime}_j = \sum_{|I|=pariton} x^{\backprime}_{j,I} u_I,$$

kun

$$u_I = \prod_{i \in I} u_i$$

ja

$$x_{j,I}, x^{\backprime}_{j,I} \in \mathbb{R}.$$

Kyseistä vektoriavaruutta kutsutaan superavaruudeksi.

Todistus. Olkoot $u_1, ..., u_N$ Grassmannin algebran Λ_N generaattorit. Grassmannin algebran voi jakaa parilliseen Λ_N^+ ja parittomaan osaan Λ_N^- siten, että parillisella määrällä eri generaattorien tuloja voidaan esittää jokainen parillisen joukon alkio. Vastaavasti määritellään myös parittoman joukon alkiot. Näin määritellysti parillisille alkioille pätee kommutatiivisuus ja parittomille antikommutatiivisuus. □

Vektoriavaruuden generoituvuuden ansiosta voidaan laskea muuttujille pisteittäiset arvot ja niistä rakentuva superavaruus on esitettävissä edellisen lauseen mukaisesti.

Laskusääntöjensä takia superavaruuden muuttujilla on yhteys kvanttimekaniikan luomis- ja hävitysoperaattoreiden laskusääntöihin bosonien ja fermionien tapauksissa. Tästä yhteydestä muuttujat ovat saaneet nimensä.

Grassmannin algebran ansiosta on olemassa yksikäsitteinen esitys kaikille superavaruuden funktioille. Funktiot ovat esitettävissä Grassmannin funktioiden tavoin, eli reaalifunktioilla kerrottujen Grassmannin algebran kanta-alkioiden summana. Voidaan ajatella, että superfunktioiden joukko on sellaisen Grassmannin algebra, jonka skalaarit ovat kuvauksia m-ulotteisesta avaruudesta reaalilukujen joukkoon. Alan kirjallisuudessa nämä reaaliset komponenttifunktiot merkitään kuuluvaksi joukkoon $\mathbb{R}[x_1, ..., x_m]$, jota ei tule sekoittaa polynomirenkaaseen. Merkinnällä pyritään täsmentämään sitä, että kaikista muuttujista juuri bosoniset muuttujat ovat reaalikuvausten argumentteina. Funktioiden kuvajoukoissa Grassmannin algebraa merkitään fermionisen avaruuden avulla

$$\Lambda_{2n}\left(\mathbb{R}^{0|2n}\right) = \bigwedge_{k=0}^{2n} \mathbb{R}^{0|2n} =: \bigwedge \mathbb{R}^{0|2n}.$$

Propositio 5.1.2. *Jokaista funktiota* $f\colon U_\alpha \to \mathbb{R}\left[x_1, ..., x_m\right] \otimes \bigwedge \mathbb{R}^{0|2n}$ *kohden on olemassa avoimet joukot* $U_\alpha \subset U$*, joille* $\bigcup U_\alpha = U$*, missä* $U_\alpha, U \in \mathbb{R}^m$ *ja funktiot* $f_{\alpha,I} : U_\alpha \to \mathbb{R}$ *siten, että*

$$f(x, \grave{x}) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|I|=k} f_{\alpha,I}(x)\grave{x}_I,$$

missä $I = \{i_1, ..., i_k\}$ *on kasvavasti järjestetty joukko, missä* $i_1 \leq \cdots \leq i_k$*. Lisäksi*

$$\grave{x}_I = \grave{x}_{i_1} \cdots \grave{x}_{i_k},$$

Esitysmuoto johtuu fermionisten muuttujien ominaisuudesta $(\grave{x}_j)^2 = 0$, jonka takia ainoat esiintyvät fermionisten muuttujien kuvaukset ovat polynomeja, joissa muuttujat esiintyvät potensseihin korottamattomina. Superfunktion esittelyn jälkeen on luonnollista alkaa tarkastella osittaisderivaattoja supermuuttujien suhteen.

Määritelmä 5.1.3. ([10, s. 2980]) *(Derivaatat superavaruudessa)* Määritellään ∂_{x_i} ja $\partial_{\grave{x}_j}$ operaattorit joukossa $\mathbb{R}^{m|2n}$ jokaiselle indeksille $1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq 2n$ seuraavasti.

Olkoon f mielivaltainen superfunktio joukossa $\mathbb{R}^{m|2n}$. Bosonisten muuttujien derivaatoille määritellään

1. $\partial_{x_i}(1) = 0$,
2. $\partial_{x_i}(x_k f) = \delta_{ik} f + x_k \partial_{x_i} f$,
3. $\partial_{x_i}(\grave{x}_k f) = \grave{x}_k \partial_{x_i} f$.

Vastaavasti fermionisten muuttujien derivaatoille määritellään

1. $\partial_{\grave{x}_j}(1) = 0$,
2. $\partial_{\grave{x}_j}(x_k f) = x_k \partial_{\grave{x}_j} f$,
3. $\partial_{\grave{x}_j}(\grave{x}_k f) = \delta_{jk} f - \grave{x}_k \partial_{\grave{x}_j} f$.

Fermionisten muuttujien derivaattoja sanotaan *Berezin-derivaatoiksi* [2, s. 74].

Huomioitavaa on, että bosoniset derivaatat ovat samaistettavissa reaalianalyysin derivaattoihin. Tarkastellaan seuraavaksi supermuuttujia vastaavien derivaattaoperaattoreiden ominaisuuksia. Selvin ominaisuus on

$$\partial_{x_j} x^\grave{}_k = 0 = \partial_{x^\grave{}_j} x_k$$

kaikilla indekseillä j ja k. Derivaatoille pätevät seuraavaksi esitettävät kommutaatiosäännöt.

Lause 5.1.4. *Olkoot x_i, x_j bosoniset ja $x^\grave{}_i, x^\grave{}_j$ fermioniset muuttujat. Tällöin näitä vastaaville derivaatoille pätevät*

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}\partial_{x_j} &= \partial_{x_j}\partial_{x_i}, \\ \partial_{x_i}\partial_{x^\grave{}_j} &= \partial_{x^\grave{}_j}\partial_{x_i}, \\ \partial_{x^\grave{}_i}\partial_{x^\grave{}_j} &= -\partial_{x^\grave{}_j}\partial_{x^\grave{}_i}. \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^{m|2n} \to \mathbb{R}\left[x_1, .., x_m\right] \otimes \bigwedge \mathbb{R}^{0|2n}$ funktio, jossa ei esiinny muuttujia $x^\grave{}_i$ ja $x^\grave{}_j$. Tällöin

$$\partial_{x^\grave{}_i}\partial_{x^\grave{}_j}(x^\grave{}_j x^\grave{}_i f) = \partial_{x^\grave{}_i}\left(x^\grave{}_i f - x^\grave{}_j x^\grave{}_i f \underbrace{\partial_{x^\grave{}_j}(1)}_{=0}\right) = f$$

ja toisaalta

$$\partial_{x^\grave{}_j}\partial_{x^\grave{}_i}\left(x^\grave{}_j x^\grave{}_i f\right) = -\partial_{x^\grave{}_j}\partial_{x^\grave{}_i}\left(x^\grave{}_i x^\grave{}_j f\right) = -f,$$

joten

$$\partial_{x^\grave{}_i}\partial_{x^\grave{}_j} = -\partial_{x^\grave{}_j}\partial_{x^\grave{}_i}.$$

Tapauksessa $i = j$ funktiot esitetään seuraavassa muodossa

$$f(x, x^\grave{}) = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{|I|=k} f_I(x) x^\grave{}_I.$$

Huomataan muuttujan $x^\grave{}_j$ esiintyvän kyseisen esityksen termifunktioissa $f_I(x)x^\grave{}_I$ korkeintaan kerran joka summatermissä. Täten eräällä multi-indeksillä $I\colon j \in I$

$$\partial^2_{x^{\backprime}_j}(-1)^{j-1} f_I(x) x^{\backprime}_j \hat{x}^{\backprime}_j = \partial_{x^{\backprime}_j}(-1)^{j-1} f_I(x)\hat{x}^{\backprime}_j = 0.$$

Mikäli olisi funktioesitys $(x^{\backprime}_j)^2 f$, missä $\partial_{x^{\backprime}_j} f = 0$, niin

$$\partial^2_{x^{\backprime}_j}\left((x^{\backprime}_j)^2 f\right) = \partial_{x^{\backprime}_j}\Big(x^{\backprime}_j f - x^{\backprime}_j \partial_{x^{\backprime}_j}(x^{\backprime}_j f)\Big) = \partial_{x^{\backprime}_j}\left(x^{\backprime}_j f - x^{\backprime}_j f\right) = 0.$$

Täten derivaattaoperaattori on nollaoperaattori.

Vastaavalla todistustavalla voidaan todistaa kommutoivat tapaukset. □

Mikäli derivaattojen kommutaatiosääntöjä vertaa supermuuttujien vastaaviin, niin voidaan huomata Berezin-derivaattojen muodostavan Grassmannin algebran.

Käydään seuraavaksi läpi muutamaa aputulosta, joiden avulla voidaan todistaa ketjusääntö superfunktioille. Tuloksissa keskitytään vain fermionisiin derivaattoihin, koska bosoninen ketjusääntö on oletettavasti tunnettu reaalianalyysistä. Ensimmäisissä aputuloksissa käytetään antikommutatiivisessa osassa monomeja, eli polynomeja $x^{\backprime}_I$, missä I on kasvavasti järjestetty joukko, eli $I = \{i_1, ..., i_k\}$, missä $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$.

Lemma 5.1.5. *([2, s. 75]) Olkoon f superfunktio, jonka fermioninen osa on k-asteen Grassmannin funktio. Tällöin*

$$\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} f = (-1)^{k-1} f \frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j}.$$

Todistus. Superfunktion voi esittää muodossa

$$f\left(x, x^{\backprime}\right) = \sum_{|J|=k-1} f_J(x) x^{\backprime}_j x^{\backprime}_J + \sum_{|I|=k} g_I(x) x^{\backprime}_I,$$

missä $j \notin I$. Vasemmalta derivoidessa

$$\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} f = \sum_{|J|=k-1} f_J(x) x^{\backprime}_J.$$

Koska kyseinen superfunktio voidaan antikommutatiivisuuden ansiosta kirjoittaa muodossa

$$f\left(x, x^{\backprime}\right) = \sum_{|J|=k-1} (-1)^{|J|} f_J(x) x^{\backprime}_J x^{\backprime}_j + \sum_{|I|=k} g_I(x) x^{\backprime}_I,$$

niin oikealta derivoitaessa

$$f\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} = \sum_{|J|=k-1} (-1)^{|J|} f_J(x) x^{\backprime}_J = (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} f. \qquad \square$$

Esitetään ja todistetaan seuraavaksi Leibnizin sääntö Berezin-derivaatalle.

Lemma 5.1.6. *([2, s. 75]) Olkoot funktiot f ja g joko Grassmann-parillisia tai -parittomia. Tällöin funktioiden tulon vasemmalle osittaisderivaatalle pätee*

$$\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j}(fg) = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} f\right) g + (-1)^{\alpha} f \left(\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} g\right)$$

ja vastaavasti oikealle

$$(fg)\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} = f\left(g\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j}\right) + (-1)^{\beta}\left(f\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j}\right) g,$$

missä α on funktion f Grassmann-pariteetti ja β vastaavasti funktion g Grassmann-pariteetti.

Todistus. Todistetaan lause oikeanpuoleisille derivaatoille käyttäen monomeja. Tällaisessa tapauksessa kiinnostavimmat funktiot ovat sellaiset, joissa muuttuja $x^{\backprime}_j$ esiintyy vain jommassakummassa funktiossa. Muussa tapauksessa $fg = 0$ ja väite pätee selvästi. Esitetään funktiot muodoissa

$$f = f_0(x) x^{\backprime}_I,$$
$$g = g_0(x) x^{\backprime}_J,$$

missä I ja J ovat järjestettyjä indeksijoukkoja. Oletetaan aluksi, että $\partial_{x^{\backprime}_j} f \neq 0$, jolloin $j \in I$ ja

$$\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j}(fg) = (-1)^s f_0(x) g_0(x) x^{\backprime}_{I\setminus\{j\}} x^{\backprime}_J = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} f\right) g,$$

missä muuttuja s edustaa indeksin j paikkaa joukossa I. Jos taas $\partial_{x^{\backprime}_j} g \neq 0$ ja j on järjestyksessään q:s alkio joukossa J, niin

$$\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j}(fg) = (-1)^q (-1)^{|I|} f_0(x) g_0(x) x^{\backprime}_I x^{\backprime}_{J\setminus\{j\}} = (-1)^{|I|} f \left(\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} g\right).$$

Täten

$$\frac{\partial}{\partial x_j^{\grave{}}}(fg) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j^{\grave{}}} f\right) g + (-1)^{|I|} f \left(\frac{\partial}{\partial x_j^{\grave{}}} g\right).$$

Todistus on samankaltainen oikean osittaisderivaatan tapauksessa ja on laajennettavissa monomeista, kunhan Grassmann-pariteetti säilyy. $\square$

Myös ketjusääntö on olemassa kyseisille muuttujille. Parillisten ja parittomien Grassmannin muuttujien takia on hyvä esittää ensin lemma koskien vain jatkuvasti derivoituvia funktioita, joiden sisäfunktio on Grassmann-parillinen kuvaus, jonka jälkeen laajennetaan se ketjusäännöksi superavaruuteen.

