TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MIIKA HUHTANEN
MATEMATIIKAN OPPIMISEN TUKEMINEN MATLABIN JA VUOROVAIKUTTEISTEN OPETUSOHJELMIEN AVULLA

Diplomityö

Tarkastajat:
Lehtori Terhi Kaarakka
Yliopisto-opettaja Mika Mattila
Yliopistonlehtori Terhi Mäntylä
Tarkastajat ja aihe hyväksytty
09.08.2017

TIIVISTELMÄ

MIIKA HUHTANEN: Matematiikan oppimisen tukeminen MATLABin ja vuorovaikutteisten opetusohjelmien avulla
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 66 sivua, 18 liitesivua
Lokakuu 2017
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat:
Lehtori Terhi Kaarakka, Yliopisto-opettaja Mika Mattila, Yliopistonlehtori Terhi Mäntylä
Avainsanat: verkko-oppiminen, kehittämistutkimus, opetusmoduuli, matriisilaskenta, MATLAB

Diplomityössä toteutettiin kehittämistutkimuksena opetusmoduuli, jolla yhdistetään MATLABin opetus matriisilaskennan opetukseen yliopiston matematiikan kurssilla. Moduulin tavoitteena on luoda opiskelijoille mielekäs tapa syventää matriisilaskennan osaamistaan ja samalla opetella käyttämään MATLABia erityisesti matriisilaskennassa. Moduulin sisällöt tukevat Tampereen teknillisen yliopiston matriisilaskennan peruskurssia ja moduuli on osa kurssin suoritusta, mutta se mahdollistaa MATLABin käytön itseopiskelun.

Opetusmoduulin suunnittelun lähtökohtina oli psykologian ja kasvatustieteen teorioita sekä erilaisia tutkimuksia MATLABin käytöstä opetuksessa. Minäpystyvyyteen vaikuttamalla pyrittiin lisäämään opiskelijoiden opiskelumotivaatiota ja parantamaan oppimistuloksia. Kognitiivisen psykologian teorioiden avulla pyrittiin luomaan laadukasta oppimateriaalia.

Moduuli sisälsi opetusvideoita, ohjetekstejä ja vuorovaikutteisia opetusohjelmia. Ohjelmien avulla opiskelijat harjoittelivat MATLABin käyttöä matematiikkaan liittyvissä tehtävissä. Ohjelma tunnisti syötteet, antoi palautetta syötteestä ja kannusti opiskelijaa.

Tutkimuksessa havaittiin, että moduulin avulla harjoittelu motivoi opiskelijoita matematiikan opiskelussa ja syvensi heidän osaamistaan matriisilaskennassa. Opiskelijat uskoivat kurssin jälkeen pystyvänsä soveltamaan MATLABia opinnoissaan myös tulevaisuudessa. Tulosten mukaan opetuskokeilu oli lupaava, joten moduulia tullaan kehittämään ja se otetaan käyttöön laajemmassa mittakaavassa.

ABSTRACT

MIIKA HUHTANEN: Supporting the Learning of Mathematics by Using MATLAB and Interactive Teaching Programs
Tampere University of Technology
Master of Science Thesis, 66 pages, 18 Appendix pages
October 2017
Master's Degree Programme in Science and Engineering
Major: Mathematics
Examiners: Lecturer Terhi Kaarakka, University Teacher Mika Mattila, University Lecturer Terhi Mäntylä
Keywords: online learning, design research, teaching module, matrix algebra, MATLAB

In this thesis a teaching module was developed as a design research. The module integrates teaching the basics of MATLAB into a matrix algebra course. Purpose of the module is to create an enjoyable learning environment for students to deepen their skills both in matrix algebra and MATLAB. The module follows the contents of a course in matrix algebra at Tampere University of Technology and is a solid part of the course but it enables studets to self-study using MATLAB.

Theories of psychology and educational sciences as well as studies concerning MATLAB in education were the basis of designing the module. The goal was to enhance students' learning outcome and motivation in mathematics by affecting their self-efficacy beliefs. Some theories of cognitive psychology were taken into account to produce effective high-quality learning materials.

The module consisted of video lectures, text instructions and interactive teaching programs. Students solved mathematical problems by using programs available on MATLAB platform. The programs recognized input, gave feedback and supported the student with encouraging words.

Research revealed that using the module increased students' motivation to learn mathematics and deepened their skills in matrix algebra. Students also believed that after the course they had an ability to use MATLAB later in their studies. According to the results the teaching experiment is considered promising, so the module will be developed further and it will be put into operation in larger scale.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laboratoriolle. Työn suunnittelu alkoi tammikuussa 2017 työskennellessäni tutkimusapulaisena. Tutkimus lähti etenemään vauhdikkaasti ja kehitetty menetelmä otettiin pilottikokeiluun jo saman vuoden keväällä. Tulosten analysointi ja työn kirjoittaminen toteutettiin kesällä ja alkusyksyllä.

Tutkimusaihe oli minulle todella mieleinen, sillä tehdessäni tutkimusta sain soveltaa niin matematiikan kuin kasvatustieteiden opintojeni kautta hankittua osaamistani. Opetusohjelmien ohjelmoiminen toi oman mielenkiintoisen lisänsä työn tekemiseen. Haluan kiittää työni ohjaajia lehtori Terhi Kaarakkaa, yliopisto-opettaja Mika Mattilaa sekä yliopistonlehtori Terhi Mäntylää mielenkiintoisesta aiheesta sekä lukuisista neuvoista ja kommenteista kaikissa työn vaiheissa. Niiden avulla selvisin tästä haastavasta sekä opettavasta työstä, ja samalla opin paljon tutkimuksen tekemisestä sekä matematiikan opettamisesta.

Nämä TTY:lla viettämäni reilut viisi vuotta ovat olleet varmasti elämäni tähän asti ikimuistoisimmat. Suoritetun tutkinnon ja kursseilla opittujen sisältöjen lisäksi vuosien varrella olen saanut mielettömän määrän tuttuja, kavereita ja ystäviä, joista läheisimpinä fuksivuodesta asti koossa pysynyt Kultahippu. Vertaistuki ja yhteiset muistot ovat tehneet opiskeluvuosistani ainutlaatuiset. Haluan ystävieni lisäksi kiittä perhettäni tuesta ja kannustuksesta, jota olette tarjonneet aina sitä tarvitessani. Erityiskiitos kuuluu Nealle, joka on tukenut minua kaiken kiireen ja tohinan keskellä ja tsempannut sekä piristänyt minua aina kannustusta tarvitessani. Ilman sinua en olisi tästä urakasta selvinnyt.

Tampereella 19.10.2017

Miika Huhtanen

SISÄLTÖ

LYHENTEET JA MERKINNÄT

CMS	Course Management System, verkkopohjainen kurssinhallintajärjestelmä
LMS	Learning Management System, verkkopohjainen oppimisenhallintajärjestelmä
MIT	Massachusetts Institute of Technology, yhdysvaltalainen teknillinen yliopisto
PASS	Programming Assignment aSsessment System, Hong Kongin yliopistossa ohjelmoinnin kursseilla käytettävä tarkistus- ja palautteenantojärjestelmä
PDF	Portaple Document Format, Adoben kehittämä tiedostomuoto, joka sopii erityisesti sähköiseen julkaisuun
rref	Reduced row echelon form, matriisin redusoitu vaakariviporrasmuoto
STACK	System for Teaching and Assessment using Computer algebra Kernel, tietokoneavusteinen automaattiseen matemaattisten tehtävien tarkastamiseen suunniteltu järjestelmä
TTY	Tampereen teknillinen yliopisto

e'	Alkion e käänteisalkio tietyn laskutoimituksen suhteen
α	Cronbachin alfa, eräs mittarin luotettavuuden mitta
$A \times B$	Joukkojen A ja B karteesinen tulo
δ_{ij}	Kroneckerin delta. Saa arvon 1, kun $i = j$, muutoin arvon 0
A	Matriisi, jota merkitään kirjaimella A
$m \times n$-matriisi	Matriisi, jossa on m riviä ja n saraketta
A^{-1}	Matriisin A käänteismatriisi
A^T	Matriisin A transpoosi
$\sum_{i=1}^{n} u_i$	Summa $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
$\mathbf{u}$	Vektori, jota merkitään lihavoidulla kirjaimella $\mathbf{u}$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	Vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ pistetulo
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	Vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ristitulo

1. JOHDANTO

Digitalisaatio ja teknologian kehittyminen ovat tuoneet uusia mahdollisuuksia myös koulutuksen järjestämiseen. Sähköiset oppimisympäristöt, kuten Moodle, ja erilaiset ohjelmistot tarjoavat monipuolisia työkaluja toteuttaa opetusta perinteisestä luokkahuone- tai luento-opetuksesta poikkeavalla tavalla. Sähköistyminen on mahdollistanut myös etä- ja itseopiskelun aikaisempaa helpommin ja monipuolisemmin.

MATLAB on Mathworksin kehittämä numeerisen laskennan ohjelmisto, joka tarjoaa monipuoliset työkalut monenlaiseen numeeriseen ja symboliseen laskentaan, kuvaajien piirtämiseen, signaalinkäsittelyyn ja simuloimiseen. Vaativa laskenta on tehokasta suorittaa laskentaohjelmistoilla ja siksi miljoonat tutkijat ja insinöörit ympäri maailmaa käyttävät MATLABia työssään. Työelämään astuessaan insinööreiltä odotetaan kykyä ratkaista vaativia ympäröivän maailman ongelmia matematiikkaa käyttäen [15]. Siksi on tärkeää saada kokemusta MATLABin tai muun laskentaohjelmiston käytöstä jo opintojen aikana.

Tampereen teknillisessä yliopistossa (TTY) matematiikan opetusta kehitetään aktiivisesti ja uutta teknologiaa otetaan käyttöön ja kehitetään jatkuvasti. MATLABia käytetään monilla aloilla myös TTY:lla ja sen perusopetus on sisällytetty ensimmäisen vuoden pakollisille matematiikan kursseille. MATLABin opetuksen järjestäminen on toteutettu TTY:lla eri tavoin vuosien saatossa. Viime vuosina opiskelijat ovat suorittaneet MATLABin alkeet -opintokokonaisuuden, jonka avulla he harjoittelevat itsenäisesti MATLABin käytön perusteita.

Tässä diplomityössä toteutettiin kehittämistutkimuksena opetusmoduuli, jonka tarkoituksena on syventää opiskelijoiden osaamista sekä matriisilaskennassa että MATLABin käytössä. Työssä kuvataan moduulin kehittämisen ja käyttöönoton vaiheet sekä avoimen yliopiston kurssilla tehdystä pilottikokeilusta saadut tutkimustulokset.

Kehitettyyn moduuliin kuuluu opetusvideoita, ohjetekstejä sekä MATLABilla suoritettavia vuorovaikutteisia opetusohjelmia. Opetusohjelmat antavat käyttäjälle matemaattisia tai MATLABin käyttöön liittyviä tehtäviä, tunnistavat syötteen ja antavat palautetta suorituksista. Moduuli tukee sisällöltään matematiikan kurssia, jonka aikana opiskelijat harjoittelevat moduulin avulla MATLABin käyttöä matematiikan substanssiasian ohessa. Materiaalien suunnittelussa otettiin huomioon erilaisia MATLABin opetukseen liittyviä tutkimuksia, erilaisia oppimiskäsityksiä sekä kognitiivisen psykologian teorioita.

Tärkeimmät tutkimuskysymykset työssä olivat, miten toteutetun moduulin avulla opiskelu vaikuttaa opiskelijoiden asenteisiin matematiikan opiskelua kohtaan sekä opiskelijoiden osaamistasoon MATLABin käytössä ja matriisilaskennassa. Haluttiin myös selvittää, kokevatko opiskelijat opiskelun toteutettujen opetusohjelmien avulla mielekkääksi. Tutkimuksessa käytettiin sekä kvantitatiivisia että kvalitatiivisia tutkimusmenetelmiä.

Opiskelijoilta saadun palautteen perusteella moduulin avulla opiskelu oli mielekästä ja lisäsi motivaatiota matematiikan opiskeluun. Opiskelijoilta kyselylomakkeella kerätyn tiedon kvantitatiivisen analyysin perusteella opiskelijat itse kokivat, että heidän osaamisensa matriisilaskennassa parani ja he saivat valmiudet käyttää MATLABia jatkossa. Avoimessa yliopistossa toteutetun kurssin pienen opiskelijamäärän vuoksi laajaa ja luotettavasti yleistettävää kvantitatiivista analyysiä moduulin vaikutuksista opiskelijoiden arvosanoihin ei ollut mahdollista tehdä.

Pilottikokeilun perusteella kehitetty menetelmä tarjoaa opiskelijoille mielekkään ja hyvät oppimistulokset mahdollistavan tavan yhdistää laskentaohjelmiston opetus matematiikan syvälliseen oppimiseen. MATLABin opetus sopii numeerisena laskentaohjelmistona hyvin matriisilaskennan kurssille, mutta menetelmää voidaan soveltaa myös muihin matematiikan aihealueisiin. Ohjelmiston tuomat mahdollisuudet visualisoida matemaattisia käsitteitä sekä ongelmien pilkkominen ohjelmistolla helposti käsiteltäviin osiin mahdollistavat monipuoliset lähestymistavat usein opiskelijoille hankaliin abstrakteihin aiheisiin.

2. VERKKO-OPPIMINEN

Digitaalisen kehityksen myötä erilaiset verkko-oppimisympäristöt ovat tulleet osaksi koulutusta, mikä on tuonut koulutuksen toteuttamiseen uusia mahdollisuuksia. Teknologian käyttö opetuksessa tulee perustella pedagogisin keinoin, sillä sen käyttöönotto ilman saavutettavia hyötyjä on turhaa. Tässä luvussa käsitellään verkko-oppimista ja siihen liittyviä käsitteitä, verkko-opetukseen liittyvää pedagogiikkaa sekä oppimiskäsityksiä verkko-oppimisen ja verkko-opetuksessa käytettävien materiaalien suunnittelun taustalla.

2.1 Mitä on verkko-oppiminen?

Internetiä hyödyntäviä opiskelua kuvaavia termejä ovat esimerkiksi etäopiskelu (*distance learning*), verkko-opiskelu (*online learning*) ja e-opiskelu (*e-learning*). Termeillä ei ole vakiintuneita merkityksiä tiedeyhteisössä, koulutuksen suunnittelijoilla, opettajilla tai opiskelijoilla vaan niitä käytetään välillä synonyymeinä ja välillä tarkoittamaan eri asioita. [48] Myös internetissä olevista oppimisympäristöistä käytetään erilaisia nimityksiä, esimerkiksi kurssinhallintajärjestelmä (*Course Management System, CMS*) [48] ja oppimisen hallintajärjestelmä (*Learning Management System, LMS*) [40, s. 34]. Kattokäsitteenä voidaan pitää käsitettä verkko-oppimisympäristö (*Online Learning Environment, OLE*), joka sisältää erilaiset verkkoa hyödyntävät kurssien ja oppimisen hallintaan liittyvät ympäristöt [48].

Tässä työssä *verkko-oppimisella* tarkoitetaan oppimista, jonka apuna on käytetty jotain verkossa tapahtuvaa tiedonvälitystä, harjoittelua tai arviointia. Olennaista siis on, että ilman verkkoa, oppimateriaalien välitys, tietyt aktiviteetit tai tehtävät eivät olisi mahdollisia toteuttaa sellaisina. *Verkko-oppimisympäristöllä* tarkoitetaan sellaista verkkopohjaista ohjelmistoa, internetsivua tai sovellusta, jota käytetään kurssien tai oppimistapahtumien toteutuksessa. *Opetusmoduulilla* tai *moduulilla* tarkoitetaan tietyn asian opiskeluun tarkoitettua uudelleen käytettävissä olevaa oppimiskokonaisuutta, joka voidaan välittää sellaisenaan opiskelijoille verkkoympäristön kautta ja joka sisältää sekä oppimateriaalin että harjoitustehtävät ja mahdollistaa tehtävien automaattisen arvioinnin. Se on siis kokonaisuus, joka mahdollistaa itsenäisen opiskelun sekä osaamisen arvioinnin niin opiskelijan itsensä kuin kurssin toteuttajan näkökulmasta. *Itseopiskelumateriaalilla* tarkoitetaan oppimateriaalia, jonka avulla on tarkoitus opiskella asioita itsenäisesti ilman ohjaajaa tai opettajaa.

2.2 Verkko-pedagogiikka

Verkko-oppimateriaalit eivät koskaan ole pedagogisesti katsoen neutraaleja vaan ne ohjaavat oppimaan jonkin mallin mukaisesti [36, s. 10]. Oppimateriaalin valmistajan käsityksellä oppimisesta on siis ratkaiseva rooli verkko-opetuksessa. Tämän luvun tarkoituksena on esitellä muutamia verkko-opetukseen liittyviä pedagogisia malleja. Erityisesti esitellään sellaisia malleja, jotka viitoittivat tämän diplomityön aiheena olevan opetusmoduulin toteutusta. Lisäksi tarkastellaan multimediaoppimateriaalin toteuttamiseen liittyviä seikkoja multimediaoppimisen kognitiivisen teorian perusteella.

2.2.1 Oppimisen pedagogisia malleja

Konstruktivistinen oppimiskäsitys tarkoittaa, että oppiminen ymmärretään aktiiviseksi tiedonrakennukseksi, jossa uusi tieto liitetään jo olemassa oleviin käsityksiin. *Konstruktivismia* voidaan pitää sateenvarjokäsitteenä, joka sisältää useita erilaisia oppimisen teorioita. Ensimmäiset konstruktivistiset teoriat esittivät oppijan olevan tiedon vastaanottaja, joka konstruoi itse tietorakenteita omaan mieleensä. Myöhemmät teoriat ovat korostaneet oppijan aktiivista roolia myös tiedonhankinnassa. [42, s. 220-225] Kuten aikaisemmin todettiin, verkko-oppimateriaalin valmistaja ikään kuin määrää, miten opiskelijan tulee oppia. Tästä näkökulmasta opiskelijalle annetaan tieto valmiina behavioristisen oppimiskäsityksen mukaisesti. Kuitenkin hyvin suunniteltuna myös verkko-opetus antaa opiskelijalle hyvin paljon vapauksia päättää omasta tavastaan oppia, mikä mahdollistaa konstruktivistisen tiedonrakentumisen.

Ongelmakeskeisessä oppimisessa oppiminen nähdään ongelmanratkaisuprosessina. Ongelma ei ole ainoastaan virike oppimiselle vaan oppimista tapahtuu uutta tietoa etsiessä ja siitä kokonaisuuksia jäsentäessä. Ongelman ratkaisu vaatii uuden tiedon integroimista jo olemassa olevaan tietoon, joten tiedonrakennus nähdään konstruktivistisena prosessina. Olennainen osa oppimista on myös ongelmanratkaisuprosessin ohjaus. Usein ongelmanratkaisu vaatii useiden eri tieteenalojen osaamista, joten ongelmakeskeisen oppimisen avulla voi syntyä hyvin jäsentynyttä syvällistä tietoa. [51, s. 139-140]

Tutkivan oppimisen malli on sosiokonstruktivistinen pedagoginen malli, jossa oppijat yhdessä pureutuvat johonkin merkitykselliseen ja moniulotteiseen aihepiiriin tai ongelmaan, jota ei voida selittää tai ratkaista jo olemassa olevan tiedon perusteella. Oppijoita rohkaistaan keksimään aiheeseen liittyviä kysymyksiä. Jotta oppijat haastavat oman ajattelunsa, ennen uuteen tietoon tutustumista oppijat luovat esittämiään kysymyksiä selittäviä intuitiivisia työskentelymalleja. Tämän jälkeen kerätyn uuden tiedon perusteella arvioidaan oppimisyhteisön luomia ideoita ja muodostetaan uusia kysymyksiä ja niihin työskentelyteorioita. Olennaista on prosessien jakaminen osiin oppimisyhteisön jäsenten kesken. Tutkiva oppiminen siis matkii tieteellisen tiedon luomista prosessina, joka vaatii usein eri alojen asiantuntijuutta ja joka voi muuttua alkuperäisestä suunnitelmasta uuden tiedon valossa. Kysymysten asettaminen ohjaa tutkimusta ja tiedonrakennuksen prosesseja. [30, 31]

Edellä kuvatuissa ongelmakeskeisessä ja tutkivassa oppimisessa olennainen osa oppimista on aihepiirin tai ongelman määrittely ja ongelmien vaativuus. Itselle merkitykselliset ongelmat auttavat ymmärtämään oppimisen ja tiedonhankinnan tärkeyden ja siten synnyttävät oppimisenhalun [42, s. 260]. Vygotskyn luoman *lähikehityksen vyöhyke* -käsitteen pohjalta on luotu erilaisia oppimisen teorioita, jotka korostavat oppimisen tapahtuvan sosiaalisessa vuorovaikutuksessa. Lähikehityksen vyöhyke tarkoittaa sellaista ongelmien tasoa, jolla yksilö ei itsenäisesti pysty ratkaisemaan ongelmiaan, mutta kykenee siihen ulkoisen tuen avulla. Tällöin tapahtuu oppimista myös yksilötasolla. Ulkoinen tuki voi olla opettaja tai lapselle aikuinen, mutta se voi olla myös muut oppimisyhteisön oppijat tai ympäröivä kulttuuri. Lisääntyvä osallistuminen syvenevään ongelmanratkaisuun auttaa ylittämään oman älyllisen toiminnan rajat ja oppimaan uutta. Lähikehityksen vyöhyke on dynaaminen, sillä kun ihminen omaksuu lähikehityksen vyöhykkeellä oppimaansa, itsenäistä oppimista rajoittava taso ja siten myös lähikehityksen vyöhyke siirtyy. [31, s. 129-130, 190, 267]

2.2.2 Multimediaoppimateriaalit

Ihmisen muisti jakautuu *työmuistiin* ja *säilömuistiin*. Säilömuistiin voi mahduttaa lähes rajattoman määrän tietoa, mutta työmuistin kapasiteetti on rajoittunut. *Skeemat* ovat säilömuistiin jäsentyneitä rakenteita ja käsityksiä asioista. Valmiit skeemat auttavat uuden asian oppimisessa, mutta jos skeemaa käsiteltävästä asiasta ei ole, uuden asian oppiminen vaatii opittavan asian elementtien kognitiivista prosessointia työmuistissa. *Kognitiivisen kuormitusteorian mukaan* työmuistissa voidaan käsitellä vain muutamia *kognitiivista kuormaa* aiheuttavia yksiköitä kerrallaan. Kognitiivinen kuorma jaetaan kahteen eri tyyppiseen kuormaan: *sisäiseen* (intrinsic) ja *ulkoiseen kognitiiviseen kuormaan* (extraneous cognitive load). Sisäinen kognitiivinen kuorma aiheutuu käsiteltävän asian tiedollisista vaatimuksista. Mitä useamman eri kognitiivista kuormaa aiheuttavan yksikön vuorovaikutusta asian sisäistäminen vaatii, sitä enemmän sisäistä kognitiivista kuormaa asian opettelu aiheuttaa. Näin ollen tietyn aiheen luomaan sisäiseen kuormaan ei voida vaikuttaa. Ulkoinen kognitiivinen kuorma tarkoittaa asian esitystavasta aiheutuvaa kognitiivista kuormaa. Saman asian esittäminen epäselvällä tai monella rinnakkaisella tavalla lisää ulkoista kognitiivista kuormaa. Huolellisella suunnittelulla voidaan vähentää opetusmateriaalin aiheuttamaa ulkoista kognitiivista kuormaa. Pieni ulkoinen kognitiivinen kuorma mahdollistaa työmuistille asian sisällön tehokkaamman käsittelyn, kun työmuisti voi käsitellä lähinnä sisäistä kognitiivista kuormaa aiheuttavia elementtejä. [17, 52]

Monet verkko-oppimateriaalit ovat niin sanottuja multimediaoppimateriaaleja, eli ne sisältävät niin visuaalista kuin auditiivista sisältöä. Esimerkiksi monet opetusvideot sisältävät animaatioita tai muuta visuaalista sisältöä sekä puhetta. Kognitiivisen kuormitusteorian pohjalta kehitetyn *multimediaoppimisen kognitiivisen teorian* mukaan työmuistin kapasiteetti liittyy myös eri lähteiden aistien kautta saatavaan sanalliseen kuormitukseen [45, 46]. Teoria kuvaa tiedonrakennusprosesseja ja sitä, miten tiedonrakennus tapahtuu multimediamateriaalin avulla. Teorian mukaan ihminen käsittelee erikseen kuvia, jotka voivat olla staattisia kuvia, animaatioita tai videoita, sekä sanallista tietoa, joka voi olla puhuttua tai tekstiä. Sekä sanallisesta että kuvamateriaalista poimitaan olennaiset osat näitä prosessoiviin työmuostin osiin. Oppija luo työmuistiin tuotujen osasten välille yhteyksiä muodostaen näistä syy-seuraus-suhteita. Sanalliset ja kuvalliset osat integroidaan keskenään sekä aiemmin opittuun tietoon, jolloin muodostuu uutta tietoa oppijan mieleen. [45]

Multimediaoppimisen kognitiivisen teorian mukaan multimediaoppimateriaalin aiheuttamaa ulkoista kognitiivista kuormaa vähentämällä saadaan aikaan parempia oppimistuloksia. Ulkoista kuormaa vähentää sanallisen informaation määrän minimoiminen. Liika määrä prosessoitavaa tietoa ylikuormittaa työmuistia, jolloin kaikkea informaatiota ei voida käsitellä. Multimedia-aineistolla voidaan saavuttaa parempia oppimistuloksia, kun sanallinen selostus tapahtuu puheena tekstin sijaan ja se esitetään samaan aikaan kuvallisen materiaalin esittämisen kanssa. Sanallisen ohjeistuksen tarjoaminen puheen lisäksi tekstinä lisää ulkoista kognitiivista kuormaa, mikä voi heikentää oppimistuloksia. Mielenkiintoinen, mutta asian oppimisen kannalta ylimääräinen informaatio, lisää kognitiivista kuormaa, eikä siksi paranna multimediaoppimateriaalin vaikutusta oppimiseen. Tällaista kuormaa aiheuttavia elementtejä voivat olla esimerkiksi täytesanat, epäolennaiset esimerkit tai äänitehosteet. [45, 46]

Kun oppiaines esitetään multimediamateriaalien avulla, tulee ne suunnitella siten, että ne sisältävät oleellisen asian, mutta eivät aiheuta ylimääräistä kognitiivista kuormaa. Opetusvideoiden suunnittelussa tulee pohtia, mikä on tarpeellinen määrä sanallista ohjeistusta ja mikä on oikea tapa esittää se. Koska työmuistin sanallista ainesta käsittelevä osa voi vastaanottaa ärsykkeitä niin kuulo- kuin näköaistin avulla, ei puhetta ja tekstiä tule esittää samanaikaisesti, jotta oppijan työmuisti ei ylikuormitu ja opetettava asia ei jää käsittelemättä. Tämä piti ottaa huomioon luvussa 7.4.1 esiteltävien opetusvideoiden suunnittelussa. Videot sisältävät ohjelmistoon syötettäviä tekstikomentoja, joten niiden lukeminen kuormittaa sanallista informaatiota käsittelevää työmuistin osaa, jota kuormittaa myös videoiden suullinen selostus.

