



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

KATRI KOPONEN
VIRTAUSTEN MALLINTAMINEN KONFORMIKUVAUKSEN
AVULLA

Diplomityö

Tarkastaja: Seppo Pohjolainen
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 12.08.2015

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

KATRI KOPONEN: Virtausten mallintaminen konformikuvauksen avulla

Diplomityö, 65 sivua, 15 liitesivua

Syyskuu 2015

Pääaine: Matemaattinen mallinnus

Tarkastajat: Seppo Pohjolainen

Avainsanat: Konformikuvas, Joukowskin muunnos

Tämän diplomityön tarkoituksena on tutkia kompleksifunktioita ja konformikuvauksia sekä niiden soveltuvuutta virtausten mallintamiseen.

Ensimmäisessä luvussa tarkastellaan aluksi kompleksifunktioita yleisesti ja käydään läpi teoriaa, jota tarvitaan konformikuvausten määrittämiseksi ja ymmärtämiseksi. Teoriassa käydään läpi Cauchy-Riemannin yhtälöitä ja siitä siirrytään edelleen harmonisiin funktioihin, jotka ovat tärkeitä, kun halutaan ymmärtää teoriaa konformikuvausten taustalla. Viimeisenä tarkastellaan analyyttisten funktioiden soveltuvuutta erilaisiin virtaustilanteisiin kuten: horisontaalivirtaus, virtaus 90° sisäkulman ohi ja virtaus sylinterin ohi.

Toisessa luvussa tarkastellaan aluksi joitakin analyyttisten kuvausten perustavanlaatuisia esimerkkejä. Sen jälkeen kerrotaan varsinaisista konformikuvauksista sekä niiden tärkeimmästä ominaisuudesta eli kulmien säilymisestä. Kuvaus on konformikuvaus, jos funktio on analyyttinen ja sen derivaatta on nolasta poikkeava. Tärkein konformikuvauksen sovellus on Joukowskin muunnos, jota tarkastellaan tarkemmin vielä kolmannessa luvussa. Joukowskin muunnoksella saadaan muutettua sylinterin leikkausprofiili lentokoneen siiven leikkausprofiliksi.

Kolmannessa luvussa on otettu fyysiseksi esimerkiksi lentokoneen siipi ja siihen kohdistuva virtaus, noste ja paine. Lentokoneen siipi ja sen ympärillä olevat virtaukset saadaan muodostettua sylinteristä Joukowskin muunnoksen avulla tietyillä parametrien arvoilla. Kompleksisen integraalin avulla voidaan laskea pyörrekenttä lentokoneen siiven ympärille ja näin edelleen saadaan laskeuttua myös noste, jota ilman lentokoneet eivät lentäisi. Tähän vaikuttaa luonnollisesti myös painejakauma siiven ympärillä, ja sitä tarkastellaan viimeiseksi sylinterin avulla.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Scientific Technology

KATRI KOPONEN : Modelling fluid flows with conformal mapping

Master of Science Thesis, 65 pages, 15 Appendix pages

September 2015

Major: Mathematical Modelling

Examiner: Seppo Pohjolainen

Keywords: Conformal mapping, Joukowski transformation

The purpose of this Master of Science Thesis is to study complex functions and conformal mapping and show how this can be applied in fluid dynamics.

In the first chapter we consider complex functions in general and study the theory of conformal mappings. Cauchy-Riemann's equation and harmonic functions are important in the theory of complex analysis. Finally, we show the use of complex analytical functions to model different kind of fluid flows such as a horizontal flow, flow past a 90 degree interior corner and flow past a cylinder.

In the beginning of the second chapter we consider some basic examples of analytic maps. Then we discuss about conformal mappings and about the most important property of conformal mappings that is preservation of angles. Furthermore, the most important application of conformal mapping in this thesis is the Joukowski transformation, which is examined more in last part. We can change the profile of a cylinder to a profile of an airfoil with Joukowski transformation.

In third chapter we examine a physical example of airfoil as well as about fluid flow, lift and pressure distribution being directed to airfoil. An airfoil and streamlines around it are formed with Joukowski transformation from a cylinder with certain parameters. Complex integrals can be used to calculate circulation around airfoil and hence calculate the lift that makes airplanes to fly. Pressure distribution has also an effect on the lift and it is the last case we are discussing.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen teknillisen yliopiston Matematiikan laitokselle.

Kiitän työn ohjaajaa ja tarkastajaa professori Seppo Pohjolaista mielenkiintoisesta aiheesta sekä hyvästä ohjeistuksesta diplomityöhön liittyen.

SISÄLLYS

1. Johdanto	1
2. Kompleksifunktiot	2
2.1 Kompleksianalyysi	2
2.2 Analyttiset funktiot	6
2.3 Harmoniset funktiot	14
2.4 Sovellukset virtausmekaniikkaan	17
3. Konformikuvaus	26
3.1 Analyttinen kuvaus	26
3.2 Konformikuvaus	31
3.3 Joukowskin kuvaus	34
4. Lentokoneen siipi ja siihen kohdistuva noste	41
4.1 Ideaalinen virtaus lentokoneen siiven ohi	41
4.2 Pyörteisyys ja noste	47
4.3 Sylinteriin kohdistuva paine ja noste	54
5. Yhteenvedo	62
Lähteet	63
A. horizontal flow	66
B. flow past corner	67
C. hyperbol	69
D. cylinder	71
E. doublet	73
F. joukowski transformation	75
G. joukowski transformation with lift	77
H. cylinder with lift	80

TERMIT JA NIIDEN MÄÄRITELMÄT

Alue

Ei-tyhjä, yhtenäinen avoin joukko. [2]

Analyyttinen funktio

Kompleksifunktio on analyttinen pisteessä z_0 , edellyttäen että on jokin $\epsilon > 0$ siten, että $f'(z)$ on olemassa kaikilla arvoilla $z \in D_\epsilon(z_0)$. [3]

Argumentti

Argumentti $\arg z$ on joukko, joka kuvaa kaikkia sädevektorin ja reaaliakselin välisiä kulmia θ . [3]

Avoin joukko

Joukko on avoin, jos sen jokainen piste on sisäpiste. [4]

Bijektio

Kuvaus on sekä injektio että surjektio. [14]

Derivoituvuus

Kompleksifunktio on derivoituva pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$, jos raja-arvo $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ on olemassa. [1]

Dipoli

Esimerkiksi sähködipoli on kahden erimerkkisen, mutta yhtä suuren varauksen muodostava pari ja näiden sähköisten varausten ympärillä on sähkökenttäviivat. [18]

Harmoninen funktio

Funktio on harmoninen alueessa A , jos sillä on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat ja se toteuttaa Laplacen yhtälön. [4]

Ideaalinen virtaus

Kokoonpuristumaton ja pyörteetön virtaus. [1]

Injektio

Kuvaus f kuvaa eri lähtöjoukon alkioille eri maalijoukon alkion. Toisin sanoen, jos $\forall x_1, x_2 \in \Omega : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. [14]

Jatkuvuus

Funktio f on jatkuva pisteessä $z_0 \in A$, jos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. [4]

Jättöreuna

Lentokoneen siiven takareuna, jossa virtaus jättää pinnan. [1]

Kohtauskulma

Kulma, jossa levy tai lentokoneen siipi on suhteessa virtaukseen nähden. [1]

Kokonainen funktio

Jos f on analyyttinen koko kompleksitasossa, niin f on kokonainen funktio. [3]

Kokoonpuristumaton virtaus

Virtauksen tilavuus ei muutu virtauksen aikana. [1]

Kompaktisuus

Joukko on kompakti, jos se on suljettu ja rajoitettu. [4]

Konformikuvaus

Jos $g(z)$ on analyyttinen funktio ja sen derivaatta $g'(z) \neq 0$. [1]

Kriittinen piste

Piste, jossa derivaatta katoaa eli $f'(z_0) = 0$. [1]

Laminaari virtaus

Kokoonpuristumaton ja pyörteetön virtaus, jossa ei tapahdu sekoittumista rajakerrosten välillä. [1]

Neumannin homogeeninen reunaehto

Kappaleen seinämän läpi ei kulje virtausta. [1]

Ortogonaalisuus

Käyrien sanotaan olevan ortogonaaliset pisteessä (x, y) , jos käyrien tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vasten pisteessä (x, y) . [19]

Patopiste

Piste, jossa virtaus ei mene kiinteän seinämän läpi vaan pysähtyy eli virtauksen paikallinen nopeus on nolla. [1]

Polku

Kahta eri pisteparia yhdistävä käyrä. Jos pisteparit ovat samat, jos polku alkaa ja päättyy samaan pisteeseen. [16]

Rajoitettu joukko

Joukko A on rajoitettu, jos se sisältyy johonkin suljettuun kiekkoon. Toisin sanoen on olemassa $R > 0$ siten, että jokaiselle $z \in A$ saadaan $|z| \leq R$. [3]

Reuna-arvo -ongelma

Ongelma, jossa etsitään yhtälölle ratkaisu, joka toteuttaa reunaehdot. [13]

Reunapiste

z_0 on reunapiste, jos sen jokainen avoin ϵ -ympäristö sisältää pisteen, joka kuuluu joukkoon S ja pisteen, joka ei kuulu siihen. [4]

Sileä käyrä Käyrä $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ on sileä, jos $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ on jatkuva ja erisuuri kuin nolla välillä $a \leq t \leq b$. [3]

Reuna

Sisältää kaikki joukon S reunapisteet. [2]

Singulaaripiste

Funktio f ei ole analyyttinen pisteessä α , mutta jokainen pisteen α ympäristö $D_R(\alpha)$ sisältää ainakin yhden pisteen, missä f on analyyttinen. [3]

Sirkulaatio Nostovoiman syntymisessä vaikuttava keskeinen asia. Se tarkoittaa ympyrän muotoista liikettä, jossa ilmavirtaus tulee sivulta ja kohtaa sylinterin. Sylinterin etupinnalla patopisteessä virtaus jakautuu ylä- ja alapuolelle ja kohtaa taas sylinterin takapinnalla toiseessa patopisteessä. [24]

Sisäpiste

z_0 on joukon S sisäpiste, kun on olemassa z_0 :n ympäristö, joka sisältää ainoastaan joukon S pisteitä. [2]

Suljettu joukko

Joukko S on suljettu, jos se sisältää kaikki reunapisteensä. [2]

Sulkeuma

Suljettu joukko, joka sisältää kaikki joukon S pisteet yhdessä joukon S reunan kanssa. [2]

Surjektio

Kuvaus f on surjektio, jos sen jokaisella maalijoukon alkiolla y on lähtöjoukon alkio x siten, että $f(x) = y$. [15]

Sähkökentän lähde

Kentän virtaviivat suuntautuvat pois päin lähteestä.[7]

Sähkökentän nielu

Kentän virtaviivat päättyvät nieluun. [7]

Tasapainotila

Ajan suhteen muuttumaton tilanne. [1]

Turbulenssi

Virtauksen nopeus ja muut virtauksen ominaisuudet vaihtelevat satunnaisesti ja kaaottisesti. [12]

Ulkopiste

z_0 on joukon S ulkopiste, jos sillä on ympäristö, jossa ei ole joukon S pisteitä. [2]

Vapaa virtaus

Virtaus, joka on riittävän kaukana virtauksessa olevasta kappaleesta siten, että kappale ei enää vaikuta virtaukseen. [7]

Yhdesti yhtenäinen alue

Alue ei sisällä reikiä. [1]

Yhtenäisyys

Joukko on yhtenäinen, jos sen mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla, joka kuuluu joukkoon S . [4]

Ympäristö

Sisältää kaikki pisteet z , jotka ovat pisteen z_0 ϵ -säteisen ympyrän sisäpuolella, lukuunottamatta ympyrän kehää. [2]

SYMBOLIT JA NIIDEN MÄÄRITELMÄT

$arg z$	$arg z = \{\varphi : z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}$. [3]
$Arg z$	$Arg z = \varphi$, missä $-\pi < \varphi \leq \pi$. [3]
C_p	Dimensioton painekerroin $C_p = (p - p_\infty)/(\frac{1}{2}\rho V^2)$. [7]
C_L	Dimensioton nostekerroin $C_L = L/(\frac{1}{2}\rho V^2 R) = 8\pi \sin \alpha$. [7]
\mathbb{C}	Kompleksilukujen joukko \mathbb{C} . [3]
D_ϵ	ϵ -säteinen ympäristö $D_\epsilon = \{z : z - z_0 < \epsilon\}$. [2]
D	Kuvajoukko $D = g(\Omega) \subset \mathbb{C}$. [1]
d	Väliaineen vastus. [7]
$f(z)$	Kompleksiarvoinen funktio $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. [3]
i	Imaginääriyksikkö $i = \sqrt{-1}$. [3]
$Re(z)$	Kompleksiluvun z reaaliosa. [3]
$Im(z)$	Kompleksiluvun z imaginaariosa. [3]
\int_C	Integraali pitkin polkua C . [3]
L	Noste $L = v\rho 2r \sin \phi / (2\pi)$. [9]
$\lim_{z \rightarrow z_0}$	Raja-arvo, jossa piste z lähestyy pistettä z_0 . [3]
p	Paine. [7]
p_∞	Ilman normaalipaine. [7]
Q	Kompleksitason ensimmäinen neljännes $Q = \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{C}$. [1]
$r = z $	Kompleksiluvun $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ etäisyys origosta. [3]
r, R	Sylinterin tai ympyrän säde. [9]
U	Kompleksitason ylempi puolitaso. [1]
U_∞	Vapaa nopeus. [7]
\bar{z}	Kompleksiluvun $z = x + iy$ kompleksikonjugaatti $\bar{z} = x - iy$. [3]

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$	Virtauksen nopeuskenttä $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$. [1]
v	Virtausnopeus. [9]
$z(t)$	Neste- tai kaasupartikkelien seuraamat virtaviivat $z(t) = x(t) + iy(t)$. [1]
\dot{z}	Partikkelin hetkellinen nopeus $\dot{z} = dz/dt$. [1]
$ \dot{z} $	Partikkelin vauhti $ \dot{z} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. [1]
∇	Gradientti $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)^T$. [1]
Δ	Laplacen operaattori $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. [13]
ρ	Ilman tiheys. [9]
ϕ	Kohtauskulma. [9]
φ	Kulma, jonka $ z $ tekee positiivisen reaaliakselin kanssa. [3]
Ω	Yhdesti yhtenäinen alue. [1]
$\chi(z)$	Virtauskentän $f(z)$ kompleksipotentialifunktio $\chi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$. [1]
$\varphi(z)$	Virtauksen nopeuspotentialifunktio. [1]
$\psi(z)$	Virtauksen virtafunktio. [1]
ζ	Analyyttinen funktio $\zeta = g(z) = \xi + i\eta = p(x, y) + iq(x, y)$. [1]
$\Theta(\zeta)$	Kompleksipotentialifunktio tasapainotilassa olevalle virtaukselle $\Theta(\zeta) = \Phi(\xi, \eta) + \Psi(\xi, \eta)$. [1]
α	Virtauksen kiertämistä sylinterin alapinnalle kuvataan parametrillä α . [7]
Γ	Pyörteen lähdekentän voimakkuus. [7]
μ	Dipolin lähdekentän voimakkuus. [7]

1. JOHDANTO

Tämän diplomityön tarkoituksena on kertoa konformikuvauksista ja niiden soveltamisesta virtausten mallintamisessa. Konformikuvauksia voidaan hyödyntää kaksiuulotteisten virtausten mallintamisessa ja niistä on hyötyä myös kolmiulotteisten virtausten tarkastelussa, vaikka niitä ei voi suoraan soveltaa kolmiulotteisiin tapauksiin. Diplomityössä käsitellään myös konformikuvausten taustalla olevaa kompleksianalyysin teoriaa, jotta ymmärretään joitakin konformikuvauksiin liittyviä käsitteitä.

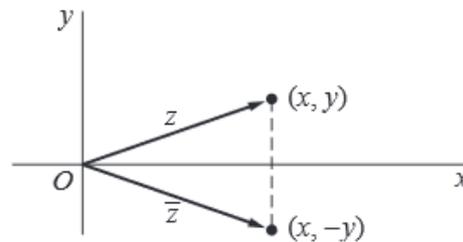
Konformikuvauksilla on geometrinen ominaisuus, jossa kahden käyrän leikkauspisteessä tangenttien välinen kulma säilyy. Tärkein esimerkki konformikuvauksesta on Joukowskin muunnos, joka on nimetty venäläisen virtausmekaanikan tutkijan Nikolai Zhukovskin mukaan. Joukowskin muunnoksella saadaan kuvattua yksikköympyrä lentoneen siiven profiiliksi ja näin voidaan tarkastella virtausta siipiprofiilin ympärillä, kun tiedetään virtaus sylinterin ympärillä.

2. KOMPLEKSIFUNKTIOT

2.1 Kompleksianalyysi

Kompleksiluvuista

Kompleksianalyysin voi ajatella olevan asia, jossa sovelletaan imaginaariluvuilla laskemista. Imaginaariluvut ovat keino laskea negatiivisia lukuja, jotka ovat neliöjuuren sisällä. Merkinnällisesti mukava tapa on määritellä $i = \sqrt{-1}$. Ja jos $i = \sqrt{-1}$ niin $i^2 = -1$. Kompleksiluku $x + iy$ voidaan esittää geometrisesti pisteen (x, y) avulla kaksiulotteisessa koordinaatistossa. Eli kompleksiluku voidaan esittää järjestetyn reaalilukuparin avulla $z = (x, y)$. Edellistä voidaan sanoa järjestetyksi pariiksi, koska esimerkiksi piste $(1, 2)$ ei ole sama kuin $(2, 1)$. Kompleksiluvun z reaaliosaa merkitään $Re(z)$, joka on reaaliluku x . Kompleksiluvun z imaginaariosaa merkitään $Im(z)$, joka on reaaliluku y . Kompleksiluvun z kompleksikonjugaattia merkitään \bar{z} , joka on kompleksiluku $(x, -y) = x - iy$.