Lemma 5.1.7. *Olkoot $f\colon \Lambda^+(\Omega) \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio ja $g\colon \mathbb{R}^{m|2n} \to \Lambda^+(\Omega)$, missä $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin seuraava tulos on voimassa*

$$\frac{\partial f\left(g(x)\right)}{\partial x_j^{\grave{}}} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x_j^{\grave{}}}.$$

Todistus. Jatkuvasti derivoituva funktio f voidaan esittää sarjakehitelmänä

$$f(g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^k,$$

missä jono $\{a_k\}$ lähestyy nollaa. Funktio g on parillinen Grassmannin funktio, jonka voi jakaa kahteen osaan

$$g = g_2 + x_j^{\grave{}} g_1$$

ja koska tekijät ovat kommutoivia, voidaan käyttää binomilausetta potenssien esittämiseen. Tällöin

$$g^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_2^{k-i} \left(x_j^{\grave{}} g_1\right)^i = \sum_{i=0}^{1} \binom{k}{i} g_2^{k-i} \left(x_j^{\grave{}} g_1\right)^i = g_2^k + k g_2^{k-1} x_j^{\grave{}} g_1.$$

Joten

$$\frac{\partial f\left(g(x)\right)}{\partial x_j^{\grave{}}} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k g_2^{k-1} g_1.$$

Toisaalta

$$\frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x_j^{\grave{}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \left(g_2^{k-1} + (k-1) g^{k-2} x_j^{\grave{}} g_1\right)\right) g_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k g_2^{k-1} g_1 = \frac{\partial f\left(g(x)\right)}{\partial x_j^{\grave{}}}. \square$$

Lause 5.1.8. *([2, s. 75]) (Ketjusääntö derivaatoille) Olkoot funktiot* $u\colon \mathbb{R}^{m|2n} \to \Lambda^{+}(\Omega)$ *ja* $v\colon \mathbb{R}^{m|2n} \to \Lambda^{-}(\Omega)$*, missä* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$*. Tällöin jatkuvasti derivoituvan superfunktion osittaisderivaatta fermionisen muuttujan* $x^{\backprime}_j$ *suhteen on*

$$\frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} f(u(x,x^{\backprime}), v(x,x^{\backprime})) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} \left(\frac{\partial v_J}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial f}{\partial v_J}(u,v) + \frac{\partial u_J}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial f}{\partial u_J}(u,v) \right).$$

Todistus. Lauseen funktiot u ja v ovat kirjoitettavissa seuraavasti

$$v = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} v_J(x,x^{\backprime}) = \sum_{|J| \text{ pariton}} \hat{v}_J(x) x^{\backprime}_J,$$

$$u = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} u_J(x,x^{\backprime}) = \sum_{|J| \text{ parillinen}} \hat{u}_J(x) x^{\backprime}_J,$$

missä $\hat{v}_J$ ja $\hat{u}_J$ ovat kuvauksia reaalilukujen joukkoon. Täten superfunktio f on esitettävissä muodossa

$$f(u,v) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} f_J(u) v_J.$$

ja Lemman 5.1.6 perusteella voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\backprime}_j} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} \left(\frac{\partial f_J(u)}{\partial x^{\backprime}_j} v_J + f_J(u) \frac{\partial v_J}{\partial x^{\backprime}_j} \right),$$

koska u on Grassmann-parillinen funktio. Todistetaan ensin funktioita v_J sisältävä osuus. Superfunktio f voidaan jakaa sellaisiin osiin, joista vain toisessa esiintyy muuttuja $x^{\backprime}_j$ joidenkin funktioiden v_I kautta. Täten

$$f = \sum f_{I_1} v_{I_1} + \sum f_{I_2} x^{\backprime}_j v_{I_2}.$$

Tällöin

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} f_J \frac{\partial v_J}{\partial x^{\backprime}_j} = \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{|I_2|=k} f_{I_2} v_{I_2} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|I_2|=k} v_{I_2} \frac{\partial f}{\partial \left(x^{\backprime}_j v_{I_2} \right)}.$$

Merkitsemällä $v_I = x^{\backprime}_j v_{I_2}$ saadaan esitys muotoon

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} f_J \frac{\partial v_J}{\partial x^{\backprime}_j} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|I_2|=k} \frac{\partial v_I}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial f}{\partial v_I} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} \frac{\partial v_J}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial f}{\partial v_J}.$$

Todistetaan nyt samainen sisäfunktiota u koskien. Juuri todistetun perusteella

$$\frac{\partial u}{\partial x^{\backprime}_j} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} \hat{u}_J \frac{\partial x^{\backprime}_J}{\partial x^{\backprime}_j} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} \frac{\partial u_J}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial u}{\partial u_J}.$$

Huomataan seuraavaksi, että parilliset Grassmannin muuttujat toteuttavat reaaliset derivointisäännöt, joten parillisella muuttujalla u_J pätee ketjusääntö

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u_J} = \frac{\partial u}{\partial u_J} \frac{\partial f}{\partial u}$$

jokaisella indeksijoukolla J. Tätä tulosta käyttämällä kommutoivan osan derivaatan esitykseksi saadaan

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} \frac{\partial u_J}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial f}{\partial u_J} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} \frac{\partial u_J}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial u}{\partial u_J} \frac{\partial f}{\partial u},$$

jonka voi kirjoittaa muodossa

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{|J|=k} \frac{\partial u_J}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial f}{\partial u_J} = \frac{\partial u}{\partial x^{\backprime}_j} \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Yhtälön oikea puoli on Lemman 5.1.7 mukaan yhtä kuin $f(u)$ derivaatta muuttujan $x^{\backprime}_j$ suhteen. Täten ketjusääntö voidaan esittää lauseen muodossa. $\square$

Ketjusäännön ehto jatkuvasta derivoituvuudesta johtuu sisäfunktion u luonteesta. Joukko Λ^- saadaan kuvattua vain jatkuvasti derivoituvien kuvausten avulla. Jos funktion u määrittelyjoukko olisi vain Λ^+, niin monenlaiset kuvaukset $u\colon \Lambda^+ \to \mathbb{R}$ olisivat käypiä, sillä määrittelyjoukko olisi kirjoitettavissa muodossa $\mathbb{R} \oplus \Lambda^+$.

Superanalyysissä muuttuja-alkiot mielletään vektoreiksi. Antisymmetriset rakenteet geometriassa liittyvät niin kutsuttuihin symplektisiin avaruuksiin. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^{0|2n}$ on symplektinen avaruus varustettuna 2-muodolla

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Kannassa $\{e_1, f_1, ..., e_n, f_n\}$ voidaan määritellä metriikka, jolla on matriisiesitys

$$\Omega = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} e_1 & f_1 & \cdots & e_n & f_n \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ f_1 \\ \vdots \\ e_n \\ f_n \end{array} \end{array}. \tag{5.1}$$

Kyseisen metriikan avulla voidaan määritellä $\mathbb{R}^{m|2n}$:n harmonisen analyysin kannalta käyttökelpoinen ortosymplektinen metriikka.

Määritelmä 5.1.9. *Ortosymplektisen metriikan matriisiesitys* avaruudessa $\mathbb{R}^{m|2n}$ on

$$g = \begin{bmatrix} -I_m & O \\ O & J_{2n} \end{bmatrix},$$

missä

$$J_{2n} = \frac{1}{2}\Omega.$$

Matriisi Ω on esitetty yhtälössä 5.1.

Metriikan g komponentit ovat

$$\begin{cases} g^{jj} = -1, & 1 \leq j \leq m, \\ g^{2j+1+m,2j+m} = \dfrac{1}{2}, & 1 \leq j \leq n, \\ g^{2j+m,2j-1+m} = -\dfrac{1}{2}, & 1 \leq j \leq n, \\ g^{ij} = 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Jotta kyseinen metriikka voidaan määrittää fermionisille muuttujille, on kyseisten muuttujien määrän oltava parillinen. Määritellään seuraavaksi kontravariantit muuttujat.

Määritelmä 5.1.10. Muuttujan x_j *kontravarianttia muuttujaa* merkitään x^j ja se saadaan laskemalla

$$x^j = \sum_{i=1}^{m+2n} x_i g^{ij}.$$

Kontravarianttien muuttujien avulla voidaan perustella alkioiden jako bosonisiin ja fermionisiin muuttujiin: Bosoniset alkiot ovat kommutatiivisia muuttujia ja siksi vasta-alkioita kontravarianttiensa kanssa, eli

$$x^j = -x_j.$$

Fermioniset alkiot ovat vastaavasti antikommutatiivisia ja niille pätevät

$$\begin{aligned} x^{\grave{}2j-1} &= -\frac{1}{2}x\grave{}_{2j}, \\ x^{\grave{}2j} &= \frac{1}{2}x\grave{}_{2j-1}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt sisätuloa ortosymplektisessä metriikassa. Laskemalla saadaan esitys sisätulolle, kun vektorit ovat muotoa $x = (\underline{x}, \underline{x}\grave{})$.

Propositio 5.1.11. *([9, s. 2]) Vektorien $x = (\underline{x}, \underline{x}\grave{})$ ja $y = (\underline{y}, \underline{y}\grave{})$ sisätulo voidaan kirjoittaa muodossa*

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \underline{x}\grave{}, \underline{y}\grave{} \right\rangle - \left\langle \underline{x}, \underline{y} \right\rangle,$$

kun määritellään

$$\begin{aligned} \left\langle \underline{x}, \underline{y} \right\rangle &:= \sum_{j=1}^{m} x_j y_j, \\ \left\langle \underline{x}\grave{}, \underline{y}\grave{} \right\rangle &:= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \left(x\grave{}_{2j-1} y\grave{}_{2j} - x\grave{}_{2j} y\grave{}_{2j-1} \right). \end{aligned}$$

Todistus. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \sum_{k=1}^{m+2n} x^k y_k \\ &= \sum_{j=1}^{m} x^j y_j + \sum_{j \text{ pariton}} x^{\grave{}j} y\grave{}_j + \sum_{j \text{ parillinen}} x^{\grave{}j} y\grave{}_j \\ &= -\sum_{j=1}^{m} x_j y_j - \frac{1}{2}\sum_{j \text{ pariton}} x\grave{}_{j+1} y\grave{}_j + \frac{1}{2}\sum_{j \text{ parillinen}} x\grave{}_{j-1} y\grave{}_j \\ &= -\sum_{j=1}^{m} x_j y_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \left(x\grave{}_{2j-1} y\grave{}_{2j} - x\grave{}_{2j} y\grave{}_{2j-1} \right) \\ &=: \left\langle \underline{x}\grave{}, \underline{y}\grave{} \right\rangle - \left\langle \underline{x}, \underline{y} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Tällöin yleistetyn normin neliö voidaan kirjoittaa seuraavasti

Seuraus 5.1.12. *([11, s. 1321]) Yleistetty normin neliö on*

$$x^2 = \langle \grave{\underline{x}}, \grave{\underline{x}} \rangle - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \grave{x}_{2j-1} \grave{x}_{2j} - \sum_{j=1}^{m} x_j x_j.$$

Merkitään tästä eteenpäin

$$r_b^2 = -\underline{x}^2 = \sum_{j=1}^{m} x_j^2,$$

$$(\grave{\underline{x}})^2 = \sum_{j=1}^{n} \grave{x}_{2j-1} \grave{x}_{2j},$$

jolloin yleistetyn normin neliön avulla saadaan määriteltyä

$$r^2 := -x^2 = r_b^2 - (\grave{\underline{x}})^2. \tag{5.2}$$

5.2 Laplacen operaattori, bosoninen ja fermioninen Cliffordin analyysi

5.2.1 Laplacen operaattori

Lasketaan aluksi ortosymplektiselle metriikalle inverssi

$$g^{-1} = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} -I & & & & & & \\ & 0 & -2 & & & & \\ & 2 & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & -2 \\ & & & & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

jolloin

$$\begin{cases} g_{jj} = -1, & 1 \leq j \leq m, \\ g_{2j-1+m,2j+m} = -2, & 1 \leq j \leq n, \\ g_{2j+m,2j-1+m} = 2, & 1 \leq j \leq n, \\ g_{ij} = 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Seuraavaksi esitellään Laplacen operaattori metriikan avulla ja tarkastellaan sen käyttäytymistä harmonisessa superanalyysissä.

Lause 5.2.1. *([17, s. 88]) Metriikan g indusoima Laplacen operaattori on*

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \sum_{i,j=1}^{m+2n} \frac{\partial}{\partial z_i} g_{ij} \sqrt{|\det(g)|} \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Lause 5.2.2. *Superanalyysissä Laplacen operaattori voidaan esittää bosonisen ja fermionisen Laplacen operaattorin summana*

$$\Delta = \Delta_b + \Delta_f,$$

missä

$$\Delta_b f = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

ja

$$\Delta_f f = 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \grave{x}_{2j-1} \partial \grave{x}_{2j}}$$

kaikilla kahdesti differentioituvilla superfunktioilla f.

Todistus. Koska tässä tapauksessa metriikan matriisiesitys g on vakiomatriisi, niin Määritelmän 5.2.1 merkinnöin voidaan kirjoittaa

$$\Delta f = -\sum_{i,j=1}^{m+2n} g_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}.$$

Sovelletaan metriikan komponenttien esityksiä 5.3, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} - \sum_{j=1}^{n} g_{2j-1+m,2j+m} \frac{\partial^2 f}{\partial \grave{x}_{2j-1} \partial \grave{x}_{2j}} - \sum_{j=1}^{n} g_{2j+m,2j-1+m} \frac{\partial^2 f}{\partial \grave{x}_{2j} \partial \grave{x}_{2j-2}} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{n} 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \grave{x}_{2j-1} \partial \grave{x}_{2j}} - \frac{\partial^2 f}{\partial \grave{x}_{2j} \partial \grave{x}_{2j-1}} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}}_{\Delta_b} + \underbrace{4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \grave{x}_{2j-1} \partial \grave{x}_{2j}}}_{\Delta_f}.
\end{aligned}$$

□

5.2.2 Bosoninen ja fermioninen Cliffordin analyysi

Yleisen määritelmänsä mukaan Diracin operaattorit ovat operaattoreita, joiden neliöt ovat Laplacen operaattoreita. Tässä osiossa pyritään rakentamaan Diracin operaattori, jonka neliö tuottaa aiemmin esitellyn Superavaruuden Laplacen operaattorin. Superavaruuden K-algebra saadaan selville määrittelemällä Diracin operaattori Laplacen operaattorin "neliöjuurena".

Superavaruuden Diracin operaattorin voi jakaa Laplacen operaattorin tavoin bosoniseen ja fermioniseen osaan. Laplacen operaattorin bosoninen osa on lineaarinen, joten se voidaan esittää Lemmaan 4.3.3 nojaten Cliffordin algebran Diracin operaattorin neliön avulla

$$\Delta_b = -D^2.$$

Tällöin bosoniset kanta-alkiot $\{e_1, ..., e_m\}$ generoivat Cliffordin algebran $C\ell_{0,m}$. Cliffordin algebrassa käytetty Diracin operaattori ei ole kuitenkaan täysin tuollaisenaan laajennettavissa superavaruuden vastaavaksi operaattoriksi; lisäksi tarvitaan Weylin algebra fermionisen Diracin operaattorin esittämiseen.

Määritelmä 5.2.3. ([10, s. 2979]) *(Weylin algebra)* Olkoot alkiot $\{\grave{e}_1, ..., \grave{e}_{2n}\}$ Weylin algebran $\mathcal{W}_{2n}$ generaattorit. Tällöin niillä on ominaisuudet

1. $\grave{e}_{2j-1}\grave{e}_{2k} - \grave{e}_{2k}\grave{e}_{2j-1} = \delta_{jk}$,
2. $\grave{e}_{2j}\grave{e}_{2k} = \grave{e}_{2k}\grave{e}_{2j}$,
3. $\grave{e}_{2j-1}\grave{e}_{2k-1} = \grave{e}_{2k-1}\grave{e}_{2j-1}$,

kaikilla indekseillä $1 \leq j, k \leq n$.

Seuraavaksi voidaan esittää määritelmä superavaruuden Diracin operaattorille.

Määritelmä 5.2.4. ([11, s. 1322]) Määritellään superavaruuden $\mathbb{R}^{m|2n}$ *bosoniseksi Diracin operaattoriksi*

$$D_b = \sum_{j=1} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

ja *fermioniseksi Diracin operaattoriksi*

$$D_f = 2\sum_{j=1}^{n} \left(\grave{e}_{2j} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j-1}} - \grave{e}_{2j-1} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j}} \right).$$

Superavaruuden Diracin operaattori mielivaltaiselle superfunktiolle f on muotoa

$$Df = -D_b f + D_f f.$$

Esitysteoriassa Diracin operaattori määritellään usein lokaalisen ortogonaalisen kannan avulla asettamatta kannan algebralle ehtoja. Seuraava lause todistaa, että fermionisen Dirac-operaattorin neliö todella on fermioninen Laplacen operaattori.