3. MATLAB OPETUKSESSA

MATLAB (MATrix LABoratory) on laajasti ympäri maailmaa tutkijoiden ja insinöörien käyttämä erityisesti numeeriseen laskentaan tarkoitettu ohjelmisto. MATLABista löytyy monipuolisesti työkaluja myös muun muassa symboliseen laskentaan, signaalinkäsittelyyn, visualisointiin ja simuloimiseen. Ohjelmistojen käyttö on työelämässä tärkeä osa insinöörin työtä, joten sen opiskelu kannattaa aloittaa jo ennen työelämään siirtymistä. Tässä luvussa esitellään muutamia yliopistojen tarjoamia malleja MATLABin opetukseen sekä MATLABin kehittäjän, Mathworksin, tarjoama johdantokurssi MATLABin alkeisiin.

3.1 Verkkokurssit MATLABin perusteisiin

Monet yliopistot, kuten Vanderbiltin yliopisto [10], Marylandin yliopisto [8] ja Utahin valtionyliopisto [9], tarjoavat kurssitarjonnassaan johdantokurssin MATLABin käyttöön. Monien yliopistojen kurssit ovat verkkototeutuksia, joista osa on maksullisia ja toiset maksuttomia. Kursseja järjestävät myös kaupalliset tahot. Luvuissa 3.1.1 ja 3.1.2 esitellään lyhyesti kahden yliopistojen järjestämien massiivisten avointen verkkokurssien (MOOC, Massive Open Online Course) sekä kaupallisen Mathworksin johdantokurssin sisältöjä. Kurssien sisällöstä huomataan, että niihin on poimittu pääosin samat aiheet vaikka toteutukset poikkeavatkin toisistaan. Sisällöt kursseilla ovat konstruktivistisia ja uusien asioiden oppiminen edellyttää aikaisempien asioiden hallitsemisen.

3.1.1 Yliopistojen verkkokursseja

Tarton yliopisto tarjoaa MOOCin, jossa perehdytään MATLABin käytön alkeisiin. Kurssi kestää kuusi viikkoa, joiden aikana tarjotaan yhteensä 11 noin 15 minuutin videoluentoa sekä viisi harjoitustehtävää. Viidellä ensimmäisellä viikolla on kullakin kaksi luentoa ja harjoitus, kuudennella viikolla on yksi luento ja lopputentti. Viikkojen luentojen ja harjoitusten aiheet on koottu Taulukkoon 3.1. Kurssin alustana toimii Moodle-sivu, johon kuka vain voi rekisteröityä. Kurssin läpäisee ansaitsemalla vähintään 40 % jokaisen harjoituksen pisteistä sekä tentin pisteistä. Lisäksi kurssin läpäisyyn vaaditaan yhteensä vähintään 51 % koko kurssin pisteistä, joista tentin osuus on 70 %. Kurssin läpäisystä saa todistuksen Tarton yliopistolta. [7]

Taulukko 3.1 *Tarton yliopiston MOOC-kurssin keskeinen sisältö*

Viikko	Luentojen sisältö	Harjoitusten sisältö
1	Johdatus MATLABiin, peruslaskutoimitukset, vektorit, matriisin alkion muuttaminen	Sanallisia kysymyksiä peruskomennoista
2	Funktiot, m-tiedosto, vertailuoperaattorit	Matriisien peruslaskutoimitukset
3	Ohjelmointia: for, if ja while	Matriisin asteen määritys ja lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen, virheen korjaaminen komennosta
4	Ehtolauseet, loogiset operaattorit, polynomifunktiot	Skripti, joka poimii vektoreista parilliset ja parittomat alkiot
5	Funktioiden erilaiset argumentit, funktion integrointi ja derivointi, Jacobin matriisi	Skripti, joka piirtää tietyt kuvaajat
6	Esimerkkejä kuvakäsittelystä	Lopputentti

Massachusetts Institute of Technology (MIT) tarjoaa MATLAB-kurssiensa verkko-oppimateriaaleja avoimesti internetissä. Osa materiaalista on ladattavissa tekstinä PDF-muodossa [6] ja osa verkko-luentoina sekä tekstinä luettavissa kurssin verkkosivulta [5]. Materiaalit sisältävät teorian lisäksi harjoitustehtäviä. Materiaalit ovat saatavilla jatkuvasti myös kurssien toteutusten ulkopuolisena aikana. Kerrallaan MIT on tarjonnut yhtä MATLAB-kurssia, jonka sisältö ja nimi ovat muuttuneet vuosien saatossa. Kurssien sisällöt ovat eri vuosina olleet pääosin samat kuin Tarton yliopiston kurssilla, joskin joitain eroja on. MIT:n kurssin materiaalissa käydään esimerkiksi läpi vianetsintää ja skriptin testausta. Oppimateriaalit on esitetty tiiviisti ja asian omaksuminen esimerkkien avulla vaatii paneutumista. Materiaalin avulla oppii kuitenkin hyvin ohjelmoinnin ja MATLABin syntaksin perusperiaatteet.

3.1.2 Mathworks Onramp

MATLABin kehittäjä Mathworks tarjoaa rekisteröityneille käyttäjille ilmaisen Onramp-johdantokurssin [1]. Onramp on englanninkielinen vuorovaikutteinen verkkokurssi, joka sisältää ohjeistusta MATLABin peruskomentoihin sekä pieniä projekteja, joissa komentoja käytetään. Kurssilla käytetään MATLABia internetselaimessa. Kurssilla käytettävä ohjelma antaa yksinkertaisia tehtäviä, kuten tietynlaisen vektorin määrittäminen, ja tarkistaa, onko tehtävän ratkaisu määritelty oikein. Tehtävissä ei pääse eteenpäin ennen kuin edellinen tehtävä on ratkaistu pyydetyllä tavalla. Kurssi koostuu 15 osiosta, joiden keskeiset sisällöt on esitetty Taulukossa 3.2. Kurssin alussa sanotaan sen suorittamisen vievän aikaa noin kaksi tuntia. Jonkin verran MATLABia käyttänyt TTY:n opiskelija suoritti kurssin tässä ajassa, joten käyttöä aloittelevalla opiskelijalla suorittaminen saattaa kestää kauemmin. Kurssin tehtävät voi keskeyttää milloin vain ja samaan kohtaan voi palata myöhemmin.

Onramp kurssilla niin lyhyet määrittelytehtävät kuin projektien tehtävänannot välivaiheittain on annettu melko suoraan siten, että käyttäjä voi kopioida ohjeistuksesta annetun syötteen. Vain muutamissa tehtävissä kurssin lopulla annetaan enemmän miettimistä vaativia tehtävänantoja kuten *Muokkaa tiedostoa siten, että se suorittaa punasiirtymälaskun* `spectra`*-matriisin* (sisältää mittausdataa eri tähdistä) *toiselle eikä kuudennelle tähdelle*. Kurssin toteutuksen hyvänä puolena voidaan todeta olevan se, että järjestelmä varmistaa käyttäjän osaavan syöttää oikean määritelmän. Väärästä syötteestä annetaan virheilmoitus ja joissain tapauksissa palautetta, mikä meni väärin. Tehtävät ovat kuitenkin lähinnä kopioimista eivätkä vaadi asioiden kovin syvällistä ymmärtämistä.

Mathworks tarjoaa kursseja eri tarkoituksiin. Monet näistä kursseista ovat kalliita, esimerkiksi perusteisiin pureutuva MATLAB Fundamentals maksaa yli tuhat euroa sisältäen 180 päivän lisenssin MATLABin käyttöön. Mathworks tarjoaa kuitenkin myös ilmaisia videoluentoja MATLABin käytön tueksi [2].

3.2 MATLAB integroituna matematiikan kursseihin

Monissa yliopistoissa MATLABin opetus on integroitu matematiikan kursseihin, mutta toteutukseen on useita erilaisia tapoja. MATLABia voidaan esitellä luennoilla ja kannustaa sen käyttämiseen ilman erillisiä tietokoneharjoituksia [20] tai osa

Taulukko 3.2 *Mathworksin Onramp-kurssin keskeinen sisältö*

Osion numero	Keskeinen sisältö
1	Kurssikuvaus
2	Peruslaskutoimitukset, muuttujien määrittely, valmiit funktiot ja kiinnitetyt vakiot
3	Vektoreiden ja matriisien määrittely käsin, tasaväliset vektorit, satunnaismatriisit
4	Datan tuominen
5	Matriisien indeksointi ja alkioiden muokkaus
6	Matriisien laskutoimitukset
7	Funktioiden kutsuminen (esittelyssä `min` ja `max`)
8	Dokumentaation käyttö
9	Kuvaajien piirtäminen ja sen ominaisuuksien muokkaus, Plot-välilehden työkalu
10	Projekti: kuvaajan piirtäminen
11	Projekti: äänen taajuus (vektorien ja `fft`-funktion käyttö), live-editorin esittely
12	Loogiset operaattorit ja muuttujat
13	Ohjelmointia: `if` ja `for`
14	Projekti: tähden etääntymisnopeuden määrittäminen
15	Käyttäjäkysely

harjoituksista voidaan tehdä MATLABilla erillisen ohjeistuksen avulla [18]. MATLABin opetus voidaan myös sitoa kiinteäksi osaksi kurssia soveltamalla sitä kurssilla käytävään asiaan ja antamalla opastusta ja tutorointia [53].

MATLABin hyödyntämisestä matematiikan opetuksessa on ollut opiskelijoiden mielestä hyötyä. Opiskelijoiden mielestä ohjelmiston käyttö auttoi funktioiden käyttäytymisen ja ominaisuuksien tutkimista, asioiden hahmottamista visualisoinnin avulla sekä työlään mekaanisen laskemisen helpottummista. Lisäksi omien laskujen tarkastaminen ja tulosten vahvistaminen oli mahdollista ohjelmiston avulla. Ohjelmiston käyttöön tottumisen jälkeen MATLABin käyttö lisäsi opiskelun kiinnostavuutta ja miellyttävyyttä. [20] Alussa kuitenkin ohjelmiston käytön opettelu ja syntaksiin tottuminen aiheuttivat vaikeuksia, mikä teki opiskelusta turhauttavaa [20, 53]. Lähiopetus ja avun saaminen helpotti syntaksin oppimista, mutta erityisesti etäopiskelijoille riittävän tuen tarjoaminen on ollut haaste [20].

4. MINÄPYSTYVYYS JA SIIHEN VAIKUTTAMINEN

Motivaatiolla on osoitettu olevan vaikutusta yksilön oppimiseen. Motivaatioon vaikuttavia tekijöitä ovat esimerkiksi yksilön asenteet tehtävää ja aihetta kohtaan, sekä selkeästi asetetut tavoitteet ja päämäärät. Näiden lisäksi eräs motivaatioon vaikuttava tekijä on minäpystyvyys (eli pystyvyys). [41] Pystyvyydellä tarkoitetaan yksilön uskoa kykyihinsä suoriutua tietystä tehtävästä tai hallita ympäröiviä tapahtumia [13]. Tutkimusten mukaan minäpystyvyydellä on usein vaikutusta todelliseen suoriutumiseen tehtävissä [41, 44]. Minäpystyvyyden on myös osoitettu olevan yhteydessä ongelmanratkaisutaitoihin ja tuotteliaisuuteen uuden ohjelmiston opiskelussa [44].

Yksilön minäpystyvyyteen voidaan vaikuttaa monin eri keinoin. Positiivisia yllykkeitä ja kannustusta on käytetty laajasti pystyvyyden kohottamiseksi [13]. Palautteen avulla voidaan myös vaikuttaa pystyvyyteen. Positiivisella palautteella, joka kohdistuu nimenomaan yksilöön ja hänen hallittavissa oleviin tekijöihin eikä ympäristöön, on osoitettu olevan mahdollista kohottaa yksilön minäpystyvyyttä. [39, 43, 44] Palautteen vaikutus minäpystyvyyden muutokseen on suurempi niillä, joiden minäpystyvyys on matala, kuin niillä, joiden minäpystyvyys on valmiiksi korkea. Positiivisella palautteella on kuitenkin enemmän vaikutusta suorituksen parantumiseen niillä yksilöillä, joilla minäpystyvyys on korkealla. [39]

Palautteen antamisella on todettu olevan vaikutusta yksilön minäpystyvyyteen sekä tehtävästä suoriutumiseen. Tehtävällä voidaan tarkoittaa esimerkiksi uuden asian oppimista. Earleyn mukaan myös palautteen laadulla ja sillä, mistä palaute tulee, on merkitystä [25]. Työtilanteessa yksilön ohjaajan antama palaute on aina subjektiivista, kun taas tietokone antaa palautetta työn suorituksen mukaan objektiivisesti vaikka palautteen saaja tietääkin, että palautteen on alun perin määritellyt ihminen. Tästä syystä tietokoneen antaman palautteen reiluuteen luotettiin Earleyn tutkimuksessa enemmän, kuin suoraan ohjaajalta tulleeseen palautteeseen. Lisäksi yksityiskohtaisen palautteen antamisen havaittiin johtavan parempiin oppimistuloksiin kuin mihin päästiin yleisen palautteen avulla. Tämä voidaan selittää sillä, että yksityiskohtainen palaute sisältää enemmän tietoa kehityskohteista ja vahvuuksista. [25]

Tässä työssä esiteltävään opetusmoduuliin kuuluu opiskeluun tarkoitettuja MATLABilla ajettavia ohjelmia, joihin sisällytetään palautteenantoa. Ohjelma antaa palautteen automaattisesti suorituksen perusteella. Palautteen sävy on rento ja kannustava. Tarkoitus on, että palaute koetaan luotettavaksi ja objektiiviseksi, mutta samalla kannustuksen ja rennon ilmapiirin avulla pyritään kohottamaan opiskelijoiden minäpystyvyyttä ja edistämään oppimista.

5. MATRIISILASKENTAA

Suomessa lukion matematiikassa käytetään pitkän oppimäärän yhtä kurssia lukuun ottamatta reaalilukuja ja sisällön painotus on mekaanisessa laskemisessa. Vuoden 2016 lukion opetussuunnitelman perusteissa todistukset kuuluvat vain syventävien kurssien oppimäärään ja vain kurssilla ”MAA4 - Vektorit” mainitaan vektorit. Reaaliluvuissa lähdetään liikkeelle lukujen peruslaskutoimituksista, minkä jälkeen harjoitellaan lukujen ja laskusääntöjen soveltamista. [11, s. 130-139] Opiskelijat kokevat usein lineaarialgebran opiskelussa hankalaksi sen, että matematiikan kieli on erilaista kuin aiemmissa matematiikan opinnoissa ja uusia määritelmiä tulee paljon [23]. Se, että uusia asioita ei sidota aiemmin opittuun, vaikeuttaa uusien asioiden omaksumista [16, 23]. Lisäksi kaikki reaaliluvuilla pätevät ominaisuudet, kuten kertolaskun kommutatiivisuus, eivät päde matriiseille. Siksi on mielekästä käsitellä, mitkä reaaliluvuille pätevät ominaisuudet ja laskusäännöt pätevät myös matriiseille ja millä ehdoilla. Luvuissa 5.2-5.4 esitetyt reaalilukujen ominaisuudet ovat kirjoista [33, s. 177-179][34, s. 10] ja matriisien laskutoimitukset ovat Poolen kirjasta [49]. Ennen matriisilaskennan tarkastelua määritellään joitakin abstraktin algebran käsitteitä, joiden määrittelyt ovat kirjasta [33].

5.1 Laskutoimitus ja algebrallisia rakenteita

Vastavalmistunut ylioppilas ei ole tottunut siihen, että kaikki laskutoimitukset ja niiden ominaisuudet eivät päde aina matematiikassa. Reaaliluvuilla ja matriiseilla on kuitenkin algebrallisesti erilaisia ominaisuuksia. Näistä eroavaisuuksista huomataan, että matriisit ja reaaliluvut muodostavat erilaisia algebrallisia rakenteita. Määritellään seuraavaksi laskutoimitus, muutamia laskutoimituksiin liittyviä käsitteitä sekä joitain algebrallisia rakenteita.

Määritelmä 5.1.1. Kuvausta $* : S \times S \to S$ sanotaan laskutoimitukseksi joukossa S. Kuvaus $*$ siis liittää jokaiseen alkiopariin $(x, y) \in S \times S$ yksikäsitteisen alkion $z \in S$. Merkinnän $*(x, y) = z$ sijaan käytetään merkintää $x * y = z$.

Kun tarkastellaan tiettyjä joukkoja ja laskusääntöjen ominaisuuksia, on hyödyllistä määritellä myös laskutoimituksen *neutraalialkio* sekä alkion *käänteisalkio*.

Määritelmä 5.1.2. Alkiota $e \in S$ kutsutaan laskutoimituksen $*$ *neutraalialkioksi*, jos

$$e * x = x \quad ja \quad x * e = x \qquad jokaisella\ x \in S.$$

Määritelmä 5.1.3. Olkoon $x \in S$ ja oletetaan, että e on laskutoimituksen $*$ neutraalialkio. Alkio $x' \in S$ on alkion x *käänteisalkio*, jos

$$x * x' = e \quad ja \quad x' * x = e.$$

Alkiota kutsutaan *kääntyväksi*, jos sillä on olemassa käänteisalkio. Määritelmästä 5.1.2 seuraa, että neutraalialkio on aina oma käänteisalkionsa. Joukot, joissa on määritelty tiettyjä ominaisuuksia täyttäviä laskutoimituksia, muodostavat erilaisia algebrallisia rakenteita.

Määritelmä 5.1.4. Joukko G varustettuna laskutoimituksella $*$ on *ryhmä*, jota merkitään $(G, *)$, jos

- laskutoimitus $*$ on määritelty joukossa G
- laskutoimitus $*$ on liitännäinen
- laskutoimitukselle $*$ on neutraalialkio joukossa G
- joukon G jokaisella alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $*$ suhteen.

Jos jokaisella $x, y \in G$ on voimassa $x*y = y*x$, niin ryhmä $(G, *)$ on *vaihdannainen* ja sitä kutsutaan *Abelin ryhmäksi*.

Määritelmä 5.1.5. Laskutoimituksilla $+$ ja $\cdot$ varustettu joukko R määrittää *renkaan*, jota merkitään $(R, +, \cdot)$, jos

- $(R, +)$ on vaihdannainen ryhmä
- laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen
- laskutoimitukselle $\cdot$ on neutraalialkio joukossa R
- jokaisella $a, b, c \in R$ pätevät osittelulait:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{ja} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Merkitään joukossa R määritellyn laskutoimituksen $+$ neutraalialkiota 0_R ja laskutoimituksen $\cdot$ neutraalialkiota 1_R. Rengas on *vaihdannainen*, jos se on laskutoimituksen $\cdot$ suhteen vaihdannainen. Kolmikkoa $(\{0\}, +, \cdot)$ kutsutaan nollarenkaaksi, jos

0 on renkaan määrittämän joukon ainoa alkio ja se on sekä laskutoimituksen + että laskutoimituksen $\cdot$ neutraalialkio. Ennen matriisilaskennan käsittelyä määritellään vielä *kunta* ja *kokonaisalue*.

Määritelmä 5.1.6. Rengas $(R, +, \cdot)$ on *kunta*, jos sen on vaihdannainen ja jokaisella nollasta poikkeavalla alkiolla on on käänteisalkio laskutoimituksen $\cdot$ suhteen.

Määritelmä 5.1.7. Nollarenkaasta poikkeava vaihdannainen rengas K on *kokonaisalue*, jos kaikilla $a, b \in K$ ehdosta $ab = 0_K$ seuraa, että $a = 0_K$ tai $b = 0_K$.

Reaalilukujen joukko varustettuna yhteenlaskulla ja kertolaskulla on kunta ja siten myös kokonaisalue [33, s. 185]. Määritellään seuraavaksi matriisit ja joitakin matriisien välisiä binäärioperaatioita. Tarkastellaan näiden määritelmien avulla, minkälaisia algebrallisia struktuureja matriisit muodostavat ja miten näiden struktuurien ominaisuudet eroavat reaalilukujen ominaisuuksista.

5.2 Matriisin määrittely

Matriisi on suorakaiteen muotoon järjestetty joukko alkioita. Olkoon A $m \times n$ -matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriisissa A on siis m riviä ja n saraketta. Rajoitutaan tarkastelemaan reaalisia matriiseja, jolloin kukin matriisin A alkio a_{ij} on reaaliluku. Yhteen matriisiin sisältyy tällöin tietoa $m \cdot n$ reaaliluvusta. Merkitään reaalialkioisten $m \times n$-matriisien joukkoa $M^{m \times n}$.

Matriisien erityistapauksina voidaan pitää matriiseja, joissa vähintään toinen dimensioista on yksi. Reaalilukujen voidaan ajatella olevan 1×1-matriiseja. Kun reaalilukuja käsitellään matriiseina, reaalilukujen laskutoimitukset voidaan esittää seuraavissa kappaleissa esiteltävien matriisilaskutoimituksien avulla. Poikkeuksena on matriisin kertominen reaaliluvulla. Reaaliluvulla kertomisessa jokainen matriisin alkio kerrotaan kyseessä olevalla reaaliluvulla. Tässä tapauksessa reaalilukua ei käsitellä matriisina, sillä Määritelmän 5.4.3 mukainen matriisitulo ei olisi mahdollinen, jos matriisin dimensiot ovat ykköstä suuremmat.

Toinen matriisien erikoistapaus on vektorit, joissa toinen dimensioista on ykköstä suurempi ja toinen on yksi. Vektorit voivat olla vaaka- tai pystyvektoreita. Vektorit ovat hyödyllisiä monissa reaalimaailmaa kuvaavissa tilanteissa ja niitä sovelletaan laajasti esimerkiksi fysiikassa. Vektoreille on määritelty myös omia laskutoimituksia, kuten ristitulo. Tässä luvussa vektorit ovat lähtökohtaisesti pystyvektoreita. Vektoria, jossa on n alkiota, kutsutaan n-vektoriksi.