Kuva 2.1: Kompleksiluku $z = x + iy$ ja kompleksikonjugaatti $\bar{z} = x - iy$ [2].

[3]

Kompleksilukujen geometriaa

Koska kompleksiluvut ovat reaalilukujen järjestettyjä pareja, on olemassa bijektiivinen suhde niiden ja tason pisteiden välillä. Luku $z = x + iy = (x, y)$ voidaan esittää paikkavektorina xy -tasossa. Kun xy -tasoa käytetään esittämään kompleksilukuja, sitä kutsutaan kompleksitasoksi. Kompleksitasossa x -akseli on reaaliakseli ja y -akseli on imaginaariakseli. Kompleksiluvun moduuli tai itseisarvo on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Luku

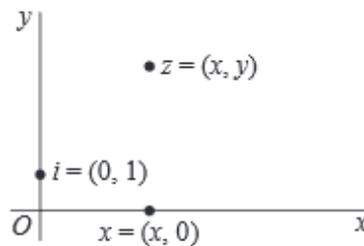
$|z|$ on etäisyys origon ja pisteen (x, y) välillä. Erotus $z_1 - z_2$ esittää siirtymävektoria pisteestä z_2 pisteeseen z_1 , jolloin etäisyys on $|z_1 - z_2|$.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.1)$$

Epäyhtälö $|z_1| < |z_2|$ tarkoittaa, että piste z_1 on lähempänä origoa kuin piste z_2 .

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad (2.2)$$

Yhtälön (2.2) tärkeä sovellus on sen käyttö kolmioepäyhtälön todistamisessa, jonka mukaan kolmion kahden sivun pituuden summa on suurempi tai yhtäsuuri kuin kolmannen sivun pituus.



Kuva 2.2: Kompleksitaso, jossa on esitetty pisteet $i = (0, 1)$, $x = (x, 0)$ ja $z = (x, y)$ [2].

Olkoon r kompleksiluvun z moduuli eli $r = |z|$ ja olkoon φ kulma x -akselin ja sen viivan välillä, joka kulkee origosta pisteeseen (x, y) . Lukua φ ei ole määritelty, jos $z = 0$. Siten

$$z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2.3)$$

Määritelmä 2.1.1 *Yhtälö (2.3) tunnetaan z :n polaariesityksenä ja arvoja r ja φ kutsutaan napakoordinaateiksi.*

Kuten kuvasta 2.3 nähdään, φ voi olla mikä tahansa arvo, jolle identiteetit $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ja $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ pätevät. Kun $z \neq 0$, niin φ :n kaikkien arvojen joukkoa, joille $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, merkitään argumentilla $\arg z$. Argumentille on olemassa seuraavat määritelmät.

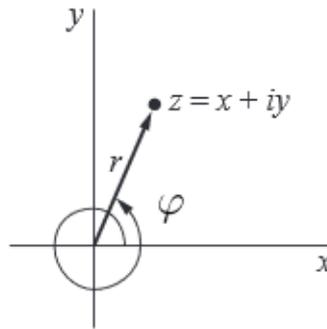
Määritelmä 2.1.2 (arg z) *Jos $z \neq 0$, niin*

$$\arg z = \{\varphi : z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}. \quad (2.4)$$

Jos $\varphi \in \arg z$, niin sanotaan että φ on z :n argumentti.

Kirjoitetaan $\varphi \in \arg z$ mielummin kuin $\varphi = \arg z$. Tämä johtuu siitä, että $\arg z$ on joukko ja nimitys $\varphi \in \arg z$ tarkoittaa että φ on kyseisen joukon alkio. Jos $\varphi_1 \in \arg z$ ja $\varphi_2 \in \arg z$, niin on olemassa joku kokonaisluku n siten, että

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2n\pi. \quad (2.5)$$



Kuva 2.3: Pisteen (x, y) napakoordinaatit r ja φ . [2].

Matemaatikot ovat tehneet erityisen valinnan $\varphi \in \arg z$. Se on se φ :n arvo, jolla $-\pi < \varphi \leq \pi$, kuten seuraava määritelmä osoittaa.

Määritelmä 2.1.3 (Arg z) *Olkoon $z \neq 0$ kompleksiluku. Silloin*

$$\operatorname{Arg} z = \varphi, \quad \text{jolle } z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \quad (2.6)$$

Jos $\varphi = \operatorname{Arg} z$, niin kutsutaan φ :ta z :n pääargumentiksi.

Määritetään e^z mille tahansa kompleksiluvulle. Jos $z = x + iy$, niin

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2.7)$$

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = (\cos \varphi + i \sin \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (2.8)$$

Jos φ on reaaliluku, niin $e^{i\varphi}$ sijaitsee jossakin ympyrällä, jonka säde on 1 ja keskipiste origossa. Tämä väittämä on helppo todistaa, sillä

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 \quad (2.9)$$

Eulerin kaava (2.8) on ollut tärkeä todistettaessa kompleksilukujen algebrallisia ja

geometrisia ominaisuuksia. Se mahdollistaa kompleksilukujen kertomisen vaivattomasti. Myös kompleksiluvun z polaarimuodon voi ilmaista kompaktimmassa muodossa. Jos $r = |z|$ ja $\varphi \in \arg z$, niin $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Eulerin kaavaa käyttämällä, voidaan z kirjoittaa eksponentiaalimuodossa:

$$z = re^{i\varphi}. \quad (2.10)$$

[3]

Kompleksilukujen algebra

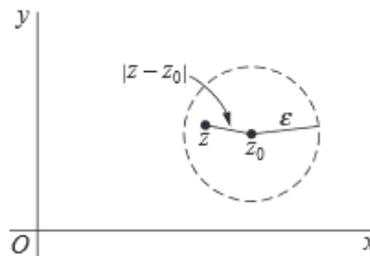
Reaaliluvut ovat riittämättömiä siinä mielessä, että kaikki algebralliset operaatiot eivät tuota niistä reaalilukuja. Jotta luvussa $\sqrt{-1}$ olisi järkeä, täytyy tarkastella kompleksilukujen aluetta. Mikä tahansa järkeenkäypä algebrallinen operaatio, joka tehdään kompleksiluvuilla, antaa tulokseksi kompleksilukuja. [3]

Alueet kompleksitasossa

Tarkastellaan kompleksilukujen joukkoa tai pisteitä z -tasossa ja näiden läheisyyttä toisiinsa. Perustyökaluna on ϵ -ympäristön käsite

$$D_\epsilon = \{z : |z - z_0| < \epsilon\} \quad (2.11)$$

annetussa pisteessä z_0 . Se sisältää kaikki pisteet z , jotka ovat sellaisen ympyrän sisäpuolella, jonka keskipiste on z_0 ja säde on ϵ , mutta eivät kehällä. Tämä nähdään kuvasta 2.4. Kun säteen ϵ arvo tunnetaan tai se on epäolennainen, niin joukkoa (2.11) voidaan kutsua vain ympäristöksi.



Kuva 2.4: Sisäpiste z ja ϵ -säteinen avoin ympäristö [2].

Piste z_0 on joukon S *sisäpiste*, jos on jokin pisteen z_0 ympäristö, joka sisältää ainoastaan joukon S pisteitä. Pistettä z_0 kutsutaan joukon S *ulkopisteeksi*, kun on olemassa ympäristö, joka ei sisällä joukon S pisteitä. Jos z_0 ei ole kumpikaan näistä,

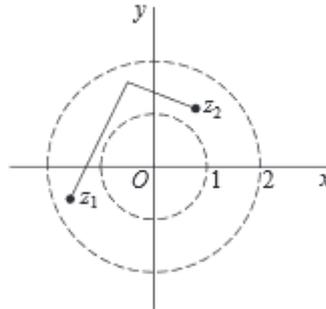
se on joukon S *reunapiste*. Reunapisteitä ovat pisteet, joiden jokainen ympäristö sisältää ainakin yhden pisteen joukosta S ja ainakin yhden pisteen joka ei kuulu joukkoon S . Joukon S kaikkien reunapisteiden joukkoa sanotaan *reunaksi*. Esimerkiksi ympyrä $|z| = 1$ on molempien joukkojen

$$|z| < 1 \quad \text{ja} \quad |z| \leq 1 \quad (2.12)$$

reuna.

Joukko on *avoin*, jos se ei sisällä yhtään reunapistettä. Joukko on *suljettu*, jos se sisältää kaikki sen reunapistet. Joukon S *sulkeuma* on suljettu joukko, joka sisältää kaikki joukon S pisteet yhdessä joukon S reunan kanssa. On olemassa joukkoja, jotka eivät ole suljettuja eivätkä avoimia. Jotta joukko ei ole avoin, täytyy olla reunapiste, joka sisältyy joukkoon; ja jos se ei ole suljettu, täytyy olla reunapiste, joka ei sisälly joukkoon.

Avoin joukko on *yhtenäinen*, jos jokainen pistepari z_1 ja z_2 voidaan yhdistää polygonaalisella viivalla. Avoin joukko $|z| < 1$ on yhtenäinen. Rengas $1 < |z| < 2$ on myös yhtenäinen kuten kuvasta 2.5 nähdään. [2] Avointa yhtenäistä joukkoa sanotaan *alueeksi* [3].



Kuva 2.5: Rengas $1 < |z| < 2$ on yhtenäinen avoin joukko [2].

Joukko S on *rajoitettu*, jos on olemassa ympäristö $|z| \leq R$, jonka sisällä jokainen joukon S piste on. Muutoin se on *rajoittamaton* [2].

2.2 Analyttiset funktiot

Kompleksimuuttujan funktiot

Kompleksimuuttujan z kompleksiarvoinen funktio on $f(z)$. Kirjoitetaan $w = f(z)$ ja kutsutaan lukua w z :n kuvaksi. Joukkoa S kutsutaan f :n määrittelyjoukoksi ja kaikkien kuvien $\{w = f(z) : z \in S\}$ joukkoa kutsutaan f :n arvojoukoksi. Kun puhutaan funktion määrittelyjoukosta, niin tarkoitetaan niiden pisteiden joukkoa,

jossa funktio on määritelty. Kun z voidaan ilmaista reaali- ja imaginaariosan avulla $z = x + iy$, niin voidaan kirjoittaa $f(z) = w = u + iv$, missä u ja v ovat w :n reaali- ja imaginaariosa. Näin saadaan seuraava esitys

$$w = f(z) = u + iv$$

Koska u ja v riippuvat luvuista x ja y , niiden voidaan ajatella olevan reaalimuuttujien x ja y reaaliarvoisia funktioita, jotka ovat

$$u = u(x, y) \quad \text{ja} \quad v = v(x, y)$$

Usein kirjoitetaan kompleksiarvoinen funktio f muodossa

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Voi olla kuitenkin sopivampaa käyttää muotoa $z = re^{i\theta}$ kompleksifunktion f esittämisessä. Näin saadaan polaarimuoto

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \quad (2.13)$$

missä u ja v ovat reaalimuuttujien r ja θ reaalifunktioita. [3]

Raja-arvot ja jatkuvuus

Olkoon $u = u(x, y)$ kahden reaalimuuttujan x ja y reaaliarvoinen funktio. Funktiolla u on raja-arvo u_0 , kun piste (x, y) lähestyy pistettä (x_0, y_0) edellyttäen, että funktion $u(x, y)$ arvo saadaan niin lähelle arvoa u_0 , kuin halutaan ottamalla piste (x, y) mahdollisimman lähelle pistettä (x_0, y_0) . Kun näin tapahtuu, voidaan kirjoittaa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$$

Matemaattisemmin ilmaistuna u :lla on raja-arvo u_0 , kun (x, y) lähestyy pistettä (x_0, y_0) , jos $|u(x, y) - u_0|$ saadaan mielivaltaisen pieneksi, laittamalla sekä $|x - x_0|$ että $|y - y_0|$ pieneksi. Tämä määritelmä on kuin yhden muuttujan funktioiden raja-arvo, paitsi että tässä on kaksi muuttujaa. Koska (x, y) on piste xy -tasossa ja etäisyys (x, y) :n ja (x_0, y_0) :n välillä on $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, voidaan antaa tarkka määritelmä raja-arvolle.

Määritelmä 2.2.1 (Funktion $u(x, y)$ raja-arvo) *Merkintä* $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u = u_0$ tarkoittaa, että jokaisella luvulla $\epsilon > 0$, on olemassa vastaava luku $\delta > 0$, niin että

$$|u(x, y) - u_0| < \epsilon \quad \text{aina kun} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad (2.14)$$

Raja-arvo u_0 ei saa riippua siitä, kuinka piste (x, y) lähestyy pistettä (x_0, y_0) , joten funktion $u(x, y)$ täytyy lähestyä arvoa u_0 , kun piste (x, y) lähestyy pistettä (x_0, y_0) pitkin mitä tahansa käyrää, joka päättyy pisteeseen (x_0, y_0) . Sitä vastoin, jos voidaan löytää kaksi käyrää C_1 ja C_2 , jotka päättyvät pisteeseen (x_0, y_0) , kun $u(x, y)$ lähestyy kahta erillistä arvoa u_1 ja u_2 , niin silloin $u(x, y)$:lla ei ole raja-arvoa, kun (x, y) lähestyy arvoa (x_0, y_0) .

Olkoon $f(z)$ kompleksimuuttujan z funktio, joka on määritelty kaikilla arvoilla z jossakin z_0 :n ympäristössä, paitsi mahdollisesti pisteessä z_0 . Sanotaan, että funktiolla f on raja-arvo w_0 , kun z lähestyy pistettä z_0 edellyttäen, että arvo $f(z)$ saadaan mahdollisimman lähelle arvoa w_0 ottamalla z riittävän lähelle pistettä z_0 . Kun näin tapahtuu, niin

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0.$$

Pisteiden z ja z_0 etäisyys on $|z - z_0|$, joten annetaan tarkka määritelmä, joka on samanlainen kuin kahden muuttujan funktiolle.

Määritelmä 2.2.2 (Funktion $f(z)$ raja-arvo) *Ilmaisu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ tarkoittaa, että jokaisella reaaliluvulla $\epsilon > 0$, on olemassa vastaava luku $\delta > 0$, siten että*

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{aina kun} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Jos tarkastellaan funktiota $w = f(z)$ kuvauksena z -tasolta w -tasolle, voidaan tehdä johtopäätös, että funktion f raja-arvo pitäisi pystyä ilmaisemaan sen reaali- ja imaginaariosien u ja v avulla.

Teoreema 2.2.1 *Olkoon $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleksifunktio, joka määritelty jossakin z_0 :n ympäristössä, paitsi ehkä pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0$. Silloin*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0 \quad (2.15)$$

joss

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{ja} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 \quad (2.16)$$

Määritelmä 2.2.3 (Reaaliarvoisen funktion $u(x, y)$ jatkuvuus) *Olkoon $u(x, y)$ kahden muuttujan x ja y reaaliarvoinen funktio. Sanotaan, että u on jatkuva pisteessä x_0, y_0 jos seuraavat kolme ehtoa toteutuvat.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) \quad \text{on olemassa,} \quad (2.17)$$

$$u(x_0, y_0) \quad \text{on olemassa, ja} \quad (2.18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0). \quad (2.19)$$

Määritelmä 2.2.4 (Kompleksifunktion $f(z)$ jatkuvuus) *Olkoon $f(z)$ kompleksimuuttujan z funktio, joka on määritelty kaikilla z :n arvoilla jossakin z_0 :n ympäristössä. Sanotaan, että f on jatkuva pisteessä z_0 , jos seuraavat kolme ehtoa toteutuvat.*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad \text{on olemassa.} \quad (2.20)$$

$$f(z_0) \quad \text{on olemassa.} \quad (2.21)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.22)$$

Kompleksifunktio on jatkuva, joss sen reaali- ja imaginaariosa u ja v ovat jatkuvia. Kompleksifunktioiden jatkuvuus on muodollisesti sama kuin reaalifunktioiden ja jatkuvien funktioiden summat, erotukset ja tulot ovat jatkuvia; osamäärät ovat jatkuvia pisteissä, missä nimittäjä on erisuuri kuin nolla.

Teoreema 2.2.2 *Olkoon $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ määritelty jossakin z_0 :n ympäristössä. Silloin f on jatkuva pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0$, joss u ja v ovat jatkuvia pisteessä (x_0, y_0) .*

[3]

Differentioituvuus ja derivaatat

Kompleksifunktioiden derivaatta on määritelty samalla tavalla kuin reaalifunktioiden derivaatta eli derivoinnin raja-arvon määritelmänä. Funktion $f(z)$ derivaatta pisteessä z_0 on

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.23)$$

[1]

Jos kirjoitetaan $\Delta z = z - z_0$, niin yhtälö (2.23) voidaan lausua

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (2.24)$$

Jos merkitään, että $w = f(z)$ ja $\Delta w = f(z) - f(z_0)$, voidaan käyttää derivaatalle Leibnizin notaatiota dw/dz :

$$f'(z_0) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (2.25)$$

Erityistä huomiota pitää kiinnittää kompleksilukuun Δz yhtälössä (2.25), koska raja-arvon täytyy olla riippumaton tavasta, jolla $\Delta z \rightarrow 0$. [3] Reaaliakselilla on olemassa ainoastaan kaksi suuntaa, joista voidaan lähestyä raja-arvoa, joko vasemmalta tai oikealta. Tämä johtaa vasemman- ja oikeanpuoleisen derivaatan käsitteeseen.