Lause 5.2.5. *Jokainen kahdesti differentioituva superfunktio toteuttaa yhtälön*

$$D_f^2 f = \Delta_f f.$$

Todistus. Olkoon f mielivaltainen kahdesti differentioituva superfunktio, jolloin

$$\begin{aligned}
D_f^2 f &= 4\sum_{i,j}^{n} \left(e^{\backprime}_{2i} \frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_{2i-1}} - e^{\backprime}_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_{2i}} \right) \left(e^{\backprime}_{2j} \frac{\partial f}{\partial x^{\backprime}_{2j-1}} - e^{\backprime}_{2j-1} \frac{\partial f}{\partial x^{\backprime}_{2j}} \right) \\
&= -4\sum_{j=1}^{n} e^{\backprime}_{2j-1} e^{\backprime}_{2j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\backprime}_{2j} \partial x^{\backprime}_{2j-1}} - 4\sum_{j=1}^{n} e^{\backprime}_{2j} e^{\backprime}_{2j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\backprime}_{2j-1} \partial x^{\backprime}_{2j}} \\
&+ 4\sum_{j=1}^{2n} e^{\backprime 2}_{j} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\backprime 2}_{j}}}_{=0} + 4\sum_{i-j\geq 2} (-1)^{i+j} e^{\backprime}_{i} e^{\backprime}_{j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\backprime}_{i} \partial x^{\backprime}_{j}} + 4\sum_{i-j\leq 2} (-1)^{i+j} e^{\backprime}_{i} e^{\backprime}_{j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\backprime}_{i} \partial x^{\backprime}_{j}}.
\end{aligned}$$

Derivaattojen antikommutaatiota käyttämällä saadaan

$$D_f^2 f = 4\sum_{j=1}^{n} \left(e^{\backprime}_{2j-1} e^{\backprime}_{2j} - e^{\backprime}_{2j} e^{\backprime}_{2j-1} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\backprime}_{2j-1} \partial x^{\backprime}_{2j}} + 4\sum_{i-j\geq 2} (-1)^{i+j} \left(e^{\backprime}_{i} e^{\backprime}_{j} - e^{\backprime}_{j} e^{\backprime}_{i} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\backprime}_{i} \partial x^{\backprime}_{j}}.$$

Kanta-alkiot $\{e^{\backprime}_1, e^{\backprime}_2, ..., e^{\backprime}_{2n}\}$ generoivat Weylin algebra $\mathcal{W}_{2n}$. Tällöin Weylin algebran laskusääntöjen nojalla

$$D_f^2 f = 4\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\backprime}_{2j-1} \partial x^{\backprime}_{2j}}. \qquad \square$$

Seuraus 5.2.6. *Määritetyillä Diracin operaattoreilla on ominaisuudet* $D_b^2 = -\Delta_b$, $D_f^2 = \Delta_f$ *ja* $D^2 = \Delta$.

Superalgebra on nyt rakennettu. Lähtökohtana oli saada esitys Laplacen operaattorille. Huomattiin, että operaattorin saattoi jakaa bosoniseen ja fermioniseen osaan, joille löydettiin edelleen neliölliset tekijäoperaattorit – Diracin operaattorit D_b ja D_f sopivissa algebroissa. Laplacen operaattori voidaan esittää kuten yleistetty normin neliö

$$\Delta = -D_b^2 + D_f^2 = D^2.$$

Superavaruuden algebran generoi siis Cliffordin algebra $C\ell_{0,m}$ – jota merkitään usein $C\ell_m$ – ja Weylin algebra $\mathcal{W}_{2n}$. Superavaruuden algebraa merkitään

$$\mathbb{S}^{m|2n} := \mathbb{R} \otimes \Lambda_{2n} \otimes C\ell_m \otimes \mathcal{W}_{2n}. \tag{5.4}$$

Superavaruus $\mathbb{R}^{m|2n}$ voidaan ajatella avaruuden $\mathbb{S}^{m|2n}$ osajoukkona, jolloin on olemassa upotus $\mathbb{R}^{m|2n} \hookrightarrow \mathbb{S}^{m|2n}$ eli injektiivinen isometrinen kuvaus, joka kuvaa superavaruuden $\mathbb{R}^{m|2n}$ superavaruuden algebran aliavaruudeksi siten, että ne ovat isomorfiset.

Määritelmä 5.2.7. *(Superavaruuden upotus)* Kuvaus

$$(x_1, ..., x_m, \grave{x}_1, ..., \grave{x}_{2n}) \mapsto x = \underline{x} + \underline{\grave{x}},$$

missä

$$\underline{x} = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$$

ja

$$\underline{\grave{x}} = \grave{x}_1 \grave{e}_1 + \cdots + \grave{x}_{2n} \grave{e}_{2n},$$

määrittelee upotuksen

$$\mathbb{R}^{m|2n} \hookrightarrow \mathbb{S}^{m|2n},$$

missä $\mathbb{S}^{m|2n}$ on esitetty kaavassa 5.4.

Avaruutta $\mathbb{S}^{m|2n}$ sanotaan Clifford-Weylin algebraksi tai superavaruuden algebraksi ja sen generaattoreille pätevät seuraavat laskusäännöt

1. $e_j e_k + e_k e_j = -2\delta_{jk}$,
2. $\grave{e}_{2j-1} \grave{e}_{2k} - \grave{e}_{2k} \grave{e}_{2j-1} = \delta_{jk}$,
3. $\grave{e}_{2j} \grave{e}_{2k} = \grave{e}_{2k} \grave{e}_{2j}$,
4. $\grave{e}_{2j-1} \grave{e}_{2k-1} = \grave{e}_{2k-1} \grave{e}_{2j-1}$,
5. $e_j \grave{e}_k = -\grave{e}_k e_j$.

5.3 Superanalyysin tuloksia

Tarkastellaan aluksi vektorimuuttujan $x = \underline{x} + \underline{\grave{x}}$ operointia Diracin operaattorilla.

Propositio 5.3.1. *([8, s. 12]) Clifford-Weylin algebran $\mathbb{S}^{m|2n}$ vektorille x pätee Diracin operaattorilla operoidessa*

$$Dx = m - 2n.$$

Todistus. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} Dx &= D_f \sum_{j=1}^{n} \left(\grave{x}_{2j} \grave{e}_{2j} + \grave{x}_{2j-1} \grave{e}_{2j-1} \right) - D_b \sum_{j=1}^{m} x_j e_j \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n} (\grave{e}_{2j} \grave{e}_{2j-1} - \grave{e}_{2j-1} \grave{e}_{2j}) - \sum_{j=1}^{m} e_j^2 \\ &= m - 2n. \end{aligned}$$

□

Tämä luku esiintyy monissa tuloksissa ja se kuvaa yleistettyä dimensiota.

Määritelmä 5.3.2. ([8, s. 12]) Clifford-Weylin algebran $\mathbb{S}^{m|2n}$ *superdimensio* M on kokonaisluku $M = m - 2n$.

Määritellään seuraavaksi Eulerin operaattorit

Määritelmä 5.3.3. ([8, s. 13]) Bosoninen Eulerin operaattori on muotoa

$$\mathbb{E}_b = \sum_{j=1}^{m} x_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

fermioninen on muotoa

$$\mathbb{E}_f = \sum_{j=1}^{2n} \grave{x}_j \frac{\partial}{\partial \grave{x}_j}$$

ja *Euler-operaattori Clifford-Weylin algebrassa* on

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_b + \mathbb{E}_f.$$

Propositio 5.3.4. *Jokaista superfunktiota f kohti pätee kommutaatiosääntö*

$$\mathbb{E}(xf) - x\mathbb{E}f = xf.$$

Kommutaattorin avulla ilmaistuna

$$[\mathbb{E}, x] = x.$$

Todistus. Reaalisen ja fermionisen Leibnizin säännön 5.1.6 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(xf) = \sum_{j=1}^{m+2n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} xf &= \sum_{j=1}^{m} x_j \left(e_j f + x \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^{2n} \grave{x}_j \left(\grave{e}_j f + (\underline{x} - \underline{\grave{x}}) \frac{\partial f}{\partial \grave{x}_j} \right) \\ &= xf + x\mathbb{E}_b f + \sum_{j=1}^{2n} (\underline{x} + \underline{\grave{x}}) \grave{x}_j \frac{\partial f}{\partial \grave{x}_j} = x\mathbb{E}f + xf. \qquad \square\end{aligned}$$

Seuraus 5.3.5. *Clifford-Weylin algebran Eulerin operaattorilla on seuraava ominaisuus, kun $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}x^k = kx^k.$$

Todistus. Proposition 5.3.4 perusteella tapaus $k = 1$ on selvä ja voidaan induktiotodistaa väite olettamalla se todeksi kaikilla potensseilla korkeintaan k ja todistamalla väite tapauksessa $k + 1$. Proposition 5.3.4 nojalla

$$\mathbb{E}\left(xx^k\right) = x\mathbb{E}x^k + xx^k,$$

josta oletuksen puolesta tiedetään tulos Eulerin operaattorilla operoidulle funktiolle x^k. Täten

$$\mathbb{E}\left(xx^k\right) = x\left(kx^k\right) + xx^k = (k+1)x^{k+1}. \qquad \square$$

Nyt voidaan todistaa tärkeä operaattoreita koskeva lemma, jossa esiintyy sekä superdimensio että Clifford-Weylin algebran Euler-operaattori.

Lemma 5.3.6. *([8, s. 14]) Olkoon f mikä tahansa differentioituva superfunktio avaruudessa $\mathbb{S}^{m|2n}$. Tällöin pätee tulos*

$$xD(f) + D(xf) = (2\mathbb{E} + M)\, f.$$

Todistus. Tarkastellaan osaa $D(xf)$

$$\begin{aligned} D(xf) &= D_f(\underline{x}f + \underline{\grave{x}}f) - D_b(\underline{x}f + \underline{\grave{x}}f) \\ &= -\underline{x}D_f f + D_f(\underline{\grave{x}}f) - D_b(\underline{x}f) + \underline{\grave{x}}D_b f. \end{aligned}$$

Lisäksi voidaan kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
D_b(\underline{x}f) &= \sum_{i,j=1}^{m} e_j e_i \frac{\partial x_i f}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{m} e_j e_i \left(\delta_{ij} f + \underline{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\
&= -mf - \mathbb{E}_b f - \sum_{i \neq j} e_i e_j \underline{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= -mf - \mathbb{E}_b f - (\underline{x} D_b + \mathbb{E}_b) f \\
&= -(m + 2\mathbb{E}_b + \underline{x} D_b) f.
\end{aligned}
$$

Vastaavasti fermioniselle tapaukselle

$$
\begin{aligned}
D_f(\grave{\underline{x}} f) &= 2 \sum_{j=1}^{n} \left(\grave{e}_{2j} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j-1}} - \grave{e}_{2j-1} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j}} \right) \sum_{i=1}^{n} (\grave{e}_{2i} \grave{\underline{x}}_{2i} + \grave{e}_{2i-1} \grave{\underline{x}}_{2i-1}) f \\
&= 2 \sum_{i \neq j} \left(\grave{e}_{2j} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j-1}} - \grave{e}_{2j-1} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j}} \right) (\grave{e}_{2i} \grave{\underline{x}}_{2i} + \grave{e}_{2i-1} \grave{\underline{x}}_{2i-1}) f \\
&+ 2 \sum_{j=1}^{n} \left(\grave{e}_{2j} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j-1}} - \grave{e}_{2j-1} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j}} \right) (\grave{e}_{2j} \grave{\underline{x}}_{2j} + \grave{e}_{2j-1} \grave{\underline{x}}_{2j-1}) f \\
&= -2 \sum_{i \neq j} (\grave{e}_{2i} \grave{\underline{x}}_{2i} + \grave{e}_{2i-1} \grave{\underline{x}}_{2i-1}) \left(\grave{e}_{2j} \frac{\partial f}{\partial \grave{x}_{2j-1}} - \grave{e}_{2j-1} \frac{\partial f}{\partial \grave{x}_{2j}} \right) \\
&+ 2 \sum_{j=1}^{n} \left(\grave{e}_{2j} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j-1}} - \grave{e}_{2j-1} \frac{\partial}{\partial \grave{x}_{2j}} \right) (\grave{e}_{2j} \grave{\underline{x}}_{2j} + \grave{e}_{2j-1} \grave{\underline{x}}_{2j-1}) f \\
&= -2 \sum_{i,j}^{n} (\grave{e}_{2i} \grave{\underline{x}}_{2i} + \grave{e}_{2i-1} \grave{\underline{x}}_{2i-1}) \left(\grave{e}_{2j} \frac{\partial f}{\partial \grave{x}_{2j-1}} - \grave{e}_{2j-1} \frac{\partial f}{\partial \grave{x}_{2j}} \right) - 2nf + 2\mathbb{E}_f f \\
&= \left(-\grave{\underline{x}} D_f - 2n + 2\mathbb{E}_f \right) f.
\end{aligned}
$$

Täten

$$
D(xf) = -xD_f f + 2\mathbb{E}_f f - 2nf + mf + 2\mathbb{E}_b f + xD_b f = (M + 2\mathbb{E})\, f - xDf.
$$

Mikä todistaa väitteen. □

Lemma 5.3.7. *Seuraava tulos pätee avaruuden $\Lambda_{2n} \otimes \mathcal{W}_{2n}$ fermionisille vektoreille. Jos $0 \leq k \leq n$, niin*

$$
(\grave{\underline{x}})^{2k} = k! \sum_{|I|=k} (\grave{\underline{x}})_I^2 ,
$$

missä

$$(\grave{\underline{x}})_I^2 = \prod_{i\in I} \grave{\underline{x}}_{2i-1}\grave{\underline{x}}_{2i}$$

ja I on kasvavasti järjestetty indeksijoukko. Tarkentaen $I = \{i_1, ..., i_k\}$, missä $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$.