Kertalukua $m \times n$ olevan matriisin A transpoosi on $n \times m$-matriisi B, jos $a_{ij} = b_{ji}$ jokaisella $i \in \{1, ..., m\}$ ja $j \in \{1, ..., n\}$. Matriisin A transpoosista käytetään merkintää A^T. Pystyvektorin transpoosi on siis vaakavektori, joka sisältää samat alkiot samassa järjestyksessä. Vastaavasti vaakavektorin transpoosi on pystyvektori.

5.3 Matriisien yhteen- ja vähennyslasku

Määritelmä 5.3.1. Olkoot A ja B $m \times n$-matriiseja. Matriisien A ja B yhteenlasku määritellään

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriisien yhteenlaskussa matriisit lasketaan yhteen alkioittain reaalilukujen tapaan. Matriisien A ja B vähennyslasku määritellään matriisin A alkioiden ja matriisin B alkoiden vastalukujen yhteenlaskuksi. On huomattava, että matriisien yhteen- ja vähennyslaskussa matriisien dimensiot on oltava samat. Reaaliluvuilla on olemassa yhteenlaskun neutraalialkio 0. Matriisien yhteenlaskun Määritelmästä 5.3.1 seuraa, että matriisien yhteenlaskulle on olemassa neutraalialkio $\mathbf{0}$, jota kutsutaan *nollamatriisiksi.* Nollamatriisin kaikki alkiot ovat nollia, joten mielivaltaisen matriisin A ja saman kokoisen nollamatriisin yhteenlasku tuottaa matriisin A:

$$
\begin{aligned}
A + \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 & \cdots & a_{1n}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & \cdots & a_{2n}+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+0 & a_{m2}+0 & \cdots & a_{mn}+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= A.
\end{aligned}
$$

Matriisien yhteenlasku on monessa mielessä yhtenevä reaalilukujen yhteenlaskun kanssa. Saman joukon alkioita operoidaan keskenään ja tuloksena saadaan saman joukon alkio, joten yhteenlasku on laskutoimitus joukossa $M^{m\times n}$. Määritelmästä 5.3.1 seuraa suoraan, että matriisien yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen. Lisäksi koska matriisien yhteenlaskulle on olemassa neutraalialkio ja jokaiselle reaaliselle matriisille löytyy yhteenlaskun suhteen käänteisalkio, $m \times n$-reaalilukumatriisien joukko varustettuna yhteenlaskulla, eli pari $(M^{m\times n}, +)$, on Abelin ryhmä. Matriisien kertolasku sen sijaan poikkeaa monilla tavoin reaalilukujen kertolaskusta. Matriiseille voidaan myös määritellä erilaisia reaalilukujen kertolaskua hyödyntäviä operaatioita, jotka tuottavat eri tyyppisiä vastauksia. Joitain näistä tarkastellaan seuraavassa luvussa.

5.4 Matriisien kertolasku

Matriisien kertolaskusta puhuttaessa tulee olla täsmällinen erityisesti silloin, kun puhutaan vektoreista. Kaikki kertolaskut eivät ole määriteltyjä kaikille matriiseille ja jotkut kertolaskut tuottavat eri tyyppisiä vastauksia kuin toiset. Kaikkiin näihin sisältyy kuitenkin reaalilukujen välisiä kertolaskuja.

Määritelmä 5.4.1. Olkoot vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ n-vektoreita. Vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ *pistetulo* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ määritellään

$$
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i .
$$

Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan, jos niiden pistetulo on 0.

Pistetulo on kuvaus n-vektoreilta reaaliluvuille, joten Määritelmän 5.1.1 mukaan pistetulo ei ole laskutoimitus. Koska pistetulo on reaalilukujen yhteen- ja kertolaskua, Määritelmästä 5.4.1 ja reaalilukujen laskusäännöistä seuraa, että pistetulo on kuvauksena vaihdannainen ja vektoreiden yhteenlaskun suhteen sillä pätevät osittelulait. Pistetulo ei ole liitännäinen, sillä kolmen vektorin $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ pistetulo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ ei ole määritelty, koska $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ on reaaliluku. Pistetulolla on kuitenkin suoraan Määritelmän 5.4.1 mukaan ominaisuus $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$. Pistetulolla on merkitystä muun muassa vektoreiden geometrisessa tulkinnassa, sillä sen avulla voidaan laskea vektoreiden pituuksia (vektorin normi) ja projektioita.

Vektoreiden, joissa on kolme alkiota, välille voidaan määritellä *ristitulo*. Pistetulosta poiketen ristitulon tulos on vektori, joten ristitulo on laskutoimitus.

Määritelmä 5.4.2. Kolmialkioisten vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ *ristitulo* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ määritellään

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}.$$

Ristitulon tulos on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ kohtaan eli sen pistetulo kummankin kanssa on nolla. Ristitulo ei ole vaihdannainen, vaan vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ristitulo on suoraan Määritelmän 5.4.2 mukaan $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

Yleisesti puhuttaessa matriisien A ja B kertolaskusta tarkoitetaan *matriisituloa.*

Määritelmä 5.4.3. Olkoon A $m \times n$-matriisi ja B $n \times p$-matriisi. Matriisien A ja B *matriisitulo* AB on $m \times p$-matriisi, jonka i. rivin j. alkio

$$ab_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Matriisitulon avulla pystyvektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ pistetulo voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}.$$

Määritelmän 5.4.3 mukaisen matriisin AB alkio ab_{ij} on siis matriisin A i. rivistä muodostetun vektorin ja matriisin B j. sarakkeesta muodostetun vektorin pistetulo.

Jokaisella reaaliluvulla α on olemassa kertolaskun neutraalialkio 1, jolle pätee

$$\alpha 1 = 1\alpha = \alpha.$$

Matriisitulolle ei ole yhtä yleistä neutraalialkiota, jolla voisi kertoa minkä tahansa matriisin kummalta tahansa puolelta muuttamatta kerrottavan matriisin alkioita. Kuitenkin jokaiselle matriisille löytyy sekä oikealta että vasemmalta kerrottaessa matriisit, jolla kertominen ei vaikuta matriisin alkioihin. Määritellään seuraavaksi *identiteettimatriisi.*

Määritelmä 5.4.4. Neliömatriisia I sanotaan *identiteettimatriisiksi*, jos sen rivillä p ja sarakkeessa q oleva alkio $i_{pq} = \delta_{pq}$, missä δ_{pq} on Kroneckerin delta. Toisin sanoen

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lause 5.4.1. *Olkoon A $m \times n$-matriisi. Tällöin $IA = A$, kun I on $m \times m$-identiteettimatriisi, ja $AI = A$, kun I on $n \times n$-identiteettimatriisi.*

Todistus. Olkoon $0 < p \leq m$ ja $0 < q \leq n$. Matriisitulon Määritelmän 5.4.3 mukaan, kun I on $m \times m$-identiteettimatriisi, niin $B = IA$ on $m \times n$-matriisi, jonka alkio b_{pq} on

$$\begin{aligned} b_{pq} &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{pk} a_{kq} \\ &= \delta_{p1} a_{1q} + \delta_{p2} a_{2q} + \ldots + \delta_{p(p-1)} a_{(p-1)q} + \delta_{pp} a_{pq} + \delta_{p(p+1)} a_{(p+1)q} + \ldots + \delta_{pm} a_{mq} \\ &= 0 \cdot a_{1q} + 0 \cdot a_{2q} + \ldots + 0 \cdot a_{(p-1)q} + 1 \cdot a_{pq} + 0 \cdot a_{(p+1)q} + \ldots + 0 \cdot a_{mq} \\ &= a_{pq}. \end{aligned}$$

Joten kun $m \times n$-matriisi A kerrotaan vasemmalta $m \times m$-identiteettimatriisilla I, matriisin $B = IA$ jokainen alkio b_{pq} on sama kuin matriisin A alkio a_{pq}. Tällöin $IA = A$.

Vastaavasti kun I on $n \times n$-identiteettimatriisi, niin $C = AI$ on $m \times n$-matriisi, jonka alkio c_{pq} on

$$
\begin{aligned}
c_{pq} &= \sum_{k=1}^{n} a_{pk}\delta_{kq} \\
&= a_{p1}\delta_{1q} + a_{p2}\delta_{2q} + \ldots + a_{p(q-1)}\delta_{(q-1)q} + a_{pq}\delta_{qq} + a_{p(q+1)}\delta_{(q+1)q} + \ldots + a_{pn}\delta_{nq} \\
&= a_{p1} \cdot 0 + a_{p2} \cdot 0 + \ldots + a_{p(q-1)} \cdot 0 + a_{pq} \cdot 1 + a_{p(q+1)} \cdot 0 + \ldots + a_{pn} \cdot 0 \\
&= a_{pq}.
\end{aligned}
$$

Kun $m \times n$-matriisi A kerrotaan oikealta $n \times n$-identiteettimatriisilla I, matriisin $C = AI$ jokainen alkio c_{pq} on sama kuin matriisin A alkio a_{pq}, joten $AI = A$. □

Määritelmän 5.4.3 mukaan matriisituloa ei ole määritelty kahden $m \times n$-matriisin välille, jos $m \neq n$. Siksi $M^{m \times n}$ varustettuna yhteenlaskulla ja matriisitulolla ei ole Määritelmän 5.1.5 mukainen rengas, kun $m \neq n$. Neliömatriiseille matriisitulo on Määritelmän 5.1.1 mukainen laskutoimitus, jolla on neutraalialkio $I \in M^{n \times n}$. Matriisitulo on myös liitännäinen ja sille pätevät osittelulait. Kun merkitään matriisituloa symbolilla $\cdot$, niin $(M^{n \times n}, +, \cdot)$ on rengas.

Koska matriisitulolle ei ole yleisesti neutraalialkiota, ei kaikille matriiseille ole myöskään käänteisalkiota, jonka kanssa kertominen tuottaisi tulon neutraalialkion. Tällainen alkio löytyy kaikille nollasta poikkeaville reaaliluvuille, mutta näin ei ole edes kaikilla nollamatriisista eroavilla neliömatriiseilla. Joillekin neliömatriiseille A löytyy matriisi A^{-1}, jolla kertominen tuottaa identiteettimatriisin, toisin sanoen $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Kääntyvän matriisin A käänteisalkiota A^{-1} kutsutaan matriisin A käänteismatriisiksi [49, s. 161].

Koska matriisitulo on määritelty vain, kun tulon ensimmäisessä matriisissa on yhtä monta saraketta kuin toisessa rivejä, on helppo päätellä, että yleisesti matriisitulo ei kommutoi. Vaikka matriisitulo on mahdollinen samankokoisilla neliömatriiseilla, se ei niilläkään yleisesti kommutoi, kuten Yhtälöistä 5.1a ja 5.1b huomataan.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \tag{5.1a}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \tag{5.1b}
$$

Rengas $(M^{n \times n}, +, \cdot)$ ei ole vaihdannainen, joten reaaliluvuista poiketen se ei ole kunta. Reaaliluvuilla pätee tulon nollasääntö, jonka mukaan jos tulo on nolla, niin jokin tulontekijöistä on nolla. Neliömatriiseilla tulon nollasääntö ei päde, mikä voidaan osoittaa vastaesimerkillä

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 & -4+4 \\ -6+6 & -12+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Täten $(M^{n\times n}, +, \cdot)$ ei ole myöskään kokonaisalue. Matriisit ja reaaliluvut muodostavat näin ollen erilaiset algebralliset struktuurit, minkä takia niiden laskutoimituksilla eivät päde samat ominaisuudet.

Matriisin jokainen alkio voi sisältää tietoa yksittäisestä asiasta. Esimerkiksi mittaustuloksia tallentaessa yhteen matriisiin voidaan tallentaa usean muuttujan arvoja (sarakkeet) useasta mittauskerrasta (rivit). Havaintomatriisien lisäksi matriisien toinen tärkeä käyttötarkoitus insinööritieteissä on yhtälöryhmien ratkaiseminen. Yhtälöryhmien ratkaiseminen matriisinotaation avulla on tehokasta laskentaohjelmistojen avulla. [22] Yhtälöryhmien ratkaisemiseen matriisien avulla tarvitaan matriisialgebran perustietoja. Vaikka ohjelmistot laskennan insinöörin työssä yleensä suorittavatkin, on insinöörin hyvä tuntea matematiikka ilmiön taustalla.

Luvussa 5.5 analysoidaan TTY:n Insinöörimatematiikka 2 -kurssin sisältöä ja sitä, minkä asioiden läpikäyminen MATLABin avulla voisi edistää asioiden oppimista. Sanoilla opetusmoduuli ja moduuli viitataan luvussa 7 esiteltävään matriisilaskennan harjoitteluun tarkoitettuun opetusmoduuliin.

5.5 Insinöörimatematiikka 2 - sisällönanalyysi

TTY:n kurssit Insinöörimatematiikka 2 ja Matematiikka 2 seuraavat Kaarakan ja Orelman opintomonistetta [38], joka perustuu Poolen kirjaan Linear Algebra: A Modern Introduction [49]. Monisteessa käsitellään kuusi kokonaisuutta:

1. Vektorit
2. Lineaariset yhtälöryhmät
3. Matriisit
4. Aliavaruudet, kanta, dimensio ja aste
5. Determinantti
6. Ominaisarvot ja pienimmän neliösumman menetelmä

Kustakin osiosta haluttiin opetusmoduulia suunniteltaessa valita aiheet, joiden opettaminen MATLABin avulla auttaisi opiskelijoita matematiikan oppimisessa. Samalla haluttiin opettaa opiskelijoille MATLABin käyttöä. Poolen kirja sisältää paljon materiaalia, jota ei kurssilla käydä. Sisällön tarkastelu tehdään Poolen kirjaan, mutta sisältö rajataan Kaarakan ja Orelman opintomonisteen mukaisesti.

Poolen kirjassa vektoreiden välisinä operaatioina esitellään yhteen- ja vähennyslasku, skalaarilla kertominen, pistetulo ja kolmiulotteisessa tapauksessa ristitulo. Vektoreiden väliset operaatiot eivät yksinkertaisissa tapauksissa ole matemaattisesti haastavia, mutta joskus työläitä. Jotta opiskelija pääsee hyödyntämään laskentaohjelmistoa vektoreiden ja myöhemmin matriisien laskemiseen, tulee hänen hallita vektoreiden ja matriisien syöttäminen ohjelmistolle. Kurssin teorian käsitellessä vektoreita pääpaino moduulissa oli MATLABin syntaksiin tutustumisessa. Vektorimuuttujien syöttämisen ja peruslaskutoimitusten kertaamisen lisäksi opiskelijoille esiteltiin MATLABin valmiita funktioita, joilla voi laskea vektoreiden laskutoimituksia. Tärkeitä funktioita ovat pistetulon laskeva `dot`, ristitulon laskeva `cross` sekä vektorin normin laskeva `norm`. Laskentaohjelmistot eivät osaa laskea lainkaan tai laskevat ei-toivottuja laskutoimituksia (esimerkiksi pysty- ja vaakavektorin yhteenlasku tuottaa neliömatriisin), jos vektoreiden tai matriisien dimensiot ovat väärät. Siksi moduulissa opetettiin vektoreiden yhteydessä vektorin muuttaminen transpoosikseen. Eri funktioiden käytön harjoittelu toteutettiin antamalla tehtäväksi kirjoittaa oma funktio, joka laskee sille syötettyjen vektoreiden välisen kulman.

Koska opetusmoduuli käsittelee matriisilaskentaa ja matriiseja tullaan käyttämään koko kurssin ajan, opiskelijan on tärkeää saada rutiini matriisien käsittelyyn MATLABilla. Kurssin teorian käsitellessä lineaarisia yhtälöryhmiä moduulissa jatkettiin syntaksin opettelua matriisien määrittelyssä ja saman matriisin monistamisessa sekä alkioiden, rivien, sarakkeiden tai alimatriisien poimimisessa. Matriiseja käsitellessä on tärkeää tietää, miten MATLAB indeksoi matriisien alkiot ja minkälainen käsiteltävä matriisi on. Moduulissa tutustuttiin siksi myös matriisin koon selvittämiseen ja matriisin muodon muuttamiseen.

Lineaarisista yhtälöryhmistä kurssilla käytiin yhtälöryhmää vastaavan matriisin muodostaminen, matriisin saattaminen redusoituun vaakariviporrasmuotoon eli rref-muotoon (*reduced row echelon form*) sekä matriisin aste ja yhtälöryhmän ratkaisujen määrä. Yhtälöryhmän ratkaisemiseksi opeteltiin Gaußin eliminointimenetelmä, jolla saadaan aikaan rref-muoto. Rref-muodosta voidaan lukea johtavien ykkösten lukumäärä, eli matriisin aste, ja siitä päätellä yhtälöryhmän ratkaisujen määrä. MATLABissa on funktio `rref`, joka muodostaa sille syötetyn matriisin rref-muodon automaattisesti. Moduulissa opeteltiin käyttämään tätä funktiota. Vaakariviporrasmuotojen laskeminen on käsin usein työlästä, mutta laskentaohjelmisto helpottaa tätä työtä huomattavasti. Antamalla tietokoneen suorittaa mekaaninen laskenta, päästään suoraan tarkastelemaan ratkaisun merkitystä ja syventämään ymmärrystä matemaattisen ilmiön taustalla. Tähän pyrittiin antamalla tehtäväksi määrittää matriisin rref-muodosta johtavien ykkösten määrä sekä vastaavan yhtälöryhmän ratkaisujen määrä.

Kurssin teorian kolmas kokonaisuus käsittelee matriiseja ja niiden laskutoimituksia. Moduulissa opeteltiin käyttämään joitain MATLABin funktioita, jotka muodostavat haluttuja matriiseja. Tällaisia ovat nolla-, ykkös-, identiteetti- ja satunnaismatriiseja muodostavat funktiot. Funktioiden lisäksi moduulin aiheena oli kurssin teorian kanssa yhtä aikaa matriisien laskutoimitukset. Matriisien laskutoimitusten suorittaminen on usein työlästä mekaanista laskemista. Opiskelijoiden haluttiin saavan kertausta siitä, millaiset matriisien dimensiot pitää olla, jotta tiettyjä matriisien laskutoimituksia voidaan suorittaa. Siksi moduulin ohjelmissa yritettiin suorittaa laskutoimituksia niin laskutoimitusten kannalta hyvin määritellyillä matriiseilla kuin sellaisilla matriiseilla, joiden dimensiot eivät sallineet laskutoimitusten suorittamista. Tarkoituksena on, että opiskelija saisi harjoitteluvaiheessa palautetta heti, jos hän aikoo suorittaa laskutoimituksia matriiseilla, joilla se ei ole määritelty ja oppisi kokeilemalla, millaisilla matriiseilla laskutoimituksia voi tehdä.

Opetusmoduulin tarkoituksena, kuten luvussa 7.2 tullaan kuvaamaan tarkemmin, on opettaa matriisilaskentaa sekä MATLABin käyttöä. Laskentaohjelmistolla matriisin alkioita läpikäydessä voidaan tarvita for-silmukkaa. MATLABilla voidaan ohjelmoida monipuolisiakin ohjelmia ja for-silmukan käyttö on hyödyllinen perustaito jokaiselle ohjelmoijalle. Silmukoiden hyödyllisyys näkyy myös siinä, että niistä on oma lukunsa Hahnin ja Brianin teoksessa *Essential MATLAB for Engineers and Scientists* [29]. Matriisitulo voidaan määritellä suoritettavan käyttäen kolmea for-silmukkaa. Moduulissa käsiteltiin for-silmukan käyttö esimerkkien avulla, minkä jälkeen opiskelijaa pyydettiin muokkaamaan vajavainen matriisitulon laskeva skripti toimivaksi. Tehtävällä haluttiin, että opiskelija joutuu pohtimaan tarkkaan, mitkä alkiot matriisissa käsitellään missäkin järjestyksessä matriisituloa laskettaessa. Samalla hän oppii hieman ohjelmoinnin alkeita.

Matriiseista käsitellään kurssilla käänteismatriisin laskeminen. Opetusmoduulissa käydään läpi käänteismatriisin laskeminen rref-muodon avulla sekä `inv`-komennolla. Moduulissa lasketaan kahdella tavalla muodostettujen käänteismatriisien erotus, mistä opiskelija havaitsee, että koska laskentaohjelmisto laskee käänteismatriisin numeerisin keinoin eikä analyyttisesti, muodostetuissa matriiseissa on pieni ero. Käänteismatriisia käytetään matriisiyhtälöiden ja niiden avulla yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Moduulissa matriisiyhtälön ratkaiseminen opetellaan käyttämällä kenoviivaa `\`.

Yliopisto-opiskelijat ymmärtävät aliavaruudet usein geometrian avulla. Hahmottaminen tapahtuu kolmiulotteisessa avaruudessa olevien tasojen tai suorien kautta. Suurempien ulottuvuuksien ymmärtäminen on abstraktiuden vuoksi hankalaa. [55] Vaikka syvällinen formaaliin määritelmään nojautuva ymmärrys on tavoiteltavaa, visuaalisuuden tuominen opetukseen voi auttaa opiskelijoita ymmärtämään aliavaruuden käsitettä paremmin [32]. Siksi opetusmoduuliin otettiin mukaan kolmiulotteisen pinnan piirtäminen.

Nolla- ja sarakeavaruudet ovat muiden aliavaruuksien tavoin abstrakteja aiheita. Näitä tutkiessa tarkastellaan eri vektoreita matriisiyhtälöstä: vektori $\mathbf{b}$ kuuluu matriisin A nolla-avaruuteen, jos se toteuttaa matriisiyhtälön $A\mathbf{b} = \mathbf{0}$, kun taas vektori $\mathbf{b}$ kuuluu matriisin A sarakeavaruuteen, jos on olemassa vektori $\mathbf{x}$, joka toteuttaa matriisiyhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Matriisiyhtälöiden ratkaiseminen käsin on työlästä, mutta MATLABin avulla on nopeaa tutkia matriisiyhtälöiden avulla, kuuluuko jokin vektori matriisin sarake- tai nolla-avaruuteen. Tätä päätettiin myös harjoitella moduulissa.

Determinantin arvon perusteella voidaan päätellä, onko neliömatriisi kääntyvä. Determinantin laskeminen MATLABilla onnistuu komennolla `det`. Moduulissa determinanttiin ei haluttu käyttää paljoa aikaa, mutta determinantin arvon merkityksen ymmärrystä haluttiin kuitenkin testata.

Ominaisarvojen ja -vektoreiden geometrinen havainnollistaminen on helppoa yksittäisessä tapauksessa liitutaulun avulla, mutta yksittäisen tilanteen havainnollistaminen ei välttämättä auta opiskelijaa saamaan kokonaiskuvaa siitä, miten ominaisvektorit liittyvät lineaarikuvauksiin. Tietokoneiden tuomat mahdollisuudet käyttää videoita ja animaatioita auttavat havainnollistamaan tilannetta yksittäisiä tapausesimerkkejä laajemmin. [24] Moduulissa päätettiin käyttää sekä yksittäistä kuvaa että animaatiota hyödyksi ominaisvektoreiden ja -arvojen opettamisessa. Kuvaan oli piirretty tietyn matriisin yksikön mittaiset ominaisvektorit sekä sama vektori kerrottuna matriisilla. Animaatiossa liikutettiin origosta lähtevän yksikkövektorin toista päätä pitkin yksikköympyrää. Samalla kuvaajassa näkyi kyseistä vektoria vastaava matriisilla kerrottu vektori. Vain ominaisvektoreiden tapauksessa vektorit olivat yhdensuuntaiset.

Kurssin viimeisen aiheen, pienimmän neliösumman menetelmän, tärkeä sovelluskohde on käyrän sovittaminen pistejoukkoon. Aikaisemmin kurssilla käydyn kenoviivan `\` yhteydessä opetettiin, että mikäli matriisiyhtälöllä ei ole ratkaisua, vastauksena saadaan pienimmän neliösumman ratkaisu. Kurssilla käytiin polynomisovitteen kertoimien ratkaisu matriisin avulla. Moduulissa opiskeltiin myös polynomisovitteen tekemiseen tarkoitettu funktio `polyfit`. Lisäksi moduulissa haluttiin esitellä, että MATLABista löytyy työkalu muidenkin, kuin polynomisovitteen tekemiseen.