Kompleksitasossa pistettä z voidaan lähestyä äärettömän monesta suunnasta. Tämä edellytys määrää useita rajoitteita kompleksiselle derivaatalle ja on niiden huomattavien ominaisuuksien lähde. [1] Jos on olemassa kaksi käyrää, jotka päättyvät pisteeseen z_0 ja jonka $\Delta w/\Delta z$ lähestyy eri arvoja, niin arvolla $\Delta w/\Delta z$ ei ole raja-arvoa kun $\Delta z \rightarrow 0$ ja funktiolla f ei ole derivaattaa pisteessä z_0 . Samaa huomautusta sovelletaan myös yhtälöihin (2.23) ja (2.24).

Määritelmä 2.2.5 (Analyttisyys) *Funktio on **analyttinen** pisteessä z_0 , edellyttäen, että on jokin $\epsilon > 0$ niin, että $f'(z)$ on olemassa kaikilla $z \in D_\epsilon(z_0)$. Toisin sanoen, funktion f täytyy olla derivoituva pisteessä z_0 , mutta myös kaikissa pisteen z_0 ϵ -ympäristön pisteissä.*

Jos f on analyttinen jokaisessa alueen Ω pisteessä, voidaan sanoa, että f on analyttinen alueessa Ω . On olemassa erikoistermi, jos f on analyttinen koko kompleksitasossa.

Määritelmä 2.2.6 (Kokonainen funktio) *Jos f on analyttinen koko kompleksitasossa, niin f :n sanotaan olevan **kokonainen funktio**.*

Pisteitä, joissa ovat funktio ei ole analyttinen, sanotaan **singulaaripisteiksi**. Ne ovat tärkeitä tietyissä fysiikan ja tekniikan sovelluksissa.

Teoreema 2.2.3 *Jos f on derivoituva pisteessä z_0 , niin f on jatkuva pisteessä z_0 .*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (2.26)$$

Todistus: Yhtälöstä (2.23) saadaan, että

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \quad (2.27)$$

Käyttämällä raja-arvon jaollisuusominaisuutta, joka on

$$\text{jos } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \text{ ja } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B, \text{ niin } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = AB, \quad (2.28)$$

saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Tämä tulos tarkoittaa, että $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, mikä osoittaa, että f on jatkuva pisteessä z_0 .

Käyttämällä teoremaa 2.2.3, voidaan todistaa tulon derivoimissääntö

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + g(z)f'(z) \quad (2.30)$$

Olkoon $h(z) = f(z)g(z)$. Kun käytetään määritelmää 2.2.5, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Jos vähennetään ja lisätään termi $f(z_0)g(z)$ osoittajasta, saadaan

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z)}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) + f(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Käyttämällä derivaatan määritelmää (2.23) ja g :n jatkuvuutta, saadaan $h'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$, mikä on se lopputulos, joka halutaan osoittaa. Derivoimisääntöjä voidaan käyttää apuna tarkasteltaessa funktioiden analyttisyyttä.

Teoreema 2.2.4 (L'Hôpital'n sääntö) *Oletetaan, että f ja g ovat analyttisiä pisteessä z_0 . Jos $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, ja $g'(z_0) \neq 0$, niin*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}. \quad (2.33)$$

Teoreema 2.2.5 *Olkoon $f = u + iv$ analyttinen funktio alueessa Ω . Oletetaan kaikilla $z \in \Omega$, että $|f(z)| = K$, missä K on vakio. Silloin f on vakio alueessa Ω .*

[3]

Cauchy-Riemannin yhtälöt

Funktion

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.34)$$

komponenttifunktioiden u ja v ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaattojen täytyy toteuttaa yhtälöpari pisteessä $z_0 = (x_0, y_0)$, kun f :n derivaatta on olemassa.

Ilmaistaan $f'(z_0)$ osittaisderivaattojen avulla.

Kirjoitetaan

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

ja

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \\ &= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)] \end{aligned}$$

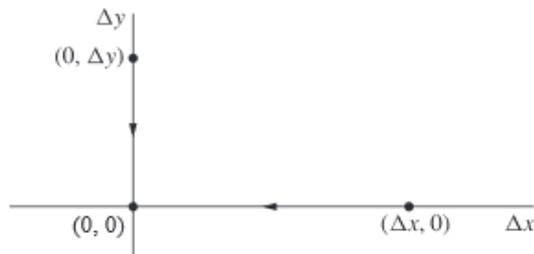
Oletetaan, että derivaatta

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (2.35)$$

on olemassa. Teoreeman 2.2.1 perusteella tiedämme, että

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left(\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left(\operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \quad (2.36)$$

Nyt on tärkeää muistaa, että kaava (2.36) on pätevä, kun $(\Delta x, \Delta y)$ lähestyy pistettä $(0, 0)$ millä tahansa valitulla tavalla. Yleisesti annetaan $(\Delta x, \Delta y)$ lähestyä pistettä $(0, 0)$ reaaliakselilla pisteen $(\Delta x, 0)$ kautta kuten kuvasta 2.6 nähdään.



Kuva 2.6: $(\Delta x, \Delta y)$ lähestyy pistettä $(0, 0)$ reaali- ja imaginaariakselin suunnissa [2].

Koska $\Delta y = 0$, osamääräksi $\Delta w/\Delta z$ tulee

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Täten

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left(\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0)$$

ja

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left(\operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0),$$

missä $u_x(x_0, y_0)$ ja $v_x(x_0, y_0)$ tarkoittavat ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatto- ja funktioiden u ja v muuttujan x suhteen pisteessä (x_0, y_0) . Näiden raja-arvojen korvaaminen merkinnällä (2.36) kertoo, että

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \quad (2.37)$$

Annetaan Δz :n lähestyä nollaa vertikaalisesti pisteen $(0, \Delta y)$ kautta, jolloin $\Delta x = 0$ ja

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \\ &= \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Sitten

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left(\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{(\Delta y \rightarrow 0)} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = v_y(x_0, y_0).$$

ja

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left(\operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = - \lim_{(\Delta y \rightarrow 0)} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} = -u_y(x_0, y_0).$$

Yhtälöstä (2.36) seuraa, että

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0), \quad (2.38)$$

missä u :n ja v :n osittaisderivaatat on laskettu y :n suhteen. Yhtälö (2.38) voidaan kirjoittaa muotoon

$$f'(z_0) = -i[u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)],$$

Yhtälöt (2.37) ja (2.38) tarjoavat välttämättömät ehdot $f'(z_0)$:n olemassaololle. Jotta saadaan nämä ehdot, niin pitää merkitä yhtälöiden reaali- ja imaginaariosat

yhtäsuuriksi.

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{ja} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (2.39)$$

Yhtälöitä (2.39) kutsutaan *Cauchy-Riemannin yhtälöiksi*

Teoreema 2.2.6 *Oletetaan, että*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ja että $f'(z)$ on olemassa pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0$. Sitten u :n ja v :n ensimmäisen kertaluvun derivaattojen täytyy olla olemassa pisteessä (x_0, y_0) ja niiden täytyy toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (2.40)$$

$f'(z_0)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0), \quad (2.41)$$

missä osittaisderivaatat lasketaan pisteessä (x_0, y_0) .

[2]

2.3 Harmoniset funktiot

Tässä kappaleessa hyödynnetään kompleksifunktioiden analyysia Laplacen yhtälöihin.

Teoreema 2.3.1 *Jos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ on analyyttinen funktio, niin sen reaali- ja imaginaariosat $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ ovat molemmat harmonisia funktioita.*

Todistus: Derivoimalla Cauchy-Riemannin yhtälöt (2.39) ja vetoamalla sekaderivaattojen yhtäsuuruuteen, saadaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Joten u on Laplacen yhtälön $u_{xx} = u_{yy} = 0$ ratkaisu. Todistus v :lle on samanlainen. \square

Täten jokainen kompleksifunktio tuottaa kaksi harmonista funktiota. Jos on annettu harmoninen funktio $u(x, y)$, niin onko olemassa harmoninen funktio $v(x, y)$ siten, että $f = u + iv$ on analyyttinen funktio. Jos on, niin harmoninen funktio

$v(x, y)$ tunnetaan funktion u harmonisena konjugaattina. Harmoninen konjugaatti saadaan ratkaisemalla Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.42)$$

joka, määrätyle funktiolle $u(x, y)$, on osana osittaisdifferentiaali yhtälöiden epähomogeenista lineaarisysteemiä funktiolle $v(x, y)$.

Kaikilla harmonisilla funktioilla ei ole aina harmonista konjugaattia. Harmonisen konjugaatin olemassaolo tai olemattomuus voi riippua taustalla olevasta määrittelyalueen topologiasta. Jos alue on *yhdesti yhtenäinen*, eikä näin ollen sisällä reikiä, tällöin löytyy aina harmoninen konjugaatti. Tapauksissa, joissa alue ei ole yhdesti yhtenäinen, ei välttämättä löydy yksikäsitteistä harmonista konjugaattia kompleksifunktion $f(z)$ imaginaariosaksi.

Teoreema 2.3.2 *Jokainen harmoninen funktio $u(x, y)$, joka on määritelty yhdesti yhtenäisessä alueessa Ω , on analyttisen funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ reaaliosa, joka on määritetty kaikilla $z = x + iy \in \Omega$.*

Todistus: Kirjoitetaan Cauchy-Riemannin yhtälöt (2.40) vektorimuodossa v :n gradientin

$$\nabla v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

avulla

$$\nabla v = \nabla^\perp u, \quad \text{missä} \quad \nabla^\perp u = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

tunnetaan u :n epäsymmetrisenä gradienttina. Se on kaikkialla ortogonaalinen u :n gradientin

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

kanssa ja saman pituinen, toisin sanoen

$$\nabla u \cdot \nabla^\perp u = 0, \quad \|\nabla u\| = \|\nabla^\perp u\|,$$

missä gradientin ∇u normi $\|\nabla u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(-u_y)^2 + u_x^2} = \|\nabla^\perp u\|$. Näin harmonisen funktion u gradientti ja sen harmoninen konjugaatti v ovat vastavuo-

roisesti ortogonaaliset vektorikentät, joilla on sama euklidinen pituus

$$\nabla u \cdot \nabla v \equiv 0, \quad \|\nabla u\| \equiv \|\nabla v\| \quad (2.46)$$

Nyt, kun on annettu harmoninen funktio u , tavoitteena on löytää ratkaisu v gradienttiyhtälölle (2.44). Hyvin tunnettu tulos vektorilaskennasta sanoo, että vektorikentällä $\nabla^\perp u$ on potentiaalifunktio v jos ja vain jos vastaava viivaintegraali on riippumaton polusta. *Polkuriippumattomuus* tarkoittaa, että integraalin arvo riippuu ainoastaan välin päätepisteistä, eikä polusta pisteiden välillä. *Polku* on kahta pisteparia yhdistävä käyrä, jossa pisteparit ovat samat, jos käyrä alkaa ja päättyy samaan pisteeseen. [16] Näin viivaintegraali saa arvon nolla, jos alku- ja päätepiste ovat samat.

$$\oint_C \nabla v \cdot d\mathbf{x} = \oint_C \nabla^\perp u \cdot d\mathbf{x} = \oint_C \nabla u \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (2.47)$$

jokaiselle suljetulle käyrälle $C \subset \Omega$, missä ds on differentiaalin viiva-alkio, yksikönormaalivektori \mathbf{n} osoittaa viivan normaalin suuntaan ja $d\mathbf{x} = dx dy$.

Potentiaalifunktio voidaan muodostaa integroimalla vektorikenttä:

$$v(x, y) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \nabla v \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \nabla u \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.48)$$

Tässä $\mathbf{a} \in \Omega$ on mikä tahansa kiinnitetty piste ja polkuriippumattomuuden kannalta viivaintegraali voidaan ottaa minkä tahansa käyrän yli, joka yhdistää pisteen \mathbf{a} pisteeseen $\mathbf{x} = (x, y)^T$.

Jos alue Ω on *yhdesti yhtenäinen*, niin silloin kaikki yksinkertaiset suljetut käyrät $C \subset \Omega$ sulkevat sisäänsä alueen $D \subset \Omega$, jossa $C = \partial D$. Soveltamalla Greenin lauseen divergenssimuotoa eli Gaussin lausetta [17]

$$\oint_C F(r) \cdot \mathbf{n} ds = \int_D \nabla \cdot F(r) d\mathbf{x}$$

saadaan

$$\oint_C \nabla u \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \nabla \cdot \nabla u dx dy = \iint_D \Delta u dx dy = 0,$$

missä $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. Koska u on harmoninen. Täten on todistettu harmonisen konjugaattifunktion olemassaolo. \square Teknisesti ollaan ainoastaan varmistettu yhtälön (2.47) polkuriippumattomuus, kun C on yksinkertainen suljettu käyrä, mutta tämä kelpaa osoitukseksi mille tahansa mielivaltaiselle suljetulle käyrälle.

Yhtälöiden (2.37) ja (2.38) sekä Cauchy-Riemannin yhtälön (2.39) seurauksena

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.49)$$

Täten gradienttien ∇u ja ∇v komponentit näkyvät derivaatan $f'(z)$ reaali- ja kompleksiosassa. Funktion $u(x, y)$ gradientti ∇u osoittaa sen tasa-arvokäyrien normaalin suuntaan, mitkä ovat joukot $\{u(x, y) = c\}$, missä oletetaan olevan kiinteät vakioarvot. Koska ∇v on ortogonaalinen ∇u :n nähden, niin ∇v on u :n tasa-arvokäyrien tangentti. ∇v on normaali harmonisen konjugaatin v tasa-arvokäyriin nähden ja ∇u puolestaan on tangentti harmonisen konjugaatin v tasa-arvokäyriin nähden. Koska ∇u :n ja ∇v :n suunnat ovat ortogonaaliset, kompleksifunktion reaali- ja imaginaariosien tasa-arvokäyrät muodostavat vastavuoroisesti tasokäyrien ortogonaalisen systeemin. Jos ollaan *kriittisessä pisteessä*, missä $\nabla u = 0$, niin silloin $\nabla v = \nabla^\perp u = 0$ ja vektorit eivät määritä tangentin suuntaa. Siksi tasa-arvokäyrien ortogonaalisuus ei välttämättä päde kriittisessä pisteessä. Kompleksifunktion $f(z)$ kriittiset pisteet ovat samat kuin reaali- ja imaginaariosien u ja v kriittiset pisteet. Ne ovat pisteitä, joissa kompleksinen derivaatta katoaa eli $f'(z) = 0$. [1]

2.4 Sovellukset virtausmekaniikkaan

Ajan suhteen muuttumattomalla eli *tasapainotilassa* olevalla virtauksella on nopeuskenttä

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{pisteessä} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega$$

Tässä $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on alue, jossa neste tai kaasu etenee vapaasti ilman esteitä. Vektori $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ on nesteen tai kaasun alkunopeus pisteessä $\mathbf{x} \in \Omega$. Virtaus on kokoonpuristumaton, jos ja vain jos virtausnopeuden divergenssi on nolla.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.50)$$

Kokoonpuristumattomuus tarkoittaa, että nesteen tilavuus ei muutu virtauksen aikana. Virtaus on lisäksi pyörteetön silloin, kun virtausnopeuden roottori on nolla.

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.51)$$

Pyörteettömässä virtauksessa ei ole pyörteisyyttä eikä turbulenssia. *Ideaalinen virtaus* on kokoonpuristumaton ja pyörteetön. Yhtälöt (2.50) ja (2.51) ovat lähes identtiset verrattuna Cauchy-Riemannin yhtälöihin (2.39). Ainoa ero on v :n derivaatan

edessä olevassa merkissä, mutta se voidaan korjata korvaamalla v sen vastaluvulla $-v$. Näin ollaan saatu yhteys ideaalisten tasovirtausten ja kompleksifunktioiden välille.

Teoreema 2.4.1 *Nopeusvektorikenttä $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$ aiheuttaa ideaalisen virtauksen jos ja vain jos*

$$f(z) = u(x, y) - iv(x, y) \quad (2.52)$$

on $z = x + iy$:n analyyttinen funktio.

Täten ideaalisen virtauksen nopeusvektorikentän komponentit $u(x, y)$ ja $-v(x, y)$ ovat välttämättä harmoniset konjugaatit. Vastaava kompleksifunktio (2.52) on tunnettu virtauksen kompleksisena nopeutena. Kun käytetään tätä tulosta, niin ei saa unohtaa miinus-merkkiä, joka on $f(z)$:n imaginaariosan edessä.