Todistus. Lasketaan aluksi

$$(\grave{\underline{x}})^2 = \sum_{j=1}^{n} \grave{e}_{2j-1}\grave{e}_{2j}\grave{\underline{x}}_{2j-1}\grave{\underline{x}}_{2j} + \sum_{j=1}^{n} \grave{e}_{2j}\grave{e}_{2j-1}\grave{\underline{x}}_{2j}\grave{\underline{x}}_{2j-1} + \sum_{i\neq j}(\grave{e}_i\grave{e}_j - \grave{e}_j\grave{e}_i)\grave{\underline{x}}_i\grave{\underline{x}}_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \grave{\underline{x}}_{2j-1}\grave{\underline{x}}_{2j}.$$

Koska tekijät $\grave{\underline{x}}_{2j-1}\grave{\underline{x}}_{2j}$ kommutoivat keskenään, voidaan käyttää multinomilausetta korottaessa edellisen potenssiin k. Tällöin

$$(\grave{\underline{x}})^{2k} = \left(\sum_{j=1}^{n} \grave{\underline{x}}_{2j-1}\grave{\underline{x}}_{2j}\right)^k = \sum_{|I|=k} \binom{k}{i_1, ..., i_n} \prod_{j=1}^{n} \left(\grave{\underline{x}}_{2j-1}\grave{\underline{x}}_{2j}\right)^{h_j}$$
$$= \sum_{|I|=k} \binom{k}{\underline{1}_k} \prod_{j=1}^{n} \left(\grave{\underline{x}}_{2j-1}\grave{\underline{x}}_{2j}\right)^{h_j} = k! \sum_{|I|=k} \prod_{i\in I} \grave{\underline{x}}_{2i-1}\grave{\underline{x}}_{2i},$$

missä $\underline{1}_k$ on k-pituinen ykkösjono. Täten väite on todistettu. □

Lemma 5.3.8. *([11, s. 1322]) Diracin operaattorilla operoidessa potenssiin k korotettuja supervektoreita saadaan seuraava tulos*

$$Dx^k = \frac{1}{2}\left[2k + M - 1 + (-1)^{k-1}(M-1)\right] x^{k-1},$$

kun $1 \leq k \leq 2n$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Tapauksen $k = 1$ tiedetään olevan Proposition 5.3.1 nojalla

$$Dx = M = \frac{2M + 2 - 2}{2}.$$

Tehdään induktio-oletus, että väite pätee korkeintaan eräällä potenssilla k ja todistetaan se päteväksi tapauksella $k + 1$ käyttäen Lemmaa 5.3.6 ja Propositiota 5.3.5

saadaan

$$\begin{aligned} Dx^{k+1} &= D(xx^k) = (2\mathbb{E} + M)x^k - xDx^k \\ &= 2kx^k + Mx^k - \frac{1}{2}\left[2k + M - 1 + (-1)^{k-1}(M-1)\right]x^k \\ &= \frac{1}{2}\left[2k + M + 1 - (-1)^{k-1}(M-1)\right]x^k \\ &= \frac{1}{2}\left[2(k+1) + M - 1 + (-1)^{k}(M-1)\right]x^k, \end{aligned}$$

joten lauseke pätee myös tapauksessa $k+1$ ja todistaa väitteen. □

Edellisestä saadaan suorana seurauksena seuraava lemma.

Lemma 5.3.9. *Laplacen operaattori antaa Clifford-Weylin algebran $\mathbb{S}^{m|2n}$ vektorin parilliselle potenssille tuloksen*

$$\Delta x^{2k} = 2k(M + 2k - 2)x^{2(k-1)}.$$

Todistus. Lemmaa 5.3.8 soveltamalla saadaan

$$\Delta x^{2k} = 2kDx^{2k-1} = 2k(M + 2k - 2)x^{2(k-1)}.$$ □

Lemma 5.3.10. *Olkoon $g\colon \Lambda_{2n} \to \mathbb{R}^k \otimes \Lambda_{2n}$ jatkuvasti derivoituva funktio. Tällöin kuvauksen derivaatalle pätee ketjusääntö*

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\backprime}_j}\left((x^{\backprime})^2\right) = \frac{\partial (x^{\backprime})^2}{\partial x^{\backprime}_j} g'\left((x^{\backprime})^2\right),$$

missä g' on derivaattafunktio.

Todistus. Mikä tahansa fermionisten muuttujien neliöiden kuvaus voidaan esittää muodossa

$$g(x'^2) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x')^{2k},$$

missä kertoimet a_k ovat reaalilukuja. Derivaattafunktio on muuttujalle y kirjoitettuna

$$g'(y) = \frac{\partial g(y)}{\partial y} = \sum_{k=1}^{n} a_k k(y)^{k-1}.$$

Kirjoitetaan auki osittaisderivaatta muuuttujan $x^{\backprime}_j$ suhteen käyttäen apuna Lemmaa 5.3.7

$$\begin{aligned}\frac{\partial g\left((x^{\backprime})^2\right)}{\partial x^{\backprime}_j} &= \sum_{k=0}^{n} k! a_k \frac{\partial}{\partial x^{\backprime}_j} \sum_{|I|=k} (\underline{x}^{\backprime})^2_I = \sum_{k=1}^{n} k! a_k \sum_{|J|=k-1} x^{\backprime}_{j+1} (\underline{x}^{\backprime})^2_J \\ &= \sum_{k=1}^{n} k a_k \frac{\partial (x^{\backprime})^2}{\partial x^{\backprime}_j} (x^{\backprime})^{2(k-1)},\end{aligned}$$

kun j on pariton ja

$$\frac{\partial g\left((x^{\backprime})^2\right)}{\partial x^{\backprime}_j} = -\sum_{k=1}^{n} k! a_k \sum_{|J|=k-1} x^{\backprime}_{j-1} (\underline{x}^{\backprime})^2_J = \sum_{k=1}^{n} k a_k \frac{\partial (x^{\backprime})^2}{\partial x^{\backprime}_j} (x^{\backprime})^{2(k-1)},$$

kun j on parillinen. Kummassakin tapauksessa saadut tulokset ovat samat kuin väitetty

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\backprime}_j}\left((x^{\backprime})^2\right) = \frac{\partial (x^{\backprime})^2}{\partial x^{\backprime}_j} g'\left((x^{\backprime})^2\right).$$

Funktion g kertoimia muuttamalla tulos voidaan laajentaa maalijoukon suhteen useampaan ulottuvuuteen. $\square$

6. SUPERANALYYSIÄ HYPERBOLISESSA KONFORMISESSA YKSIKKÖPALLOSSA

Edellisessä luvussa määriteltyä superanalyysiä voidaan alkaa soveltaa valittuun avaruuteen – yksikköpalloon. Tässä luvussa tarkoituksena on rakentaa yksikköpalloon hyperbolinen konforminen metriikka ja tutkia sen ominaisuuksia. Tämän jälkeen esitetään Laplacen operaattori tälle avaruudelle samalla tavoin kuin edeltäneessä luvussa. Lopuksi etsitään tietyntyyppisiä harmonisia superfunktioita hyperbolisessa konformisessa yksikköpallossa.

6.1 Hyperbolisen konformisen yksikköpallon Riemannin geometriaa

Tässä alaluvussa tutkitaan, millaisia ominaisuuksia hyperbolisella konformisella metriikalla ja geometrialla on bosonisessa tapauksessa. Tekstissä edetään määrittelemällä jokin Riemannin geometriaan liittyvä konsepti, jonka jälkeen sitä sovelletaan tarkasteltavana olevaan monistoon ja siirrytään toiseen konseptiin. Alaluvun päätulos vastaa kysymykseen, onko hyperbolinen konforminen yksikköpallo konformisesti laakea (*conformally flat*).

Tavanomaisessa hyperbolisessa tapauksessa käytetään avaruuden $\mathbb{R}^k$ alimonistoa, eli avaruutta

$$M_\lambda = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^k | \ \lambda(\underline{x}) > 0 \right\},$$

jossa λ on jatkuvasti derivoituva funktio. Tälle avaruudelle määritellään hyperbolinen konforminen metriikka

$$(ds')^2 = \frac{ds^2}{\lambda^{\alpha/(k-2)}},$$

missä α on reaaliluku. Vastaavana metriikan matriisiesityksenä

$$g' = \frac{g}{\lambda^{\alpha/(k-2)}},$$

missä g on tässä kontekstissa Määritelmän 5.1.9 ortosymplektinen metriikka avaruudessa $\mathbb{R}^{m|0}$, eli bosonisessa avaruudessa. Bosonisen yksikköpallon tapauksessa avaruus on

$$M_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{S}^{m|0} \middle| \, r^2 < 1 \right\},$$

jolloin $\lambda(\underline{x}) = 1 - r^2 = 1 - r_b^2$. Näin ollen metriikalle on matriisiesitys

$$g' = \frac{g}{(1-r^2)^{\frac{\alpha}{m-2}}}.$$

Hyperbolinen konforminen metriikka on yleistetty tapaus hyperbolisesta metriikasta, jossa α on kiinnitetty arvoon $2(m-2)$. Geometrialtaan nämä avaruudet ovat hyvin samankaltaisia. Merkitään merkintöjen yksinkertaistukseksi $\beta := \alpha/(m-2)$, jolloin metriikka on $ds/(1-r^2)^\beta$.

Riemannin geometriassa pari (M_{1-r^2}, g') kuuluu pseudo-Riemannin monistoihin. Nämä monistot ovat yleistyksiä Riemann-monistoista: perinteisen Riemannin moniston kvadraattiseen muotoon

$$q(x) = \sum_{j=1}^{m} x^j x_j$$

liitettävän bilineaarikuvauksen B_q on määritettävä sisätulo, mutta samaa rajoitetta ei ole pseudo-Riemannin monistoilla. Näiden monistojen bilineaarikuvaus voi olla myös negatiivinen tai saada arvokseen nollan muulloinkin kuin jommankumman argumentin ollessa nolla. Lähteessä [5] on annettu tarkempaa tietoa pseudo-Riemannin monistoista.

Tutkiessa monistoissa lyhintä reittiä kahden pisteen välillä tai moniston kaarevuutta, Christoffelin symboli on osoittautunut hyödylliseksi työkaluksi. Riemannin geometriassa Christoffelin symboli määritellään seuraavasti.

Määritelmä 6.1.1. ([17, s. 18]) Olkoon g metriikkatensori, tällöin

$$\Gamma^a_{ij} = \frac{1}{2} g^{ak} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

on *Christoffelin symboli* metriikkatensorin komponenttien avulla lausuttuna.

Määritelmästä on hyvä huomata, että yhtälön vasemman ja oikean puolen indeksointi ei täsmää, vaan oikealla esiintyy ylimääräinen indeksi k. Tässä on kyse merkintöjä yksinkertaistavasta *Einsteinin summasäännöstä*, joka tarkoittaa sitä, että ylimääräiset indeksit ovat juoksevia summatessa kaikkien muuttujien yli. Lisäksi on syytä muistaa, että tämän työn puitteissa metriikan komponenttiesityksen ja muuttujien ylä- ja alaindeksöinti on sovittu päinvastaiseksi suhteessa tavanomaiseen. Aukikirjoitettuna työssä esiintyvin merkinnöin

$$\Gamma_{ij}^{a} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} g_{ak} \left(\frac{\partial g^{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g^{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k} \right).$$

Tästä eteenpäin Einsteinin summaussääntö oletetaan tunnetuksi ja määritelmät indeksöidään työn omin merkkisäännöin.

Propositio 6.1.2. *Christoffelin symbolit hyperboliselle konformiselle yksikköpallolle ovat*

$$\Gamma_{ij}^{a} = \begin{cases} \frac{\beta}{1-r^2} \left(x_i \delta_{aj} + x_j \delta_{ai} \right), & i \neq j, \\ \frac{\beta}{1-r^2} \left(2x_j \delta_{aj} - x_a \right), & i = j. \end{cases}$$

Todistus. Lasketaan ensin komponenttifunktion g_{ij} derivaatta muuttujan x_a suhteen kaikilla indekseillä i, j ja a, eli

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_a} = -\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{1}{(1-r^2)^{\beta}} = -\frac{2\beta x_a}{(1-r)^{\beta+1}} \delta_{ij}.$$

Tällöin Christoffelin symboliksi saadaan

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{a} &= -\frac{\lambda^{\beta}}{2} \left(\frac{\partial g^{aj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g^{ai}}{\partial x_j} - \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_a} \right) \\ &= \frac{(1-r^2)^{\beta}}{2} \frac{2\beta}{(1-r^2)^{\beta+1}} \left(x_i \delta_{ja} + x_j \delta_{ia} - x_a \delta_{ij} \right) \\ &= \frac{\beta}{1-r^2} \left(x_i \delta_{ja} + x_j \delta_{ia} - x_a \delta_{ij} \right), \end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. □

Seuraus 6.1.3. *Hyperbolisen konformisen yksikköpallon geodeesit toteuttavat yhtälön*

$$(1-r^2)\frac{\mathrm{d}^2 x_a}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta \frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{m} x_j \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} - \beta x_a \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} \right)^2 = 0,$$

jonka voi kirjoittaa kahden funktion yhtälöparina

$$
\begin{aligned}
(1-r^2)\frac{\mathrm{d}^2 x_a}{\mathrm{d}t^2} + \beta x_a\left(\frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \beta\frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t} + \beta x_a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= 0,\\
(1-r^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \beta y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \beta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t} + \beta\frac{\mathrm{d}x_a^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \beta y\left(\frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= 0,
\end{aligned}
$$

missä

$$
y = \sum_{j=1\ j\neq a} e_j x_j \in C\ell_m.
$$

Tarkasteltavilla Christoffelin symboleilla on muutama laskentaa helpottava ominaisuus.

Lemma 6.1.4. *Hyperbolisen konformisen yksikköpallon Christoffelin symboleille pätevät*

(a) $\Gamma^a_{ij} = 0, \quad i \neq j \neq a,$

(b) $\Gamma^a_{aj} = \frac{\beta}{1-r^2}x_j$, *kaikilla indekseillä* $j = 1, .., m$,

(c) $\Gamma^a_{ij} = \begin{cases} \Gamma^j_{ai}, & i = j = a,\\ -\Gamma^j_{ai}, & j \neq a. \end{cases}$

Todistus. Ensimmäisen väitteen todistus on suoraviivainen, sillä

$$
\Gamma^a_{ij} = \frac{\beta}{1-r^2}\left(x_i \underbrace{\delta_{ja}}_{=0} + x_j \underbrace{\delta_{ia}}_{=0}\right) = 0.
$$

Seuraava saadaan kirjoittamalla symboli auki

$$
\begin{aligned}
\Gamma^a_{aj} &= \begin{cases} \frac{\beta}{1-r^2}x_j, & j \neq a\\ \frac{\beta}{1-r^2}\left(2x_a - x_a\right), & j = a \end{cases} = \begin{cases} \frac{\beta}{1-r^2}x_j, & j \neq a\\ \frac{\beta}{1-r^2}x_a, & j = a \end{cases}\\
&= \frac{\beta}{1-r^2}x_j.
\end{aligned}
$$

Kolmas väite pitää jakaa eri tapauksiin. Ensimmäinen väite todistaa kolmannen tapauksessa, jossa kaikki indeksit ovat eriävät. Tapaus $i = j = a$ on taas selvä. Viimeinen tapaus $i = j \neq a$ selviää laskemalla

$$
\Gamma^a_{jj} = \frac{\beta}{1-r^2}\left(2x_j\delta_{ja} - x_a\right) = -\frac{\beta}{1-r^2}x_a
$$

ja

$$\Gamma^j_{aj} = \frac{\beta}{1-r^2} x_a.$$

Tällöin lemman kaikki kolme väitettä ovat tosia. □

Christoffelin symbolit tulevat käyttöön myös määritellessä moniston kaarevuutta. Moniston kaarevuutta ei voi esittää yhdellä luvulla tai funktiolla, vaan se on esitettävissä tensorilla. Tätä tensoria R^a_{ijk} sanotaan kaarevuustensoriksi tai Riemannin kaarevuustensoriksi, ja se määritellään Christoffelin symbolien avulla.