Matriisilaskennan teoria on kurssilla konstruktivistinen, sillä uusien asioiden oppiminen edellyttää, että aikaisemmin käydyt asiat on sisäistetty. Myös moduulin harjoitukset toteutettiin siten, että edellisillä kerroilla opittuja asioita sovellettiin seuraavilla kerroilla. Tarkkaan harkitut tehtävät, joissa opiskelijan tulee soveltaa kurssilla käytyä matriisilaskennan teoriaa sekä aikaisemmin opeteltuja MATLABin komentoja, johdattelevat kuin vaivihkaa opiskelijaa syväsuuntautuneeseen oppimiseen. Syväsuuntautuneen oppimisstrategian kehittymistä edesautettiin sillä, että moduulin harjoitukset pyrittiin toteuttamaan sellaisiksi, että niitä tehdessä opiskelijalla on hauskaa ja harjoittelu ei tunnu puuduttavalta.

Moduulia suunnitellessa haluttiin, että opetettavat asiat sidotaan kullakin viikolla luennoilla käytyihin asioihin. Kun moduulin sisältö kulkee samaa tahtia kurssin teorian kanssa, voidaan ohjelmiston käytöllä tukea kurssin teorian opiskelua ja toisaalta MATLABin opiskelu ei tunnu aivan irralliselta osalta kurssia. On havaittu, että ohjelmiston opiskelun sitominen kiinteästi kurssiin parantaa opiskelijoiden asenteita aihetta kohtaan ja parantaa oppimistuloksia [53]. Siksi ennen moduulin tekoa keskusteltiin toteutuskerran, jolla pilottitestaus suoritettiin, luennoijan kanssa suunnitellusta aikataulusta. Kurssin aihealueet on koottu aikataulutettuna Taulukkoon 5.1. Taulukkoon on koottu viikkokohtaisesti myös ne asiat, jotka opetusmoduulissa käsiteltiin. Moduulin toteutusta tarkastellaan tarkemmin luvussa 7.

Taulukko 5.1 *Insinöörimatematiikka 2 -kurssin ja moduulin aiheet viikoittain*

Viikko	Kurssin aiheet	Moduulin aiheet
1	Vektorien laskusääntöjä Pistetulo, etäisyys ja projektiot Determinantti alhaisissa dimensioissa Ristitulo	Muuttujien määrittely Peruslaskutoimitusten tekeminen Vektoreiden syöttäminen Oman pistetuloa käyttävän skriptin laatiminen
2	Suorat ja tasot avaruudessa Lineaarinen yhtälöryhmä ja sen ratkaisumenetelmiä Elementaariset vaakarivimuunnokset Gaußin eliminointimenetelmä Epähomogeenisen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu	Matriisien syöttäminen Matriisin alkioiden, rivien, sarakkeiden poimiminen Matriisin koon selvittäminen Matriisin alkioiden indeksointi ja matriisin uudelleen järjestäminen Matriisin monistaminen Redusoidun vaakariviporrasmuodon laskeminen ja vastausten lukumäärä
3	Homogeenisen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu Matriisin määritelmä ja merkintöjä Virittävät joukot ja lineaarinen riippumattomuus Matriisien summa, erotus ja skalaarilla kertominen ja potenssit	Identiteetti-, nolla- ja ykkösmatriisin muodostaminen Matriisien laskutoimituksia Satunnaismatriisien muodostaminen for-silmukan käyttö matriisitulon laskemisessa
4	Matriisin transpoosi ja sen ominaisuuksia Matriisialgebraa, summauksen, skalaarilla kertomisen ja matriisitulon ominaisuuksia Käänteismatriisi, sen ominaisuuksia ja sen laskeminen Gaußin eliminointimenetelmällä Elementaarimatriisit Aliavaruuden määritelmä ja geometrista tulkintaa Matriisin nolla- ja sarakeavaruus	Käänteismatriisi Matriisiyhtälön laskeminen käänteismatriisin avulla sekä MATLABin suorilla komennoilla Kolmiulotteisen pinnan piirtäminen
5	Kanta ja dimensio Sarake- ja nolla-avaruuden määrittäminen Ortogonaalisuus Matriisin aste Determinantti ja sen ominaisuuksia	Nolla-avaruus Sarakeavaruus Matriisin aste Matriisin determinantti
6	Matriisin ominaisarvot ja -vektorit Similaarisuus ja diagonalisointi Pienimmän neliösumman ratkaisu Polynomin sovittaminen pisteistöön	Ominaisarvot ja -vektorit Pienimmän neliösumman menetelmä Sovitekäyrän piirtäminen pistejoukkoon

6. KEHITTÄMISTUTKIMUS

Kehittämistutkimus on melko uusi tutkimusmenetelmä, ja ensimmäiset viittaukset menetelmään liitetään yleensä Ann Brownin ja Alan Collinssin tutkimuksiin vuodelle 1992 [14]. Englanninkielisessä kirjallisuudessa sille esiintyy esimerkiksi nimitykset *design research, design-based research, development research* ja *design experiment*, mutta näiden voidaan katsoa painottavan hieman toisistaan poikkeavia asioita tutkimuksessa [19, 26, 37]. Kehittämistutkimusta on käytetty alunperin erityisesti kasvatustieteissä ja koulutusta kehittäessä [14, 27, 37] ja sitä on tehty enimmäkseen luonnontieteiden opetuksen parissa, mutta runsaasti myös muissa aineissa [12].

Kehittämistutkimuksen tarkoituksena on kehittää menetelmiä tai tuotteita (myöhemmin puhutaan menetelmästä), joiden suunnittelu ja kehitys perustuvat tieteelliseen tutkimukseen. Menetelmiä testataan aidoissa ympäristöissä keinotekoisten laboratorio-olosuhteiden sijaan. Testauksista saatujen kokemusten ja palautteiden mukaan menetelmää kehitetään jälleen tutkimustietoon perustuen. Vaiheita toistetaan useaan kertaan tavoitteena saada aikaan menetelmä, jonka toimivuus voidaan osoittaa myös muissa olosuhteissa. Kehittämistutkimuksen aikana pyritään luomaan uutta teoreettista tietoa siitä, miten ja miksi kehitetty menetelmä tai tuote toimii. Teorian tulisi olla sellainen, jota ei voida tuottaa puhtaasti analyyttisellä tai empiirisellä lähestymistavalla. [19, 26]

Koska kehittämistutkimus on menetelmänä nuori ja kehittyvä, ei sen kululle ole annettu yhtä yleisesti hyväksyttyä määritelmää. Juuti esittelee artikkelissaan [37] useita hieman toisistaan poikkeavia määritelmiä kehittämistutkimuksen kululle. Näistä kaikista voidaan löytää seuraavat vaiheet kehittämistutkimuksen teossa:

1. Ongelman sekä ympäristön rajoitteiden tunnistaminen ja määrittely
2. Teorian ja sen pohjalta menetelmän kehittäminen ongelman ratkaisemiseksi
3. Menetelmän testaus
4. Teorian sekä menetelmän kehittäminen tulosten pohjalta.

Edellä esitellyn tutkimuksen kulun jokaiseen vaiheeseen liittyy monia huomioon otettavia asioita. Vaiheita tarkastellaan erikseen seuraavissa luvuissa.

6.1 Ongelman määrittely

Kuten soveltavassa tutkimuksessa yleensäkin, kehittämistutkimuksessa halutaan tuottaa ratkaisu johonkin olemassa olevaan ongelmaan. Erityisesti opetusta ja oppimista tutkittaessa ratkaisu on usein jokin uusi opetusmenetelmä tai oppimista edistävä tuote [37]. Menetelmän tai tuotteen käyttöönotolla toivotaan saavutettavan tiettyjä muutoksia. Ympäristö asettaa aina tiettyjä rajoitteita menetelmän tai tuotteen kehittämiselle. Kehittämistutkimuksen voidaankin katsoa olevan sarja päätöksiä, joita tehdessä tutkija tasapainottelee tavoitteiden ja vallitsevien rajoitteiden välillä [26].

Ongelman määrittelyn ja tavoitteiden asettamisen jälkeen tutkijan tulee pohtia, mitä rajoitteita suunnittelussa pitää ottaa huomioon. Analysoinnissa on hyvä myös selvittää, mitä hyödynnettävissä olevia mahdollisuuksia olosuhteet tarjoavat. Ongelma-analyysiä tehdessä voidaan ja tulee pohtia, mitä mahdollisia kompastuskiviä tutkimuksen myöhemmissä vaiheissa voi tulla vastaan. [26]

6.2 Teorian ja menetelmän kehittäminen

Usein opetukseen kehitetyt menetelmät eivät pohjaudu tieteelliseen tutkimukseen vaan uusia ideoita tutkitaan sitä mukaan, kun joku niitä keksii. Menetelmän tuloksia raportoidaan ilman, että menetelmän käyttöönottoa välttämättä perustellaan. Kehittämistutkimuksessa ongelmaan pyritään löytämään tieteellisen tutkimuksen avulla perusteltava ratkaisu. Tavoitteena on saada muodostettua tieteellisesti perusteltu uusi teoria, johon ongelman ratkaisuun kehitettävä menetelmä pohjautuu. Tieteellinen perustelevuus ja uuden teorian kehittäminen erottavat kehittämistutkimuksen menetelmistä, joissa vain kokemuksen perusteella tutkitaan menetelmien toimivuutta. [26, 37]

Kun ongelman ympärille on rakennettu teoreettinen viitekehys, ongelmaan pyritään teorian perusteella löytämään ratkaisu. Menetelmää kehitettäessä tulee ottaa huomioon kaikki tutkimukseen liittyvät osapuolet eli tutkija, menetelmän käyttäjä (yleensä opettaja), mahdollisesti mukana olevat opiskelijat sekä itse menetelmään liittyvät rajoitteet. Kuten myöhemmissäkin vaiheissa, vuorovaikutus tutkijan ja menetelmän käyttäjän välillä on tärkeää, jotta jokainen taho tuntee menetelmän käytännöt ja tavoitteet. Kehittämistutkimus toteutetaan todellisessa ympäristössä eikä laboratoriomaisesti hallittavissa olosuhteissa. Tästä syystä kaikkien muuttujien huomioiminen voi olla hyvin haastavaa eikä kaikkea voida aina ennakoida. [14, 26, 37] Siksi ennen menetelmän käyttöönottoa on hyvä kuunnella asiantuntijoiden arvioita menetelmän toimivuuteen liittyen.

6.3 Menetelmän testaus

Menetelmän kehittämisen ja asiantuntijalausuntojen jälkeen seuraa menetelmän testauksen pilottivaihe. Menetelmää testataan aluksi pienellä ryhmällä, esimerkiksi yksittäisellä luokalla. Menetelmää suunniteltaessa ja kokeiltaessa tutkijan ymmärrys aiheesta ja menetelmän toimivuudesta syvenee, minkä vuoksi muutoksia pitää pystyä tekemään myös, kun kokeiluvaihe on kesken. Jatkuvan arvioinnin ja oman toiminnan reflektoinnin kautta voidaan kyseenalaistaa vallitsevan tilanteen rajoitteet ja reagoida ongelmakohtiin. [26, 37]

Tutkimuksen etenemisen dokumentointi on tärkeää suunnitteluvaiheessa, mutta erityisesti menetelmää kokeiltaessa. Havainnot ja palautteet menetelmän toimivuudesta antavat tutkijalle lisätietoa siitä, onko teoria onnistuttu rakentamaan kattavasti ja onnistutaanko ongelmaan vastaamaan kehitetyn teorian avulla. Kehittämistutkimuksella pyritään tuottamaan tieteellistä tietoa, joten kattava ja julkinen dokumentointi varmistaa myös tutkimustulosten olevan avointa kritiikille ja vertaisarvioinnille. [26]

6.4 Teorian ja menetelmän päivittäminen

Kuten edellä on kuvattu, kehittämistutkimuksessa tarkoituksena on jatkuvasti päivittää tutkimuksessa kehitettyä teoriaa sekä menetelmää. Tämän vuoksi kehittämistutkimuksessa on erityisesti tutkimuksen alkuvaiheessa tyypillistä se, että teoria ja menetelmä ovat vajaita eivätkä ota jokaista seikkaa huomioon. Tutkijan pitää hyväksyä, että alkuperäiset suunnitelmat voivat muuttua merkittävästi, jos tutkimuksessa havaitaan, että tulokset eivät olleet odotettuja. [37]

Kokeiluvaiheessa havaittuihin ongelmakohtiin reagoidaan tekemällä menetelmään muutoksia, jotka perustuvat tutkittuun tietoon. Koska menetelmä on suunniteltu tutkimuksessa kehitetyn teorian mukaisesti, myös teoriaa tulee päivittää. Muutosten jälkeen menetelmää kokeillaan uudelleen ja tehdään havaintoja sen toimivuudesta. Tätä prosessia toistetaan läpi tutkimuksen. Muutoksia tehdäänkin usein myös menetelmää kokeiltaessa. Ongelma-analyysi, kokeiluvaihe ja menetelmän päivittäminen eivät näin ollen aina ole erillisiä prosesseja vaan niitä kaikkia tehdään samanaikaisesti. [26, 37]

Kehittämistutkimuksen, kuten tieteellisen tutkimuksen yleisesti, tarkoituksena on tuottaa tietoa, joka on sovellettavissa ja yleistettävissä muihinkin konteksteihin [14]. Kun kehitetty teoria ja menetelmä toimivat pilottivaiheessa testatulla pienemmällä ryhmällä, menetelmää kokeillaan laajemmalla joukolla yleistettävyyden tutkimiseksi [26, 37].

7. OPETUSMODUULI

Tässä luvussa eritellään diplomityön aiheena olevan opetusmoduulin taustaa, tavoitteita sekä suunnittelun vaiheita. Ensimmäisenä tarkastellaan tutkimuksen lähtökohdat siitä, miten MATLABin käyttöä on opetettu TTY:lla ennen tutkimuksen alkamista. Koska kyseessä on kehittämistutkimus, seuraavaksi esitellään teoria, jonka mukaan moduulia alettiin kehittää. Suunnitteluvaiheessa tehtyjen valintojen perustelemiseksi esitellään päätöksiä tukevia tutkimuksia. Lopuksi käydään läpi rakenteellinen toteutus ja käyttöönoton pilottivaihe.

7.1 MATLABin opetus TTY:llä aikaisemmin

Lukuvuonna 2012-2013 MATLABin käytön opetus TTY:lla oli toteutettu järjestämällä ensimmäisen vuoden matematiikan kursseilla joka toinen viikko PC-harjoitukset, jotka pidettiin TTY:n tietokoneluokassa. Tällöin TTY:n opiskelijoilla ei ollut mahdollisuutta saada MATLABia omille tietokoneilleen vaan sitä oli mahdollista käyttää vain joissain TTY:n tietokoneluokissa. PC-harjoituksista jouduttiin luopumaan lukuvuoden 2012-2013 jälkeen.

Koska MATLABin lisenssi on maksullinen, ei voitu olettaa, että kaikki opiskelijat ostaisivat sen itselleen. Tämän vuoksi, kun PC-harjoituksista oli luovuttu, lukuvuonna 2013-2014 laskentaohjelmistona TTY:n matematiikan peruskursseilla käytettiin Scilab-ohjelmistoa. Scilab on ilmainen avoin numeeriseen laskentaan tarkoitettu ohjelmisto, joten opiskelijat saivat hankittua sen omille tietokoneilleen. Laskentaohjelmistoa käytettiin normaaleissa laskuharjoituksissa joissain tehtävissä.

Vuoden 2014 alussa TTY hankki MATLABin kampuslisenssin, joka mahdollisti sen, että opiskelijat saivat MATLABin omille tietokoneilleen. Lukuvuonna 2014-2015 opetuksessa otettiin käyttöön MATLABin alkeet -opetuskokonaisuus, jonka avulla opiskelijat harjoittelevat MATLABin käytön perusteita. MATLABin alkeet suoritettiin itsenäisesti omaan tahtiin osana Insinöörimatematiikka 2 tai Matematiikka 2 kursseja ja sen suoritti joulukuun 2015 alkuun mennessä 693 opiskelijaa ja joulukuun 2016 alkuun mennessä yhteensä 2148 opiskelijaa. MATLABin käyttöä opetettiin lisäksi matematiikan peruskursseilla integroituna muuhun opetukseen käyttämällä MATLABia kurssilla käytävien aiheiden ja ongelmien käsittelyssä.

7.2 Moduulin tavoitteet ja tutkimuskysymykset

MATLABin perusopetus sisältyy TTY:lla matematiikan peruskursseihin. MATLAB on erityisesti matriisilaskentaan soveltuva ohjelmisto, joten sen opetuksen sisällyttäminen matriisilaskennan kurssille tuntui järkevältä. Ohjelmiston opettaminen kurssin ohessa erillisenä kokonaisuutena ei kuitenkaan ole mielekästä ja ohjelmiston harjoittelun sitominen tiiviisti matematiikan opetukseen on aikaisemmin tuottanut hyviä oppimistuloksia [53]. Tavoitteena oli, että opetusmoduulin avulla saisi syvennettyä opiskelijoiden matriisilaskennan osaamista. On havaittu, että laskentaohjelmistojen avulla voidaan helpottaa matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä esimerkiksi visuaalisen havainnollistamisen avulla [20], mitä kannattaa käyttää hyödyksi opetuksessa. Tavoitteena on luoda mielekäs oppimiskokonaisuus, joka integroi laskentaohjelmiston oppimisen matematiikan syvälliseen oppimiseen. Jotta moduulin avulla voidaan tukea matematiikan oppimista koko kurssin sisällössä, moduulin halutaan sisältävän joka viikko kurssin oppisisältöjä.

Matriisilaskennan opettamisen lisäksi moduulin tarkoituksena on opettaa ensimmäisen vuoden tekniikan alan opiskelijoille MATLABin käyttöä erityisesti matriisilaskennassa. Opiskelijoiden oletetaan suorittaneen MATLABin alkeet -opintokokonaisuus, joten moduulissa oletetaan opiskelijalla olevan hieman kokemusta MATLABin käytöstä. Läheskään aina varsinkaan MATLABin käyttöä aloittelevalla käyttäjällä ei ole tiedossa komentoa, jolla ongelman saa ratkaistua. Siksi on tärkeää oppia etsimään vinkkejä oikeista paikoista oikeilla hakusanoilla. MATLABin komentoihin ja perustoimintoihin tutustumisen lisäksi moduulin tavoitteena oli opettaa opiskelijat tiedonhakuun MATLABin käyttöön liittyen. Osallistamalla opiskelijat aktiivisesti tiedonhakuun voidaan ohjata opiskelijoita ymmärtämään MATLABin toiminnallisuutta syvällisesti ja ohjataan oppimista syväsuuntautuneemmaksi [42, s. 91, 164]. Peruskomentojen hallitsemisen ja tiedonhakutaitojen avulla opiskelija saa valmiudet soveltaa MATLABia myöhemmin erilaisten tehtävien ratkaisemisessa. Tällöin opiskelija voi rakentaa osaamistaan aiemmin opittuun tietoon nojautuen konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisesti.

Opetusmoduulin tavoitteista ja aiemmista tutkimustuloksista voidaan johtaa tutkimuskysymyksiksi seuraavat kysymykset:

TK1 Miten MATLABin opetus voidaan liittää mielekkäällä tavalla matriisilaskennan kurssiin?
TK2 Millainen vaikutus opiskelijoiden matematiikan osaamiseen on MATLABin käyttämisellä opetuksessa?
TK3 Millaiset erityisesti matriisilaskennan opiskelua tukevat MATLABin peruskäyttötaidot sekä valmiudet MATLABin itsenäiseen opiskeluun opiskelija saa opetusmoduulin avulla harjoittelemalla?
TK4 Millainen vaikutus MATLABin käytöllä on opiskelijoiden opiskelumotivaatioon ja kiinnostukseen matematiikkaa kohtaan?

Tutkimuskysymyksiin pyritään vastaamaan opiskelijoilta kerätyn palautteen ja kyselylomakkeella saadun tiedon analysoinnin perusteella.

7.3 Teorian muodostaminen

Tässä diplomityössä tehdyn kehittämistutkimuksen tavoitteena oli toteuttaa verkossa opiskelijoille jaettava itseopiskeluun tarkoitettu opetusmoduuli, jonka avulla opiskelijat syventävät matriisilaskennan osaamistaan, oppivat käyttämään MATLABia matriisilaskennan apuna ja saavat valmiudet opetella sen käyttöä itsenäisesti myöhemmin vastaantulevissa ongelmissa. Koska kyseessä on ohjelmiston käytön harjoittelu, on luonnollista toteuttaa moduuliin kuuluvat tehtävät siten, että harjoitteet tehdään MATLABia käyttäen. Tästä syystä moduuliin sisällytettiin MATLAB-ohjelmia, jotka kuvataan tarkemmin luvussa 7.4.2. Luvussa 4 esiteltyjen syiden mukaisesti palautteen saamisen ja tehtävistä suoriutumisen välillä on yhteys, minkä vuoksi moduuliin haluttiin sisällyttää opiskelijoille suunnatun palautteen antoa. Palautteen pitäisi olla riittävän yksityiskohtaista, jotta opiskelija voi oppia siitä mahdollisimman paljon. Positiivinen ja kannustava sävy on myös tärkeää palautteen annossa. Ohjelmien tulee voida antaa palaute automaattisesti ilman, että kurssin pitäjä joutuu käymään opiskelijoiden tehtäviä läpi ja antamaan palautetta suoritusten perusteella. Opiskelijoiden minäpystyvyydellä on merkitystä palautteen annon tehokkuuteen suoritukseen vaikuttamisessa. Toisin sanoen ne opiskelijat, joilla on hyvä minäpystyvyys, parantavat suorituksiaan palautetta saatuaan enemmän kuin ne opiskelijat, joiden minäpystyvyys on matala. Insinööriopiskelijoiden minäpystyvyyteen on havaittu vaikuttavan muun muassa ohjelmistojen käyttötaidot sekä annetuista tehtävistä selviytyminen [35]. Tarjoamalla opiskelun alkuvaiheessa tehtäviä, joista opiskelijat varmasti selviävät hyvin, voidaan kohottaa heidän minäpystyvyyttään ja siten mahdollisesti parantaa oppimistuloksia [39]. Yliopiston ensimmäisen vuoden matematiikan opiskelijoilla tehdyn tutkimuksen mukaan etäopetuksessa ohjelmiston opiskelu voi tuntua haastavalta muun muassa uuden syntaksin opettelun takia [20], minkä vuoksi perusteellinen johdatteleminen alkuun on tärkeää.

Oppimateriaalit ja niiden jakaminen tulee toteuttaa siten, että ne kuormittavat opiskelijoiden kognitiivista kapasiteettia mahdollisimman vähän. Tämä tulee ottaa huomioon erityisesti valmistellessa multimedia-aineistoa, kuten opetusvideoita.

7.4 Moduulin kuvaus

Luvussa 7.3 kuvailtiin teoreettinen viitekehys, jonka perusteella opetusmenetelmää ja moduulia alettiin rakentaa ja luvussa 5.5 tarkasteltiin moduulissa käytäviä oppisisältöjä. Merkittävä rooli kehitetyssä opetusmenetelmässä on palautteenannolla ja opiskelijan minäpystyvyyteen vaikuttamisella. Tässä luvussa kuvaillaan aluksi moduulissa käytettävän opetusmateriaalin muodot, moduulissa käytetyt opetusohjelmat ja erilaiset moduuliin kuuluvat tehtävät. Luvussa esitellään myös lisää tutkimuksia, jotka tukevat niitä päätöksiä, joiden kautta päädyttiin toteuttamaan alla kuvattu kokonaisuus. Lopuksi käydään läpi moduulin kokeilun pilottivaihe avoimen yliopiston kurssilla.