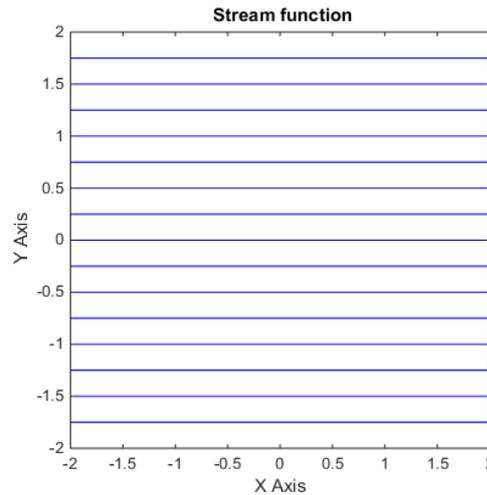
Nopeusvektorikentässä $\mathbf{v}(u(x, y), v(x, y))^T$ neste- tai kaasupartikkelit seuraavat ratoja $z(t) = x(t) + iy(t)$ eli virtaviivoja, jotka saadaan integroimalla tavallisten differentiaaliyhtälöiden systeemi

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y). \quad (2.53)$$

Kun tarkastellaan yhtälöä (2.52), voidaan kirjoittaa edeltävä systeemi kompleksisessa muodossa:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \overline{f(z)} = u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.54)$$

Virtausmekaanikassa käyrät, jotka on parametrisoitu $z(t)$:n ratkaisuuina, tunnetaan virtauksen *virtaviivoina*, joita pitkin nesteen tai kaasun partikkelit liikkuvat. Jokaisen virtauksen partikkelin liike $z(t)$ on määrätty sen sijainnilla $z(t_0) = z_0 = x_0 + iy_0$ alkuajanhetkellä t_0 . Jos kompleksinen nopeus katoaa, $f(z_0) = 0$, niin ratkaisu $z(t) \equiv z_0$ on vakio ja z_0 on virtauksen *patopiste*. Patopisteessä virtaus kohtaa seinämän ja pysähtyy.



Kuva 2.7: Vaakasuora virtaus [5].

Esimerkki 2.4.1 Yksinkertaisin esimerkki virtaviivoista on tilanne, jossa nopeus on vakio ja vastaa yhtenäistä vakiovirtausta, kuten $f(z) = 1$, mikä vastaa vaakasuoraa nopeusvektorikenttää $\mathbf{v} = (1, 0)^T$. Todellinen virtaus löydetään integroimalla systeemi

$$\dot{z} = 1 \quad \text{tai} \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0 \quad (2.55)$$

Täten ratkaisu $z(t) = t + z_0$ esittää yhtenäistä vaakasuoraa nesteen tai kaasun liikettä, jonka virtaviivat ovat reaaliakselin kanssa yhdensuuntaiset, kuten kuvasta 2.7 nähdään. Kuva on piirretty Matlabilla, jonka koodi on esitetty liitteessä A.

[1; 5]

Jos virtausta rajoittavat kiinteät seinämät, niin tulee asettaa ehdot, joilla virtausta ei ole seinämän läpi. Tällöin virtausnopeus \mathbf{v} on reunan tangentin suuntainen ja täten virtausta ei ole kappaleen läpi. Ideaalisen virtauksen virtaviivat ja patopisteet ovat kappaleen reunalla.

Esimerkki 2.4.2 Kompleksitason ensimmäisen neljänneksen reuna $Q = \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{C}$ sisältää positiiviset x - ja y -akselit. Virtauksen rajoittaminen ensimmäiseen neljännekseen Q aiheuttaa virtauksen suoran kulman ohi, jonka kompleksinen nopeusfunktio on $f(z) = z = x + iy$. Vastaava virtaus saadaan integroimalla systeemi

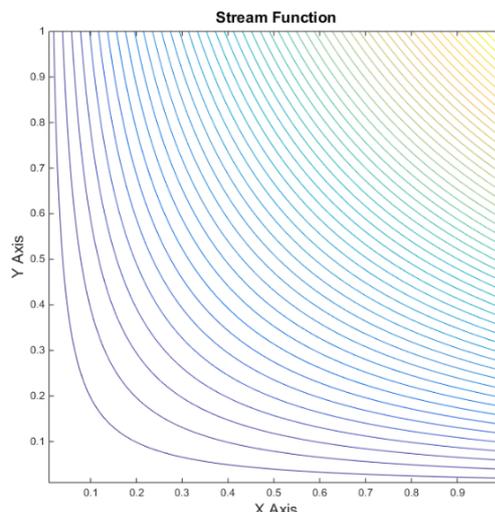
$$\dot{z} = \bar{z} \quad \text{tai} \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$$

Origossa $x = y = 0$ on patopiste. Epätasapainotilanteessa liikeratojen ratkaisut

$$z(t) = x_0 e^t + iy_0 e^{-t} \quad (2.56)$$

ovat hyperboleja $xy = c$, joita pitkin neste- tai kaasupartikkelit liikkuvat, kun ne ohittavat 90 asteen sisäkulman (Kuva 2.8). Matlab-koodi on esitetty liitteessä B.

[1; 6]



Kuva 2.8: Virtaus kulman ohi [6].

Kompleksisen nopeuden $f(z)$ avulla voidaan määritellä analyyttinen funktio χ , joka toteuttaa yhtälön $\frac{d\chi}{dz} = f(z)$. Lausutaan $\chi(z)$ muodossa

$$\chi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (2.57)$$

Hyödynnetään yhtälöä 2.49 kompleksisessa derivaatassa,

$$\frac{d\chi(z)}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = u - iv, \quad \text{joten} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v.$$

Näin ollen $\nabla\varphi = \mathbf{v}$, ja täten kompleksifunktion $\chi(z)$ reaaliosa $\varphi(x, y)$ on virtauksen nopeuspotentiaali. Antiderivaatta $\chi(z)$ on annetun virtauskentän $f(z)$ kompleksipotentialifunktio. Harmoninen konjugaatti $\psi(x, y)$ tunnetaan virtausmekaniikassa virtafunktiona. Sekä potentiaali- että virtafunktio toteuttavat Laplacen yhtälön. Edellä mainitut funktiot voidaan kuvata Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (2.58)$$

Nopeuspotentiaalın tasojoukot $\{\varphi(x, y) = c\}$, missä $c \in \mathbb{R}$ on kiinnitetty, tunnetaan tasopotentialikäyriinä. Nopeusvektori $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ osoittaa tasopotentialikäyrien $\{\varphi(x, y) = c\}$ normaalin suuntaan. Toisaalta $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ on harmonisen konjugaatin virtafunktion tasokäyrien $\psi(x, y) = d$ tangentti. Mutta \mathbf{v} on nopeuskenttä ja näin

ollen tangenti virtaviivoille, joita pitkin partikkelit kulkevat. Täten näiden käyräsystemien on kohdattava ja voidaan päätellä, että virtafunktion tasokäyrät ovat virtauksen virtaviivoja. Eli ideaaliselle virtaukselle, tasapotentialit $\phi = c$ ja virtaviivat $\phi = d$ muodostavat ortogonaalisten tasokäyrien perheen. Virtausnopeus $\mathbf{v} = \nabla\phi$ on tangenti virtaviivoihin nähden ja normaali tasapotentialikäyriin nähden, kun taas virtafunktion gradientti $\nabla\psi = \nabla^\perp\phi$ on tangenti tasapotentialikäyriin nähden ja normaali virtaviivoihin nähden.

Virtausnopeus on eri suuri kuin nolla $\mathbf{v} = \nabla\phi \neq 0$, mikä tarkoittaa sitä, että kyseessä ei ole patopiste, jossa virtaus ei liikkuisi. Virtaviivat voivat kuitenkin alkaa ja päättyä patopisteeseen. [1]

Esimerkki 2.4.3 *Tarkastellaan kompleksipotentialifunktiota (katso kuva 2.9)*

$$\chi(z) = \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + ixy, \quad (2.59)$$

jonka kompleksinen nopeus on

$$f(z) = \chi'(z) = z = x + iy \quad (2.60)$$

Hyperboliset virtaviivat $xy = d$ ovat virtafunktion $\psi(x, y) = xy$ tasokäyriä. Tasapotentialikäyrät $\frac{1}{2}(x^2 - y^2) = c$ muodostavat ortogonaalisten hyperbelien systeemin, jotka on esitetty kuvassa 2.9. Matlab-koodi on esitetty liitteessä C.

[1; 5]

Esimerkki 2.4.4 *Virtaus sylinterin ohi saadaan tarkastelemalla kompleksista potentiaalifunktiota (katso kuva 2.10)*

$$\chi(z) = z + \frac{1}{z} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right), \quad (2.61)$$

jonka reaali- ja imaginaariosat ovat kaksiulotteisen Laplacen yhtälön yksittäisratkaisuja. Vastaava kompleksinen virtausnopeus on

$$f(z) = \frac{d\chi}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2.62)$$

Tasapotentialikäyrät ja virtaviivat on esitetty kuvassa 2.10 ja Matlab-koodi liitteessä D. Pisteet $z = \pm 1$ ovat virtauksen patopisteitä, kun $z = 0$ on singulaaripiste. Huomataan, että virtaviivat

$$\psi(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = d \quad (2.63)$$

ovat asympotoottisesti vaakasuorat kaukana sylinterin pinnasta. Tällöin virtaus on erottamaton yhtenäisestä vaakaviivaisesta liikkeestä vasemmalta oikealle. Tätä vastaava yksikkökompleksinopeus on $f(z) \equiv 1$.

[1; 5]

Esimerkki 2.4.5 *Kuvassa 2.11 on esitetty ortogonaalisten ympyröiden virtaviivat ja potentiaalikäyrät, jotka muodostavat dipolin. Dipoli on kahden erimerkkisen, mutta yhtä suuren varauksen muodostava pari. Näiden varausten ympärillä on sähkökentän virtaviivat ja näitä virtaviivoja kohtisuorassa on tasapotentiaalikäyrät. Kompleksipotentialifunktio on*

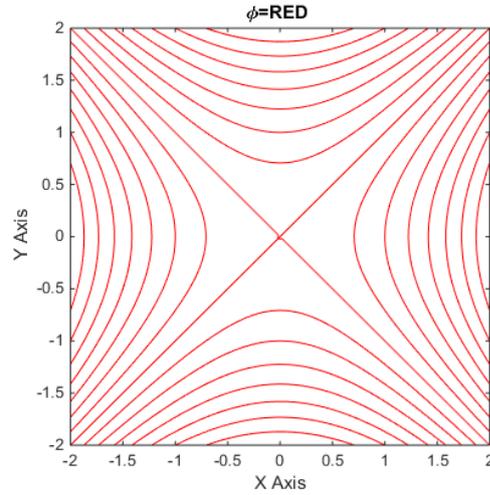
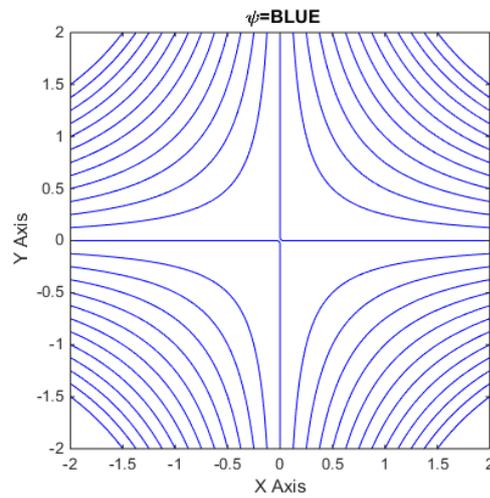
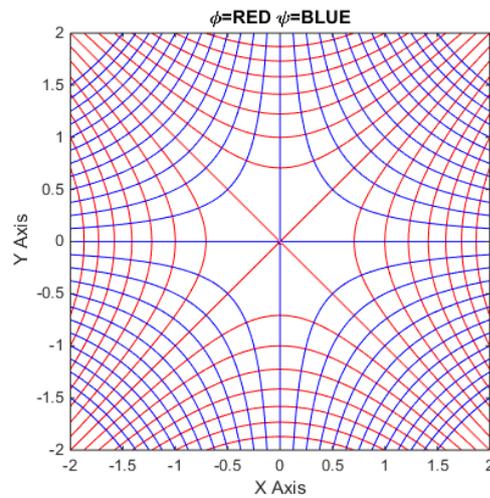
$$\chi(z) = z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}. \quad (2.64)$$

Tästä saadaan reaali- ja imaginaariosat

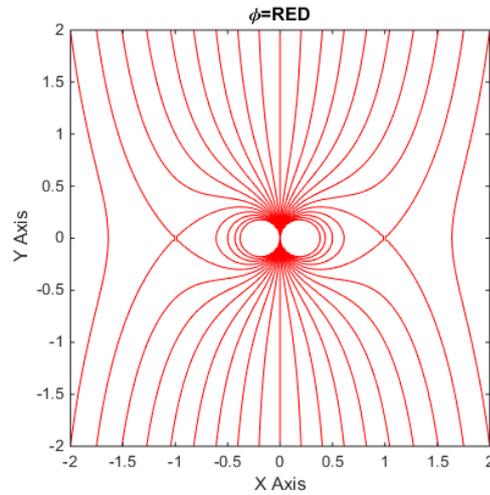
$$\varphi = \frac{1}{r} \cos(\theta) \quad \psi = -\frac{1}{r} \sin(\theta). \quad (2.65)$$

Matlab-koodi on esitetty liitteessä E.

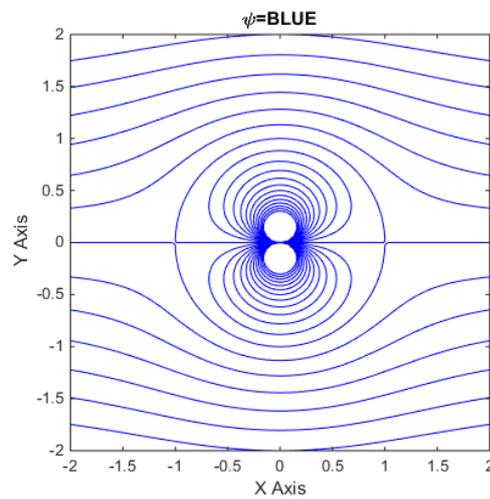
[5; 8]

(a) Hyperbolisen virtauksen potentiaalikäyrät ϕ .(b) Hyperbolisen virtauksen virtaviivat ψ .(c) Hyperbolisen virtauksen potentiaalikäyrät ϕ ja virtaviivat ψ .

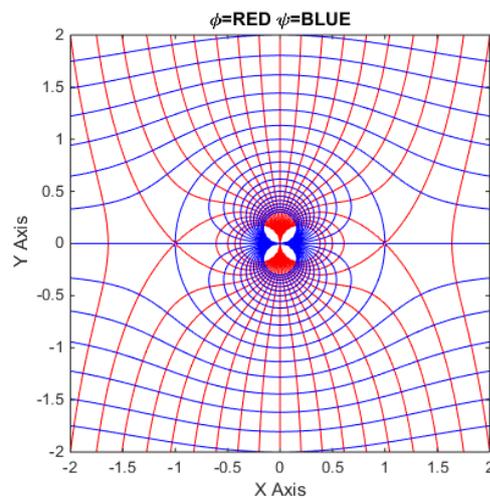
Kuva 2.9: Hyperbolisen virtauksen kompleksipotentialifunktio $\chi(z) = \frac{1}{2}z^2$ [5].



(a) Sylinterin ympärillä olevan virtauksen potentiaalikäyrät ϕ .

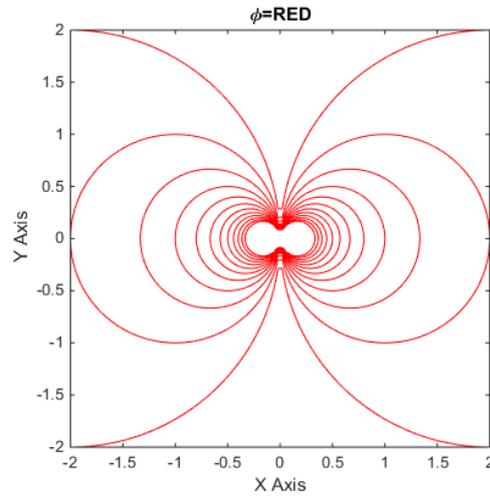
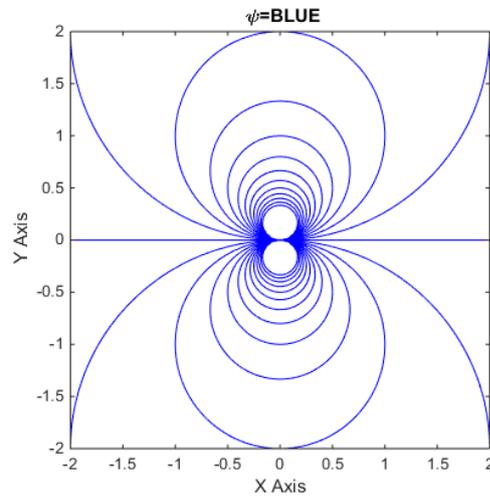
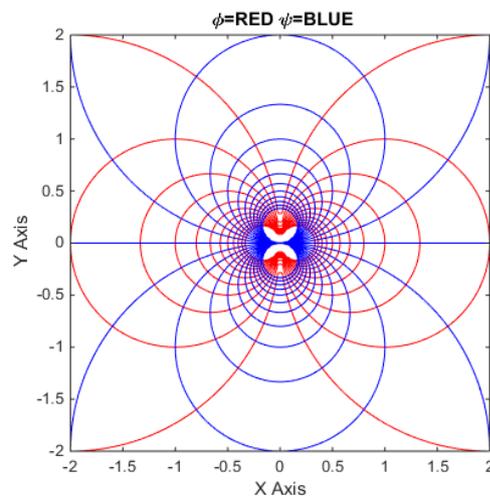


(b) Sylinterin ympärillä olevan virtauksen virtaviivat ψ .



(c) Sylinterin ympärillä olevan virtauksen potentiaalikäyrät ϕ ja virtaviivat ψ .

Kuva 2.10: Sylinterin ympärillä olevan virtauksen kompleksipotentialifunktio $\chi(z) = z + \frac{1}{z}$ [5].