Määritelmä 6.1.5. ([17, s. 115]) *Riemannin kaarevuustensorin komponentit* määritellään

$$R^a_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^a_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^a_{ji}}{\partial x_k} + \Gamma^a_{jh}\Gamma^h_{ki} - \Gamma^a_{kh}\Gamma^h_{ji}.$$

Neli-ideksisenä tensorina tämän aukilaskeminen kaikilla mahdollisilla indeksikombinaatioilla ei ole järkevää, sillä se tuottaa käsitellyssä metriikassa kymmenen erilaista tapausta. Eräällä kombinaatiolla on kuitenkin käyttöä, joten otetaan sitä koskeva lemma esimerkiksi.

Lemma 6.1.6. *Olkoot i, k ja a kiinnitetyt indeksit. Tällöin*

$$R^a_{iak} = \frac{\beta}{(1-r^2)^2} \begin{cases} (2-\beta)(x_a\delta_{ia} - x_i)x_k, & i \neq k, k \neq a, \\ 0, & i \neq k, k = a, \\ -2\left(1-r^2\right) - 2x_a^2 - 2x_k^2 + \beta(x_k^2 - r^2 + x_a^2), & i = k, k \neq a, \\ 0, & i = k = a. \end{cases}$$

Todistus. Käytetään todistuksessa merkintää $\lambda = 1 - r^2$. Lasketaan kaarevuustensorin

$$R^a_{iak} = \frac{\partial \Gamma^a_{ki}}{\partial x_a} - \frac{\partial \Gamma^a_{ai}}{\partial x_k} + \Gamma^a_{ah}\Gamma^h_{ki} - \Gamma^a_{kh}\Gamma^h_{ai}$$

termejä alkaen vasemmalta. Tutkitaan ensin tapausta, jossa $i \neq k$

$$\frac{\partial \Gamma^a_{ki}}{\partial x_a} = \frac{\beta}{\lambda}\left(\delta_{ia}\delta_{ka} + \delta_{ka}\delta_{ia}\right) + \frac{2\beta}{\lambda^2} x_a(x_i\delta_{ka} + x_k\delta_{ia}) = \frac{2\beta}{\lambda^2} x_a(x_i\delta_{ka} + x_k\delta_{ia})$$

ja

$$\frac{\partial \Gamma^a_{ai}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\beta}{\lambda}x_i = \frac{2\beta}{\lambda^2}x_i x_k.$$

Kolmanteen summatermiin $\Gamma^a_{ah}\Gamma^h_{ki}$ käytetään Lemmaa 6.1.4. Tulon jälkimmäinen termi on nollasta poikkeava vain, jos $h = k$ tai $h = i$, jolloin

$$\Gamma^a_{ah}\Gamma^h_{ki} = \Gamma^a_{ak}\Gamma^k_{ki} + \Gamma^a_{ai}\Gamma^i_{ki} = \frac{\beta^2}{\lambda^2}(x_k x_i + x_i x_k) = \frac{2\beta^2}{\lambda^2}x_i x_k.$$

Viimeisessä summatermissä tulon vasemmanpuoleinen Christoffelin symboli eroaa nollasta vain, jos $h = k$, $h = a$ tai $k = a$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Gamma^a_{kh}\Gamma^h_{ai} &= \begin{cases}\Gamma^a_{ka}\Gamma^a_{ai} + \Gamma^a_{kk}\Gamma^k_{ai}, & k \neq a\\ \frac{\beta}{\lambda}\left(x_a\Gamma^a_{ai} + x_i\Gamma^i_{ai}\right), & k = a, i \neq a\end{cases}\\ &= \frac{\beta^2}{\lambda^2}\begin{cases}x_i x_k + x_a x_k\delta_{ia}, & k \neq a,\\ 2x_i x_k, & k = a.\end{cases}\end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt tapausta $i = k$, jolloin derivaatat saadaan muotoihin

$$\frac{\partial \Gamma^a_{kk}}{\partial x_a} = \frac{\beta}{\lambda}(2\delta_{ka} - 1) + \frac{2\beta}{\lambda^2}x_a(2x_k\delta_{ka} - x_a)$$

ja

$$\frac{\partial \Gamma^a_{ak}}{\partial x_k} = \beta\frac{\lambda + 2x_k^2}{\lambda^2}.$$

Seuraavaksi lasketaan Christoffelin symbolien tulo-osuudet. Vasemmalta oikealle päin luettuna ensimmäinen Christoffelin symbolien tulo on

$$\Gamma^a_{ah}\Gamma^h_{kk} = \frac{\beta^2}{\lambda^2}x_h(2x_k\delta_{kh} - x_h) = \frac{\beta^2}{\lambda^2}(2x_k^2 - r^2)$$

ja vastaavasti jälkimmäinen on

$$\begin{aligned}\Gamma^a_{kh}\Gamma^h_{ai} &= \begin{cases}\Gamma^a_{ka}\Gamma^a_{ak} + \Gamma^a_{kk}\Gamma^k_{ak}, & k \neq a\\ \Gamma^a_{ah}\Gamma^h_{aa}, & k = a\end{cases}\\ &= \frac{\beta^2}{\lambda^2}\begin{cases}x_k^2 - x_a^2, & k \neq a,\\ 2x_k^2 - r^2, & k = a.\end{cases}\end{aligned}$$

Kaarevuustensori saadaan laskemalla termit yhteen, jolloin

$$
\begin{aligned}
R^a_{iak} &= \frac{\beta}{\lambda^2}\begin{cases} 2x_a x_k \delta_{ia} - 2x_i x_k + \beta(2x_i x_k - x_i x_k - x_a x_k \delta_{ia}), & i \neq k, k \neq a \\ 2x_a x_i - 2x_i x_k + \beta(2x_i x_k - 2x_i x_k), & i \neq k, k = a \\ -\lambda - 2x_a^2 - \lambda - 2x_k^2 + \beta(2x_k^2 - r^2 - x_k^2 + x_a^2), & i = k, k \neq a \\ 0, & i = k = a \end{cases} \\
&= \frac{\beta}{\lambda^2}\begin{cases} (2-\beta)(x_a \delta_{ia} - x_i)x_k, & i \neq k, k \neq a, \\ 2(x_a - x_k)x_i, & i \neq k, k = a, \\ -2\lambda - 2x_a^2 - 2x_k^2 + \beta(x_k^2 - r^2 + x_a^2), & i = k, k \neq a, \\ 0, & i = k = a, \end{cases}
\end{aligned}
$$

joka vastaa väitteen kaarevuustensoria. □

Myös kaarevuustensorille on olemassa tulevien todistusten kannalta hyödyllisiä identiteettejä.

Lemma 6.1.7. *Riemannin kaarevuustensorille hyperbolisessa konformisessa yksikköpallossa pätevät*

1. $R^a_{ijk} = 0$, *kun mitkään indeksit eivät ole samoja,*
2. $R^a_{ijk} = -R^a_{ikj}$ *kaikilla indekseillä* a, i, j *ja* k,
3. $R^a_{ijj} = 0$ *kaikilla indekseillä* a, i *ja* j,
4. $R^a_{ijk} = 0$, *kun mitkä tahansa kolme tai kaikki indeksit ovat samoja.*

Todistus. Ensimmäinen ja toinen väite ovat selvät, sillä ne seuraavat suoraan määritelmästä vaihtamalla indeksejä. Kolmas taas seuraa väitteestä 1. Neljäs väite on 3. kohdan nojalla aina tosi, kun $j = k$. Huomioiden kohdan kaksi, ainoa mielenkiintoinen tapaus on R^a_{aak} mielivaltaisilla indekseillä a ja k. Lemma 6.1.6 antaa tälle tulokseksi 0, joten väite on todistettu. □

Kaarevuustensorin avulla saadaan Riccin tensori.

Määritelmä 6.1.8. ([17, s. 137]) *Riccin tensori* on kaksi-indeksinen tensori

$$\mathcal{R}_{ik} = R^h_{ihk},$$

missä R^h_{ihk} on Riemannin kaarevuustensori.

Propositio 6.1.9. *Hyperbolisessa konformisessa avaruudessa Riccin tensori on*

$$\mathcal{R}_{ik} = \frac{\beta}{(1-r^2)^2} \begin{cases} (\beta-2)(m-2)x_i x_k, & i \neq k, \\ -2(m-1) + (\beta-2)(m-2)\left(x_k^2 - r^2\right), & i = k. \end{cases}$$

Todistus. Riccin tensori saadaan laskettua Lemmasta 6.1.6. Kun $i \neq k$, niin saadaan

$$\mathcal{R}_{ik} = R^h_{ihk} = (2-\beta)(x_i - (m-1)x_i)x_k + 0,$$

kun taas $i = k$, niin

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{kk} = &-2(m-1)\left(1-r^2\right) - 2\left(r^2 - x_k^2\right) - 2(m-1)x_k^2 \\ &+ \beta\left((m-1)x_k^2 - (m-1)r^2 + \left(r^2 - x_k^2\right)\right) + 0. \end{aligned}$$

Indeksin h yli summatessa on huomioitava se, että nollasta poikkeavassa osuudessa kyseinen indeksi ei lasketa indeksin k yli. Täten

$$\mathcal{R}_{ik} = \frac{\beta}{(1-r^2)^2} \begin{cases} (\beta-2)(m-2)x_i x_k, & i \neq k, \\ -2(m-1) + (\beta-2)(m-2)\left(x_k^2 - r^2\right), & i = k. \end{cases} \qquad \square$$

Seuraava määriteltävä käsite on kaareutuvuus, jonka voi geometrisesti ajatella kuvaavan kyseiseen monistoon määritellyn pienen pallon vääristymää suhteessa euklidisen avaruuden palloon. Tämä entiteetti on skalaari jokaisessa moniston pisteessä.

Määritelmä 6.1.10. ([17, s. 137]) Olkoot g moniston metriikka ja $\mathcal{R}_{ij}$ Riccin tensori. Tällöin *kaareutuvuus* R määritellään

$$R = g_{ij}\mathcal{R}_{ij},$$

missä sovelletaan Einsteinin summasääntöä kumpaankin indeksiin.

Hyperbolisen konformisen yksikköpallon tapauksessa tämän laskeminen on helppoa, koska vain g_{jj} on nollasta poikkeava.

Propositio 6.1.11. *Hyperbolisen konformisen yksikköpallon kaareutuvuus on*

$$R = \frac{\beta}{(1-r^2)^{\beta+2}}\left[2m(m-1) + (\beta-2)(m-1)(m-2)r^2\right].$$

Todistus. Merkitään todistuksessa $\lambda = 1 - r^2$. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
R &= g_{ij}\mathcal{R}_{ij} = g_{jj}\mathcal{R}_{jj} \\
&= -\frac{\delta_{jj}}{\lambda^{\beta}}\frac{\beta}{\lambda^2}\left[-2(m-1) + (\beta-2)(m-2)\left(x_j^2 - r^2\right)\right] \\
&= -\frac{\beta}{\lambda^{\beta+2}}\left[-2m(m-1) + (\beta-2)(m-2)\left(r^2 - mr^2\right)\right] \\
&= \frac{\beta}{\lambda^{\beta+2}}\left[2m(m-1) + (\beta-2)(m-1)(m-2)r^2\right].
\end{aligned}$$

□

Viimeisenä uutena käsitteenä määritellään Weylin tensori, joka kuvaa kaarevuutta juuri pseudo-Riemannin monistoissa, joihin luvussa tarkasteltava monisto kuuluu.

Määritelmä 6.1.12. *Weylin tensori* m-ulotteisessa monistossa on

$$\begin{aligned}
C_{aijk} = R_{aijk} &+ \frac{1}{m-2}\left(\mathcal{R}_{ak}g^{ij} - \mathcal{R}_{aj}g^{ik} + \mathcal{R}_{ij}g^{ak} - \mathcal{R}_{ik}g^{aj}\right) \\
&+ \frac{1}{(m-1)(m-2)}R\left(g^{aj}g^{ik} - g^{ak}g^{ij}\right),
\end{aligned}$$

missä $m \geq 4$ ja

$$R_{aijk} = g^{ah}R^{h}_{ijk}.$$

Weylin tensori on siksi hyödyllinen, että sen avulla voidaan osoittaa konforminen laakeus. Moniston konforminen laakeus tarkoittaa käytännössä sitä, että sille on olemassa konforminen muunnos euklidiseksi avaruudeksi. Konformiseksi muunnokseksi tai kuvaukseksi sanotaan sellaista kuvausta, joka säilyttää kahden moniston pintaa pitkin kulkevan ja toisensa leikkaavan käyrän välisen kulman.

Määritelmä 6.1.13. ([24, s. 353]) Avointen joukkojen $U \subset M$ ja $V \subset M'$ välistä kuvausta

$$\varphi : \quad U \to V,$$

sanotaan *konformiseksi diffeomorfismiksi*, jos se on bijektiivinen, differentioituva ja on olemassa sellainen positiivinen funktio Ω, että jokaisessa pisteessä $x \in U$ ja merkinnällä $y = \varphi(x)$ toteutuu

$$g'^{ij}\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial y_j}{\partial x_q} = g^{pq}\Omega(x)$$

monistojen ollessa (M, g) ja (M', g').

Seuraavaksi vielä tarkka määritelmä konformiselle laakeudelle.

Määritelmä 6.1.14. ([3, s. 189]) Pseudo-Riemannin monisto (M, g) on *konformisesti laakea*, jos sen jokaista pistettä p kohti on olemassa avoin ympäristö $U \in M \subset \mathbb{R}^m$ kyseiselle pisteelle $p \in U$ ja jos sille on olemassa konforminen diffeomorfismi

$$\varphi : \quad U \to V,$$

missä $V \subset \mathbb{R}^m$ on avoin.

Seuraava lause kertoo Weylin tensorin ja konformisen laakeuden välisen yhteyden.

Lause 6.1.15. *([4, s. 591]) Olkoon $m \geq 4$. Tällöin m-ulotteinen monisto on konformisesti laakea jos ja vain jos moniston Weylin tensori häviää.*

Edellisen lauseessa tensorin häviämisellä tarkoitetaan, että se on yhtäsuuri nollan kanssa jokaisessa pseudo-Riemannin moniston pisteessä.

Propositio 6.1.16. *Olkoon m-ulotteisen hyperbolisen konformisen yksikköpallon metriikka*

$$g = -\frac{1}{(1-r^2)^{\beta}} I_m,$$

missä I_m on $m \times m$ yksikkömatriisi ja $m \geq 4$. Kyseinen monisto on konformisesti laakea.