7.4.1 Videot ja ohjeet

Kun moduulin aiheet ja opetettavat asiat oli päätetty, piti määrittää tapa, jolla ohjeistus MATLABin käyttöön opiskelijoille annetaan. Gist et al. [28] tutkivat kahden eri opetustyylin toimivuutta ohjelmiston opetuksessa. Vertailussa olivat niin sanotut *tutoriaalit* sekä *käyttäytymismallit* (*behavioral modeling*). Käyttäytymismallimenetelmässä ohjaaja näyttää joko itse opiskelijoiden kanssa samassa paikassa ollessaan tai opetusvideolla mallia, miten ohjelmistolla tietyt ongelmat saadaan ratkaistua. Tutoriaalimallissa ohjeistus sisältää tekstimuotoisina ohjeita ja esimerkkejä tehtävistä. Tutoriaalissa voi olla myös ennalta ohjelmoituja tehtäviä, jotka voivat arvioida opiskelijan ratkaisun heti. Gist et al. kuvailivat menetelmien eroa sanomalla, että

”tutoriaalissa asiat kerrotaan, kun käyttäytymismallin avulla asiat näytetään ja kerrotaan”. [28]

Tutkimus osoitti, että parempia oppimistuloksia saavutettiin käyttäytymismallimenetelmällä. Ero oli merkittävä erityisesti niillä opiskelijoilla, joiden minäpystyvyys tietokoneiden käyttöön liittyen oli matala, mutta eroa oli muissakin ryhmissä. Käyttäytymismallin nähnyt ryhmä pystyi myös sisäistämään enemmän tietoa, ajattelemaan loogisemmin, keskittymään paremmin sekä tunnistamaan ja korjaamaan virheitään paremmin kuin tutoriaaliryhmä. [28]

Tässä diplomityössä kehitettyyn opetusmoduuliin päätettiin sisällyttää ohjemateriaalia sekä käyttäytymismallin mukaisesti opetusvideoiden muodossa että tutoriaalimallin mukaisesti tekstinä. Videot toteutettiin screencast-menetelmällä ja kuvattiin sekä editoitiin Camtasia-ohjelmistolla. Opetusvideoilla käytiin läpi kullakin viikolla tarvittavia komentoja sekä yksinkertaisia esimerkkejä. Ohjaaja, jona toimi tämän diplomityön tekijä, kirjoitti MATLABiin komentoja ja kertoi mitä teki. Opiskelija näki, mitä MATLABin komentoikkunaan syötettiin ja mitä tulostui. Luvussa 2.2.2 esiteltyjen syiden vuoksi selostus ja komentojen kirjoittaminen tehtiin vuorotellen, jotta työmuistin sanallista sisältöä käsittelevä osa ei saa liikaa kognitiivista kuormitusta ja opetettava asia on helpompi sisäistää. Videoilla pyrittiin kirjoittamaan muuttujien määrittelyt ja muut komennot mahdollisimman helppolukuisina ja muutenkin tavalla, josta opiskelijan olisi hyvä ottaa mallia. Taulukko, johon on koottu opetusvideoiden viikottaiset sisällöt ja linkit Youtubesta löytyviin videoihin, on esitetty liitteessä A. Ajatellen erityisesti opiskelijoita, joilla on jo kokemusta MATLABin käytöstä tai muusta ohjelmoinnista, ohjeistus tarjottiin tutoriaalin mukaisesti myös pelkkänä tekstinä. Ohjetekstit sisälsivät lyhyet johdannot ja esimerkit viikon harjoituksissa tarvittavien keskeisimpien komentojen käytöstä.

Uuden ohjelmiston tai ohjelmointikielen harjoitteluvaiheessa ei käyttäjällä läheskään aina ole ennalta selvää, millä komennolla tai esimerkiksi ylimääräisellä paketilla tietty ongelma saadaan ratkaistuksi. Moduulin yhtenä tavoitteena oli antaa opiskelijoille valmiudet itsenäiseen tiedonhakuun ja MATLABin käytön itseopiskeluun. Tämä toteutettiin kannustamalla opiskelijoita MATLABin help-komennon ja MATLABin dokumentaation käyttöön. Myös internetin hakukoneiden hyödyllisyydestä mainittiin eräässä opetusvideossa, mutta help-komentoa ja dokumentaatiota korostettiin, sillä ne ovat käytettävissä TTY:lla joillain kursseilla käytössä olevissa sähköisissä EXAM-tenteissä. Kannustuksen lisäksi kaikkia komentoja ei kerrottu valmiiksi vaan vinkkinä annettiin hyviä hakusanoja tai yksinkertaisissa tapauksissa vain ongelma. Mielekkäiden ongelmien avulla voidaan antaa opiskelijoille onnistumisen kokemuksia ongelmakeskeisen tai jossain määrin tutkivan oppimisen mallien mukaisesti. Oikeiden kysymysten ja hakusanojen avulla opiskelijat pääsevät itse selvittämään ratkaisuja annettuihin tehtäviin. Kahdella viimeisellä viikolla moduuliin ei kuulunut opetusvideoita. Tällä tavoin opiskelijat pakotettiin harjoittamaan tiedonetsintätaitojaan ja miettimään, miten oikeat komennot löytyvät. Opiskelijoille perusteltiin videoiden puuttumista kannustavasti sillä, että heidän tiedonhakutaitonsa ovat jo niin hyvät, ettei yksinkertaisia komentoja näyttäviä videoita enää tarvita.

7.4.2 Opetusohjelmat

Hong Kongin yliopistossa on järjestetty tuhansille opiskelijoille verkkopohjaisia ohjelmointikursseja [41]. Kursseilla käytetään PASS-järjestelmää (*Programming Assignment aSsessment System*), johon opiskelijat syöttävät kirjoittamansa ohjelman. Järjestelmä tarkastaa ohjelman toimivuuden kurssin opettajan määrittelemien testisyötteiden perusteella. Testauksen jälkeen järjestelmä antaa opiskelijalle palautetta sen mukaan, miten ohjelma täytti annetut vaatimukset. Niin opettajat kuin opiskelijat ovat olleet järjestelmään tyytyväisiä. Opiskelijat ovat kokeneet hyödylliseksi palautteen saamisen ja tiedon siitä, mikä kirjotetussa koodissa on mennyt pieleen. Positiiviseksi ja motivoivaksi on myös koettu se, että palautteen saa välittömästi, jolloin virheet voi korjata heti. [41]

Koska opetusmoduulin yhtenä tavoitteena oli opettaa opiskelijoita käyttämään MATLABia, jolla voidaan yksinkertaisen laskemisen lisäksi ohjelmoida monimutkaisiakin ohjelmia, moduuliin oli luonnollista ottaa vaikutteita hyvin järjestettyjen ohjelmointikurssien opetusmenetelmistä. PASS-järjestelmän hyödyiksi koettiin sen välitön palautteen antaminen henkilökohtaisesti opiskelijan suoritusten mukaisesti. Tämä ominaisuus haluttiin myös osaksi moduulia.

Moduulissa päädyttiin ohjelmoimaan opiskelijoille MATLAB-ohjelmia, jotka antavat käyttäjälle tehtäviä sekä tunnistavat syötteen. Vaikutteita otettiin Mathworksin tarjoamasta Onramp-kurssista [1], jossa käyttäjä saa tehtäväkseen suorittaa tiettyjä komentoja ja ohjelma tarkastaa ovatko ne oikein. Erona toteutuksessa on, että moduulin ohjelmat antavat sanallista kannustusta sen lisäksi, että ne kertovat, onko syöte oikein vai väärin. Lisäksi MATLABin komentoja harjoitellaan pääosin matematiikan teoriaa opiskellessa. Ohjelmat sisälsivät pääosin tekstiä, mutta neljännellä ja kuudennella viikolla käytettiin apuna myös käsitteiden visualisointia kuvaajien ja animaation avulla. Teksti sisälsi teoriaa, ohjeita MATLABin käyttöön sekä erilaisia tehtäviä. Tekstiosiot pyrittiin pitämään lyhyinä tai ainakin antamaan niin pienissä pätkissä, että ne mahtuvat aina kerralla tietokoneen näytölle. Tehtävissä pyydetyistä syötteistä tarkastettiin, että niissä määriteltiin kullakin kerralla haluttu muuttuja ja että muuttujan tyyppi sekä arvo ovat oikeat. Matriisisyötteissä tarkastettiin matriisin koko ja alkioiden arvot. Virheellisistä syötteistä annettiin palautetta siitä, mikä niissä oli mennyt pieleen, minkä jälkeen pyydettiin antamaan syöte uudelleen. Mikäli muutaman yrityksen jälkeen syötettä ei oltu määritelty oikein, ohjelma antoi vinkkejä, joiden avulla käyttäjän on tarkoitus päästä etenemään. Oikein annetun syötteen jälkeen siirryttiin lausahdusten, kuten "JES!", "Hienoa!" tai "Sehän sujuu kuin tanssi", saattelemana eteenpäin. Tällä tavoin ohjelmat olivat vuorovaikutteisia tunnistaessaan opiskelijan syötteet ja antaessaan kannustavaa ja rakentavaa palautetta niin virheellisistä kuin oikeistakin suorituksista.

Law et al. [41] havaitsivat tutkimuksessaan, että motivaatioon opiskelussa vaikutti yksilön asenteiden lisäksi se, että opiskelijalla oli selkeä suunta, mihin hän opiskelussaan pyrki ja se, että hän tiesi saavansa henkilökohtaista palautetta omasta työskentelystään. Moduulin viikoittaisten harjoitusten alussa kerrottiin opiskeltava sisältö, jotta opiskelijalla olisi tiedossa, mitä on tulossa vastaan ja mitä pitäisi osata harjoitusten jälkeen. Jotta opiskelijalla olisi tunne siitä, että joku on ohjaamassa ja neuvomassa häntä henkilökohtaisesti, opetusohjelmien tekstit kirjoitettiin osittain puhekielisiksi. Lisäksi yllättäviä sanakäänteitä ja kevyttä huumoria pyrittiin lisäämään ohjelmiin. Tästä näkyy eräs esimerkki Kuvassa 7.1. Ohjelmien sävy sai kiitosta opiskelijoilta, mihin palataan palautteiden analysoinnin yhteydessä luvussa 8.1.

```
Tutustu nyt komentoihin mldivide ja mrdivide dokumentaatiosta.
Tarvitset naita seuraavassa tehtavassa. Kun olet valmis, kirjoita MURSU
```

Kuva 7.1 *Kuvankaappaus neljännen viikon opetusohjelmasta.*

Opiskelijoiden MATLABin käyttötaitojen karttumista haluttiin seurata kurssin aikana, joten osa tehtävistä haluttiin saada pisteytettyä. Nämä tehtävät ohjelmoitiin osaksi MATLAB-ohjelmaa, jossa muutkin harjoitteet olivat. Käyttäjä sai näiden tehtävien yhteydessä harjoitella eri komentojen käyttöä ratkaistessaan annettua tehtävää. Tehtävän vastaus pyydettiin syöttämään Moodlesta löytyvään tehtävään, jonka tehtävänanto vastasi ohjelmassa annettua tehtävää. Vastaus arvioitiin automaattisesti Moodlessa. Tehtävät määriteltiin siten, että Moodleen syötettävä vastaus oli mahdollisimman yksinkertainen, eikä ongelmia pitäisi tulla Moodlen syntaksin kanssa. Palautettavia tehtäviä oli yhdellä harjoituskerralla samassa ohjelmassa kahdesta kolmeen. Näitä tehtäviä MATLAB-ohjelma ei arvostellut vaan opiskelija sai siirtyä ohjelmassa eteenpäin syöttämällä koodisanan, joka tehtävänannossa oli määritelty. Esimerkki palautettavan tehtävän tehtävänannosta on Kuvassa 7.2.

```
TEHTAVA 1:

Tyomuistiin on nyt luotu 1000-alkioinen vektori T1.
Anna vastaukseksi Moodleen vektorin T1 313. ja 345. alkion summa.
Voit harjoitella rauhassa. Kun olet valmis, syota komentokenttaan teksti: LIIAN HELPPOA
```

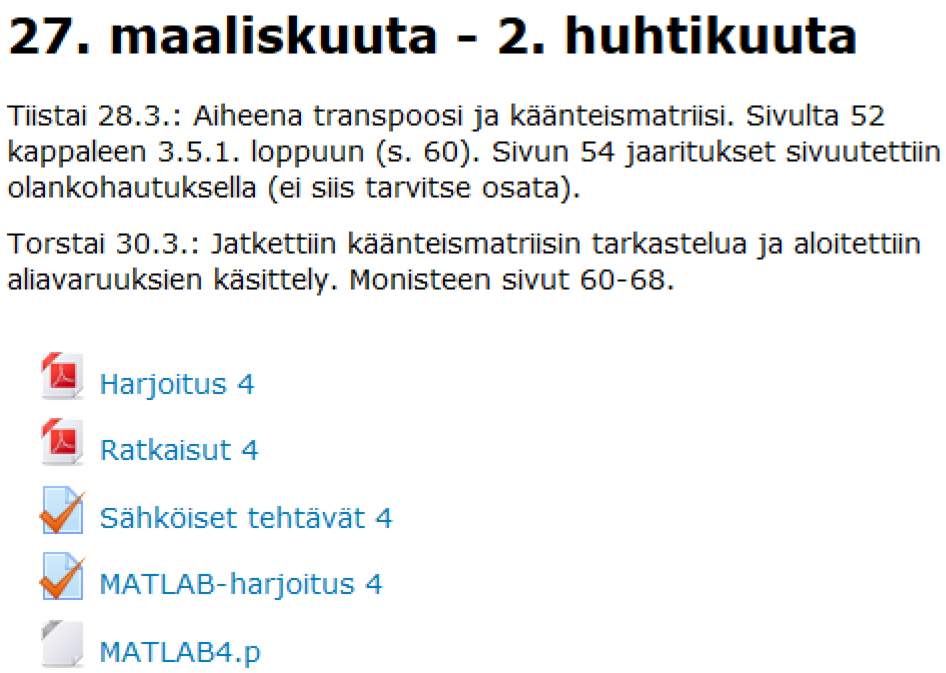
Kuva 7.2 *Kuvankaappaus ensimmäisten MATLAB-harjoitusten ensimmäisen Moodleen palautettavan tehtävän tehtävänanto.*

MATLABin skriptit kirjoitetaan yleensä m-tiedostoon. Moduulin opetusohjelmat on ohjelmoitu vertaamaan käyttäjän antamia vastauksia lähdekoodiin ennalta määriteltyihin arvoihin. Jotta opiskelijat eivät pääsisi käsiksi oikeisiin vastauksiin lähdekoodin kautta, kirjoitetut m-tiedostot muutettiin p-tiedostoiksi MATLABin `pcode`-komennolla. Komento ei Mathworksin dokumentaation mukaan salaa lähdekoodia, mutta ”sekoittaa” sen ja tekee siitä vaikealukuisen. [4] Sekoitettuakaan lähdekoodia ei saa MATLABilla näkyviin yhtä helposti kuin m-tiedoston koodia.

Ennen opetusohjelmien ottamista käyttöön haluttiin saada ohjelmien toteutuksesta asiantuntija-arvio. Tämä toteutettiin pyytämällä erästä TTY:n matematiikan laboratorion diplomityöntekijää ajamaan ja testaamaan ohjelmia. Palautetta saatiin oudoista lauserakenteista ja epäselvistä tehtävänannoista. Joissain tehtävissä oli mahdollista tulostaa näkyviin matriiseja, jotka olivat niin suuria, että tehtävänannon löytäminen tämän jälkeen oli hyvin hankalaa. Lisäksi ohjelmista löytyi yksittäisiä ohjelmointiin liittyviä ongelmia, joissa päädyttiin päättymättömiin silmukoihin ohjelman suorittamisessa. Näihin epäkohtiin reagoitiin ja ohjelmia muutettiin ennen moduulin ottamista käyttöön. Edellä mainittujen hankaluuksien lisäksi heti ensimmäisessä ohjelmassa tuli vastaan tilanne, että kaikilla käyttöjärjestelmillä MATLAB ei tunnista ääkkösiä, ellei ohjelmistoon tee hankalahkoja asetusten muutoksia, jotka pitäisi jokaisen opiskelijan tehdä erikseen. Tämän vuoksi moduulin ohjelmiin päädyttiin korvaamaan ö-kirjaimet kirjaimella o ja ä-kirjaimet kirjaimella a, kuten Kuvista 7.1 ja 7.2 voi huomata.

7.4.3 Moduulin ulkoinen rakenne

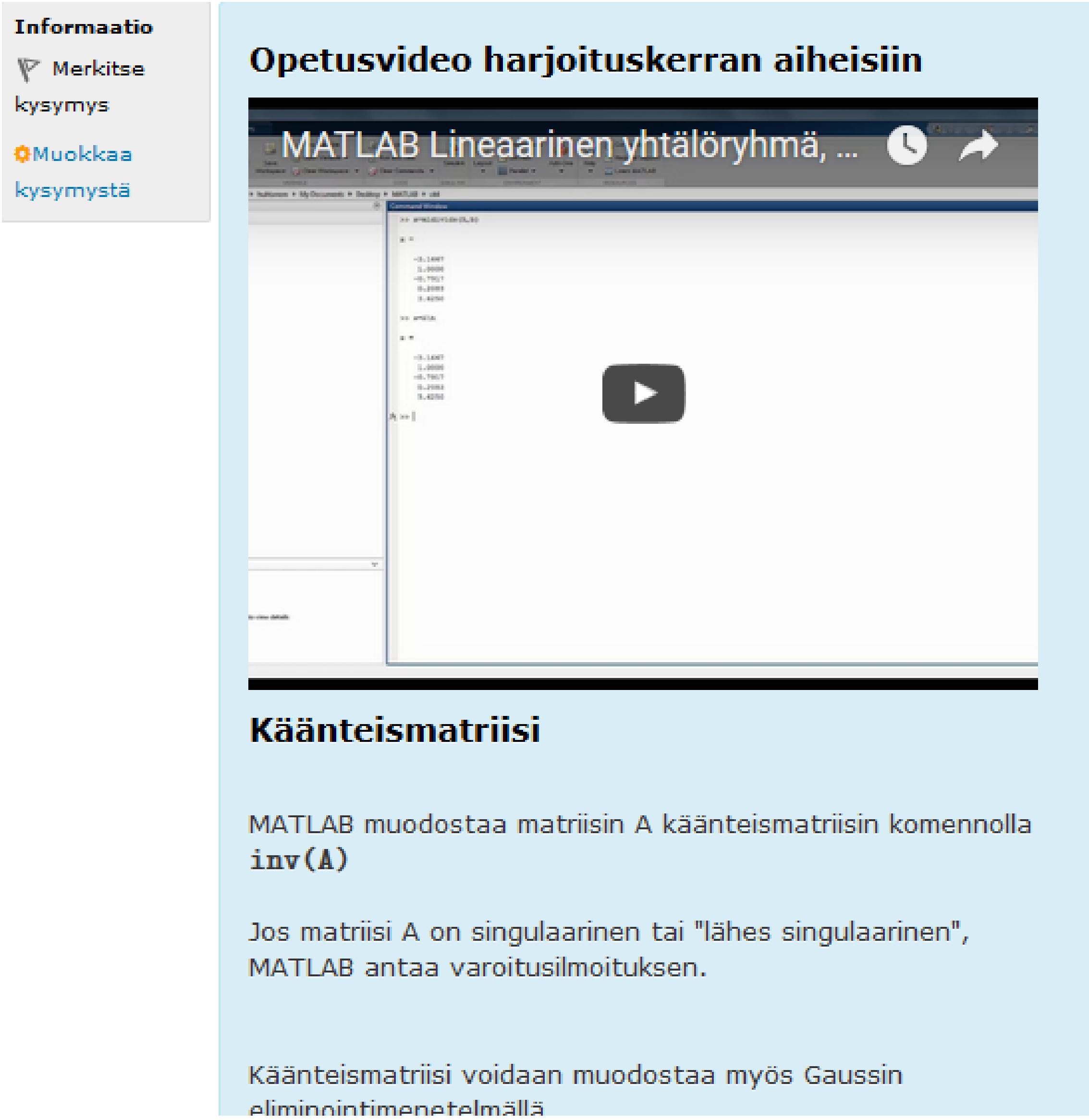
Kurssilla oli käytössä Moodle-verkko-oppimisympäristöön tehty sivu, josta löytyivät oppimateriaalit sekä harjoitustehtävät ja jonka avulla suoritettiin tiedonjako kurssiin liittyen. Jokaisella viikolla opiskelijalla oli tehtävänään perinteiset tehtävät sekä STACK-tehtävät, joten kaikki MATLAB-moduuliin liittyvä tieto haluttiin koota mahdollisimman yksinkertaisesti samaan paikkaan. Yhden viikon ohjeistus ja tehtävät toteutettiin Moodlen tenttinä, johon kuului ohjeteksti sekä tehtävät. Opetusohjelman sisältävän tiedoston opiskelija sai ladattua Moodle-sivulta omasta linkistään. Neljännen viikon osio kurssin Moodle-sivulla on esitetty Kuvassa 7.3.



Kuva 7.3 *Neljännen viikon osio kurssin Moodle-sivulla. Tentti, joka sisältää ohjeistuksen ja tehtävät, aukeaa klikkaamalla kohdasta MATLAB-harjoitus 4. Opetusohjelman saa ladattua klikkaamalla MATLAB4.p.*

Painamalla MATLAB-harjoitukset -linkkiä, opiskelija pääsi tarkastelemaan viikon ohjeistusta ja tehtäviä. Aukeavalla sivulla oli ylimmäisenä opetusvideo, jonka alla oli tekstinä ohjeistusta viikon aiheisiin. Neljännen viikon harjoitusten sivusta on kuvankaappaus Kuvassa 7.4, josta ilmenee, miten opetusvideo oli sijoitettu ohjetekstien edelle.

Heti tekstinä annettujen ohjeiden jälkeen samalla sivulla oli tehtävät, joiden tehtävänannot annettiin p-tiedostojen ohjelmassa ja vastaukset pyydettiin syöttämään



Kuva 7.4 *Viikon ohjeistuksessa ylimmäisenä näkyy opetusvideo niillä viikoilla, joilla sellainen oli. Videota seuraa ohjeteksti viikon aiheisiin.*

Moodleen. Tehtäviä oli viikosta riippuen 2-3 ja yhdessä tehtävässä saattoi olla alakohtia. Yhteensä tehtävistä sai yhden harjoituspisteen vastausten ollessa oikein. Kaikki tehtävät palautettiin kerralla, minkä jälkeen sai palautteen, olivatko vastaukset oikein. Tehtävien yrityskertoja ei oltu rajoitettu. Varsinaisten tehtävien jälkeen opiskelijoilta pyydettiin avointa palautetta kyseisen viikon MATLAB-harjoituksista. Lisää palautteen keräämisestä ja opiskelijoiden palautteista kerrotaan luvussa 8.1.1. Jokaisen viikon ohjetekstit on esitetty kuvankaappauksina liitteissä B-G. Moodle-sivun yläreunassa oleva opetusvideo ja alaosassa oleva palautekysymys eivät näy kuvissa.

7.5 Moduulin testaus matematiikan kurssilla

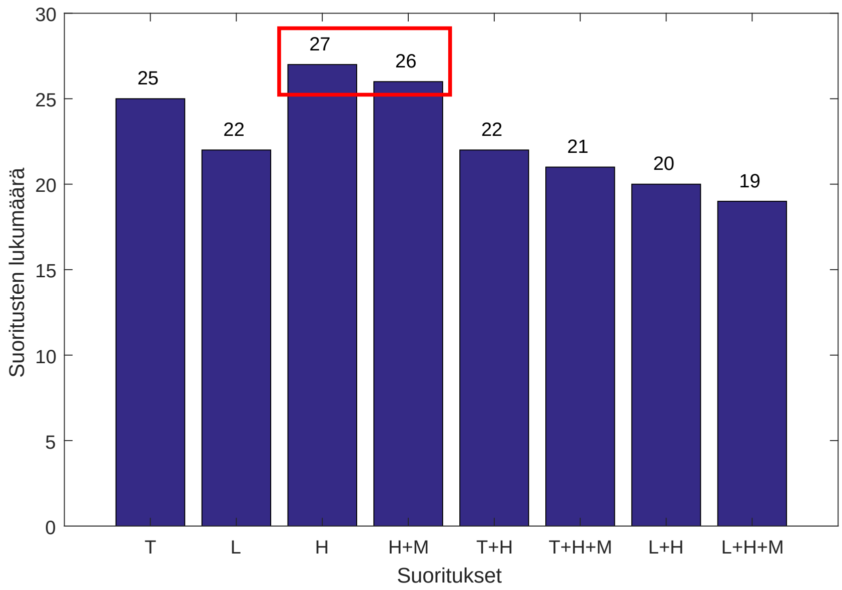
Diplomityössä kehitetyn opetusmoduulin käyttöönoton pilottivaihe suoritettiin keväällä 2017. Moduuli otettiin käyttöön avoimen yliopiston kurssilla Insinöörimatematiikka X 2. Kurssille oli ilmoittautunut 56 opiskelijaa, johon kuului opiskelijoilta niin TTY:lta kuin avoimesta yliopistosta. Kurssin suorittamiseen kuului kolme pakollista suoritusta: MATLABin alkeet, harjoituspaketti sekä tentti.

MATLABin alkeissa opiskelijoille opetettiin opetusvideoiden avulla MATLABin peruskäyttöä. Kokonaisuuteen kuului viisi eri aihetta, joista jokaisesta oli tehtävä. Aiheisiin kuului peruskomennot ja muuttujien alustaminen, kuvaajien piirtäminen, omien komentoketjujen eli skriptien ja funktioiden tekeminen ja suorittaminen, MATLABin valmiiden funktioiden käyttäminen ja mittausdatan tuominen MATLABiin.