(a) Dipolin potentiaalikäyrät ϕ .(b) Dipolin virtaviivat ψ .(c) Dipolin potentiaalikäyrät ϕ ja virtaviivat ψ .

Kuva 2.11: Dipolin kompleksipotentialifunktio $\chi(z) = \frac{1}{z}$ [5; 8].

3. KONFORMIKUVAUS

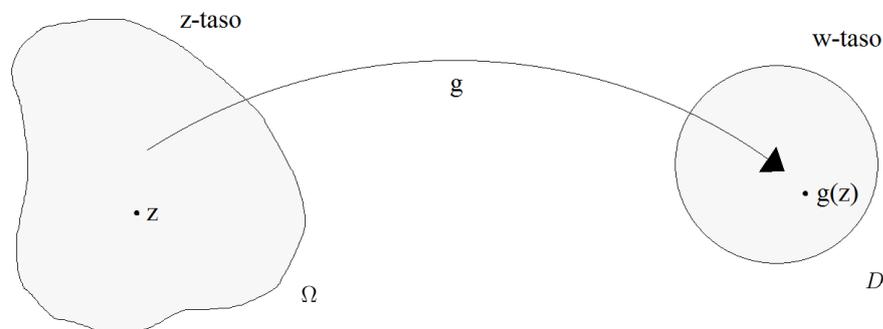
Analyttisten kompleksifunktioiden avulla saadaan loputon määrä harmonisia funktioita, jotka ovat kaksiulotteisen Laplacen yhtälön ratkaisuja. Jotta voidaan ratkaista Neumanin reuna-arvo-ongelma, niin täytyy löytää vain kompleksifunktio, jonka reaaliosa vastaa annettua reunaehto. [1]

3.1 Analyttinen kuvaus

Tarkastellaan analyttistä funktiota

$$\zeta = g(z) \quad \text{tai} \quad \zeta = \xi + i\eta = p(x, y) + iq(x, y) = g(z) \quad (3.1)$$

kuvausena, joka kuvaa pisteen $z = x + iy$ alueelta $\Omega \subset \mathbb{C}$ pisteeksi $\zeta = \xi + i\eta$, joka kuuluu kuvajoukkoon $D = g(\Omega) \subset \mathbb{C}$. Useimmiten kuvajoukko D on yksikkökierokko, kuten kuvassa 3.1, mutta menetelmää voi soveltaa yleisempiinkin alueisiin.



Kuva 3.1: Kuvaus alueelta Ω yksikkökierokoksi D .

Jotta voidaan yksiselitteisesti liittää funktiot alueessa Ω funktioihin joukossa D , edellytetään, että analyttinen kuvaus (3.1) on injektio siten, että jokainen piste $\zeta \in D$ on vain yhden pisteen $z \in \Omega$ kuva. Tuloksena käänteisfunktio $z = g^{-1}(\zeta)$ on hyvin määritelty kuvaus alueelta D takaisin alueelle Ω ja myös analyttinen kaikkialla alueessa D . Käänteisfunktion derivaatan kaava

$$\frac{d}{d\zeta} g^{-1}(\zeta) = \frac{1}{g'(z)} \quad \text{pisteessä} \quad \zeta = g(z), \quad (3.2)$$

pysyy voimassa kompleksifunktiolle. Funktion $g(z)$ derivaatan pitää olla nolasta poikkeava kaikkialla, jotta $g^{-1}(\zeta)$ on derivoituva. Ehto

$$g'(z) \neq 0 \quad \text{jokaisessa pisteessä} \quad \zeta \in \Omega, \quad (3.3)$$

on ratkaisevassa roolissa, kun menetelmää kehitetään. Tehdään oletus, että kuvaus (3.1) ulottuu jatkuvasti myös reunalle $\partial\Omega$ ja kuvaa sen injektiivisesti kuva-alueen reunalle ∂D .

Tarkastellaan eräitä yksinkertaisia esimerkkejä analyyttisistä kuvauksista.

Esimerkki 3.1.1 *Translaatio on kuvaus*

$$\zeta = z + \beta = (x + a) + i(y + b), \quad (3.4)$$

missä $\beta = a + ib$ on kiinnitetty kompleksiluku. Yhtälön (3.4) tarkoitus on siirtää koko kompleksitaso suuntaan ja paikkaan, jonka vektori $(a, b)^T$ määrää. Yleisesti ottaen (3.4) kuvaa kiekon $\Omega = \{|z + \beta| < 1\}$, jonka säde on 1 ja keskipiste $-\beta$ yksikkökielelle $D = \{|\zeta| < 1\}$.

Esimerkki 3.1.2 *On olemassa kaksi erityyppistä lineaarista analyyttistä kuvausta, joista ensimmäinen on skaalaus*

$$\zeta = \rho z = \rho x + i\rho y, \quad (3.5)$$

missä $\rho \neq 0$ on kiinnitetty nolasta poikkeava reaaliluku. Tämä kuvaus kuvaa kiekon $|z| < 1/|\rho|$ yksikkökieleksi $|\zeta| < 1$. Toinen lineaarinen analyyttinen kuvaus on **rotaatio**

$$\zeta = e^{i\phi} z = (x \cos(\phi) - y \sin(\phi)) + i(x \sin(\phi) + y \cos(\phi)), \quad (3.6)$$

joka kiertää kompleksitasoa origon ympäri kiinnitetyn kulman ϕ verran. Tämä kuvaus kuvaa yksikkökiekon yksikkökieleksi.

Esimerkki 3.1.3 *Jokainen ei-vakioarvoinen affinikuvaus*

$$\zeta = \rho z = \alpha z + \beta, \quad \alpha \neq 0, \quad (3.7)$$

määrittelee kääntyvän analyyttisen kuvauksen kompleksitasossa \mathbb{C} , jonka käänteiskuvaus $z = \alpha^{-1}(\zeta - \beta)$ on myös affinikuvaus. Kun kirjoitetaan $\alpha = \rho e^{i\phi}$ polaarikoordinaateissa, nähdään, että affinikuvausta (3.7) voidaan tarkastella rotaation (3.6) yhdistelmänä, jota seuraa skaalaus (3.5) ja jota puolestaan seuraa translaatio (3.4). Niinpä se kuvaa kiekon $|\alpha z + \beta| < 1$, jonka säde on $1/|\alpha| = 1/|\rho|$ ja keskipiste on $-\beta/\alpha$, yksikkökieleksi $|\zeta| < 1$.

Esimerkki 3.1.4 Kompleksifunktio $g(z) = \frac{1}{z}$ määrittelee kompleksitasolle **kuvauksen**

$$\zeta = g(z) = \frac{1}{z} = \xi + i\eta, \quad \text{missä} \quad \xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3.8)$$

Kuvaus on injektio ja analyyttinen kaikkialla paitsi origossa $z = 0$; $g(z)$ on oma käänteisfunktionsa: $g^{-1}(\zeta) = 1/\zeta$. Koska $g'(z) = -1/z^2$ ei ikinä ole nolla, niin derivaatan ehto (3.3) toteutuu kaikkialla. Huomataan, että $|\zeta| = 1/|z|$, kun $\text{Arg } \zeta = -\text{Arg } z$. Täten, kun $\Omega = \{z : |z| > \rho\}$ tarkoittaa ρ -säteisen ympyrän ulkopuolta, niin kuvapisteeet $\zeta = 1/z$ toteuttavat ehdon $|\zeta| = 1/|z|$ ja täten kuvajoukko on rengas $D = \{\zeta : 0 < |\zeta| < 1/\rho\}$. Yleisesti tämä funktio kuvaa yksikkökierokkeen ulkopuolen sen sisäpuolelle, siten että origo ei kuulu joukkoon ja toisin päin.

Esimerkki 3.1.5 Kompleksinen **eksponentiaalifunktio**

$$\zeta = g(z) = e^z = \xi + i\eta, \quad \text{missä} \quad \xi = e^x \cos y, \quad \eta = e^x \sin y, \quad (3.9)$$

toteuttaa ehdon $g'(z) = e^z \neq 0$ kaikkialla. Kuvaus ei kuitenkaan ole injektio, koska $e^{z+2\pi i} = e^z$. Jos kokonaisluvut eroavat toisistaan $2\pi i$:n verran, niin nämä kuvataaan samalle pisteelle. Tehdään johtopäätös, että ehto (3.3) on välttämätön, mutta ei riittävä käänteiskuvaruksen olemassaololle.

Ekspontiaalikuvauksessa horisontaali suora $\text{Im } z = b$ kuvautuu käyräksi $\zeta = e^{x+ib} = e^x(\cos b + i \sin b)$. Käyrä piirtää säteen, joka saa alkunsa origosta ja muodostaa kulman $\text{Arg } \zeta = b$ reaaliakselin kanssa, kun x vaihtelee välillä $(-\infty, \infty)$. Siksi eksponentiaalisessa kuvauksessa vaakasuora kaistale

$$S_{a,b} = \{a < \text{Im } z < b\} \quad \text{kuvautuu kiilamaiseksi alueeksi} \quad \Omega_{a,b} = \{a < \text{Arg } \zeta < b\},$$

ja näin kuvaus on injektio ja edellyttää, että $|b - a| < 2\pi$. Erityisesti vaakasuora kaistale

$$S_{-\pi/2, \pi/2} = \left\{ -\frac{\pi}{2} < \text{Im } z < \frac{\pi}{2} \right\},$$

jonka leveys on π ja joka on keskitetty reaaliakselin molemmille puolille, kuvautuu injektiivisesti oikeaksi puolitasoksi

$$\mathbf{R} = \Omega_{-\pi/2, \pi/2} = \left\{ -\frac{\pi}{2} < \text{Arg } \zeta < \frac{\pi}{2} \right\} = \{\text{Im } \zeta > 0\},$$

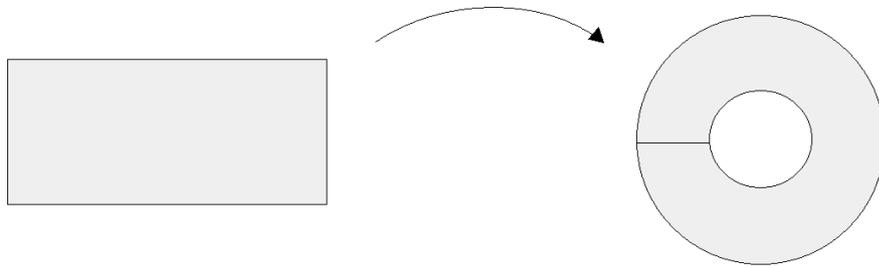
kun taas vaakasuora kaistale $S_{-\pi, \pi} = \{-\pi < \text{Im } z < \pi\}$, jonka leveys on 2π , kuvau-

tuu ei injektiivisesti alueeksi

$$\Omega_* = \Omega_{-\pi, \pi} = \{-\pi < \text{Arg } \zeta < \pi\} = \mathbb{C} \setminus \{ \text{Im } z = 0, \text{Re } z \leq 0 \}$$

ja joka on saatu poistamalla kompleksitasosta negatiivinen reaaliakseli.

Vertikaalit suorat $\text{Re } z = a$ kuvautuvat ympyröiksi $|\zeta| = e^a$. Täten pystysuora kaistale $a < \text{Re } z < b$ kuvautuu renkaaksi $e^a < |\zeta| < e^b$, joskin ei-injektiivisesti, koska kaistale kiertää rengasta jatkuvasti. Suorakulmio $\mathbf{R} = \{a < x < b, -\pi < y < \pi\}$, jonka korkeus on 2π , kuvautuu injektiona renkaaksi, josta on poistettu negatiivinen reaaliakseli. Tätä on havainnollistettu kuvassa 3.2. Huomataan, että mikään alue ei kuvaudu yksikkökiekoksi $D = \{|\zeta| < 1\}$, koska eksponenttifunktio ei ole ikinä nolla: $\zeta = e^z \neq 0$.



Kuva 3.2: Suorakulmio $\mathbf{R} = \{a < x < b, -\pi < y < \pi\}$, jonka korkeus on 2π , kuvautuu injektiona renkaaksi, josta on poistettu negatiivinen reaaliakseli.

Esimerkki 3.1.6 Neliöllinen kuvaus

$$\zeta = g(z) = z^2 = \xi + i\eta, \quad \text{missä} \quad \xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy, \quad (3.10)$$

on analyyttinen kaikkialla kompleksitasossa \mathbb{C} , mutta se ei ole injektio. Sen käänteiskuvaus on neliöjuurifunktio $z = \sqrt{\zeta} = \zeta^{1/2}$. Neliöllisen kuvauksen derivaatta $g'(z) = 2z$ häviää pisteessä $z = 0$, rikkoen käänteiskuvausehdon (3.3), jonka mukaan derivaatta ei saa olla nolla missään alueen Ω pisteessä. Kun rajoitetaan funktio $g(z)$ yhdesti yhtenäiseen alijoukkoon Ω , joka ei sisällä pistettä nolla, niin funktio $g(z) = z^2$ on injektiokuvaus, jonka käänteiskuvaus $z = g^{-1}(\zeta) = \sqrt{\zeta}$ on hyvin määritelty, analyyttinen ja neliöjuurifunktion yksiarvoinen haara.

Neliöllisen kuvauksen vaikutus pisteeseen z on se, että korotetaan toiseen sen itseisarvo $|\zeta| = |z|^2$, kun taas kaksinkertaistamalla argumentti, saadaan $\text{Arg } z^2 = 2 \text{Arg } z$, missä $z \in (-\pi, \pi]$. Esimerkiksi kompleksitason ensimmäinen neljännes

$$Q = \{x > 0, y > 0\} = \{0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}\}$$

kuvautuu ei-injektiivisesti kompleksitason ylempään puolitasoon

$$U = g(Q) = \{\eta = \operatorname{Im} \zeta > 0\} = \{0 < \operatorname{Arg} \zeta < \pi\}.$$

Käänteiskuvaus kuvaa pisteen $\zeta \in U$ takaisin sen neliöjuureksi $z = \sqrt{\zeta}$, joka sijaitsee ensimmäisessä neljänneksessä Q . Samalla tavalla kiekon neljännes

$$Q_\rho = \{0 < |z| < \rho, 0 < y < 1\},$$

jonka säde on ρ , kuvataan puolikkaaksi kiekoksi.

$$U_{\rho^2} = g(\Omega) = \{0 < |\zeta| < \rho^2, \operatorname{Im} \zeta > 0\},$$

jonka säde on ρ^2 . Toisaalta, yksikkökierokko $S = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ kuvautuu käyräviivaiseksi kolmioalueeksi.

Esimerkki 3.1.7 Rationaalifunktio

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + i \frac{2y}{(x+1)^2+y^2} \quad (3.11)$$

on injektio ja sen käänteiskuvaus on

$$z = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{1-\xi^2-\eta^2}{(1-\xi)^2+\eta^2} + i \frac{2\eta}{(1-\xi)^2+\eta^2}, \quad (3.12)$$

kun $z \neq -1$ ja $\zeta \neq 1$. Tällä erityisellä rationaalifunktiolla on tärkeä ominaisuus, koska se kuvaa oikean puolitason $\mathbf{R} = \{z : x = \operatorname{Re}[z] > 0\}$ yksikkökierokoksi $\mathbf{D} = \{|\zeta|^2 < 1\}$.

$$|\zeta|^2 = \xi^2 + \eta^2 < 1 \quad \text{joss} \quad x = \frac{1-\xi^2-\eta^2}{(1-\xi)^2+\eta^2} > 0$$

On huomattava, että nimittäjä ei häviä kiekon D sisällä.

Kompleksifunktiot (3.7), (3.8) ja (3.11) ovat esimerkkejä **Möbiuksen muunnoksesta**

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (3.13)$$

jotka muodostavat yhden tärkeimmistä analyttisten kuvausten luokista. Tässä α , β , γ ja δ ovat kompleksisia vakioita, joilla

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

koska muutoin yhtälö (3.13) supistuu vakioksi ja näin ollen kääntymättömään kuvaukseen. Kuvaus on hyvin määritelty paitsi, kun $\gamma \neq 0$ ja $z = -\delta/\gamma$, joka käytännössä kuvautuu pisteeksi $\zeta = \infty$. Toisaalta Möbiuksen muunnos kuvaa pisteen $z = \infty$ pisteeseen $\zeta = \alpha/\gamma$ (tai ∞ , kun $\gamma = 0$).

Esimerkki 3.1.8 Möbiuksen muunnos

$$\zeta = \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \quad \text{kun} \quad |\alpha| < 1, \quad (3.14)$$

kuvaa yksikkökierokkeen yksikkökierokseksi, siirtäen origon pisteestä $z = 0$ pisteeseen $\zeta = \alpha$. Jotta tämä voidaan todistaa, niin huomataan, että

$$\begin{aligned} |z - \alpha|^2 &= (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = |z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + |\alpha|^2, \\ |\bar{\alpha}z - 1|^2 &= (\bar{\alpha}z - 1)(\alpha\bar{z} - 1) = |\alpha|^2|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + 1. \end{aligned}$$

Vähentämällä nämä yhtälöt toisistaan, saadaan

$$|z - \alpha|^2 - |\bar{\alpha}z - 1|^2 = (1 - |\alpha|^2)(|z|^2 - 1) < 0, \quad \text{kun} \quad |z| < 1, \quad |\alpha| < 1.$$

Täten $|z - \alpha| < |\bar{\alpha}z - 1|$, joka merkitsee, että

$$|\zeta| = \frac{|z - \alpha|}{|\bar{\alpha}z - 1|} < 1 \quad \text{edellyttäen, että} \quad |z| < 1, \quad |\alpha| < 1,$$

ja täten ζ sijaitsee yksikkökierokossa.