Todistus. Merkitään

$$S = -2(m-1) - (\beta - 2)(m-2)r^2$$

ja

$$\lambda = 1 - r^2,$$

niin Riccin tensorit voi kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{R}_{ij} = \frac{\beta}{\lambda^2}\left[(\beta-2)(m-2)x_i x_j + S\delta_{ij}\right].$$

Sovelletaan tätä ja metriikan ominaisuuksia Weylin tensorin esitykseen, jolloin saadaan hyperbolisen konformisen yksikköpallon Weylin tensoriksi

$$\begin{aligned}C_{aijk} &= -\lambda^{\beta} R^{a}_{ijk} - \beta(\beta-2)\lambda^{\beta-2}\left(x_a x_k \delta_{ij} - x_a x_j \delta_{ik} + x_i x_j \delta_{ak} - x_i x_k \delta_{aj}\right)\\ &\quad - \frac{\beta S \lambda^{\beta-2}}{(m-2)}\left(\delta_{ak}\delta_{ij} - \delta_{aj}\delta_{ik} + \delta_{ij}\delta_{ak} - \delta_{ik}\delta_{aj}\right)\\ &\quad + \frac{R\lambda^{2\beta}}{(m-1)(m-2)}\left(\delta_{aj}\delta_{ik} - \delta_{ak}\delta_{ij}\right).\end{aligned}$$

Käyttämällä Lemman 6.1.7 kohtia 1., 3. ja 4., huomataan edellä esitetystä Weylin tensorin esityksestä, että se on nolla samoilla ehdoilla kuin Riemannin kaarevuustensori on nolla. Näin ollen ainoa indeksöinti (a,i,j,k), jolla Weylin tensori ei välttämttä ole nolla, on

$$(a,i,j,k) = \begin{cases}(a,a,j,k), & \text{kun } j \neq k,\ a \neq j \text{ ja } a \neq k,\\ (a,i,a,k), & \text{kun } i \neq a \text{ ja } k \neq a.\end{cases}$$

Kun yhtäaikaisesti $a \neq j$ ja $a \neq k$, Weylin tensori saadaan muotoon

$$C_{aajk} = -\lambda^{\beta} R^{a}_{ajk} = 0.$$

Toisella indeksöinnillä taas

$$\begin{aligned}C_{aiak} &= -\lambda^{\beta} R^{a}_{iak} - \beta(\beta-2)\lambda^{\beta-2}\left(-x_a^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) - \frac{\beta S\lambda^{\beta-2}}{(m-2)}\left(-\delta_{ik} - \delta_{ik}\right)\\ &\quad + \frac{R\lambda^{2\beta}}{(m-1)(m-2)}\delta_{ik}.\end{aligned}$$

Tämä on järkevintä tutkia erikseen kahdessa eri tapauksessa. Oletetaan ensin $i \neq k$, jolloin

$$\begin{aligned}C_{aiak} &= -\lambda^{\beta} R^{a}_{iak} + \beta(\beta-2)\lambda^{\beta-2} x_i x_k\\ &= -\beta(\beta-2)\lambda^{\beta-2} x_i x_k + \beta(\beta-2)\lambda^{\beta-2} x_i x_k = 0\end{aligned}$$

ja kun $i = k$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
C_{akak} &= -\lambda^\beta R^a_{kak} - \beta(\beta-2)\lambda^{\beta-2}\left(-x_a^2 - x_k^2\right) + \frac{2\beta S\lambda^{\beta-2}}{(m-2)} + \frac{R\lambda^{2\beta}}{(m-1)(m-2)} \\
&= 2\beta\lambda^{\beta-2} - \beta(\beta-2)\lambda^{\beta-2}\left(x_k^2 + x_a^2 - r^2\right) + \beta(\beta-2)\lambda^{\beta-2}\left(x_k^2 + x_a^2\right) \\
&- \frac{4\beta(m-1)\lambda^{\beta-2}}{(m-2)} - 2\beta(\beta-2)r^2\lambda^{\beta-2} + \frac{R\lambda^{2\beta}}{(m-1)(m-2)} \\
&= -\frac{2\beta m\lambda^{\beta-2}}{(m-2)} - \beta(\beta-2)r^2\lambda^{\beta-2} + \frac{R\lambda^{2\beta}}{(m-1)(m-2)} \\
&= -\frac{2\beta m\lambda^{\beta-2}}{(m-2)} - \beta(\beta-2)r^2\lambda^{\beta-2} + \frac{2\beta m\lambda^{\beta-2}}{(m-2)} + \beta(\beta-2)r^2\lambda^{\beta-2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Täten Weylin tensori häviää. □

6.2 Hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplace-operaattori

Seuraavaksi halutaan yksikköpalloon esitys bosonisesta Laplacen operaattorista. Tämän antaa seuraava lause.

Lause 6.2.1. *Bosonisen Laplacen operaattorin voi esittää hyperbolisessa konformisessa yksikköpallossa* $\{x \in \mathbb{R}^m |\ \|x\| < 1\}$ *seuraavasti*

$$\Delta^H_{\alpha,b} f = \left(1 - \|\underline{x}\|^2\right)^{\frac{\alpha}{m-2}} \left(\Delta_b f + \frac{\alpha}{1 - \|\underline{x}\|^2}\mathbb{E}_b f\right).$$

Todistus. Merkitään todistuksessa $\beta = \frac{\alpha}{m-2}$ ja $\lambda = 1 - \|\underline{x}\|^2$. Muutetaan aluksi yleinen Laplacen operaattori 5.2.1 hyperbolisen konformisen metriikan mukaiseksi, jolloin saadaan

$$\Delta^H_{\alpha,b} f = -\sqrt{\lambda^{\beta m}} \sum_{i,j=1}^m g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\lambda^\beta}{\sqrt{\lambda^{\beta m}}}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = -\lambda^{\beta m/2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda^{\beta - \beta m/2}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Tarkastellaan ensin bosonisia osittaisderivaattoja indekseillä i ja j. Tällöin

$$\begin{aligned}
-\lambda^{\beta m/2} g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda^{\beta(2-m)/2}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) &= -g_{ij}\left(-2\underline{x}_i \frac{\beta(2-m)}{2}\lambda^{\beta-1}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda^\beta \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\
&= \lambda^\beta \delta_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\beta(m-2)}{\lambda}\underline{x}_i\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \lambda^\beta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\alpha}{\lambda}\underline{x}_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).
\end{aligned}$$

Sovelletaan edellistä tulosta jokaiseen Laplacen operaattorissa esiintyvään indeksiin, jolloin

$$\Delta^H_{\alpha,b} f = \sum_{j=1}^{m} \lambda^\beta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\alpha}{\lambda} \underline{x}_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \lambda^\beta \left(\Delta_b f + \frac{\alpha}{\lambda} \mathbb{E}_b f \right). \qquad \square$$

Määritellään superavaruudelle hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen operaattori. Kyseistä operaattoria ei voi kuitenkaan johtaa yleisen metriikan Laplacen operaattorin kautta, koska fermionisille muuttujille ei ole käytössä metriikoiden teoriaa.

Määritelmä 6.2.2. Clifford-Weylin algebrassa $\mathbb{S}^{m|2n}$ *hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplace-operaattori* määritellään kahdesti differentioituvalle superfunktiolle f seuraavasti

$$\Delta^H_\alpha f = \left(1 - r^2\right)^{\frac{\alpha}{m+2n-2} - 1} \left(\left(1 - r^2\right) \Delta f + \alpha \mathbb{E} f \right),$$

missä $r^2 = r_b^2 - (x`)^2$ ja $\alpha \geq m + 2n - 2$.

Tässä työssä rajoitutaan tarkastelemaan tapauksia, joissa superavaruuden hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen operaattorin kerroin α on alhaaltapäin rajoitettu kyseisellä tavalla, jolloin kertoimen $1 - r^2$ negatiivisten potenssien esitystä ei tarvitse määritellä. Poikkeustapauksena ovat seuraavassa osiossa tarkasteltavat hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen yhtälöt.

Määritelmä 6.2.3. α-harmoniset superfunktiot hyperboliselle konformiselle yksikköpallolle ovat funktioita $f\colon \mathbb{R}^{m|2n} \to \mathbb{S}^{m|2n}$, jotka toteuttavat Laplacen yhtälön

$$\Delta^H_\alpha f = 0.$$

6.3 α-harmonisia superfunktioita

Tarkastellaan aluksi vain säteen neliöstä riippuvia funktioita.

Propositio 6.3.1. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^{m|2n} \to \mathbb{S}^{m|2n}$ jatkuvasti differentioituva funktio. Tällöin*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f(r^2)\right) &= 2r^2 f'(r^2), \\
D\left(f(r^2)\right) &= -2xf'(r^2), \\
\Delta\left(f(r^2)\right) &= -2Mf'(r^2) - 4r^2 f''(r^2).
\end{aligned}$$

Merkintä f' tarkoittaa funktion derivaattafunktiota ja f'' toista derivaattafunktiota.

Todistus. Lemman 5.3.10 avulla saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x\grave{}_j}\left(r^2\right) = -\frac{\partial(\underline{x}\grave{})^2}{\partial x\grave{}_j} f'(r^2).$$

Sovelletaan kaavaa fermioniselle Eulerin operaattorille, jolloin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_f\left(f(r^2)\right) &= \sum_{j \text{ pariton}} x\grave{}_j \frac{\partial f(r^2)}{\partial x\grave{}_j} + \sum_{j \text{ parillinen}} x\grave{}_j \frac{\partial f(r^2)}{\partial x\grave{}_j} \\
&= -\sum_{j \text{ pariton}} x\grave{}_j x\grave{}_{j+1} f'(r^2) + \sum_{j \text{ parillinen}} x\grave{}_j x\grave{}_{j-1} f'(r^2) \\
&= -2 \sum_{j \text{ pariton}} x\grave{}_j x\grave{}_{j+1} f'(r^2) = -2\left(\underline{x}\grave{}\right)^2 f'(r^2).
\end{aligned}$$

Vastaavasti bosoniselle Euler-operaattorille saadaan

$$\mathbb{E}_b\left(f(r^2)\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j \frac{\partial f(r^2)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{m} 2x_j^2 f'(r^2) = 2r_b^2 f'(r^2).$$

Fermioniselle Diracin operaattorille saadaan tällöin

$$\begin{aligned}
D_f\left(f(r^2)\right) &= 2\sum_{j=1}^{n}\left(e\grave{}_{2j}\frac{\partial f(r^2)}{\partial x\grave{}_{2j-1}} - e\grave{}_{2j-1}\frac{\partial f(r^2)}{\partial x\grave{}_{2j}}\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\left(-e\grave{}_{2j} x\grave{}_{2j} f'(r^2) - e\grave{}_{2j-1} x\grave{}_{2j-1} f'(r^2)\right) \\
&= -2\underline{x}\grave{} f'(r^2)
\end{aligned}$$

ja bosoniselle Diracin operaattorille puolestaan

$$D_b\left(f(r^2)\right) = \sum_{j=1}^{m} e_j \frac{\partial f(r^2)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{m} 2x_j e_j f'(r^2) = 2\underline{x} f'(r^2).$$

Täten

$$Df = D_f f - D_b f = -2xf'(r^2).$$

Käyttämällä Lemmaa 5.3.6 saadaan fermioniselle Laplacen operaattorille

$$\begin{aligned}\Delta_f f &= D_f^2 f = D_f\left(-2\underline{x}\grave{} f'(r^2)\right) = -2(2\mathbb{E}_f - 2n)f'(r^2) + 2\underline{x}\grave{} D_f f'(r^2)\\ &= -2\left(-4\left(x\grave{}\right)^2 f'(r^2) - 2nf'(r^2)\right) - 4\left(\underline{x}\grave{}\right)^2 f''(r^2)\\ &= 4nf'(r^2) + 4\left(\underline{x}\grave{}\right)^2 f''(r^2).\end{aligned}$$

ja bosoniselle

$$\begin{aligned}\Delta_b f = -D_b^2 f = -D_b\left(2\underline{x}f'(r^2)\right) &= -2(2\mathbb{E}_b + m)f'(r^2) + 2\underline{x}D_b f'(r^2)\\ &= -2\left(4r_b^2 f''(r^2) + mf'(r^2)\right) + 4r_b^2 f''(r^2)\\ &= -2mf'(r^2) - 4r_b^2 f''(r^2).\end{aligned}$$

Halutut tulokset saadaan summaamalla jokaisen operaattoriparin kohdalla fermioninen ja bosoninen osa yhteen. □

Tarkastellaan seuraavaksi harmonisia funktioita hyperbolisessa konformisessa yksikköpallossa. Aloitetaan lähestyminen tutkien vain bosonista tapausta. Selvä bosoninen ratkaisu on vakioratkaisu, sillä differentiaaliyhtälössä esiintyy vain derivaattoja. Merkitään $z = r_b^2$, jolloin saadaan yhtälö muotoon

$$\Delta_{\alpha,b}^H f = (1-z)^{\alpha/(m-2)-1}\left(-2m\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - 4z\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + 2\frac{\alpha}{1-z}z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right) = 0$$

ja edelleen

$$(1-z)\left(2m\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} + 4z\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}\right) - 2\alpha z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 0,$$

jonka ratkaisut muuttujan r_b^2 suhteen ovat

$$f(r_b^2) = c_1\frac{(r_b^2)^{(2-m)/2}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{m}{2}; 2-\frac{m}{2}; r_b^2\right)}{m-2} + c_2,$$

missä c_1 ja c_1 ovat vapaasti valittavat kertoimet. Funktio ${}_2F_1$ on hypergeometrinen funktio.

Määritelmä 6.3.2. ([1, s. 4–5]) *Hypergeometrinen funktio* ${}_2F_1\left(a, b; c; z\right)$ on yksikkökiekossa määritelty funktio

$${}_2F_1\left(a, b; c; z\right) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a;j)(b;j)}{(c;j)j!} z^j,$$

missä $c \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ ja

$$(s;j) = \begin{cases} s(s+1)\cdots(s+j-1), & j>0, \\ 1, & j=0, \end{cases}$$

on Pochhammerin symboli.