Kurssilla oli pakollinen harjoituspaketti, jonka suorittamiseksi opiskelijan piti tehdä vähintään puolet kurssin aikana annettavista tehtävistä. Joka viikko oli mahdollista tehdä neljä kynällä ja paperilla tehtävää harjoitusta, neljä sähköistä automaattisesti tarkastettavaa STACK-tehtävää (*System for Teaching and Assessment using Computer algebra Kernel*)[50, s. 102] sekä MATLAB-harjoitus. MATLAB-harjoitus vastasi yhtä tehtävää viikoittain, joten oikein vastaamalla siitä oli mahdollista saada yksi viikon yhdeksästä mahdollisesta harjoituspisteestä. Tehtäviä tekemällä oli mahdollista ansaita bonuspisteitä. Bonuspisteitä alkoi kertyä, kun harjoituspakettiin vaadittavat 50 % tehtävistä oli tehty. Tekemällä vähintään 80 % tehtävistä, opiskelija saattoi saada enimmillään 3 bonuspistettä. MATLAB-harjoituksista oli mahdollista saada yhteensä seitsemän pistettä eli noin 13 % koko harjoituspistemäärästä. Täydet bonuspisteet oli siis mahdollista saada tekemättä yhtään MATLAB-tehtävää.

Kuvassa 7.5 on havainnollistettu opiskelijoiden osasuoritusten lukumääriä kurssin aikana. Monet TTY:n opiskelijat olivat saattaneet suorittaa MATLABin alkeet jo aikaisemmin, minkä vuoksi alkeiden suorituksia ei ole taulukoitu. Kuvassa näkyy tenttiin osallistuneiden ja hyväksytyn arvosanan saaneiden, harjoituspaketin tehneiden ja vähintään puolet MATLAB-harjoituksista tehneiden määrät.

Huomionarvoista on, että vain yksi 27:stä harjoituspaketin tehneestä opiskelijasta ei suorittanut MATLAB-harjoituksia, joten niitä tehtiin kurssilla varsin aktiivisesti.



Kuva 7.5 *Yhteenveto kurssilaisten suorituksista. Kuvaajan alarivin merkinnät tarkoittavat seuraavaa: T = suoritti tentin, L = läpäisi tentin hyväksytyllä arvosanalla, H = suoritti kurssille pakollisen harjoitustehtäväpaketin, M = teki kurssin aikana vähintään puolet MATLAB-tehtävistä. Tenttiin osallistui kaksi opiskelijaa, jotka eivät osallistuneet kurssille muuten. Näitä opiskelijoita ei ole otettu huomioon taulukon lukuarvoissa. Merkintä T+H tarkoittaa, että opiskelija suoritti tentin ja harjoitustehtäväpaketin.*

Niistä 21 tenttiin osallistuneesta opiskelijoista, jotka olivat suorittaneet harjoituspaketin ja vähintään puolet MATLAB-harjoituksista, kaksi ei saanut tentistä hyväksyttyä arvosanaa. Toisella tenttikerralla toinen näistä opiskelijoista osallistui tenttiin, mutta ei läpäissyt tenttiä. Tentin läpäisseistä ja harjoituspaketin suorittaneista 20 opiskelijasta 19 oli suorittanut myös vähintään puolet MATLAB-tehtävistä. Suurin osa kurssin läpäisseistä opiskelijoista teki siis kurssin aikana MATLAB-harjoituksia aktiivisesti. Ne, jotka olivat suorittaneet yhtään MATLAB-harjoitusta, olivat suorittaneet keskimäärin 4,97 tehtävää kuudesta.

Kurssin aikana luennoitsija vastasi perinteisten harjoitusten antamisesta ja tämän diplomityön tekijä STACK-tehtävistä sekä opetusmoduuliin liittyvistä MATLAB-harjoituksista. Opiskelijoilla oli mahdollisuus ottaa yhteyttä sähköpostitse vastuuhenkilöön ongelmien ja kysymysten ilmetessä. Kurssin lopussa MATLAB-harjoituksista kerättiin erillinen palaute kyselylomakkeella. Kyselyyn vastaaminen oli vapaaehtoista eikä edellyttänyt MATLAB-harjoitusten tekoa kurssin aikana, vaikka kysely liittyikin harjoituksiin. Kyselyyn vastaamiseen kannustettiin antamalla vastaamisesta yksi harjoituspiste. Opiskelijoille kerrottiin kyselyn tuloksia käytettävän moduulin kehittämiseen. Tutkimuseettiset näkökulmat on näin ollen otettu huomioon tutkimusta tehdessä.

8. KEHITTÄMISTUTKIMUKSEN TULOKSET

Tässä luvussa tarkastellaan tutkimustuloksia ja analysoidaan niitä. Aluksi tarkastellaan kvalitatiivisesti opiskelijoilta kurssin aikana ja sen jälkeen kerättyä palautetta, minkä jälkeen tutkitaan kvantitatiivisesti kyselylomakkeella opiskelijoiden kokemuksista saatua tietoa.

8.1 Opiskelijoiden palaute

Opiskelijoilta kerättiin palautetta moduulista viikoittain sekä kurssin lopussa. Jokaisella TTY:n kurssilla opiskelijan tulee antaa kurssista palautetta myös Kaikujärjestelmässä saadakseen arvosanan kurssista. Kaiku-palautteen verkkolomakkeessa ei ollut erillistä kysymystä MATLAB-harjoituksista, mutta Kaiku-palautteesta tarkasteltiin, kohdistuuko opiskelijoiden antama vapaa palaute MATLAB-tehtäviin. Tässä luvussa analysoidaan kurssin aikana ja sen päätteeksi saatua palautetta opetusmoduulista.

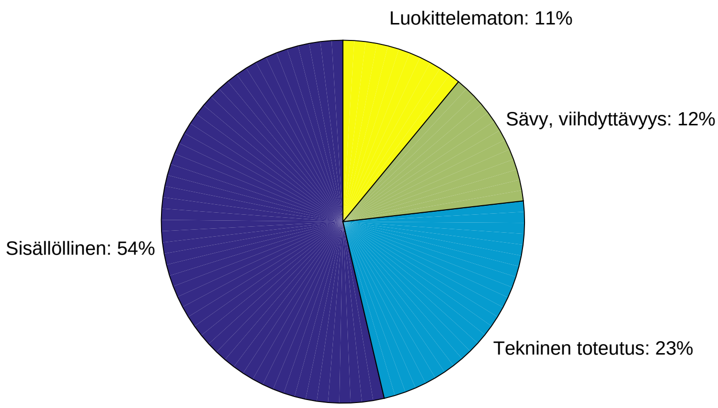
8.1.1 Viikkopalaute

Kun opetusmoduuli otettiin käyttöön avoimen yliopiston kurssilla keväällä 2017, moduuliin kuuluvia MATLAB-ohjelmia ei oltu vielä tehty loppuun saakka. Opiskelijoiden kokemusten kerääminen kehittämistutkimuksen aikana on tärkeää, ja palautetta keräämällä ja käyttäjäkokemuksiin reagoimalla voidaan parantaa moduulia jo sen suunnitteluvaiheessa. Tästä syystä jokaisella viikolla kerättiin tehtävien yhteydessä palautetta opiskelijoilta. Palautteen perusteella pyrittiin vaikuttamaan moduulin loppuosan toteutukseen siten, että moduulin avulla opiskelu olisi mahdollisimman helppoa ja tulokset hyviä. Palautteen antaminen oli vapaaehtoista eikä palautteen antamisesta saanut harjoituspisteitä.

Moodleen palautettavien tehtävien perässä oli viikoittain avoin tekstikenttä, jonka yläpuolella oli ohjeistuksena seuraava teksti:

> Anna tämän viikon MATLAB-harjoituksista palautetta.
> Mikä oli hyvää? Mikä oli huonoa?
> Kaikki palaute on tervetullutta, sillä palautteen avulla voidaan kehittää tehtäviä tämän kurssin aikana sekä tulevaisuudessa.

Opiskelijat antoivat palautetta läpi kurssin. Sanallisen palautteen määrä väheni kurssin kuluessa, kuten myös harjoitusten tekeminen. Noin 89 % saadusta palautteesta voidaan karkeasti jakaa kolmeen luokkaan sen mukaan, mihin aiheeseen palaute MATLAB-harjoituksissa kohdistui. Luokat ovat harjoitusten tekninen toteutus, ohjeiden ja harjoitusten sisältö sekä tehtävien sävy ja viihdyttävyys. Kuuden viikon aikana tekniseen toteutukseen viitattiin palautteissa yhteensä 19 kertaa, harjoitusten sisältöön 44 kertaa ja tehtävien sävyyn ja viihdyttävyyteen 10 kertaa. Luokkien suhteelliset osuudet on havainnollistettu Kuvassa 8.1.



Kuva 8.1 *Viikkopalautteet jaettiin kolmeen pääluokkaan: palaute teknisestä toteutuksesta, sisällöstä sekä tehtävien sävystä ja viihdyttävyydestä. Näihin kuulumattomat palauteet sijoitettiin luokkan "luokittelematon".*

Tekniseen toteutukseen kohdistuvaa palautetta tuli eniten kahden ensimmäisen viikon aikana. Opiskelijoilla oli ensimmäisellä viikolla ongelmia ohjelman ajamisessa ja vaikeuksia löytää annetut tiedostot Moodle-sivulta. Toisella viikolla yksi opiskelija antoi palautteen samasta asiasta. Eräs opiskelija ilmaisi ongelman näin:

> *.p tiedoston käyttämisestä olisi hyvä olla ohjeet. Lataa ja aja se ei riittänyt tälle aloittelijalle, vaan ohjetta piti googlettaa ikävän kauan ja siitä huolimatta kysyä kokeneemmilta apua.* – – (Harjoitus 1)

Ongelmat liittyivät monilla käytössä olevaan MATLABin versioon. Opetusohjelmissa oli käytetty komentoa `newline`, joka on tullut MATLABiin versiossa 2016b [3]. Palautteita luettiin ensimmäisen kerran toisten harjoitusten jälkeen, joten opiskelijoiden hankaluudet p-tiedostojen lukemisessa havaittiin vasta tuolloin. Palautteeseen reagoitiin antamalla ensimmäisten ja toisten harjoitusten tekemiseen lisäaikaa kolmannen harjoitusviikon loppuun saakka sekä antamalla lisäohjeistusta tiedostojen lataamiseen ja ohjelman ajamiseen.

Tekniseen toteutukseen liittyen ensimmäisen ja toisen viikon palautteissa esiintyi kommentti opetusvideoiden kuvanlaadusta yhteensä neljä kertaa. Videoiden katsominen kannettavan tietokoneen näytöltä oli hankalaa, sillä videoilla näkyvistä MATLAB-komennoista ei meinannut saada selvää. Uusia videoita ei ehditty tehdä kurssin kuluessa, joten ne jäävät tehtäväksi ennen seuraavaa toteutusta. Viisi palautetta koski Moodleen ohjelmoitavia tehtäviä. Kolmessa niistä toivottiin, että tehtävät voisi tarkistaa ennen palautusta. Kaksi palautteista koski sitä, että tehtävät eivät tunnistaneet syötettä vaikka se oli oikein.

> *"Lukitsen vastaukseni" -nappi olisi kiva* (Harjoitus 2)

> *Kysymys 2 ei osaa tulkita vastauksia oikein. Tämä on toinen yritys jos menisi läpi, ensimmäistä yritystä koitin monta kertaa, mutta se sanoi aina palautussivulla "puutteellinen vastaus".* (Harjoitus 3)

Viimeisellä viikolla neljä palautetta koski käyränsovitustyökalun puuttumista heidän MATLAB-asennuksestaan. Työkalu on kuitenkin saatavissa TTY:n kampuslisenssiin kuuluvassa asennuspaketissa.

Eniten palautetta annettiin ohjeistukseen ja tehtävien sisältöihin liittyen. Pääasiassa palaute oli positiivista, joskin parannettaviakin asioita palautteiden avulla ilmeni. Yhteensä yhdeksän palautetta koski tehtävien vaikeustasoa ja kuormittavuutta. Näistä kolmessa tehtäviä sanottiin helpoiksi tai sanottiin, että tehtävät voisivat olla monimutkaisempia.

> *matlabin .p-tiedosto oli hyvä. Tykkäsin tuosta funktion rakentelusta. Voisi olla monimutkaisempiakin funktion rakenteluja tehtävissä, vaikka toki veikkaan että jatkossa ehkä onkin.* (Harjoitus 1)

Muissa vaikeustasoon liittyvissä palautteissa todettiin vaikeustason olevan sopiva. Sisältöön liittyvät negatiiviset palautteet koskivat vain tehtävänantoja. Osa opiskelijoista koki, että jotkut tehtävänannot olivat epäselviä. Palautteet kohdistuivat yksittäisiin tehtäviin.

> *2. tehtävän tehtävänanto epäselvä.* (Harjoitus 3)

Palautteissa tuli yksittäisiä kommentteja eri viikoilla siitä, että tehtävät olivat tarkoituksenmukaisia ja auttoivat oppimaan asioita. Muutamissa palautteissa mainittiin myös, että tehtäviä tehdessä tulee mietittyä oikeasti, mitä pitää tehdä.

> *Hyvät harkat. Selkeät ohjeet ja tiedosto, jota läpi käydessä on pakko keskittyä tehtäviin. Siinä tulee oikeasti mietittyä miten mikäkin komento toimii.* (Harjoitus 2)

Kuten edellisessä palautteessa tuli ilmi, palautetta annettiin tehtävien lisäksi myös ohjeistuksesta. 44 sisältöä koskevasta kommentista 12 koskivat ohjemateriaaleja. Näistä palautteista kaikki olivat positiivisia.

Kolmas luokka, johon palautteet jaettiin, oli sävyn ja viihdyttävyyden kommentoiminen. Tällaisia palautteita tuli yhteensä 10, joista kaikki olivat positiivisia. Alle on poimittu muutama tehtävien sävyyn liittyvä kommentti.

> *– – Muilta osin mielenkiintoinen tehtävä, ja tekstit olivat kannustavia kuten aina tähänkin asti.* (Harjoitus 6)

> *Moikka, kiitos taas viihdyttävistä tehtävistä! Hienosti sai kerrattua matriiseihin liittyviä juttuja, jotka ehtivät jo melkein unohtua pääsiäislomalla. Tehtävänannon lempeä luonne jaksaa yllättää iloisesti aina näitä tehdessä <3* (Harjoitus 5)

> *Välikommentit olivat hauskoja ja piristivät muuten niin puisevaa matlabia. :)* (Harjoitus 2)

Edellä kuvattuihin luokkiin jaoteltujen palautteiden lisäksi yhteensä 10 palautetta olivat vaikeasti luokiteltavissa. Näistä kuusi olivat *OK, hyvä/ihan hyvä* tai *”– –*

muuten harjoitus ihan jees". Hauska, joskin moduulin kehittämisen kannalta epäoleellinen palaute tuli toisella viikolla eräältä opiskelijalta:

> *Nyt ei tuu valituksen aiheita mieleen. Tappara on terästä, tänään baariin!* (Harjoitus 2)

Yleisesti suurin osa opiskelijoiden antamasta palautteesta oli positiivista. Erityisesti kiitosta saivat ohjetekstit ja videot, vaikka kuvanlaatu olikin heikko. Palautteissa mainittiin yhteensä 13 kertaa, että tehtävät olivat hyviä tai opettavaisia, palvelivat tarkoitustaan, saivat ajattelemaan tai auttoivat oppimaan matematiikkaa. Myös tehtävien rento sävy sai monilta opiskelijoilta kiitosta. Kehitysehdotukset ja kritiikki kohdistuivat vain tekniseen toteutukseen sekä epäselviin tehtävänantoihin. Näiden asioiden korjaaminen on mahdollista toteuttaa ennen kurssin seuraavaa toteutusta ja moduulin käyttöönottoa.

8.1.2 Loppukysely ja Kaiku-palaute

Viimeisten viikkoharjoitusten yhteydessä opiskelijoilta kerättiin palautetta ja kokemuksia MATLAB-tehtävistä kyselylomakkeella. Kysely koostui monivalintaväittämistä, vapaan palautteen osiosta sekä taustatieto-osiosta. Palautteen antamiseen kannustettiin antamalla yksi harjoitustehtäväpiste palautekyselyyn vastaamisesta. Vastaaminen ei edellyttänyt, että on tehnyt MATLAB-harjoituksia kurssin aikana. Palautetta antoi 26 opiskelijaa, joista 25 oli tehnyt MATLAB-harjoituksia kurssin aikana.

Kyselyssä oli 12 väittämää, joihin vastattiin viisiportaisella Likertin asteikolla. Lomakkeen väittämät suunniteltiin siten, että niillä pyrittiin selvittämään, lisäsivätkö MATLAB-tehtävät motivaatiota matematiikan opiskeluun, miten tehtävien teko vaikutti opiskelijoiden mielestä heidän taitoihinsa matematiikassa sekä MATLABin käytössä, koettiinko MATLABin opiskeluun tarkoitettu materiaali hyödylliseksi ja millainen oli tehtävien vaikeusaste. Väittämät ja vastausten keskiarvot on esitetty taulukossa 8.1. Kyselyä analysoidaan kvantitatiivisesti luvussa 8.2.

Likertin asteikollisten väittämien lisäksi kyselyssä pyydettiin avointa palautetta MATLAB-harjoituksista kysymällä mikä oli hyvää ja mikä huonoa. Palautetta sai antaa joko harjoituksista kokonaisuutena tai yksittäisistä harjoituksista erikseen. 13

opiskelijaa vastasi kysymykseen, mikä MATLAB-tehtävissä oli hyvää, ja 10 vastasi kysymykseen, mikä oli huonoa. Palautetta annettiin monipuolisesti eri asioista ja suurin osa ilmenneistä asioista oli mainittu vain yhdessä palautteessa. Opiskelijoilta kysyttiin myös opiskelevatko he TTY:lla vai avoimessa yliopistossa. Lisäksi TTY:n opiskelijoilta kysyttiin koulutusohjelma sekä monesko opiskeluvuosi on menossa. Viimeiseksi opiskelijoilta pyydettiin arviota matematiikan osaamisesta neliportaisella asteikolla Heikko-Tyydyttävä-Hyvä-Erinomainen.

Kysymyksen ”Mikä oli hyvää?” vastauksissa nostettiin yksittäisiä kertoja esiin sähköisten materiaalien sopiminen hyvin itseopiskeluun, se, että tehtävät tukivat kurssin aiheen oppimista, hyvin koodatut p-tiedostot, help-komennon käyttöön pakottaminen, tehtävien aikana tulevat vihjeet sekä se, että MATLAB antaa hyviä valmiuksia työelämää varten. Kahdesti palautteissa mainittiin, että tehtäviä tehdessä syntyi rutiini MATLABin käyttöön mikä on hyödyllistä laskujen tarkastamisessa. Kuudessa palautteessa oli mainittu, että ohjetekstit ja videot olivat hyödyllisiä ja niiden avulla oli helppo opiskella MATLABin käyttöä.

Huonoiksi asioiksi MATLAB-harjoituksissa ei noussut yhtään selkeästi muista erottuvaa ominaisuutta. Vaikeustasoon viitattiin kuitenkin useimmin. Kahdessa palautteessa kerrottiin tehtävien olevan liian vaikeita, yhdessä toivottiin pidempiä tehtäviä, yhdessä sanottiin niiden vievän aikaa ja yhdessä ilmaistiin tason vaihtelevan. Videoiden huonosta kuvanlaadusta oli mainittu kerran, samoin vaikeaselkoisista tehtävänannoista. Yhdessä palautteessa mainittiin Moodle-tehtävien tarkistamisessa ilmenneet ongelmat. Kahdesti toivottiin parempaa ohjeistusta p-tiedostojen ajamiseen sekä ohjeistamiseen MATLABin oikean version käytössä.

Avointen palautteiden mukaan kehitettävää moduulissa on erityisesti tehtävien teknisessä toteutuksessa. Positiivisimmaksi asiaksi huonosta kuvanlaadusta huolimatta koettiin hyvät opetusvideot ja ohjetekstit, joiden avulla oli helppo opiskella ja joihin saattoi palata uudelleen myöhemmin. Niin kurssin aikana kuin kurssiin päätteeksi saadun palautteen sekä kurssin sisällön uudelleenanalysoinnin perusteella kootut moduulin onnistumiset sekä kehityskohteet muutosehdotuksineen on esitetty liitteessä H.

Opiskelijat antoivat yleisesti palautetta kurssista pakollisessa Kaiku-palautteessa. Kysymykseen ”Mikä onnistui opintojaksolla hyvin?” annettiin 14 sanallista palautetta. Näistä MATLABin alkeet mainittiin kerran ja MATLAB-tehtävät kahdesti. Yleisesti sähköisiä tehtäviä oli pitänyt hyvänä asiana seitsemän opiskelijaa. Monissa mainittiin sähköiset tehtävät tai sähköiset harjoitukset. Kurssilla käytössä olleet STACK-tehtävät oli nimetty ”Sähköisiksi tehtäviksi”, minkä vuoksi on vaikeaa eritellä, mikä palaute kohdistui STACK-tehtäviin ja mikä yleisesti STACK- ja MATLAB-tehtäviin. Joka tapauksessa voidaan päätellä, että perinteisten paperilla tehtävien harjoitusten lisäksi vaihtoehtoisten harjoitusten tarjoamista pidettiin hyvänä asiana.

8.2 Kvantitatiivinen analyysi

Tämän luvun alussa tarkastellaan moduuliin liittyvän loppukyselyn perusteella muodostettujen mittareiden muodostamista ja luotettavuutta. Mittareiden muodostamisen jälkeen tutkitaan korrelaation avulla mittareiden yhteyttä arvosanaan sekä toisiinsa. Taulukossa 8.1 on esitetty palautelomakkeen väittämät ja näitä vastaavat tunnisteet (ID) sekä vastausten keskiarvo. Kyselyyn vastasi 26 opiskelijaa.

Kyselylomakkeeseen vastattiin viisiportaisella Likert-asteikolla ja vastaukset koodattiin vastaamaan arvoja 1-5. Väittämistä 2 ja 12 laskettiin uudet muuttujat vähentämällä muuttujan arvo luvusta kuusi, sillä suuri arvo näistä väittämistä tarkoittaa vastakkaista mielipidettä, kuin muissa samaa mittaria kuvaavissa kysymyksissä.

8.2.1 Mittareiden luotettavuus

Loppukyselyn kysymysmuuttujista haluttiin muodostaa mittareita, joita mitataan vähintään kahdella eri kysymyksellä. Kysymysmuuttujat jaettiin ryhmiin taulukon 8.1 vaakaviivojen mukaisesti. Kysymyksistä muodostettujen ryhmien sisäistä pysyvyyttä tutkittiin laskemalla SPSS-ohjelmalla Cronbachin α kullekin muodostetulle mittarille. Tarkastelemalla α-arvoja havaittiin sisäisen pysyvyyden olevan kaikkein suurin, kun kysymykset 2 ja 12 jätettiin tarkasteluista pois. Tämän jälkeen jäljellä olevista väittämistä laskettiin mittareita vastaavat summamuuttujat.

Kyselylomakkeen perusteella mittaria muodostettaessa suositellaan käytettävän useampaa kuin kahta muuttujaa. Jos muuttujia kuitenkin on kaksi, Cronbachin α mittarin luotettavuuden mittana on herättänyt ristiriitaisia mielipiteitä tutkijoiden keskuudessa. Eisinga et al. [27] ovat osoittaneet, että kahden muuttujan tapauksessa yleensä Spearman-Brownin vakion kuvaa luotettavuutta tarkimmin ja α antaa luotettavuudelle alarajan. Spearman-Brownin vakion arvo voi olla todellista luotettavuutta korkeampi, joten yhdessä Cronbachin α kanssa se kuvaa luotettavuutta hyvin. Spearman-Brownin vakiot sekä α kullekin mittarille on laskettu Taulukkoon

Taulukko 8.1 *Loppukyselyn väittämät ja vastausten keskiarvo. Vastauksia kyselyyn saatiin 26 kappaletta. Väittämiin vastattiin viisiportaisella Likert-asteikolla.*

Väittämän ID	Väittämä	Vastausten keskiarvo
1	Matlab-harjoitusten tekeminen oli kivaa.	3,89
2	Tein mieluummin perinteisiä tehtäviä kynällä ja paperilla kuin Matlab-harjoituksia.	2,89
3	Matlab-harjoitukset motivoivat minua matematiikan opiskelussa.	3,68
4	Matlab-harjoitukset olivat liian vaikeita.	2,32
5	Matlab-tehtäviin kului suhteessa enemmän aikaa, kuin muihin harjoitustehtäviin.	2,00
6	Matlab-harjoitusten tekeminen paransi matriisilaskennan osaamistani.	3,79
7	Ymmärsin kurssilla käytävän teorian paremmin tehtyäni Matlab-harjoitukset.	3,21
8	Osaan etsiä tietoa Matlabin käytöstä ratkaistessani ongelmaa, jonka ratkaisuun en osaa valmiiksi komentoja.	4,42
9	Minulla on valmiudet ratkaista erilaisia laskennallisia ongelmia Matlabilla.	4,16
10	Opetusvideot edistivät oppimistani.	4,21
11	Moodlesta löytyvät viikoittaiset ohjetekstit olivat hyödyllisiä.	4,53
12	Tehtävistä olisi selvinnyt ilman Moodlesta löytyviä videoita tai ohjetekstejä.	2,58

8.2. Taulukossa on esitetty lyhenteet summamuuttujille sekä summamuuttujien keskiarvot. Summamuuttujat on skaalattu samalle asteikolle alkuperäisten kysymysmuuttujien kanssa, eli välille 1-5. Tarkastelemalla Spearman-Brownin vakion ja α-arvoja huomataan, että tunnuslukujen arvot ovat melko lähellä toisiaan. Suurin ero on mittarilla MV, jolle Spearman-Brownin vakion arvo on 0,051 suurempi kuin α.