Rotaatio (3.6) kuvaa myös yksikkökierokkeen yksikkökierokseksi jättäen origon paikoilleen. Voidaan todistaa, että ainoat kääntyvät analyyttiset kuvaukset, jotka kuvaavat yksikkökierokkeen yksikkökierokseksi, on saatu yhdistämällä edellä oleva Möbiuksen muunnos (3.13) rotaation kanssa.

Lause 3.1.1 Jos $\zeta = g(z)$ on injektio ja analyyttinen kuvaus, joka kuvaa yksikkökierokkeen yksikkökierokseksi, niin

$$g(z) = e^{i\phi} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1} \quad \text{jollakin} \quad |\alpha| < 1, \quad -\pi < \phi \leq \pi \quad (3.15)$$

[1]

3.2 Konformikuvaus

Merkittävä geometrinen ominaisuus, joka on ominaista analyyttisille funktioille on se, että ei-kriittisissä pisteissä käyrien tangenttien väliset kulmat säilyvät. Konformikuvaus voidaan määritellä missä tahansa sisätuloavaruudessa, vaikka käytännössä

ollaan tekemisissä Euklidisen avaruuden kanssa liitettynä standardiin pistetuloon. Kaksiulotteisessa tasossa voidaan myös merkitä ainoastaan kahden vektorin välinen kulma, kun taas korkeimmissa dimensioissa voidaan määrittää ainoastaan kulman absoluuttinen arvo.

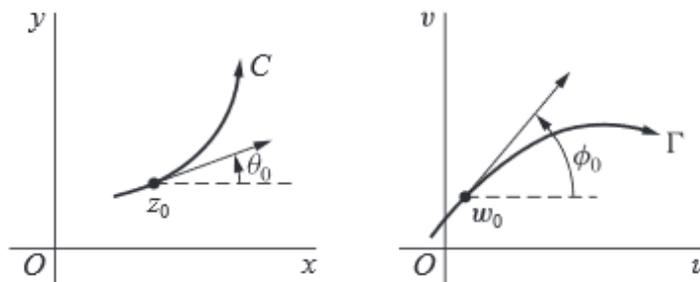
Jotta voidaan ymmärtää kompleksifunktioita konformikuvauksina, täytyy ymmärtää niiden vaikutus käyriin. Yleisesti käyrä $C \in \mathbb{C}$ kompleksitasolla on parametrisoitu kompleksiarvoisella funktiolla

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (3.16)$$

joka riippuu reaaliarvoisesta parametrista t . Kompleksikäyrän ja reaalitason käyrän välillä ei ole mitään merkittävää eroa, vaan vektorimerkintä $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$ vaihdetaan kompleksiseen merkintään $z(t) = x(t) + iy(t)$. Käyrän tangenttivektori pisteessä $z(t) = x(t) + iy(t)$ on kompleksiluku $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$, missä käytetään pistemerkitä kuvaamaan derivaattaa parametrin t suhteen. Käyrä on sileä, jos $\dot{z}(t) \neq 0$.

Määritelmä 3.2.1 Jos $\zeta = g(z)$ on analyyttinen funktio ja $g'(z) \neq 0$, niin g määrittelee konformikuvauksen.

Kun tulkitaan käyriä partikkelin liikeratoina kompleksitasossa, siten että $z(t)$ on partikkelin sijainti ajanhetkellä t , niin tangentti $\dot{z}(t)$ esittää sen hetkellistä nopeutta. Tangentin itseisarvo $|\dot{z}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, merkitsee partikkelin vauhtia, kun taas sen argumentti $\text{Arg } \dot{z}$ mittaa liikkeen suuntaa, jota kuvataan kulmana, jonka käyrä muodostaa vaakasuoran viivan kanssa.



Kuva 3.3: Käyrien C ja Γ tangentit pisteissä z_0 ja w_0 [2].

Kahden käyrän välinen *kulma* määritellään käyrien tangenttien välisenä kulmana käyrien leikkauspisteessä $z = z_1(t_1) = z_2(t_2)$. Jos käyrä C_1 muodostaa horisontaalin viivan kanssa kulman $\theta_1 = \text{Arg } \dot{z}_1(t_1)$ ja käyrä C_2 muodostaa horisontaalin viivan kanssa kulman $\theta_2 = \text{Arg } \dot{z}_2(t_2)$, niin kulma θ käyrien C_1 ja C_2 välillä pisteessä z on

edeltävien erotus

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \text{Arg } \dot{z}_2 - \text{Arg } \dot{z}_1 = \text{Arg} \left(\frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1} \right). \quad (3.17)$$

Tarkastellaan analyyttisen kuvauksen $\zeta = g(z)$ vaikutuksia. Käyrä C , jonka parametrisointi on $z(t)$, kuvataan uudeksi käyräksi $\Gamma = g(C)$, jonka parametrisointi on yhdistetty funktio $\zeta(t) = g(z(t))$. Kuvakäyrän tangentti liittyy alkuperäiseen käyrrään ketjusäännöllä:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dg}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad \text{tai} \quad \dot{\zeta}(t) = g'(z(t))\dot{z}(t) \quad (3.18)$$

Analyttisessä kuvauksessa tangenttivektori \dot{z} kerrotaan kompleksiluvulla $g'(z)$. Jos analyyttinen kuvaus toteuttaa ehdon $g'(z) \neq 0$, niin $\dot{\zeta} \neq 0$ ja kuvakäyrä on sileä.

Yhtälön (3.18) mukaan

$$|\dot{\zeta}| = |g'(z)\dot{z}| = |g'(z)||\dot{z}|. \quad (3.19)$$

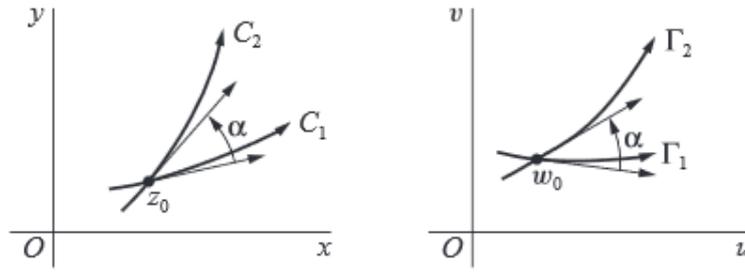
Täten partikkelin vauhti $|\dot{z}|$ pitkin uutta käyrrää $\zeta(t)$ kerrotaan tekijällä $\rho = |g'(z)| > 0$. Havaitaan että suurennustekijä ρ riippuu ainoastaan pisteestä z eikä siitä, miten käyrä kulkee pisteen kautta. Kaikkia käyriä pitkin kulkevia partikkeleita, jotka kulkevat pisteen z kautta, kiihdytetään (tai hidastetaan, jos $\rho < 1$) saman tekijän verran. Samalla tavalla kulma, jonka uusi käyrä tekee horisontaalin suoran kanssa, on

$$\text{Arg } \dot{\zeta} = \text{Arg}(g'(z)\dot{z}) = \text{Arg}(g'(z)) + \text{Arg}(\dot{z}) \quad (3.20)$$

Siksi käyrän tangentin kulma kasvatetaan kulman $\phi = \text{Arg}(g'(z))$ verran eli sen tangenttia kierretään kulman ϕ verran. Tangentin kulman kasvaminen riippuu ainoastaan pisteestä z ja kaikki käyrät, jotka kulkevat pisteen z kautta, kiertyvät saman kulman ϕ verran. Tämä tarkoittaa, että kahden käyrän tangenttien välinen kulma säilyy. Tarkemmin sanottuna, jos käyrän C_1 tangentti on kulmassa θ_1 vaakasuoraan viivaan nähden ja käyrän C_2 tangentti on kulmassa θ_2 vaakasuoraan viivaan nähden käyrien leikkauspisteessä, niin niiden kuvauksien $\Gamma_1 = g(C_1)$ ja $\Gamma_2 = g(C_2)$ kulmat ovat $\psi_1 = \theta_1 + \phi$ ja $\psi_2 = \theta_2 + \phi$. Kahden kuvakäyrän välinen kulma on siten erotus

$$\psi_2 - \psi_1 = (\theta_2 + \phi) - (\theta_1 + \phi) = \theta_2 - \theta_1,$$

joka on sama kuin alkuperäisten käyrien välinen kulma. [1]



Kuva 3.4: Käyrät C_1 ja C_2 sekä Γ_1 ja Γ_2 , joissa lisäksi käyrien tangenttien väliset kulmat [2].

3.3 Joukowskin kuvaus

Esimerkki 3.3.1 *Erityisen mielenkiintoinen esimerkki on Joukowskin kuvaus*

$$\zeta(z) = \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (3.21)$$

Venäläinen virtausdynamiikan tutkija Nikolai Zhukovski tutki ensimmäisenä virtauksia lentokoneen siiven ympäri. [1] Koska funktion $\zeta(z)$ derivaatta on

$$\frac{d\zeta(z)}{dz} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right),$$

niin

$$\frac{d\zeta(z)}{dz} = 0 \quad \text{vain pisteessä} \quad z = \pm 1.$$

Joukowskin kuvaus on konformikuvaus kaikissa pisteissä $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ ja sillä on singulariteetti pisteessä $z = 0$, missä sitä ei ole määritelty. [20]

Jos $z = re^{i\theta}$, niin

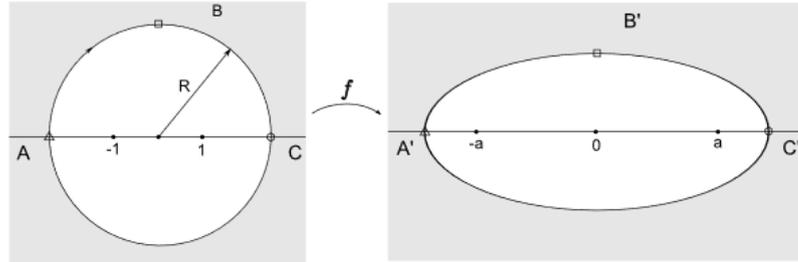
$$\zeta(re^{i\theta}) = \frac{a}{2} \left(re^{i\theta} + \frac{a}{r} e^{-i\theta} \right) = \frac{a}{2} \left[\left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right] = u + iv$$

Kun $r = 1$, niin saadaan

$$\zeta(e^{i\theta}) = \frac{a}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{a}{2} [2 \cos \theta + i0 \cdot \sin \theta] = \cos \theta.$$

Tällöin ympyrä $|z| = R$ kuvautuu ellipsille

$$\begin{cases} u = \frac{a}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right) \cos \theta, & 0 \leq \theta < 2\pi \\ v = \frac{a}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right) \sin \theta \end{cases}$$



Kuva 3.5: Kun $R > 1$, niin alue $|z| > R$ kuvautuu ellipsin ulkopuolelle [20].

Kun $R > 1$, niin alue $|z| > R$ kuvautuu ellipsin ulkopuolelle. Jos $R \rightarrow 1$, niin ellipsi surkastuu joukoksi $[-a, a]$. Tätä on havainnollistettu kuvassa 3.5. [20]

Jos laitetaan Joukowskiin muunnos muotoon

$$\zeta(z) = z + \frac{a^2}{z},$$

niin saadaan seuraavanlaisia kuvauksia. Kuvassa 3.6 nähdään useita z -tason ympyröistä muodostettuja kuvauksia ζ -tasolle. Kuvassa 3.6(a) ensimmäinen ympyrä on $|z| = a$. Tämä kulkee pisteen $z = \pm a$ kautta (merkitty punaisilla pisteillä), missä Joukowskiin muunnos ei ole konforminen ja ympyrä kuvautuu väliksi S . Toisen ympyrän säde on suurempi kuin a kuvassa 3.6(b). Ympyrän kuva on täten ellipsi ζ -tasossa. Kuvassa 3.6(c) on havainnollistettu Joukowskiin kuvauksen vaikutusta ympyrään, jonka keskipisteen paikkaa on siirretty vaakasuorassa suunnassa. Säde on valittu niin, että ympyrä ohittaa yhden pisteen $z = a$ ja se aiheuttaa käännepisteen kuvauksen vastaavassa pisteessä. Tätä kutsutaan lentokoneen siiven jättöreunan käännepisteeksi. Kuvassa 3.6(d) on siirretty ympyrän keskipistettä sekä vaakasuorassa että pystysuorassa suunnassa. Valitaan taas säde niin, että se ohittaa pisteen $z = a$. Kuva on nyt menettänyt symmetrisyytensä ja sillä on edelleen käännepiste. Kuvien 3.6(c) ja 3.6(d) kuvauksia sanotaan Joukowskiin siiviksi. [22]

Lentokoneen siiven poikkileikkaus nähdään kuvassa 3.7. Jänne on kuvassa suora viiva, joka yhdistää etureunan jättöreunan käännepisteeseen. Kohtauskulma α on kulma jänneen ja vaakasuoran viivan välillä. Kaarevuuskäyrä muodostuu siiven keskiosan pisteistä siiven ylä- ja alapinnan välillä. Saatu kaarevuuskäyrä antaa siivelle oman profiilin. Tavallisesti lentokoneen siivet ovat hieman kaareutuneet. Kuvaan on

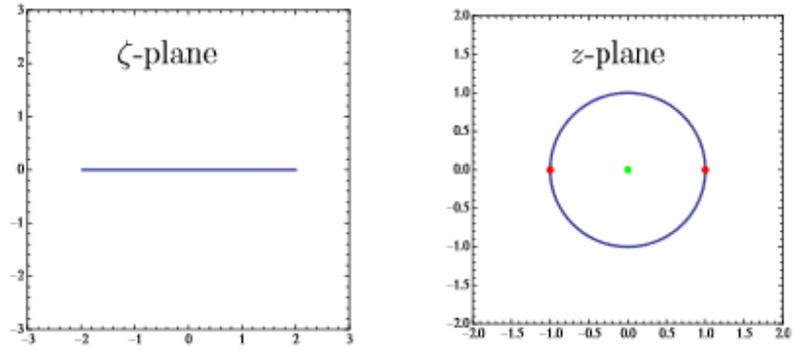
myös merkitty siiven paksuus. [23]

Joukowskin kuvauksissa, samankeskiset ympyrät $|z| = r \neq 0$ kuvautuvat ellipseiksi, joiden polttopisteet ovat ± 1 ζ -tasossa. Tämä on havainnollistettu kuvassa 3.8. Joukowskin muunnoksen vaikutus ympyröihin, joiden keskipiste ei ole origossa, on mielenkiintoinen. Kuvakäyrillä on monenlaisia muotoja, kuten nähdään kuvista 3.12, ja 3.13. Jos ympyrä ohittaa singulaaripisteen $z = 1$, niin sen kuvaus ei ole enää sileä, mutta sillä on käännepiste kohdassa $\zeta = 1$. Jotkut kuvakäyrät muistuttavat lentokoneen siipeä muodoltaan, kuten kuvissa 3.10, 3.11 ja 3.14.[1] Kuvassa 3.9 nähdään reaaliakselin suhteen symmetrinen Joukowskin siipi, kun ympyrän keskipistettä on siirretty origosta hieman negatiiviseen suuntaan, mutta siirtymistä y -akselin suunnassa ei ole. Parametrit, joilla tämä kuva on piirretty, nähdään taulukosta 3.1.

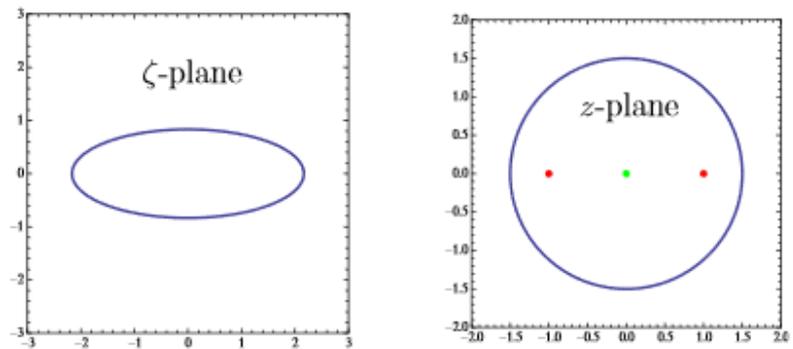
Edellä mainituissa kuvissa 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 ja 3.14 on esitetty erilaisia Joukowskin kuvauksia, joiden matlab-koodi löytyy liitteestä F. Kuvien parametrit on lueteltu taulukossa 3.1. Kyseisessä koodissa on kolme eri kompleksitasoa: lähtötilanteen kompleksitaso, välivaiheen kompleksitaso ja lopullisen siiven tai muun mallisen profiilin kompleksitaso. Kohtauskulma ϕ kertoo kulman, jossa sylinteri tai lentokoneen siipi kohtaa vastaan tulevan virtauksen. Siiven paksuus e lisätään yksikköympyrän säteeseen siten, että välivaiheen ympyrän säde on $R = 1 + e$, josta edelleen kuvataan siipiprofiili. y -akselin siirtymä f suhteessa siiven kaltevuuteen, kertoo kuinka paljon ympyrän keskipiste siirtyy y -akselin suunnassa välivaiheen tasossa. Jättöreunan kärkipiste te on eräänlainen käyrän singulaaripiste, joka on tässä tapaksessa lentokoneensiipiprofiilin jättöreunassa. Sitä hyödynnetään Karman-Trefftz muunnoksen, joka on eräs konformikuvaus, laskemisessa. Karman-Trefftz muunnoksessa tarvitaan lisäparametri, joka on jättöreunan kulma. Se lasketaan kaavalla $n = 2 - te$, josta saadaan edelleen Karman-Trefftz laajennus $tea = (n^2 - 1)/3$. Siipiprofiilin parametrit näkyvät kuvassa 3.7 [7]

Taulukko 3.1: Joukowskin muunnoksia eri parametrien arvoilla [7].