Hypergeometrisella funktiolla on olemassa erikoistapauksia, joista muutama on esitetty lähteessä [1, s. 5]. Mielivaltaisilla parametreilla a ja b sekä valitsemalla $c = b$ saadaan

$$ {}_2F_1\left(a,b;b;z\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a;j)}{j!} z^j = (1-z)^{-a}. \tag{6.1}$$

Toinen erikoistapaus saadaan tekemällä sijoitukset $a = b = 1$ ja $c = 2$, jolloin

$$z\,{}_2F_1\left(1,1;2;z\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = -\ln\left(1-z\right).$$

Lause 6.3.3. *Hypergeometrisen funktion* ${}_2F_1\left(a,b;c;\cdot\right)$ *derivaatta on*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} {}_2F_1\left(a,b;c;z\right) = \frac{ab}{c} {}_2F_1\left(a+1,b+1;c+1;z\right).$$

Todistus. Pochhammerin symbolin $(s;n+1)$ osittelusta huomataan

$$(s;n+1) = s\left[(s+1)\cdots(s+n)\right] = s(s+1;n),$$

kun $n > 0$. Tapaus $n = 0$ voidaan kirjoittaa samaan muotoon, sillä

$$(s;1) = s \cdot 1 = s(s+1;0).$$

Tätä tulosta käyttämällä nähdään, että

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} {}_2F_1\left(a,b;c;z\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a;j)(b;j)}{(c;j)(j-1)!} z^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a;j+1)(b;j+1)}{(c;j+1)j!} z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{ab(a+1;j)(b+1;j)}{c(c+1;j)j!} z^j = \frac{ab}{c} {}_2F_1\left(a+1,b+1;c+1;z\right).
\end{aligned}$$

Mikä oli todistettava. □

Lause 6.3.4. *Hypergeometrinen funktio* ${}_2F_1\left(a,b;c;\cdot\right)$ *toteuttaa differentiaaliyhtälön*

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\left[c-(a+b+1)z\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-aby=0.$$

Todistus. Sijoitetaan hypergeometrinen funktio $y(z) = {}_2F_1\left(a,b;c;z\right)$ sarjakehitelmänä differentiaaliyhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}&z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\left[c-(a+b+1)z\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-aby\\&=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(a;j)(b;j)j(j-1)}{(c;j)j!}z^{j-1}-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(a;j)(b;j)j(j-1)}{(c;j)j!}z^{j}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(a;j)(b;j)jc}{(c;j)j!}z^{j-1}\\&-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(a;j)(b;j)j(a+b+1)}{(c;j)j!}z^{j}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a;j)(b;j)ab}{(c;j)j!}z^{j}.\end{aligned}$$

Tämän esityksen vakiotermi on

$$\frac{(a;1)(b;1)c}{(c;1)}-ab=ab-ab=0.$$

Vastaavasti ensimmäisen asteen termin kerroin on

$$\begin{aligned}&\frac{2(a;2)(b;2)}{(c;2)2!}+\frac{2c(a;2)(b;2)}{(c;2)2!}-\frac{ab(a+b+1)}{c}-\frac{a^2b^2}{c}\\&\qquad=\frac{ab(a+1)(b+1)}{c}-\frac{ab(a+1)(b+1)}{c}=0.\end{aligned}$$

Loput termit voidaan laskea yhdellä kertaa, kun termit järjestetään uudestaan.

$$\begin{aligned}&z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\left[c-(a+b+1)z\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-aby\\&=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(a;j+1)(b;j+1)j(j+1)}{(c;j+1)(j+1)!}z^{j}-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(a;j)(b;j)j(j-1)}{(c;j)j!}z^{j}\\&+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(a;j+1)(b;j+1)(j+1)c}{(c;j+1)(j+1)!}z^{j}-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(a;j)(b;j)j(a+b+1)}{(c;j)j!}z^{j}\\&-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(a;j)(b;j)ab}{(c;j)j!}z^{j}.\end{aligned}$$

Toisin kirjoitettuna

$$
\begin{aligned}
&z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-aby \\
&=\sum_{j=2}^{\infty}\left[\frac{ab+(a+b)j+j^2}{(c+j)(j-1)}-1+\frac{abc+(a+b)cj+cj^2}{(c+j)(j-1)j}-\frac{a+b+1}{j-1}-\frac{ab}{j(j-1)}\right] \\
&\times\frac{(a;j)(b;j)}{(c;j)(j-2)!}z^j \\
&=\sum_{j=2}^{\infty}\left[\frac{ab(c+j)+(a+b)(c+j)j+(c+j)j^2}{(c+j)(j-1)j}-1-\frac{a+b+1}{j-1}-\frac{ab}{j(j-1)}\right] \\
&\times\frac{(a;j)(b;j)}{(c;j)(j-2)!}z^j,
\end{aligned}
$$

jonka hakasulkeissa oleva osa on yhtäsuuri kuin nolla kaikilla indekseillä $j \geq 2$. □

Edellisen lauseen nojalla voidaan käyttää hypergeometrisen funktion differentiaaliyhtälöesitystä todistamaan bosoniset α-harmoniset ratkaisut aiemmin esitetyn väittämän mukaisiksi. Ratkaisut todistaa seuraava propositio.

Propositio 6.3.5. *Olkoon funktio muotoa $f = z^{(2-m)/2}y$, missä y on hypergeometrinen funktio. Mikäli*

$$y(z) = {}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{m}{2}; 2-\frac{m}{2}; z\right),$$

niin f on hyperbolisessa konformisessa yksikköpallossa harmoninen.

Todistus. Esitetään hypergeometrinen funktio differentiaaliyhtälönsä kautta ja kerrotaan se funktiolla $z^{(4-m)/2}$, jolloin

$$z^{(4-m)/2}\left[z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-aby\right]=0.$$

Esitetään funktio y muodossa $f/z^{(2-m)/2}$, jolloin

$$
\begin{aligned}
(1-z)&\left(z^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+(m-2)z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+\frac{m^2-6m+8}{4}f\right) \\
&+[c-(a+b+1)z]\left(z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+\frac{m-2}{2}f\right)-abzf=0.
\end{aligned}
$$

Pyritään valitsemaan kertoimille a, b ja c sellaiset relaatiot, että funktiota f ei ilmene sellaisenaan ilman derivaattoja ja tekijän $z^2\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ kerroin tulee olla $-(\alpha+m)/2$.

Näin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}\frac{m^2-6m+8}{4}+c\frac{m-2}{2}&=0,\\ -\frac{m^2-6m+8}{4}-(a+b+1)\frac{m-2}{2}-ab&=0,\\ 2-m-(a+b+1)&=-(\alpha+m)/2.\end{aligned}$$

Nämä yhtälöt tuottavat kertoimille arvot

$$\begin{aligned}a&=\frac{\alpha}{2} &&\text{tai} && a=1-\frac{m}{2},\\ b&=1-\frac{m}{2} &&\text{tai} && b=\frac{\alpha}{2},\\ c&=2-\frac{m}{2},\end{aligned}$$

joista valitaan vasemmanpuoleiset parametreiksi a ja b. Kyseisillä valinnoilla saadaan differentiaaliyhtälö muotoon

$$(1-z)\left(\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+z\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}\right)-\frac{\alpha}{2}z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=0,$$

joka on hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen yhtälö. Täten funktio $f=z^{(2-m)/2}y$ on harmoninen. □

Bosonisia funktioita koskevat tulokset voidaan koota yhdeksi lauseeksi.

Lause 6.3.6. *Säteestä riippuvat bosonisen avaruuden harmoniset funktiot hyperbolisella konformisella yksikköpallolla ovat muotoa*

$$f(r_b^2)=c_1\frac{(r_b^2)^{(2-m)/2}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2},1-\frac{m}{2};2-\frac{m}{2};r_b^2\right)}{m-2}+c_2,$$

missä c_1 ja c_2 ovat vapaasti valittavat reaaliset kertoimet.

Todistus. Todistus seuraa Propositiosta 6.3.5. □

Tarkastellaan seuraavaksi Laplacen yhtälön säteen neliöstä r^2 riippuvia ratkaisuja, jotka ovat muotoa

$$f(x,x^{\grave{}})=\sum_{j=0}^{n}(x^{\grave{}})^{2j}f_j(r_b^2).$$

Kun kyseistä ratkaisuyritettä operoi hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen operaattorilla, niin operoidun funktion voi myös esittää termien $(x\grave{})^{2j}$ summana. Kyseiset termit muodostavat lisäksi aliavaruuden avaruudelle $\mathbb{S}^{m|2n}$. Tällöin jokaista indeksiä j kohti kytkeytyy oma reaalinen differentiaaliyhtälönsä. On hyvä huomata, että erään indeksin j differentiaaliyhtälö ei sisällä pelkästään ratkaistavaa funktiota f_j, sillä fermioninen Laplacen operaattori laskee fermionisen osan potenssia kahdella ja siksi ainakin funktio f_{j+1} esiintyy myös tässä yhtälössä. Näin ollen ratkaistavat differentiaaliyhtälöryhmät ovat kytkettyjä. Seuraavat propositiot todistavat potenssien muutokset.

Propositio 6.3.7. *Laplacen operaattori yritefunktiosta antaa tuloksen*

$$\begin{aligned}\Delta f(x,x\grave{}) = &-\sum_{j=0}^{n}\left[2mf_j'\left(r_b^2\right)+4r_b^2f_j''\left(r_b^2\right)\right](x\grave{})^{2j}\\ &+\sum_{j=1}^{n}4j(j-n-1)f_j\left(r_b^2\right)(x\grave{})^{2j-2}.\end{aligned}$$

Todistus. Koska jokainen summan termifunktio on separoituva muuttujien r_b ja $x\grave{}$ funktioiksi, niin voidaan laskea tulokset erikseen bosoniselle ja fermioniselle osalle. Bosoninen Laplacen operaattori voidaan saattaa muotoon

$$\Delta_b f(x,x\grave{}) = \Delta_b\sum_{j=0}^{n}(x\grave{})^{2j}f_j(r_b^2) = \sum_{j=0}^{n}(x\grave{})^{2j}\Delta_b f_j(r_b^2).$$

Funktion argumentin ollessa r_b^2, Propositiota 6.3.1 soveltaen saadaan bosoniselle Laplacen operaattorille

$$\Delta_b f(x,x\grave{}) = -\sum_{j=0}^{n}(x\grave{})^{2j}\left[2mf_j'\left(r_b^2\right)+4r_b^2f_j''\left(r_b^2\right)\right].$$

Fermioninen Laplacen operaattori operoi pelkästään fermionisiin muuttujiin, jolloin

$$\Delta_f f(x,x\grave{}) = \sum_{j=0}^{n}f_j(r_b^2)\Delta_f(x\grave{})^{2j},$$

jolloin Lemma 5.3.9 antaa

$$\Delta_f f(x,x\grave{}) = \sum_{j=1}^{n}4j(j-n-1)f_j\left(r_b^2\right)(x\grave{})^{2j-2}.$$

Bosonisen ja fermionisen Laplacen operaattorin summana saadaan superavaruuden Laplacen operaattori. □

Propositio 6.3.8. *Operoidaan yritefunktiota Euler-operaattorilla, jolloin*

$$\mathbb{E}f(x, x^{\grave{}}) = 2\sum_{j=0}^{n} \left[r_b^2 f_j' \left(r_b^2\right) + j f_j \left(r_b^2\right)\right] (x^{\grave{}})^{2j}.$$

Todistus. Bosoninen osa saadaan Propositiosta 6.3.1 ja fermioninen Lemmasta 5.3.5 edellisen proposition tavoin. Tällöin

$$\mathbb{E}_b f(x, x^{\grave{}}) = 2\sum_{j=0}^{n} r_b^2 f_j' \left(r_b^2\right) \left(x^{\grave{}}\right)^{2j}$$

ja

$$\mathbb{E}_f f(x, x^{\grave{}}) = 2\sum_{j=0}^{n} j f_j \left(r_b^2\right) \left(x^{\grave{}}\right)^{2j}. \qquad \square$$

Propositio 6.3.9. *Yritefunktio kerrottuna termillä* $1 - r^2$ *tuottaa tuloksen*

$$\left(1 - r^2\right) f\left(x, x^{\grave{}}\right) = \left(1 - r_b^2\right) f\left(x, x^{\grave{}}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(x^{\grave{}}\right)^{2j+2} f_j \left(r_b^2\right).$$

Todistus. Todistus saadaan suoraan laskemalla, kun muistetaan fakta $r^2 = r_b^2 - (x^{\grave{}})^2$. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
\left(1 - r^2\right) f\left(x, x^{\grave{}}\right) &= \left(1 - r_b^2 + \left(x^{\grave{}}\right)^2\right) \sum_{j=0}^{n} \left(x^{\grave{}}\right)^{2j} f_j \left(r_b^2\right) \\
&= \left(1 - r_b^2\right) \sum_{j=0}^{n} \left(x^{\grave{}}\right)^{2j} f_j \left(r_b^2\right) + \sum_{j=0}^{n} \left(x^{\grave{}}\right)^2 \left(x^{\grave{}}\right)^{2j} f_j \left(r_b^2\right) \\
&= \left(1 - r_b^2\right) f\left(x, x^{\grave{}}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(x^{\grave{}}\right)^{2j+2} f_j \left(r_b^2\right) + 0 \cdot f_n \left(r_b^2\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

Seuraava propositio jaottelee hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen operaattorin termit sen mukaan, säilyttääkö se tekijän $\left(x^{\grave{}}\right)^{2j}$ potenssin, laskeeko se sitä vai nostaako. Lisäksi se antaa ratkaisut näille tärkeille osille.

Propositio 6.3.10. *Hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplace-operaattorin eri osilla operoiduille yritefunktioille on kirjoitettavissa tulokset*

$$\begin{aligned}\Big[(1-r_b^2)\Delta_b + (x\grave{})^2\,\Delta_f + \alpha\mathbb{E}\Big]\, f\,(x, x\grave{}) &= \sum_{j=0}^{n}\Big[(r_b^2-1)\left(2mf_j'(r_b^2)+4r_b^2 f_j''(r_b^2)\right)\\ &\quad +4j(j-n-1)f_j(r_b^2)+2\alpha(r_b^2 f_j'(r_b^2)+jf_j(r_b^2))\Big]\,(x\grave{})^{2j}\,,\\ (1-r_b^2)\Delta_f f\,(x,x\grave{}) &= \sum_{j=1}^{n}(1-r_b^2)4j(j-n-1)f_j(r_b^2)\,(x\grave{})^{2j-2}\,,\\ (x\grave{})^2\,\Delta_b f\,(x,x\grave{}) &= -\sum_{j=0}^{n-1}\left[2mf_j'(r_b^2)+4r_b^2 f_j''(r_b^2)\right](x\grave{})^{2j+2}\,.\end{aligned}$$

Todistus. Todistus seuraa hyvin suoraan soveltamalla Propositioita 6.3.1, 6.3.9, 6.3.7 ja 6.3.8. □

Esitellään nyt propositio, jossa hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplace-operaattorin tuottama tulos on esitetty aukikirjoitettuna.