Kun mitataan mittarin luotettavuutta sisäisen pysyvyyden avulla, pienimpänä hyväksyttävänä arvona pidetään arvoa $\alpha = 0.7$ [21]. Muodostetuista mittareista kaikkien, paitsi VAAT:n, kohdalla α on tätä suurempi. VAAT:n arvo 0,694 on siis kyseenalaistettava, mutta koska se on hyvin lähellä hyväksyttävää arvoa, jätetään se mukaan tarkasteluun.

Muodostettujen summamuuttujien arvoista voidaan päätellä moduulin vaikutuksia

Taulukko 8.2 *Mittarit, niitä kuvaavien kysymysten ID, mittareille määritellyt Cronbachin α sekä Spearman-Brownin vakio (SB-vakio) sekä mittaria kuvaavan summamuuttujan keskiarvo (KA).*

Mittari ja sen lyhenne	Kysymyksen ID	Cronbachin α	SB-vakio	KA
Mielekkyys ja motivointivaikutus (MOT)	1, 3	0,725	0,727	3,79
Tehtävien vaativuus (VAAT)	4, 5	0,694	0,695	2,16
Paransi osaamista matematiikassa (MAT)	6, 7	0,748	0,754	3,50
Käsitys omista MATLAB-valmiuksista (MV)	8, 9	0,801	0,852	4,29
Tyytyväisyys opetusmateriaaliin (OM)	10, 11	0,758	0,784	4,37

opiskelijoiden osaamiseen ja asenteisiin. Kolmosta suurempi arvo mittarilla MOT tarkoittaa, että MATLAB-tehtävien tekeminen motivoi opiskelijoita harjoittelemaan matematiikkaa MATLABin avulla. Mittarin VAAT arvo tarkoittaa, että tehtäviä ei koettu liian haastaviksi ja aikaa vieviksi. Opiskelijat kokivat mittarin MAT perusteella, että MATLAB-harjoitusten tekeminen paransi heidän ymmärrystään matriisilaskennasta. Mittareiden mukaan moduulin avulla harjoittelu paransi merkittävästi opiskelijoiden uskoa omiin valmiuksiinsa käyttää MATLABia tulevaisuudessa. Lisäksi opiskelijat olivat hyvin tyytyväisiä moduulin sisältämiin oppimateriaaleihin.

8.2.2 Mittareiden ja arvosanojen yhteys

Summamuuttujien ja arvosanojen väliset Pearsonin korrelaatiot laskettiin mahdollisten yhteyksien selvittämiseksi. Korrelaatiot on esitetty Taulukossa 8.3. Merkitsevyystasolla 0.05 tilastollisesti merkitsevät korrelaatiot on korostettu vihreällä värillä. Laskettaessa Spearmanin korrelaatiokertoimet saatiin tilastollisesti merkitsevät yhteydet samojen mittareiden välille. Huomataan, että mikään mittari ei korreloi merkitsevästi arvosanan kanssa. Mittareilla sen sijaan on tilastollisesti merkitseviä korrelaatioita toistensa kanssa. Motivaatiolla opiskella matematiikkaa MATLAB-harjoitusten avulla oli negatiivinen korrelaatio sen kanssa, kokiko opiskelija tehtävät liian haastaviksi. Positiivisesti motivaatio korreloi sekä matematiikan osaamisen kehittymisen että MATLAB-valmiuksien kanssa. Havainnot vastaavat teoriaa, jonka mukaan usko omiin kykyihin parantaa motivaatiota (katso luku 4).

Taulukko 8.3 *Arvosanan ja eri mittareiden korrelaatiomatriisi*

	Arvosana	MOT	VAAT	MAT	MV	OM
Arvosana	1					
MOT	0,184	1				
VAAT	-0,186	-0,519	1			
MAT	-0,175	0,474	-0,271	1		
MV	0,015	0,470	-0,556	0,549	1	
OM	-0,071	0,265	-0,055	0,122	0,047	1

Palautekyselyssä pyydettiin opiskelijoita antamaan arvio omasta osaamistasostaan matematiikassa. Tarkastelemalla korrelaatiota arvosanan ja opiskelijan näkemyksen välillä löydettiin positiivinen mutta tilastollisesti ei-merkitsevä yhteys. Tentissä olleista 25 opiskelijasta 22 oli suorittanut vähintään puolet MATLAB-harjoituksista (yksi ei suorittanut harjoituspakettia) ja kolme ei yhtään tai vähemmän kuin puolet. MATLAB-harjoituksia tehneiden arvosanojen keskiarvo (2,68) on yli yhden arvosanan parempi kuin niiden, jotka eivät tehneet harjoituksia (1,67). Kuitenkin kontrolliryhmän otoskoon ollessa kolme, ei arvosanojen vertailu ole mielekästä.

9. TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS

Kehittämistutkimuksen vaiheisiin kuuluu ongelman ja tavoitteiden märittely, teorian ja menetelmän kehittäminen ja toteutus, asiantuntijalausunnot ennen menetelmän käyttöönottoa, menetelmän pilottikokeilu ja teorian ja menetelmän kehittäminen kokemusten ja tieteellisen tiedon perusteella. Kehittämistutkimuksen dokumentoiminen mahdollistaa tutkimuksen vertaisarvioinnin ja kritiikin.

Diplomityössä esitelty opetusmoduuli toteutettiin kehittämistutkimuksena teorian kehittämisestä pilottikokeiluun ja kehittämisehdotusten kokoamiseen saakka. Moduulin opetusohjelmiin sisällytettiin palautteenantoa ja kannustusta, joilla on osoitettu olevan vaikutusta minäpystyvyyteen, motivaatioon sekä tehtävistä suoriutumiseen. Oppimateriaalit valmisteltiin siten, että kognitiivisen kuormitusteorian ja multimediaoppimisen kognitiivisen teorian mukaan ne aiheuttavat mahdollisimman vähän kuormaa opiskelijan työmuistiin ja siten mahdollistavat hyvät oppimistulokset. Opetusohjelmien toteutuksessa otettiin vaikutteita ohjelmoinnin kurssien toteutuksista, joilla on todettu saavutettavan hyviä tuloksia. Teoria ja menetelmä kehitettiin siis tieteelliseen tutkimukseen nojaten. Opetusohjelmia testasi pian valmistuva opettaja ja diplomi-insinööri, joka antoi palautetta ohjelmien käytettävyydestä ja toimivuudesta. Opetusmoduulia kokeiltiin aluksi pienellä kurssilla, jonka aikana ja loputtua saatiin kerättyä palautetta opiskelijoiden kokemuksista. Palautteen perusteella saatiin paranneltua moduulin käytetävyyttä. Tämä diplomityö toimii tutkimuksen dokumentointina ja on luettavissa verkossa. Tutkimus on siis toteutettu noudattaen kehittämistutkimuksen eri vaiheita.

Tutkimuksen luotettavuutta mitataan reliabiliteetin ja validiteetin avulla. Reliabiliteetti kuvaa kuinka toistettavissa tutkimus on eli kuinka vähän tuloksissa esiintyy sattumanvaraisuutta. [47, s. 117][54, s. 149] Kvalitatiivisen tutkimuksen reliabiliteettia tutkittaessa tarkastellaan, miten hyvin otos edustaa perusjoukkoa, miten huolellisesti havaintoyksikköjä koskevat tiedot on syötetty ja analysoitu ja kuinka huolellisesti ja kattavasti mittarit on laadittu. [54, s. 149-150] Validiteetti voidaan jakaa sisäiseen ja ulkoiseen validiteettiin. Ulkoisella validiteetilla tarkoitetaan, kuinka hyvin tutkimus on yleistettävissä. Tämä liittyy useimmiten otannan onnistumiseen. Sisäisellä validiteetilla tarkoitetaan sitä, mittaako tutkimus haluttua asiaa. [47, s. 66]

Koska kyseessä on kehittämistutkimus, joka on edennyt vasta pilottikokeiluun saakka ja muihin tutkimuksiin vertaaminen ei ole suoraan mahdollista, on vaikeaa arvioida tutkimuksen reliaabeliutta. Reliabiliteettia voidaan kuitenkin mitata sisäistä pysyvyyttä mittaavien Cronbachin α ja Spearman-Brownin vakioiden avulla. Luvussa 8.2 tehdyn analyysin mukaan muodostetut mittarit mittaavat hyväksyttävällä tasolla kukin yhtä asiaa. Mittaustulokset raportoitiin rehellisesti ja huolellisesti ja tulokset tarkistettiin laskemalla uudelleen. Tutkimuksen luotettavuutta lisää käytetty menetelmätriangulaatio, eli se, että aineistoa käsiteltiin kvalitatiivisesti sekä kvantitatiivisesti [47, s. 107].

Otos tutkimuksessa oli pieni, joten mittareiden luotettavuuden tuloksia ei voida pitää yleistettävinä. Matematiikan kurssilla, jolla pilottikokeilu toteutettiin, oli TTY:n sekä avoimen yliopiston opiskelijoita (26:sta loppukyselyyn vastanneesta 14 oli avoimesta yliopistosta), joten otos ei kuvannut TTY:n koko opiskelijapopulaatiota hyvin. Kyselylomakkeen kysymyksiä ei perusteltu kattavasti muiden tutkimusten tuloksilla, joten vaikka mittareiden sisäinen pysyvyys onkin hyväksyttävällä tasolla, on vaikeaa sanoa mittaavatko ne haluttua asiaa. MATLAB-harjoitusten teon vaikutusta opiskelijoiden arvosanoihin ei ole pienen otoskoon vuoksi mielekästä tehdä kovin syvällisesti. Verratessa niiden opiskelijoiden, jotka tekivät kurssin aikana MATLAB-harjoituksia, arvosanoja muiden opiskelijoiden arvosanoihin, on arvosanojen keskiarvossa yhden arvosanan ero, kun arvosana annetaan asteikolla 0-5. Osa erosta selittynee muillakin kuin moduulin vaikutuksiin liittyvillä tekijöillä, joita ei tässä tutkimuksessa mitattu eikä kontrolloitu.

10. YHTEENVETO JA POHDINTAA

Tässä diplomityössä on esitelty kehittämistutkimuksena toteutettu matriisilaskennan ja MATLABin käytön opiskeluun tarkoitettu opetusmoduuli. Moduulin suunnittelussa otettiin huomioon kognitiivisen psykologian ja kasvatustieteiden teorioita sekä tutkimuksia MATLABin käytöstä opetuksessa. Moduuli sisälsi opetusvideoita ja ohjetekstejä sekä vuorovaikutteisia MATLAB-ohjelmia, joiden avulla opiskelijat opettelivat käyttämään MATLABia matriisilaskennan kurssin aiheisiin liittyvissä tehtävissä.

Syvällisen kvantitatiivisen analyysin teko opetusmoduulin vaikutuksista opiskelijoiden arvosanoihin oli pienen otoksen vuoksi vaikeaa. Kun kyseessä on kehittämistutkimus, joka on edennyt vasta ensimmäiseen kokeiluvaiheeseen saakka, voidaan katsoa, että tärkeämpää on saada palautetta kehitetyn menetelmän toimivuudesta. Opiskelijoilta saatu palaute oli pääosin positiivista ja kritiikki kohdistui lähes kokonaan moduulin tekniseen toteutukseen. Ohjeet ja moduulin sisältö koettiin hyödyllisiksi ja relevanteiksi. Tämä havainto tukee aiempaa tutkimusta, jonka mukaan multimediaoppimisen kognitiivisen teorian huomioon ottamalla voidaan tuottaa oppimista edistävää oppimateriaalia [45, 46]. Lisäksi opiskelijat pitivät opetusohjelmien rennosta sävystä ja kokivat sen motivoivat heidän opiskeluaan, mikä niin ikään tukee aiempia tutkimustuloksia [39, 43, 44].

Tutkimuskysymykseen (luku 7.2) TK1 voidaan vastata kurssin aikana ja sen päätyttyä tulleen palautteen sekä loppukyselyn perusteella muodostetun mittarin MOT (luku 8.2) avulla. Opiskelijat kokivat, että moduulissa toteutettujen opetusohjelmien avulla MATLABin käytön opiskelu oli mielekästä. Tutkimuskysymyksiin TK2-TK4 voidaan vastata loppukyselyn kvantitatiivisen analyysin perusteella. Opiskelijat kokivat, että MATLAB-harjoitusten tekeminen paransi heidän osaamistaan matematiikassa sekä MATLABin käytössä. Lisäksi opiskelijat kokivat MATLAB-harjoitusten motivoivan heitä matematiikan opiskelussa. Nämä havainnot tukevat aikaisempia tutkimustuloksia, joiden mukaan ohjelmiston harjoittelun sitominen kiinteästi kurssin aiheeseen lisää opiskelijoiden asenteita ja motivaatiota opiskeltavaa aihetta kohtaan [53].

Kehitettävää moduulissa ilmeni erityisesti teknisessä toteutuksessa. Videoiden heikko kuvanlaatu teki niiden avulla opiskelusta hankalaa. Epäselvien tehtävänantojen ja huonosti ohjelmoitujen Moodle-tehtävien korjaamisella saadaan vältettyä turhautumista tehtäviä tehdessä. Moodle-tehtäviin voisi lisätä jokaisen kysymyksen kohdalle painikkeen, jonka avulla vastauksen voi tarkistaa. Tämän avulla ei tarvitsisi suorittaa koko ohjelmaa uudelleen läpi, jos vastaus ei ollut oikea.

Kurssimateriaalin sisällön analysointi on tuonut ideoita, joilla matematiikan osaamista voidaan kehittää ja testata laajemmin. Ohjelmiston avulla voidaan harjoitella erilaisia algoritmisia menetelmiä, kuten Gram-Schmidtin ortogonalisointiprosessia. Myös harjoitustehtävissä tai luentomateriaalissa olevien esimerkkien havainnollistaminen kuvaajien avulla voisi edistää oppimista. Opiskelijat ovat kokeneet visualisoinnin auttavan matematiikan oppimista [20]. Visualisointia olisi voinut käyttää opetusohjelmissa vielä enemmänkin hyödyksi. Matriisilla operoimisen vaikutusta vektorin suuntaan ja suuruuteen voisi havainnollistaa jo aikaisemmin, kuin mitä kuvatussa toteutuksessa tehtiin. Myös tasoja ja suoria avaruudessa voisi havainnollistaa ensimmäisestä viikosta alkaen, vaikka opiskelijoiden taidot eivät vielä riittäisikään kuvaajien piirtämiseen itse.

Moduulissa ei ollut kurssin lopussa testiä, jolla testattaisiin MATLABin hallintaa. Lisäämällä kurssin loppuun jokin pienimuotoinen projekti, jonka ratkaisu voitaisiin tarkistaa automaattisesti, saataisiin objektiivista tietoa opiskelijoiden osaamisesta MATLABin käytössä. Tässä tutkimuksessa saatiin tietoa vain opiskelijoiden omasta näkemyksestä heidän taitojensa karttumisestaan.

Jatkossa olisi hyvä tutkia laajemmin MATLAB-harjoitusten teon vaikutusta opiskelijoiden arvosanoihin ja asenteisiin matematiikan opiskelua ja MATLABin hyödyllisyyttä kohtaan. Ohjelmien kannustavalla sävyllä pyrittiin vaikuttamaan opiskelijoiden minäpystyvyyteen. Tutkimalla minäpystyvyydessä tapahtuvia muutoksia ja minäpystyvyyden yhteyttä opiskelijan saamaan arvosanaan voitaisiin vertailla tuloksia teoriaan ja muihin tutkimuksiin. Moduulin vaikutuksista opiskelijoiden arvosanoihin saadaan enemmän tietoa, jos moduuli otetaan käyttöön kurssin suuremmilla toteutuskerroilla. Tätä analyysiä ei ollut mahdollista tehdä luotettavasti tässä tutkimuksessa pienen otoksen vuoksi. Myöhemmin menetelmää voitaisiin soveltaa myös muihin matematiikan kursseihin. MATLAB sopii hyvin matriisilaskennan opetukseen, mutta tutkittavaksi jää, mitä uutta opetukseen voidaan tuoda muilla matematiikan osa-alueilla. Esimerkiksi analyysin opetukseen MATLABin monipuoliset visualisointityökalut voisivat tuoda monia mahdollisuuksia.

LÄHTEET

[1] MATLAB Academy - Onramp, Saatavissa (viitattu 5.7.2017): https://matlabacademy.mathworks.com/R2017a/portal.html?course=gettingstarted

[2] MATLAB Academy - Webinars, Saatavissa (viitattu 6.7.2017): https://matlabacademy.mathworks.com/

[3] MATLAB Documentation - newline, Saatavissa (viitattu 13.7.2017): https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/newline.html

[4] MATLAB documentation - pcode, Saatavissa (viitattu 20.6.2017): https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/pcode.html

[5] MIT OCW - Introduction to MATLAB, Saatavissa (viitattu 13.7.2017): https://ocw.mit.edu/resources/res-18-002-introduction-to-matlab-spring-2008/index.htm

[6] MIT OCW - Introduction To MATLAB Programming, Saatavissa (viitattu 13.7.2017): https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-s997-introduction-to-matlab-programming-fall-2011/index.htm

[7] Tartu Ülikooli - Introduction to Matlab, Saatavissa (viitattu 6.7.2017): https://moodle.ut.ee/course/view.php?id=3233

[8] University of Maryland - Introduction to MATLAB, Saatavissa (viitattu 6.7.2017): https://www-math.umd.edu/offered-courses/366-math-206-introduction-to-matlab.html

[9] Utah State University - MATLAB Tutorial, Saatavissa (viitattu 6.7.2017): http://ocw.usu.edu/Electrical_and_Computer_Engineering/Communication_Systems_I_1/matlab_tut_1.htm

[10] Vanderbilt University - Introduction to Programming with MATLAB, Saatavissa (viitattu 6.7.2017): https://news.vanderbilt.edu/2015/04/01/new-free-vanderbilt-course-to-teach-computer-programming-to-beginners/

[11] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.* Helsinki: Opetushallitus, 2015.

[12] T. Anderson and J. Shattuck, Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher*, vol. 41, no. 1, pp. 16–25, 2012.

[13] A. Bandura, Self-Efficacy Mechanism in Human Agency, *American Psychologist*, vol. 37, no. 2, p. 122, 1982.

[14] S. Barab and K. Squire, Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground, *Journal of the Learning Sciences*, vol. 13, no. 1, pp. 1–14, 2004.

[15] M. L. Brake, Matlab as a Tool to Increase the Math Self-Confidence and the Math Ability of First-Year Engineering Technology Students, *The Scholarship of Teaching and Learning at EMU*, vol. 1, no. 1, p. 5, 2009.

[16] D. Carlson, Teaching Linear Algebra: Must the Fog Always Roll In?. *College Mathematics Journal*, vol. 24, no. 1, pp. 29–40, 1993.

[17] P. Chandler and J. Sweller, Cognitive Load While Learning to Use a Computer Program, *Applied Cognitive Psychology*, vol. 10, no. 2, pp. 151–170, 1996.

[18] L. Colgan, MATLAB in first-year engineering mathematics, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 31, no. 1, pp. 15–25, 2000.

[19] A. Collins, D. Joseph, and K. Bielaczyc, Design Research: Theoretical and Methodological Issues, *The Journal of the learning sciences*, vol. 13, no. 1, pp. 15–42, 2004.

[20] P. Cretchley, C. Harman, N. Ellerton, and G. Fogarty, MATLAB in Early Undergraduate Mathematics: An Investigation into the Effects of Scientific Software on Learning, *Mathematics Education Research Journal*, vol. 12, no. 3, pp. 219–233, 2000.

[21] B. Cripps, *Psychometric Testing: Critical Perspectives*, ser. BPS Textbooks in Psychology. Wiley, 2017. Saatavissa: https://books.google.fi/books?id=-XEwDgAAQBAJ

[22] A. Croft, R. Davison, M. Hargreaves, and J. Flint, *Engineering Mathematics: A Foundation for Electronic, Electrical, Communications and Systems Engineers*, 5th ed. Pearson Education Limited, 2017.

[23] J.-L. Dorier, *On the Teaching of Linear Algebra*. Springer Science & Business Media, 2000, vol. 23. Saatavissa: https://ebookcentral.proquest.com/lib/tut/reader.action?docID=3035352

[24] E. Dubinsky, Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level, *MAA NOTES*, pp. 85–106, 1997.

[25] P. C. Earley, Computer-Generated Performance Feedback in the Magazine-Subscription Industry, *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, vol. 41, no. 1, pp. 50–64, 1988.

[26] D. C. Edelson, Design Research: What We Learn When We Engage in Design, *The Journal of the Learning sciences*, vol. 11, no. 1, pp. 105–121, 2002.

[27] R. Eisinga, M. te Grotenhuis, and B. Pelzer, The reliability of a two-item scale: Pearson, Cronbach, or Spearman- Brown? *International Journal on Public Health*, vol. 58, pp. 637–642, 2012.

[28] M. E. Gist, C. Schwoerer, and B. Rosen, Effects of Alternative Training Methods on Self-Efficacy and Performance in Computer Software Training, *Journal of Applied Psychology*, vol. 74, no. 6, p. 884, 1989.

[29] B. Hahn and D. T. Valentine, *Essential MATLAB for Engineers and Scientists*, 5th ed. GB: Academic Press, 2013;2009;2012;.

[30] K. Hakkarainen, M. Bollström-Huttunen, R. Pyysalo, and K. Lonka, *Tutkiva oppiminen käytännössä: Matkaopas opettajille*, Porvoo: WSOY, 2005.

[31] K. Hakkarainen, K. Lonka, and L. Lipponen, *Tutkiva oppiminen: Järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen synnyttäjinä*, 6. Painos, Porvoo: WSOY, 2004.

[32] G. Harel, Three Principles of Learning and Teaching Mathematics, in *On the teaching of linear algebra*. Springer, 2000, pp. 177–189.

[33] J. Häsä and J. Rämö, *Johdatus abstraktiin algebraan*, 2. Painos, Helsinki: Gaudeamus, 2012.

[34] J. H. Hubbard and B. B. Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms: a Unified Approach*, 4th ed. Ithaca, NY: Matrix Editions, 2009.

[35] M. A. Hutchison, D. K. Follman, M. Sumpter, and G. M. Bodner, Factors Influencing the Self-Efficacy Beliefs of First-Year Engineering Students, *Journal of Engineering Education*, vol. 95, no. 1, pp. 39–47, 2006.

[36] L. Ilomäki, Laatua e-oppimateriaaleihin, *E-oppimateriaalit opetuksessa ja oppimisessa*, vol. 5, 2012.

[37] K. Juuti and J. Lavonen, Design-Based Research in Science Education: One Step Towards Methodology, *Nordic Studies in Science Education*, vol. 2, no. 2, pp. 54–68, 2012.

[38] T. Kaarakka and H. Orelma, *Matriisilaskentaa insinöörien tarpeisiin*, Tampereen teknillinen yliopisto, 2016.

[39] K. A. Karl, A. M. O'Leary-Kelly, and J. J. Martocchio, The impact of feedback and self-efficacy on performance in training, *Journal of Organizational Behavior*, vol. 14, no. 4, pp. 379–394, 1993.