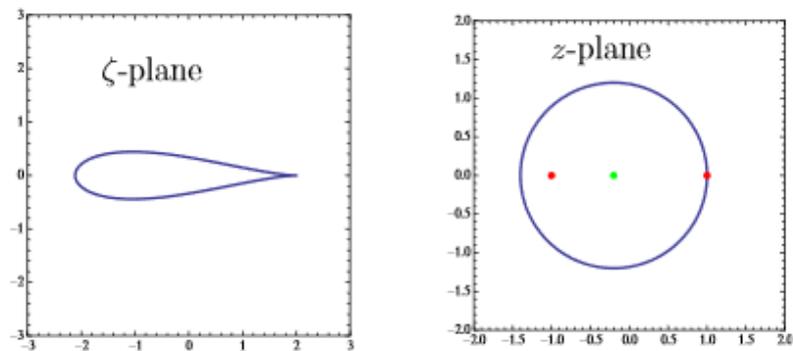
Kuva	kohtauskulma ϕ	siiven paksuus e	y -akselin siirtymä suhteessa siiven kaltevuuteen f	jättöreunan käännepiste te
3.8	0	0	0	0.1
3.9	0	0.1	0	0.1
3.10	-2	0.1	0.1	0.05
3.11	-5	0.5	0.2	0.05
3.12	-2	0.9	1.5	0.9
3.13	-30	0.05	0.9	0.5
3.14	-10	0.04	0.17	0.005



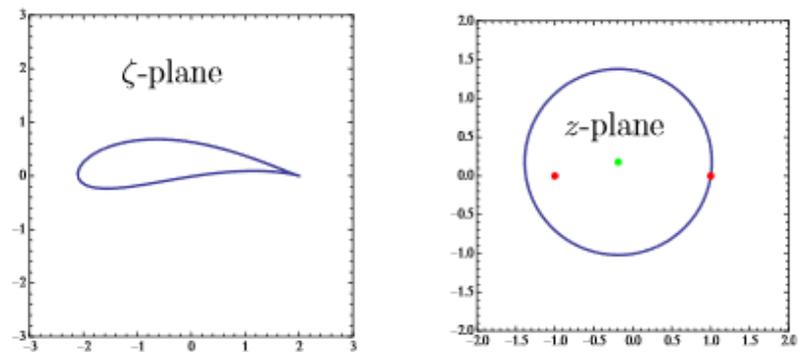
(a) Reaaliakseli väli.



(b) Ellipsi

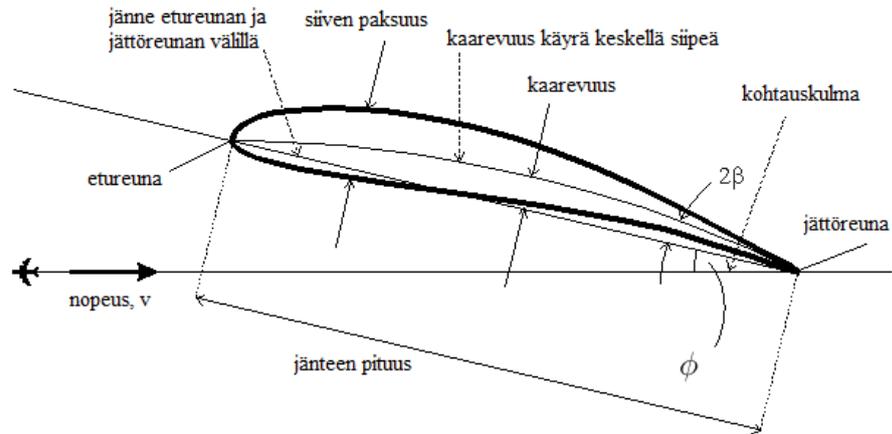


(c) Symmetrinen joukowskin siipi.

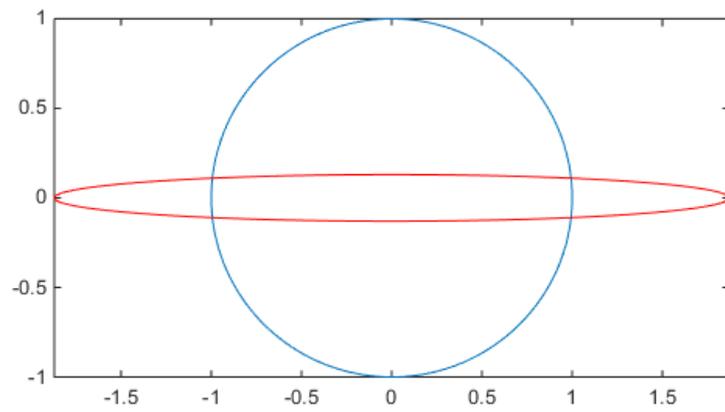


(d) Joukowskin siipi.

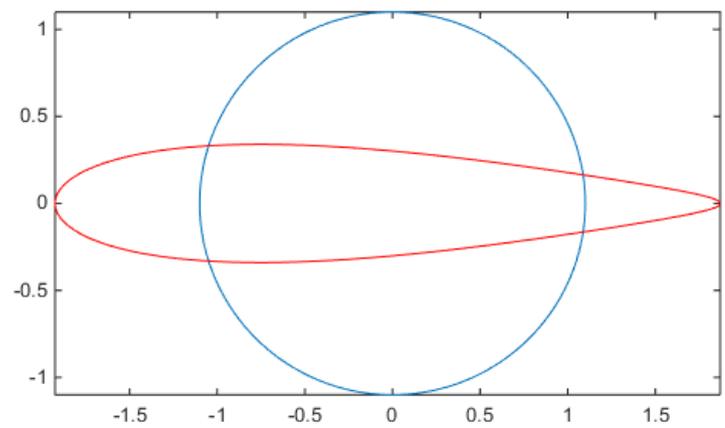
Kuva 3.6: z -tasolla olevat ympyrät kuvataan Joukowskin muunnoksella ζ -tasolle. Jokaisen ympyrän keskipiste on merkitty vihreällä pisteellä. Punaiset pisteet merkitsevät pisteitä $z = \pm a$. (Tässä $a=1$). [22]



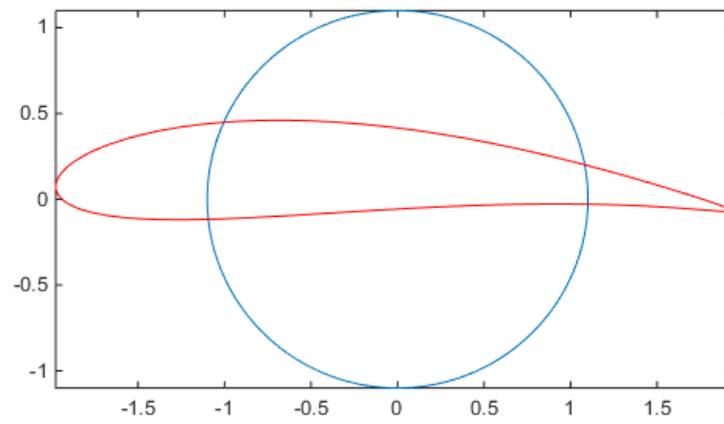
Kuva 3.7: Joukowskiin siiven parametrit. [21].



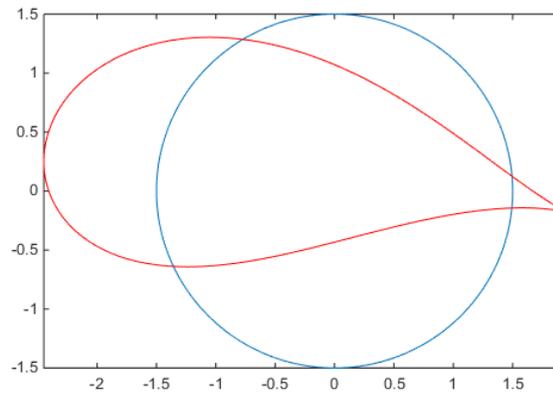
Kuva 3.8: Joukowskiin kuvaus yksikköympyrästä ellipsiksi [7].



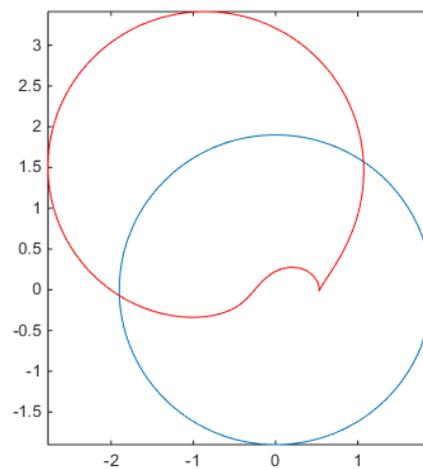
Kuva 3.9: Joukowskiin kuvaus ympyrästä symmetriseksi Joukowskiin siiveksi. [7].



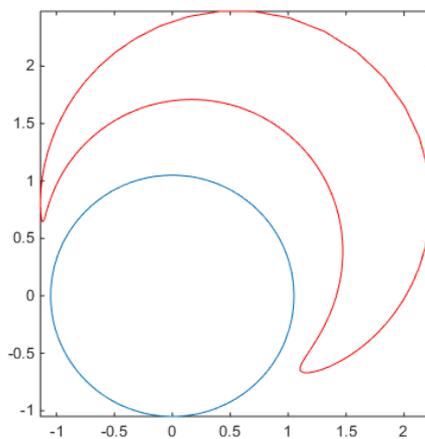
Kuva 3.10: Joukowski kuvaus ympyrästä Joukowski siiveksi [7].



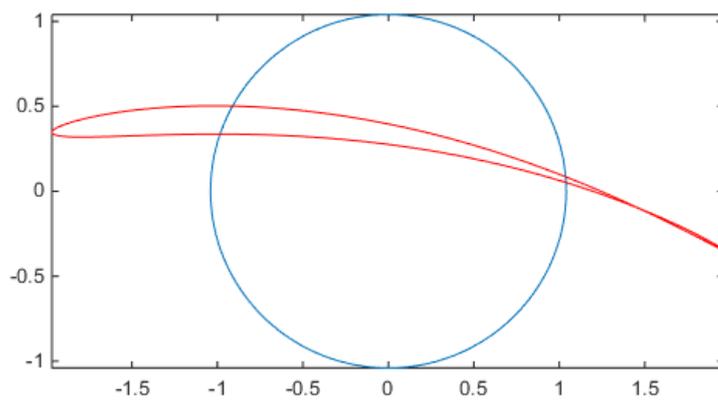
Kuva 3.11: Joukowski kuvaus ympyrästä leveäksi Joukowski siiveksi [7].



Kuva 3.12: Joukowski kuvaus ympyrästä erilaiseksi muodoksi [7].



Kuva 3.13: Joukowskiin kuvaus ympyrästä erilaiseksi muodoksi [7].

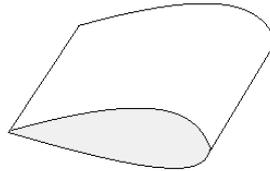


Kuva 3.14: Joukowskiin kuvaus ympyrästä ohueksi Joukowskiin siiveksi [7].

4. LENTOKONEEN SIIPI JA SIIHEN KOHDISTUVA NOSTE

4.1 Ideaalinen virtaus lentokoneen siiven ohi

Konformikuvaukset sopivat hyvin ideaalisten virtausten analyysiin. Olkoon $\Theta(\zeta) = \Phi(\xi, \eta) + \Psi(\xi, \eta)$ analyyttinen funktio, joka kuvaa kompleksipotentialifunktiota tasapainotilassa olevalle virtaukselle alueessa $\zeta \in D$. Muodostetaan kompleksipotentialiaali $\Theta(\zeta)$ injektiiviselle konformikuvaukselle $\zeta = g(z)$, joka johtaa muutettuun kompleksipotentialiaaliin $\chi(z) = \Theta(g(z)) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ vastaavassa alueessa $\Omega = g^{-1}(D)$. Täten voidaan käyttää konformikuvauksia muodostettaessa virtauksia monimutkaisemmissa alueissa, kun tunnetaan virtaus yksinkertaisimmissa alueissa.

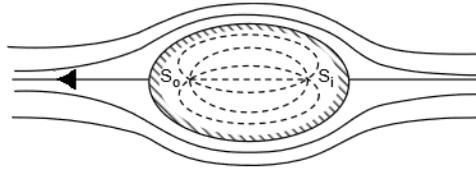


Kuva 4.1: Lentokoneen siiven poikkileikkaus.

Tarkastellaan virtausta kiinteän kappaleen ohi, kuten kuvassa 4.2. Oletus ideaalista virtauksesta, jolloin virtaus on kokoonpuristumaton ja pyörteetön, toteutuu, kun kyseessä on laminaarivirtaus. Kolmiulotteisessa ympäristössä kappaleen oletetaan olevan yhtenäisen muotoinen aksiaaliseen suuntaan ja näin voidaan rajoittaa tarkastelu tasovirtaukseen, joka ohittaa suljetun ja rajoitetun alijoukon $D \subset \mathbb{C}$, joka esittää sylinterin muotoisen kappaleen läpileikkausta. Kompleksinen nopeus ja potentiaali määritellään komplementtialueessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus D$ kappaleen ulkopuolella, jonka virtaus täyttää. Nopeuspotentiaali $\varphi(x, y)$ toteuttaa Laplacen yhtälön $\Delta\varphi = 0$ virtausalueessa Ω . Kiinteän kappaleen reunalla on homogeeninen Neumannin reunaehto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \quad \text{reunalla} \quad \partial\Omega = \partial D, \quad (4.1)$$

joka merkitsee, että kappaleen reunan läpi ei kulje virtausta. Huomataan, että koska kulmat ja reunan normaali säilyvät konformikuvauksessa, niin konformikuvaus automaattisesti säilyttää Neumannin homogeenisen reunaehdon.



Kuva 4.2: Virtaviivat kappaleen ohi oikealta vasemmalle [7].

Koska virtaus tapahtuu alueessa, joka ei ole rajoitettu, niin virtauksen liike pitää määrittää myös kaukana virtauksessa olevasta kappaleesta. Oletetaan, että sylinteri tai siipi on sijoitettu homogeeniseen horisontaaliin virtaukseen kuten tuulutunneliin. Kauempana kappaleesta kappale ei enää juurikaan vaikuta virtaukseen ja näin ollen virtausnopeutta tulisi aproksimoida yhtenäisenä nopeuskenttänä $\mathbf{v} = (-1, 0)^T$, missä fysikaaliset yksiköt valitaan niin, että virtaus kulkee oikealta vasemmalle asympotoottisen nopeuden ollessa -1 . Nopeuspotentiaalin tulee toteuttaa ehdot

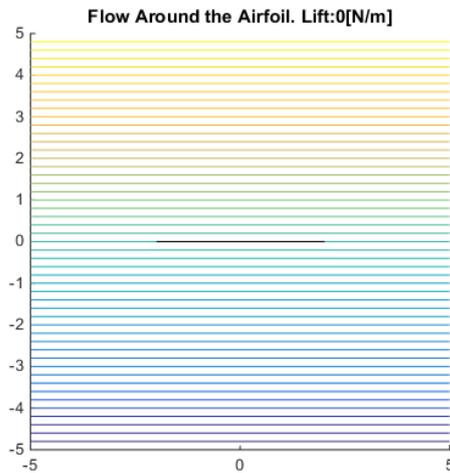
$$\varphi(x, y) \approx -x, \quad \text{joten} \quad \nabla\varphi \approx (-1, 0) \quad \text{kun} \quad x^2 + y^2 \gg 0.$$

Vaihtoehtoisessa fysikaalisessa tilanteessa lentokoneen siipi liikkuu horisontaalisesti oikealle yksikkönopeudella läpi nesteen tai kaasun, joka on alkutilanteessa levossa. Tarkastellaan lentokonetta, joka lentää ilmassa vakionopeudella. Jos kiinnitetään koordinaatisto liikkuvaan lentokoneeseen, niin sitten ulkopuolinen ilma liikkuu kohti lentokonetta vakionopeudella. [1]

Seuraavien esimerkkien kuvat on piirretty Matlabilla ja niiden koodi löytyy liitteestä G. Taulukossa 4.1 on lueteltu esimerkkien kuvissa käytettyjen parametrien arvot. Nopeus v tarkoittaa vapaan virtauksen nopeutta. Kohtauskulma ϕ tarkoittaa kulmaa, jossa virtaus kohtaa kappaleen, kuten sylinterin ja lentokoneen siiven. Ympyrän keskipisteen x - ja y -koordinaatit, kertovat ympyrän keskipisteen sijainnin, joka vaikuttaa Joukowskin kuvauksen kuvaaman kappaleen muotoon ja sijaintiin koordinaatistossa. Tähän vaikuttaa myös ympyrän säde r . [9] Kappaleeseen kohdistuu *noste* eli nettovoima pystysuorassa suunnassa, kun kappaleen ympärillä on sirkulaatio. [1]. *Sirkulaatio* on nostovoiman syntymisessä vaikuttava keskeinen asia. Se tarkoittaa ympyrän muotoista liikettä, jossa ilmvirtaus tulee sivulta ja kohtaa sylinterin. Sylinterin etupinnalla patopisteessä virtaus jakautuu ylä- ja alapuolelle ja kohtaa taas sylinterin takapinnalla toisessa patopisteessä. [24] Noste L siiven pituusyksikköä kohti saadaan laskettua Kutta-Joukowskin kaavalla: $L = v_{inf}\rho\Gamma$, missä v_{inf} on virtausnopeus, ρ on ilman tiheys ja $\Gamma = \frac{2rv\sin\phi}{2\pi}$ on sirkulaatio, missä $v = v_{inf}/v_{inf}$ on yksikkövirtausnopeus, r on sylinterin säde ja ϕ on kohtauskulma. [9]

Taulukko 4.1: Esimerkkien virtausprofiilien parametrien arvot [9].