Propositio 6.3.11. *Kun yritefunktiota operoidaan hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplace-operaattorilla, niin tulokseksi tulee*

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha^H f =& 2\left(1-r^2\right)^{\frac{\alpha}{m+2n-2}-1}\Big[2r_b^2(r_b^2-1)f_0''\left(r_b^2\right)+\left(\alpha r_b^2+mr_b^2-m\right)f_0'\left(r_b^2\right)-\ldots\\ & 2n(1-r_b^2)f_1\left(r_b^2\right)+(x\grave{})^{2n}\Big(2r_b^2(r_b^2-1)f_n''\left(r_b^2\right)+\ldots\\ & \left(\alpha r_b^2+mr_b^2-m\right)f_n'\left(r_b^2\right)+(-2n+\alpha n)f_n\left(r_b^2\right)-mf_{n-1}'\left(r_b^2\right)-\ldots\\ & 2r_b^2 f_{n-1}''\left(r_b^2\right)\Big)+\sum_{j=1}^{n-1}(x\grave{})^{2j}\Big(2r_b^2(r_b^2-1)f_j''\left(r_b^2\right)+\ldots\\ & \left(\alpha r_b^2+mr_b^2-m\right)f_j'\left(r_b^2\right)+(2j(j-n-1)+\alpha j)f_j\left(r_b^2\right)-\ldots\\ & mf_{j-1}'\left(r_b^2\right)-2r_b^2 f_{j-1}''\left(r_b^2\right)+2(1-r_b^2)(j+1)(j-n)f_{j+1}\left(r_b^2\right)\Big)\Big].\end{aligned}$$

Todistus. Propositiossa 6.3.10 esitetyistä hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplace-operaattorin osista saadaan

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha^H\sum_{j=0}^{n} f_j\left(r_b^2\right)(x\grave{})^{2j} &= \sum_{j=0}^{n}\Big[\left(r_b^2-1\right)\left(2mf_f'\left(r_b^2\right)+4r_b^2 f_j''\left(r_b^2\right)\right)+\ldots\\ &\quad 4j(j-n-1)f_j\left(r_b^2\right)+2\alpha\left(r_b^2 f_j'\left(r_b^2\right)+jf_j\left(r_b^2\right)\right)\Big](x\grave{})^{2j}+\ldots\\ \sum_{j=1}^{n}(1-r_b^2)4j(j-n-1)f_j(r_b^2)\,(x\grave{})^{2j-2} &- \sum_{j=0}^{n-1}\left[2mf_j'(r_b^2)+4r_b^2 f_j''(r_b^2)\right](x\grave{})^{2j+2}\,.\end{aligned}$$

Toisin kirjoitettuna

$$\Delta_\alpha^H \sum_{j=0}^{n} f_j\left(r_b^2\right)(x`)^{2j} = \sum_{j=0}^{n} \Big[\left(r_b^2-1\right)\left(2mf_f'\left(r_b^2\right)+4r_b^2 f_j''\left(r_b^2\right)\right)+ \ldots$$

$$4j(j-n-1)f_j\left(r_b^2\right)+2\alpha\left(r_b^2 f_j'\left(r_b^2\right)+jf_j\left(r_b^2\right)\right)\Big](x`)^{2j}+\ldots$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}(1-r_b^2)4(j+1)(j-n)f_{j+1}(r_b^2)(x`)^{2j}-\sum_{j=1}^{n}\left[2mf_{j-1}'(r_b^2)+4r_b^2 f_{j-1}''(r_b^2)\right](x`)^{2j},$$

yhtälön huomataan olevan väitetyn mukainen. □

Differentiaaliyhtälöryhmän muodostuksen lähtökohtana on hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen operaattorin jako potenssin säilyttävään, laskevaan ja korottavaan osaan

$$\left[(1-r_b^2)\Delta_b+(x`)^2\Delta_f+\alpha\mathbb{E}\right]+\underbrace{(1-r_b^2)\Delta_f}_{\text{laskeva}}+\underbrace{(x`)^2\Delta_b}_{\text{korottava}}.$$

Jaottelun ja Lemman 5.3.9 perusteella harmonisten superfunktioiden täytyy toteuttaa seuraavat yhtälöt kaikilla indekseillä $0<j<n$

$$\begin{aligned}&\left[(1-r_b^2)\Delta_b+(x`)^2\Delta_f+\alpha\mathbb{E}\right]f_j\left(r_b^2\right)(x`)^{2j}\\&\quad+2(j+1)(-2n+2j)(1-r_b^2)f_{j+1}\left(r_b^2\right)(x`)^{2j}+(x`)^{2j}\Delta_b f_{j-1}\left(r_b^2\right)=0.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Tarkastellaan erikoistapausta $m=0$, jolloin funktiot f_j ovat vakiofunktioita.

Propositio 6.3.12. *Olkoon $f\colon \mathbb{S}^{0|2n}\to\Lambda_{2n}$ säteestä riippuva hyperbolisessa konformisessa yksikköpallossa harmoninen funktio. Tällainen funktio on nollafunktio kaikilla $\alpha\neq 2$ ja esitettävissä seuraavasti*

$$f\left((x`)^2\right)=(x`)^{2n}f_n+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k f_n\frac{n}{n-k}(x`)^{2(n-k)}+f_0,$$

kun $\alpha=2$. Vakiofunktiot f_n ja f_0 ovat mielivaltaiset.

Todistus. Tapauksessa $m=0$ hyperbolisen konformisen yksikköpallon Laplacen operaattori voidaan kirjoittaa mielivaltaiselle fermioniselle funktiolle g muotoon

$$\Delta_\alpha^H g=\left[(x`)^2\Delta_f g+\alpha\mathbb{E}_f g\right]+\Delta_f g.$$

Tämän avulla saadaan $n+1$ kappaletta differentiaaliyhtälöitä, joista kirjoitetaan nyt n:s auki. Tällöin

$$\left[(x`)^2\Delta_f + \alpha\mathbb{E}_f\right] f_n(x`)^{2n} = 0.$$

Käyttäen Lemmaa 5.3.9 ja Propositiota 5.3.5 saadaan

$$-4nf_n(x`)^{2n} + 2n\alpha f_n(x`)^2 = 2n(\alpha-2)f_n(x`)^{2n} = 0.$$

Mikäli $\alpha \neq 2$, niin ainoa ratkaisu on $f_n = 0$. Tästä seuraa, että $f_j = 0$ kaikilla $j = 0, ..., n$, eli f on nollafunktio. Oletetaan nyt $\alpha = 2$, jolloin voidaan kirjoittaa $n-k$:s yhtälö muodossa

$$\begin{aligned} \left[-4(n-k)(k+1)f_{n-k} + 2\alpha(n-k)f_{n-k}\right] - 4(n-k+1)kf_{n-k+1} = 0 \\ 4(n-k)\left[-(k+1)f_{n-k} + f_{n-k}\right] - 4(n-k+1)kf_{n-k+1} = 0. \end{aligned}$$

Tästä funktioksi f_{n-k} saadaan

$$f_{n-k} = -\frac{n-k+1}{n-k}f_{n-k+1}.$$

Yhtälö pätee jokaisella indeksillä $k < n$ ja asettamalla sarjan alkuarvoksi f_n saadaan

$$f_{n-k} = (-1)^k f_n \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{n-j} = (-1)^k f_n \frac{n}{n-k}.$$

Nollannen yhtälön ratkaisuksi käy mikä tahansa vakio f_0. □

Tapausta $n = 1$ vastaava differentiaaliyhtälöpari on

$$2r_b^2\left(r_b^2-1\right)f_0''\left(r_b^2\right) + \left((\alpha+m)r_b^2 - m\right)f_0'\left(r_b^2\right) + 2\left(r_b^2-1\right)f_1\left(r_b^2\right) = 0, \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} &2r_b^2\left(r_b^2-1\right)f_1''\left(r_b^2\right) + \left((\alpha+m)r_b^2 - m\right)f_1'\left(r_b^2\right) + (\alpha-2)f_1\left(r_b^2\right) - ... \\ &2r_b^2 f_0''\left(r_b^2\right) - mf_0'\left(r_b^2\right) = 0, \end{aligned} \tag{6.4}$$

joka voidaan kirjoittaa alla olevaan muotoon, kun yhtälö 6.4 kerrotaan tekijällä (r_b^2-1), jonka jälkeen siihen lisätään ylempi yhtälö 6.3. Tällöin

$$\begin{aligned} &2r_b^2\left(r_b^2-1\right)f_0''\left(r_b^2\right) + \left((\alpha+m)\,r_b^2 - m\right)f_0'\left(r_b^2\right) + 2\left(r_b^2-1\right)f_1\left(r_b^2\right) = 0, \\ &2r_b^2\left(r_b^2-1\right)^2 f_1''\left(r_b^2\right) + \left((\alpha+m)\,r_b^2 - m\right)\left(r_b^2-1\right)f_1'\left(r_b^2\right) + ... \\ &\alpha\left(r_b^2-1\right)f_1\left(r_b^2\right) + \alpha z f_0'\left(r_b^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Tälle yhtälöparille on olemassa ratkaisu.

Propositio 6.3.13. *α-harmoniset superfunktiot $f\colon \mathbb{R}^{m|2} \to \mathbb{S}^{m|2}$ ovat muotoa*

$$\begin{aligned} f(x) =&c_1(r_b^2)^{(4-m)/2}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, 2-\frac{m}{2}; 3-\frac{m}{2}; r_b^2\right) + c_2 - ...\\ &c_1\left(2-\frac{m}{2}\right)\left(1-r_b^2\right)^{-\alpha/2}\left(r_b^2\right)^{(2-m)/2}\left(x^\grave{}\right)^2. \end{aligned}$$

missä c_1 ja c_2 ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

Todistus. Kirjoitetaan differentiaaliyhtälöpari sijoituksen $f_1 = -f_0'$ avulla, jolloin

$$2r_b^2\left(r_b^2-1\right)f_0''\left(r_b^2\right) + ((\alpha+m-2)z - m + 2)\,f_0'\left(r_b^2\right) = 0, \quad (6.5)$$
$$2r_b^2\left(r_b^2-1\right)^2 f_0'''\left(r_b^2\right) + \left((\alpha+m)\,r_b^2 - m\right)\left(r_b^2-1\right)f_0''\left(r_b^2\right) - \alpha f_0'\left(r_b^2\right) = 0. \quad (6.6)$$

Proposition 6.3.5 mukaan ylemmän yhtälön ratkaisu on

$$\begin{aligned} f_0\left(r_b^2\right) &= c_1(r_b^2)^{(2-(m-2))/2}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{m-2}{2}; 2-\frac{m-2}{2}; r_b^2\right) + c_2\\ &= c_1(r_b^2)^{(4-m)/2}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, 2-\frac{m}{2}; 3-\frac{m}{2}; r_b^2\right) + c_2, \end{aligned}$$

missä c_1 ja c_2 ovat reaalisia vakioita.

Seuraavaksi riittää osoittaa, että yhtälöparin yhtälöt kuvaavat samaa yhtälöä. Derivoimalla saadaan yhtälöparin ylempi yhtälö 6.5 muotoon

$$2r_b^2\left(r_b^2-1\right)f_0'''\left(r_b^2\right) + ((\alpha+m+2)z - m)\,f_0''\left(r_b^2\right) + (\alpha+m-2)f_0'\left(r_b^2\right) = 0.$$

Kirjoitetaan alkuperäinen differentiaaliyhtälö 6.4 valinnalla $f_1 = -f_0'$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &2r_b^2\left(r_b^2-1\right)f_0'''\left(r_b^2\right) + \left((\alpha+m)r_b^2 - m\right)f_0''\left(r_b^2\right) + (\alpha-2)f_0'\left(r_b^2\right) + ...\\ &2r_b^2 f_0''\left(r_b^2\right) + mf_0'\left(r_b^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Täten yhtälöparin yhtälöt ovat samat ja siten käyttämällä Lausetta 6.3.3

$$\begin{aligned} f_1\left(r_b^2\right) =& - f_0'\left(r_b^2\right) = -c_1\left(2-\frac{m}{2}\right)(r_b^2)^{(2-m)/2}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, 2-\frac{m}{2}; 3-\frac{m}{2}; r_b^2\right) - ...\\ &\frac{\alpha(4-m)}{12-2m}c_1(r_b^2)^{(4-m)/2}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}+1, 3-\frac{m}{2}; 4-\frac{m}{2}; r_b^2\right)\\ =& - c_1\left(2-\frac{m}{2}\right)\left(1-r_b^2\right)^{-\alpha/2}\left(r_b^2\right)^{(2-m)/2}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} f\left(x, x^{`}\right) =& f_0\left(r_b^2\right) - \left(x^{`}\right)^2 f_0'\left(r_b^2\right) \\ =& c_1 (r_b^2)^{(4-m)/2} {}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, 2-\frac{m}{2}; 3-\frac{m}{2}; r_b^2\right) + c_2 - ... \\ & c_1\left(2-\frac{m}{2}\right)\left(1-r_b^2\right)^{-\alpha/2}\left(r_b^2\right)^{(2-m)/2}\left(x^{`}\right)^2. \end{aligned}$$

$\square$

LÄHTEET

[1] Aomoto, K. & Kita, M., Theory of Hypergeometric Functions. 2011. Springer Tokyo. 320–335 s.

[2] Berezin, F.A., Kirillov, A.A., Niederle, J. & Kotecký, R., Introduction to Superanalysis. Dordrecht 1987. D. Reidel Publishing Company. 428 s.

[3] Carmo, M.D, Dajczer, M. & Mercuri, F., Compact Conformally Flat Hypersurfaces. Transactions of the American Mathematical Society 288(1985)1, pp. 189–203.

[4] Chen, B.Y., Dillen, F., Verstraelen, L. & Vrancken, L., Characterizations of Riemannian Space Forms, Einstein Spaces and Conformally Flat Spaces. Proceedings of the American Mathematical Society. 128(1999)2, pp. 589–598.

[5] Chen, B.Y., Pseudo-Riemannian Geometry, δ-Invariants and Applications. Hackensack, NJ 2011. World Scientific. 506 s.

[6] Coleman, R., Calculus on Normed Vector Spaces. 2012. Springer. 249 s.

[7] Crowe, M.J., A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System. Notre Dame 1967. Dover Publications, Inc. 270 s.

[8] De Bie, H., Harmonic and Clifford Analysis in Superspace. Dissertation. Ghent, Belgia 2008. Ghent University, Department of Mathematical analysis. 171 s.

[9] De Bie, H. & Coulembier K., Hilbert space for quantum mechanics on superspace. Journal of Mathemathical Physics 52(2011)6, 063504 (30 pp.)

[10] De Bie, H. & Sommen, F., A Clifford analysis approach to superspace. Annals of Physics 322(2007)12, pp. 2978–2993.

[11] De Bie, H. & Sommen F., Fundamental solutions for the super Laplace and Dirac operators and all their natural powers. Journal of Mathematical Analysis and Applications 338(2008)2, pp. 1320–1328.

[12] De Bie, H. & Sommen F., Spherical harmonics and integration in superspace. Journal of Physics A Mathematical and Theoretical 40(2007)26, pp. 7193–7212.

[13] Elman, R., Karpenko, N. & Merkurjev, A., The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms. 2008. American Mathematical Society. Vol. 56. 435 s.

[14] Garling, D.J.H., London Mathematical Society student texts 78, Clifford Algebras: An Introduction. New York 2011. Cambridge University Press. 200 s.

[15] Gilbert, J. & Murray, M., Clifford Algebra and Dirac Operators in Harmonic Analysis. Cambridge 1991. Cambridge University Press. 334 s.

[16] Halmos, P., Finite-Dimensional Vector Spaces. 1974. Springer-Verlag New York. 206 s.

[17] Jost, J., Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin 2005. Springer. 573 s.

[18] Martin, J.L., Generalized classical dynamics, and the 'classical analogue' of a Fermioscillator. The Royal Society 251(1959)1267, pp. 536–542.

[19] Martin, J.L., The Feynman principle for a Fermi system. The Royal Society 251(1959)1267, pp. 543–549.

[20] Merris, R., Multilinear Algebra. Amsterdam 1997. Gordon and Breach Publishers. 332 s.

[21] Northcott, D.G., Multilinear Algebra. Cambridge 1984. Cambridge University Press. 209 s.

[22] Palev, T.D., A superalgebra $U_q\left[\mathfrak{osp}(3/2)\right]$ generated by deformed paraoperators and its morphism onto a $W_q(1/1)$ Clifford–Weyl algebra. Journal of Mathematical Physics 34(1993)10, pp. 4872—4883.

[23] Sommen, F., An Extension of Clifford Analysis Towards Super-symmetry. In: Ryan, J. & Sprößig, W., Clifford algebras and their applications in mathematical physics. Vol. 2. (Ixtapa, 1999), Progress in Physics. Boston, MA 19(2000), Birkhäuser Boston. pp. 199—224.

[24] Thomas, T.Y., On Conformal Geometry. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 12(1926)5, pp. 352–359.