[40] B. Khan, *Web-based Training*. Educational Technology Publications, 2001. Saatavissa: https://books.google.fi/books?id=bfKmplYXrFIC

[41] K. M. Law, V. C. Lee, and Y.-T. Yu, Learning motivation in e-learning facilitated computer programming courses, *Computers & Education*, vol. 55, no. 1, pp. 218–228, 2010.

[42] S. Lindblom-Ylänne and A. Nevgi, *Yliopisto-opettajan käsikirja*. Helsinki: WSOYpro, 2009.

[43] J. J. Martocchio and J. Dulebohn, Performance feedback effects in training: The role of perceived controllability, *Personnel Psychology*, vol. 47, no. 2, pp. 357–373, 1994.

[44] J. J. Martocchio and J. Webster, Effects of Feedback and Cognitive Playfulness on Performance in Microcomputer Software Training, *Personnel Psychology*, vol. 45, no. 3, pp. 553–578, 1992.

[45] R. E. Mayer and R. Moreno, Aids to computer-based multimedia learning, *Learning and instruction*, vol. 12, no. 1, pp. 107–119, 2002.

[46] R. E. Mayer and R. Moreno, Nine Ways to Reduce Cognitive Load in Multimedia Learning, *Educational psychologist*, vol. 38, no. 1, pp. 43–52, 2003.

[47] J. Metsämuuronen, *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä: tutkijalaitos*, 3. Painos, Helsinki: International Methelp, 2006.

[48] J. L. Moore, C. Dickson-Deane, and K. Galyen, e-Learning, online learning, and distance learning environments: Are they the same? *The Internet and Higher Education*, vol. 14, no. 2, pp. 129–135, 2011.

[49] D. Poole, *Linear Algebra : a Modern Introduction* , 2nd ed. Belmont, CA : Thomson/Brooks/Cole, 2006.

[50] C. Sangwin, *Computer Aided Assessment of Mathematics*. OUP Oxford, 2013. Saatavissa: http://ebookcentral.proquest.com/lib/tut/reader.action?docID=1173592#

[51] P. Silander and H. Koli, *Verkko-opetuksen työkalupakki*, Saarijärvi: Finn Lectura, 2003.

[52] J. Sweller, Cognitive load during problem solving: Effects on learning, *Cognitive science*, vol. 12, no. 2, pp. 257–285, 1988.

[53] E. Tonkes, B. I. Loch, and A. Stace, An innovative learning model for computation in first year mathematics, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 36, no. 7, pp. 751–759, 2005.

[54] H. Vilkka, *Tutki ja mittaa: määrällisen tutkimuksen perusteet*, Helsinki: Tammi, 2007.

[55] M. Wawro, G. F. Sweeney, and J. M. Rabin, Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 78, no. 1, pp. 1–19, 2011.

LIITE A. OPETUSVIDEOIDEN AIHEET JA LINKIT

Taulukko A.1 *Opetusvideoiden aiheet ja URL-linkit*

Viikko	Aiheet	Linkki
1	Peruslaskutoimitukset ja vektorit	https://www.youtube.com/watch?v=4oznmuKM1WE
2	Matriisien syöttäminen ja indeksointi	https://www.youtube.com/watch?v=4cadJUfe8C4
3	Lisää matriiseista ja for-silmukka	https://www.youtube.com/watch?v=ZKrjVbZCDSE
4	Lineaarinen yhtälöryhmä ja surf-komento	https://www.youtube.com/watch?v=5_3w5FsF3fA&t

LIITE B. VIIKKO 1 - OHJEISTUS JA TEHTÄVÄT

Muuttujat ja peruslaskutoimitukset

MATLABissa muuttujaan voidaan määritellä arvo yhtäsuuruusmerkin avulla, esim.
a = 2
MATLAB tulostaa suoritettujen komentojen tulokset ellei sitä kielletä erikseen. Jos komennon perään lisätään puolipiste (;), komento suoritetaan, mutta tulosta ei tulosteta, esim.
b = 5;
Peruslaskutoimituksia voi suorittaa esimerkiksi komennoilla +, -, * ja / ja tuloksia voidaan asettaa uuden muuttujan arvoksi, esim.
c = a*b

Vektorit

Vektoreita voidaan syöttää hakasulkeiden avulla ja alkiot erotetaan toisistaan pilkulla tai välilyönnillä, esim.
d = [1 2 3]
e = [1,2,3]
Edellä esitetyllä tavalla määritelty vektori on vaakavektori. Rivi saadaan vaihdettua puolipisteellä, minkä avulla voidaan muodostaa pystyvektoreita
f = [1; 2; 3]
Vektorin transpoosi saadaan myös merkeillä **.'**
f.'
Jos haluat poimia vektorista tietyn alkion, voit viitata siihen sulkeiden avulla. Esimerkiksi jos halutaan poimia edellä määritellyn vektorin **f** kolmas alkio, se saadaan näin:
f(3)
Jos halutaan poimia vektorista **g=[6 5 4 3 2 1]** toinen, kolmas ja neljäs alkio, se saadaan näin:
h = g(2:4)
Vektori voidaan kertoa skalaarilla *-merkillä
2*f
f*2
Samanmittaisten vektoreiden alkiot voidaan pisteittäin kertoa, jakaa tai korottaa potenssiin lisäämällä laskutoimitusmerkin eteen piste, esim .*
f.*h

Laskujen järjestäminen sulkein sekä yksinkertaisten funktioiden käyttö

Jos laskutoimituksessa yhtenä terminä on useasta

muuttujasta muodostuva termi, syötetään termi sulkeisiin samalla tavalla kuin laskimella
$(a+b)^2$
Joillekin laskutoimituksille on olemassa erillisiä funktioita. Tällaisia ovat esimerkiksi neliöjuuri **`sqrt`** ja normi **`norm`**.
Näiden syntaksi toimii yksinkertaisesti:
`sqrt(4)`
Lisää funktioiden käytöstä ja kirjoittamisesta MATLABilla tulossa myöhemmin kurssin aikana.

Apua ongelmatilanteissa

Jos et tiedä, mitä jonkin komento tekee, voit kirjoittaa komentoikkunaan **`help`** sekä etsimäsi komennon, esim.
`help dot`
Laajemman vastauksen saat etsimällä tietoa MATLABin dokumentaatiosta, jonka saat avattua MATLAB-ikkunan oikeassa yläkulmassa olevasta ?-painikkeesta. Myös Google on ystävä hädän hetkellä. Esimerkiksi hakusanoilla "Matlab dot product" löydät varmasti helposti tietoa pistetulon laskemisesta MATLABilla.

Harjoitukset

Tähän harjoitukseen liittyvät tehtävät löytyvät tiedostosta MATLAB1.p
Lataa tiedosto ja aja se. Tiedosto sisältää ohjelman ja tehtävät tulevat vastaan sen aikana.

Kysymys 1

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Määritä vektorin $T1$ 313. ja 345. alkion summa. Tidy question | Suorita testitapaukset...

$T1_{313} + T1_{345} =$

Kysymys 2

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

MATLABin oma funktio log ottaa logaritmin siihen syötetystä luvusta. Etsi helpin avulla tai MATLABin documentaatiosta, onko log-funktion logaritmin kantaluku 10 vai Neperin luku e.

Tidy question | Suorita testitapaukset...

MATLABin log-funktion kantaluku on ____.

Kysymys 3

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Kirjoita editorilla oma funktio, joka laskee kahden funktiollesi syötetyn vektorin välisen kulman. Funktio voi olettaa, että syötetyissä vektoreissa on kolme reaalista alkiota. Nimeä funktiosi nimellä kulma.
Syötä sitten komentoikkunaan seuraava rivi: rng(1); eka=randi([0,10],1,3);rng(2); toka=randi([11,20],1,3); kulma(eka,toka)

Tidy question | Suorita testitapaukset...

Vektorien välinen kulma on ____ rad.

Matriisin syöttäminen ja alkioihin viittaaminen

Matriisit syötetään vektorien tapaan käyttäen hakasulkeita.
Puolipiste (;) vaihtaa riviä. Saman rivin alkiot erotetaan pilkuin tai välilyönnein.
A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

Matriisin alkioita indeksoidaan ylhäältä alas ja vasemmalta oikealle.
Edellä määritellyn matriisin A kolmas alkio on 7 ja neljäs alkio on 2.

Alkioihin voidaan viitata käyttäen rivin ja sarakkeen indeksejä.
Matriisin A toisen rivin kolmas alkio:
A(2,3)

Kaksoispisteellä viitataan dimension kaikkiin alkioihin.
Matriisin A ensimmäinen rivi:
A(1,:)

Useaan riviin/sarakkeeseen viitataan merkitsemällä indeksit vektoriksi.
Matriisin A toisen ja kolmannen rivin ensimmäinen ja kolmas alkio:
A([2 3],[1 3])

repmat ja reshape

Samaa matriisia voidaan monistaa komennolla repmat.
Funktio repmat ottaa kolme argumenttia:
- Monistettavan matriisin
- Montako kertaa monistetaan allekkain
- Montako kertaa monistetaan vierekkäin

Matriisi A saadaan monistettua kaksi kertaa allekkain ja kolme kertaa rinnakkain näin.
repmat(A,2,3)

Äskeinen komento vastaa määrittelyä
[1 2 3 1 2 3 1 2 3;
4 5 6 4 5 6 4 5 6;
7 8 9 7 8 9 7 8 9;
1 2 3 1 2 3 1 2 3;

4 5 6 4 5 6 4 5 6;
7 8 9 7 8 9 7 8 9]

Komennolla reshape saadaan muutettua matriisin dimensioita säilyttäen alkuperäiset alkiot.
Funktio reshape ottaa kolme argumenttia:
- Muokattava matriisi
- Rivien lukumäärä uudessa matriisissa
- Sarakkeiden lukumäärä uudessa matriisissa

Merkitsemällä toisen tai kolmannen argumentin paikalle hakasulkeet [], MATLAB laskee itse tämän dimension arvon matriisin alkioiden määrän mukaisesti.
HUOM! Matriisien alkioiden määrä pitää olla jaollinen syötetyillä rivien ja sarakkeiden lukumäärällä.
Lisätietoa komennosta saat helpistä tai dokumentaatiosta.

Matriisin koko

Matriisin koko saadaan selville komennolla size.
Komentoon voi syöttää vain matriisin tai toisena argumenttina sen dimension, josta ollaan kiinnostuneita.
Esimerkiksi matriisin A sarakkeiden lukumäärä saadaan komennolla
size(A,2)
Komento
size(A)
antaa vektorin, jossa on ensin rivien lukumäärä ja sitten sarakkeiden lukumäärä.
Komento length antaa paluuarvona matriisin suurimman dimension arvon.

Harjoitukset

Tähän harjoitukseen liittyvät tehtävät löytyvät tiedostosta MATLAB2.p
Lataa tiedosto ja aja se. Tiedosto sisältää ohjelman ja tehtävät tulevat vastaan sen aikana.

Vinkki tehtäviin:

help rref

Kysymys 1

Työmuistiin on määritelty matriisi Tidy question | Suorita testitapaukset...
M. Muuta matriisi sellaiseksi, että siinä on 100 saraketta.
Anna vastaukseksi uudelleen järjestämäsi matriisin alkio viimeiseltä riviltä sarakkeesta 50.

Kysytty alkio on:

Kysymys 2

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Työmuistissa on seuraavanlainen Tidy question | Suorita testitapaukset...
matriisi: $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ Tutki kuinka monta johtavaa ykköstä sen rref-muodossa on.

Johtavien ykkösten lukumäärä:

Kysymys 3

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Kuinka monta ratkaisua tehtävän 2 matriisia Y vastaavalla yhtälöryhmällä on?

Valitse yksi:

- a. yksi
- b. äärettömän monta
- c. ei yhtäkään

ones, zeros, eye

Funktio
ones
tuottaa matriisin, jossa on vain ykkösiä.
Funktio tuottaa neliömatriisin, jos siinä käyttää yhtä argumenttia.
Kahdella argumentilla voi määritellä sarakkeiden ja rivien lukumäärän erikseen.

Vastaavalla tavalla pelkkiä nollia sisältävän matriisin tuottaa komento
zeros.

Yksikkö- eli identiteettimatriisin tuottaa komento
eye.

Matriisien laskutoimitukset

Matriisien laskutoimitukset toimivat komennoilla *, − ja *. Tällöin tulee huolehtia, että dimensiot ovat matriisilaskusääntöjen mukaiset.

Pisteittäin matriisit voidaan kertoa, kun lisätään kertomerkin eteen piste (.*).

Matriisin alkiot voidaan korottaa pisteittäin potenssiin myös lisäämällä piste eksponenttimerkin eteen (.^).
Matriisin korotus potenssiin (ilman pistettä edessä) tarkoittaa matriisilaskennan teorian mukaista matriisipotenssia.

Satunnaismatriisit

Erilaisia satunnaismatriiseja voidaan tuottaa usealla eri komennolla.
rand
tuottaa satunnaislukuja tasaisesta jakaumasta [0,1].

randn
tuottaa satunnaislukuja normitetusta normaalijakaumasta.
Dokumentaatiosta ja googlaamalla löydät lisää satunnaislukujen generoimisesta.

`for`-silmukka

`for`-silmukka käy läpi vektorin avulla määritellyn kierrosmäärän verran koodia, joka on rajattu sanojen `for` ja `end` väliin.
Kierroksia käydään yhtä monta, kuin määrittelyyn syötetyssä vektorissa on alkioita.
Kyseistä kierrosta vastaavaa vektorin alkiota voidaan käyttää muuttujana haluttaessa.
Hyviä esimerkkejä `for`-silmukan käytöstä löydät MATLABin dokumentaatiosta.

Harjoitukset

Tähän harjoitukseen liittyvät tehtävät löytyvät tiedostosta MATLAB3.p
Lataa tiedosto ja aja se. Tiedosto sisältää ohjelman ja tehtävät tulevat vastaan sen aikana.

Vinkki tehtäviin:

Teht2: Mihin alkioon summa tallennetaan kullakin toisen for-silmukan kierroksella.

Kysymys 1

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Anna komento, jolla saat määriteltyä 3x5 matriisin M, jonka alkiot ovat satunnaisia kokonaislukuja väliltä -10..10.

Täydennä alla olevan määrittelyn yhtäsuuruusmerkin oikea puoli siten, että siinä ei ole yhtään välilyöntiä ja kaikki argumentit ovat vektoreita.
Vektorien alkiot on erotettu toisistaan pilkuin. **Älä** merkitse puolipistettä rivin perään.
Kaikki tästä poikkeavat ohjeet merkitään virheellisiksi.

Esimerkkinä syntaksista täysin fiktiivinen funktio

```
rajat([xmin,ymin],[xmax,ymax])
M =
```

Vastaus:

Kysymys 2

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Täydennä seuraavan MATLAB-funktion puuttuvat kohdat kirjaimilla A tai B siten, että funktio laskee matriisikertolaskun. function AB = matriisitulo(A,B) dim1 = size(,1); dim2 = size(,2); dim3 = size(,2); for i=1:dim1 for j=1:dim3 summa=0; for k=1:dim2 summa=summa+A(i,k)*B(k,j); end AB(i,j)=summa; end end end

Tidy question | Suorita testitapaukset...

Kysymys 3

Ei vielä vastattu

Ei arvioitu

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

LIITE E. VIIKKO 4 - OHJEISTUS JA TEHTÄVÄT

Käänteismatriisi

MATLAB muodostaa matriisin A käänteismatriisin komennolla
inv(A)

Jos matriisi A on singulaarinen tai "lähes singulaarinen", MATLAB antaa varoitusilmoituksen.

Käänteismatriisi voidaan muodostaa myös Gaussin eliminointimenetelmällä.
Eri funktiot (tai itse rakennetut tavat) käyttävät eri algoritmeja käänteismatriisin muodostamiseen,
minkä vuoksi saadut käänteismatriisit eivät ole välttämättä täysin identtiset.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu

Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan ratkaista käänteismatriisin avulla, mutta MATLABissa se ei ole laskennallisesti tehokasta. Seuraavat funktiot ja komennot ovat huomattavasti tehokkaampia.

Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisu $\mathbf{x}$ saadaan komennolla
mldivide(A,b)
tai
A\b.

Yhtälöryhmän $\mathbf{x}A = \mathbf{b}$ ratkaisu saadaan komennolla
mrdivide(A,b)
tai
A/b.

Jos yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, vastaukseksi saadaan *pienimmän neliösumman ratkaisu*. PNS-menetelmään palataan viimeisellä viikolla.

meshgrid ja surf

3D-pintoja voidaan piirtää komennolla **surf** (sanasta *surface*).
Komento luo koordinaattipisteiden välille pinnan. Ensin

kuitenkin pitää luoda pisteikkö.
Ensin määritellään vektorit, esim. **x** ja **y**, jotka sisältävät halutun ruudukon pisteiden x- ja y koodrinaatit.
Komento
[X Y]=meshgrid(x,y)
luo matriisit **X** ja **Y** siten, että **X** sisältää jokaista pistettä vastaavat x-koordinaatit ja **Y** sisältää pisteitä vastaavat y-koordinaatit. Tämän jälkeen luodaan matriisi (esim. **Z**), joka sisältää haluttujen pisteiden z-koordinaatit. 3D-pinta voidaan nyt muodostaa komennolla
surf(X,Y,Z).

surf-funktion ensimmäinen argumentti on matriisi, joka sisältää siis pisteiden x-koordinaatit, toinen argumentti sisältää y-koordinaatit ja kolmas z-koordinaatit. Näin ollen argumenttina toimivien matriisien dimensioiden tulee täsmätä.

Palauta mieleesi MATLABin alkeista, miten voit tallentaa kuvaajan "handlen" ja miten saat sen asetuksia muutettua.

Harjoitukset

Tähän harjoitukseen liittyvät tehtävät löytyvät tiedostosta MATLAB4.p
Lataa tiedosto ja aja se. Tiedosto sisältää ohjelman ja tehtävät tulevat vastaan sen aikana.

Kysymys 1
Ei vielä vastattu
Kokonaispisteistä 1,00
Merkitse kysymys
Muokkaa kysymystä

Anna matriisiyhtalön $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisu.
Syötä vastauksesi kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Tidy question | Suorita testitapaukset...

$\mathbf{x} =$

Kysymys 2

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Selvitä piirtämäsi kuvaajan "kahvan" avulla asetuksen FaceAlpha arvo. Anna vastauksesi MATLABin vastaustarkkuuden mukaisesti.

Vastaus:

LIITE F. VIIKKO 5 - OHJEISTUS JA TEHTÄVÄT

Harjoitus 5

Tällä kerralla ei ole annettu valmiiksi komentoja ja niihin syntaksiohjeita eikä aiheesta ole opetusvideota.
Muutaman komennon saat etsiä itse, mutta ne löydät helposti dokumentaatiosta.

Harjoitustehtävät

Tähän harjoitukseen liittyvät tehtävät löytyvät tiedostosta MATLAB5.p
Lataa tiedosto ja aja se. Tiedosto sisältää ohjelman ja tehtävät tulevat vastaan sen aikana.

Vinkkejä

nolla-avaruus = null space
Kertaa matriisiyhtälön ratkaisu MATLABilla viime harkoista.

Kysymys 1

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Minkä vastauksen MATLAB antoi, Tidy question | Suorita testitapaukset...
kun kerroit matriisin $\boldsymbol{A}$ vektorilla $\mathbf{c}$, joka kuuluu matriisin $\boldsymbol{A}$ nolla-avaruuteen.
$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{c} =$

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} * 10\hat{} \square$$

Kysymys 2

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Tidy question | Suorita testitapaukset...

Mikä on työmuistiin määritellyn matriisin X determinantti? Anna vastaus siinä muodossa, kuin MATLAB sen ilmoitti.

Onko matriisi X determinantin perusteella kääntyvä? (Vastaus yksittäinen merkki: k/e)

Harjoitus 6

Osaat jo etsiä itse tietoa MATLABin komennoista niin jouhevasti, ettei opetusvideoita tarvita eikä valmiita komentoja enää tarvitse opettaa.
Kertaa kuitenkin MATLABin alkeista sovitteen tekeminen pistejoukkoon polyfit-komennolla sekä alkeiden samalta kerralta Curve Fitting -työkalun käyttö.

Jotkut MATLABin funktiot on rakennettu niin, että ne voivat antaa yhden tai useamman paluuarvon riippuen määrittelystä.
Määrittely menisi kutakuinkin tähän tapaan eri tapauksissa:

Yksi paluuarvo:
x=omafunktioni(n,s)

Kaksi paluuarvoa:
[x y]=omafunktioni(n,s)

Harjoitustehtävät

Tähän harjoitukseen liittyvät tehtävät löytyvät tiedostosta MATLAB6.p
Lataa tiedosto ja aja se. Tiedosto sisältää ohjelman ja tehtävät tulevat vastaan sen aikana.

Vinkkejä

ominaisarvo = eigenvalue, ominaisvektori = eigenvector

Kysymys 1

Ei vielä vastattu

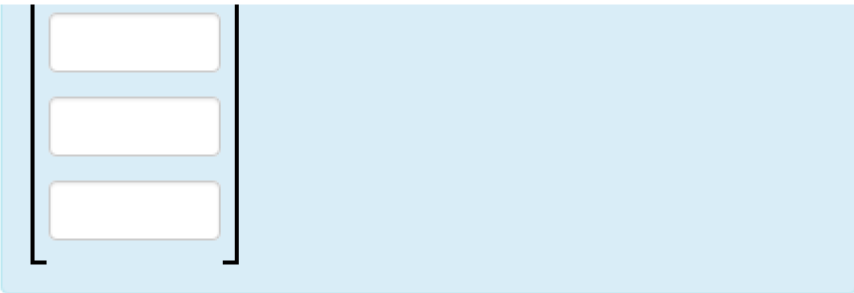
Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Anna matriisin B ominaisarvoa $\mathbf{3.4269}$ vastaava ominaisvektori.

Tidy question | Suorita testitapaukset...



Kysymys 2

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Anna saamasi polynomisovitteen kertoimet. Sovitefunktion polynomi on muotoa Tidy question | Suorita testitapaukset...

$s(t) =$ ____ $*t^3 +$ ____ $*t^2 +$ ____ $*t +$ ____ .

Kysymys 3

Ei vielä vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Tee piirtämääsi pisteikköön Curve Fitting -työkalulla Sum of Sine -sovite ja valitse termien määräksi 2. Anna parametrin **a1** suuruus. Tidy question | Suorita testitapaukset...

$\mathbf{a1} =$ ____

LIITE H. ONNISTUMISET, KEHITYSKOHTEET JA MUOKKAUSEHDOTUKSET

Saadun palautteen mukaan opetusmoduulissa onnistuneita asioita olivat erityisesti:

- Ohjetekstit ja opetusvideot
- Opetusohjelmien rento ja kannustava tyyli
- Opetusohjelmien tehtävät ja vinkit
- Moduulin sisältö tuki kurssin muita aihepiirejä.

Palautteen sekä kurssisisällön uudelleenanalysoinnin perusteella taulukkoon H.1 on koottu moduulia koskevia kehityskohteita ja muokkausehdotuksia.

Taulukko H.1 *Moduulissa havaitut kehityskohteet aihepiireittäin ja muokkausehdotukset ongelmien ratkaisemiseksi*

Aihe	**Kehitettävää**	**Muokkausehdotus**
Tekninen toteutus	Videoiden huono kuvanlaatu	Kuvataan uudet videot paremmalla kuvanlaadulla.
	Osa Moodle-tehtävistä ei osannut tulkita oikein syötettyä vastausta.	Ohjelmoidaan tehtävät uudelleen Moodleen.
	Moodle-tehtäviä ei voinut tarkistaa yksitellen vaan koko tentti tarkistettiin kerralla.	Muutetaan tenttien asetukset sellaisiksi, että tehtävät voi tarkistaa yksitellen.
Ohjeistus ja tehtävänannot	Ensimmäisellä kerralla opiskelijoilla epäselvää, miten ohjelmat saa ladattua ja ajettua.	Lisätään ensimmäisten harjoitusten ohjetekstiin täsmällisempi ohjeistus ohjelmien lataamiseen ja ajamiseen.
	Epäselvät tehtävänannot	Muokataan tehtävänantojen sanamuotoja. Pyydetään tehtävänannoista palautetta ennen moduulin uutta käyttöönottoa.
Sisältö	Enemmän visualisointia	Havainnollistetaan vektoreiden virittämä taso sekä nolla- ja sarakeavaruudet
	Enemmän algoritmien ohjelmointia	Gram-Schmidtin ortogonalisointiprosessi
Muuta	Kyselylomakkeen kysymykset ja mittareiden luotettavuus	Käytetään tai sovelletaan tutkittuja kyselyitä.