Kuva	nopeus v [m/s]	kohtaus- kulma ϕ [$^\circ$]	ympyrän keski- pisteen x -koordinaatti [m]	ympyrän keski- pisteen y -koordinaatti [m]	säde r [m]	noste L [N/m]
4.3	20	0	0	0	1	0
4.4	20	0	0	0	1	0
4.5	20	20	0	0	1	2.6673
4.6	20	20	0.1	0.1	1	2.6673
4.7	30	10	0.1	0.1	1	2.0313
4.8	30	25	0.1	0.1	1	4.9437
4.9	30	40	0.1	0.1	1	7.5193

Kuva 4.3: Oikealta vasemmalle kulkeva virtaus ohuen tasolevyn ohi kohtauskulmalla $\phi = 0^\circ$ [9].

Esimerkki 4.1.1 (Vaakasuora tasolevy) Yksinkertaisin esimerkki on litteä levyä, joka liikkuu vaakasuorasti läpi nesteen tai kaasun. Levyn poikkileikkaus on reaaliakselin väli $D = [-1, 1]$. Jos levy on ohut ja sileä, niin sillä ei ole merkittävää vaikutusta vaakasuoraan virtaukseen, joka kulkee oikealta vasemmalle ja nopeuspotentiaali on

$$\varphi(x, y) = -x, \quad \text{kun} \quad x + iy \in \Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1].$$

$\nabla\varphi = (-1, 0)^T$ ja täten tämä virtaus toteuttaa Neumannin reunaehdot (4.1) välillä $D = \partial\Omega$. Vastaava kompleksipotentiali on $\chi(z) = -z$ ja kompleksinen nopeus $f(z) = \chi'(z) = -1$.

Kuvassa 4.3 on havainnollistettu levyä, joka on vaakasuorassa virtauksessa. Matlabkoodi liitteessä G on ajettu arvoilla: nopeus 20 m/s, kohtauskulma 0° , ympyrän kes-

kipisteen koordinaatti $(0, 0)$ ja säde 1 m.

[1; 9]

Esimerkki 4.1.2 (Pyöreä sylinteri) Muistetaan, esimerkistä 3.3.1, että Joukowskiin muunnos

$$\zeta = g(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (4.2)$$

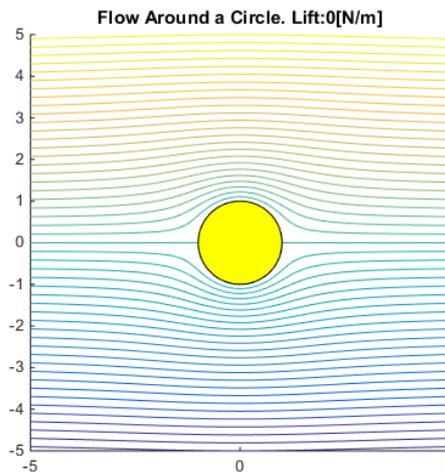
kuvaa yksikköympyrän $|z| = 1$ välille $[-1, 1]$ ζ -tasolla. Siksi se kuvaa sylinterin ulkopuolella olevan virtauksen virtaukseksi, joka ohittaa välin $[-1, 1]$, jolla edellisen esimerkin mukaan on kompleksipotentiali $\Theta(\zeta) = \zeta$. Sylinterin ympärillä olevan virtauksen kompleksipotentialiksi saadaan

$$\chi(z) = (\Theta \circ g)(z) = \Theta(g(z)) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (4.3)$$

Tämä poikkeaa kertoimella $\frac{1}{2}$ esimerkin 2.4.4 kompleksipotentialifunktiosta.

Kuva 4.4 näyttää sylinterin ohi tapahtuvan virtauksen, jonka suunta on oikealta vasemmalle.

[1; 9]

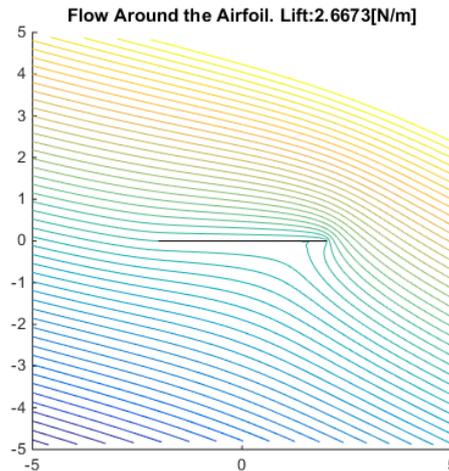


Kuva 4.4: Virtaus sylinterin ohi kohtauskulmalla $\phi = 0^\circ$, kun virtaus kulkee oikealta vasemmalle [9].

Esimerkki 4.1.3 (Kallistunut levy) Tarkastellaan kallistunutta levyä yhtenäisessä vaakasuorassa virtauksessa. Sen poikkileikkaus on väli

$$z(t) = te^{-i\phi}, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

joka saadaan kiertämällä vaakasuoraa väliä $[-1, 1]$ kulman $-\phi$ verran. Tavoitteena on ratkaista virtaus kallistuneen levyn ohi. Virtaus on asymptoottisesti horisontaali, kun ollaan kaukana virtauksessa olevasta kappaleesta. Kuten edellä, virtaus liikkuu oikealta vasemmalle ja näin kulmaa ϕ kutsutaan virtauksessa olevan levyn tai lentokoneen siiven kohtauskulmaksi.



Kuva 4.5: Kutta-Joukowski virtaus ohuen levyn ohi kohtauskulmalla $\phi = 20^\circ$. Virtauksen suunta on oikealta vasemmalle. [9]

Rotaatio $w = e^{i\phi}z$ kulman ϕ verran kuvaa yhtälöstä (2.61) saadun potentiaalin kompleksipotentialiksi

$$\Upsilon(w) = \chi(e^{-i\phi}w) = e^{-i\phi}w + \frac{e^{i\phi}}{w}, \quad (4.4)$$

kun rotaation yhtälöstä on ratkaistu $z = e^{-i\phi}w$. Syntyneen virtauksen virtaviivat eivät ole enää asymptoottisesti horisontaalit, vaan kulmassa ϕ . Jos nyt sovelletaan alkuperäistä Joukowskin kuvausta (4.2) (jossa z korvataan w :llä) virtaukseen, jota on kierretty, niin jälleen kerran ympyrä litistetään väliksi reaaliakselille, mutta virtaviivat jatkuvat kulmassa ϕ suurilla etäisyyksillä. Jos kierretään saatua virtausta kulman $-\phi$ verran ja laitetaan litistetty levy, jonka poikkileikkaus on reaaliakselin väli $D = [-1, 1]$, kulmaan ϕ , niin samalla saadaan virtaviivat asymptoottisesti horisontaaleiksi, sillä $\phi - \phi = 0$. Kun yhdistetään edellä mainitut kohdat, saadaan lopullinen kompleksipotentiali muotoon

$$\chi(z) = e^{i\phi} \left(z \cos \phi - i \sin \phi \sqrt{z^2 - e^{-2i\phi}} \right). \quad (4.5)$$

Seuraava kuva 4.5 havainnollistaa virtausta tasolevyn ohi kohtauskulman arvolla 20° ja Matlab-koodi liitteessä G on ajettu muuten samoilla arvoilla kuin kuvassa 4.3.

[1; 9]

Esimerkki 4.1.4 (Lentokoneen siipi) *Kun sovellettiin Joukowskin kuvausta esimerkiksi 3.3.1 sylinteriin, jonka keskipiste ei ole origossa, niin sopivilla parametrien arvoilla saatiin aikaan lentokoneen siiven muotoisia leikkausprofileja. Virtausta tällaisen siiven ympärillä voidaan näin kuvata, kun tarkastellaan ensin virtausta kiekon ympärillä, jonka keskipiste ei ole origossa.*

Ensiksi affiinikuvaus

$$w = \alpha z + \beta \quad (4.6)$$

muuttaa yksikkökiekon $|z| \leq 1$ kiekoksi

$$|w - \beta| \leq |\alpha|, \quad (4.7)$$

jonka keskipiste on kohdassa β ja säde on $|\alpha|$. Kuten huomattiin esimerkissä 3.1.3, niin kulmakomponentti α kiertää virtaviivat uuden kiekon ympärillä kulmaan $\phi = \text{Arg}(\alpha)$ horisontaaliin tasoon nähden, missä $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Sovelletaan sitten Joukowskin muunnosta

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha z + \beta + \frac{1}{\alpha z + \beta} \right) \quad (4.8)$$

kuvaamaan sylinteri 4.7 lentokoneen siiven muotoon. Saatu kompleksipotentiali virtaukselle lentokoneen siiven ohi saadaan vaihtamalla käännteiskuvaus

$$z = \frac{w - \beta}{\alpha} = \frac{\zeta - \beta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\alpha}$$

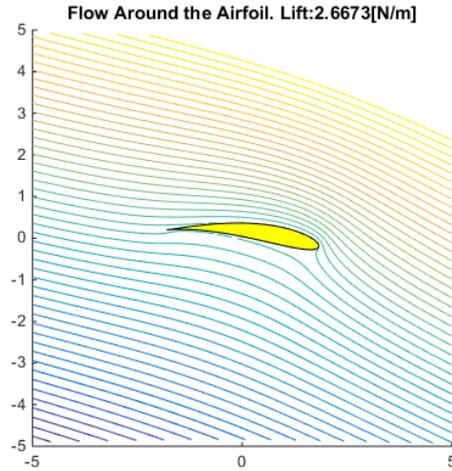
sylinteripotentialiksi 2.61, jonka mukaan

$$\Theta(\zeta) = \frac{\zeta - \beta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\alpha} + \frac{\alpha(\zeta - \beta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{\beta^2 + 1 - 2\beta\zeta}. \quad (4.9)$$

Lopulta, jotta saadaan virtaviivat asympotoottisesti horisontaaleiksi, niin korvataan ζ termillä $e^{i\phi}\zeta$ lopullisessa muodossa 4.9, joka tuottaa lentokoneen siiven, joka on kierretty kohtauskulmaan ϕ suhteessa horisontaaliin virtaukseen.

Kuva 4.6 havainnollistaa tätä esimerkkiä kulmalla $\phi = 20^\circ$.

[1; 9]



Kuva 4.6: Kutta-Joukowski virtaus lentokoneen siiven ohi kohtauskulmalla $\phi = 20^\circ$. Virtauksen suunta on oikealta vasemmalle. [9].

4.2 Pyörteisyys ja noste

Virtausmekaanikan sovelluksissa kompleksiselle integraalille voidaan antaa tärkeä tulkinta. Tarkastellaan tasapainotilassa olevaa kokoonpuristumatonta ja pyörteetöntä virtausta. Olkoon $f(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ kompleksinen nopeus, joka vastaa reaalinopeusvektoria $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$ pisteessä $(x, y)^T$. Tämä todettiin teoreemassa 2.4.1.

Kompleksisen nopeuden integraali $f(z)$ pitkin käyrää C voidaan kirjoittaa reaalisten viivaintegraalien parina:

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u - iv)(dx + i dy) = \int_C (u dx + v dy) - i \int_C (v dx - u dy). \quad (4.10)$$

Reaaliosa on *pyörreintegraali*

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_C u dx + v dy, \quad (4.11)$$

kun taas imaginaariosa on negatiivinen *vuointegraali*

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C \mathbf{v} \times d\mathbf{x} = \int_C v dx - u dy \quad (4.12)$$

Jos kompleksinen nopeus $f(z)$ säilyttää yksiarvoisen kompleksipotentialin

$$\chi(z) = \varphi(z) - i\psi(z), \quad \text{missä} \quad \chi'(z) = f(z) = u - iv,$$

mistä on aina kyse, jos kompleksisen nopeuden $f(z)$ määrittelyalue on yhdesti yh-

tenäinen. Siten kompleksinen integraali on riippumaton polusta ja voidaan käyttää integraalilaskennan päälausetta

$$\int_C f(z)dz = \chi(\beta) - \chi(\alpha) \quad (4.13)$$

mille tahansa käyrälle C , joka yhdistää pisteen α pisteeseen β . Näin viivaintegraali saa arvon nolla, jos alku- ja päätepiste ovat samat. Kompleksisen integraalin polkuriippumattomuus varmistaa pyörre- ja vuointegraalin polkuriippumattomuuden ideaalisille virtauksille. Yhtälön (4.13) reaali-osa määrittää pyörreintegraalin

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{x} = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha), \quad (4.14)$$

virtafunktion arvojen erona käyrän C päätepisteissä α ja β . Toisaalta yhtälön (4.13) imaginaariosa laskee vuointegraalin

$$\int_C \mathbf{v} \times d\mathbf{x} = \int_C \nabla\psi \cdot d\mathbf{x} = \psi(\beta) - \psi(\alpha), \quad (4.15)$$

virtafunktion käyrän päätepisteiden arvojen erona. Virtafunktio toimii virtauksen "vuopotentialina". Täten ideaalisille virtauksille vuo käyrän läpi riippuu ainoastaan käyrän päätepisteistä. Jos C on suljettu käyrä ja kompleksipotentiali $\chi(z)$ on analyyttinen C :n sisällä, niin sitten

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0 = \oint_C \mathbf{v} \times d\mathbf{x}, \quad (4.16)$$

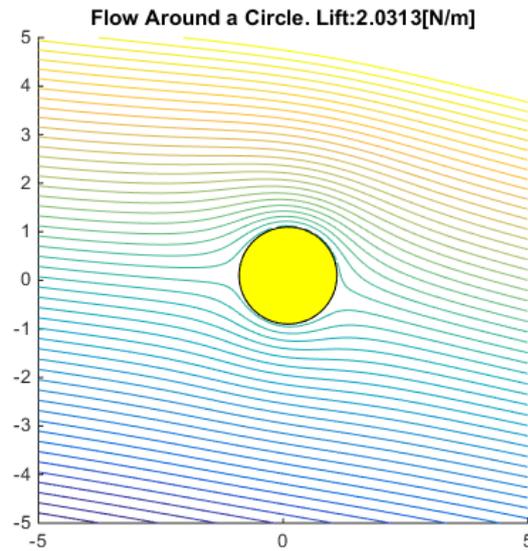
ja näin ei ole nettopyörrettä eikä vuota pitkin mitään suljettua käyrää.

Tavallisesti kappaleeseen kohdistuva noste tarvitsee nollasta poikkeavan sirku- laation kappaleen ympärille. [1] Tämä voidaan laskea Kutta-Joukowskin kaavalla: $L = v\rho\Gamma$, missä v on virtausnopeus, ρ on ilmantiheys ja Γ on sirkulaatio, joka aiheuttaa nosteen [9].

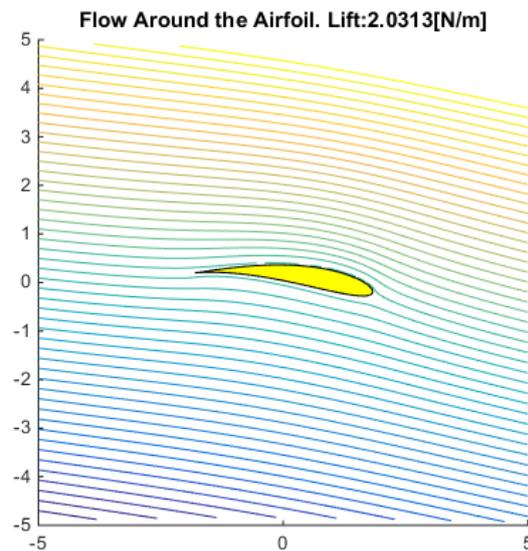
Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ rajoitettu ja yhdesti yhtenäinen alue, joka esittää poikkileikkauk- seltaan sylinterin muotoista kappaletta tai lentokoneen siipeä. Tasapainotilanteessa olevan virtauksen nopeusvektorikenttä \mathbf{v} kappaleen ulkopuolella on määritelty alu- eessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus D$. Kiinteän seinämän läpi ei ole virtausta ja näin reunaehto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ reunalla $\partial\Omega = \partial D$. Saatu sirkulaatio kappaleen ympärillä annetaan integraalina $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$, missä $C \subset \Omega$ on mikä tahansa suljettu käyrä kappaleen ympärillä. Jos vastaava kompleksinopeus $f(z)$ toteuttaa yksiarvoisen kompleksipotentialin aluees- sa Ω , niin yhtälö (4.16) kertoo, että pyörreintegraali häviää ja näin kappaleeseen ei kohdistu nostetta.

Tarkastellaan ensiksi virtausta sylinterin ympärillä. Sylinterin potentiaalifunktio

(2.61) on yksiarvoinen analyyttinen funktio kaikkialla paitsi origossa $z = 0$. Siksi pyörreintegraali (4.14), minkä tahansa suljetun käyrän ympäri, joka ympäröi sylinterin, häviää ja täten sylinteriin ei kohdistu nostetta. Virtauksen virtaviivat ovat symmetriset sylinterin ylä- ja alapuolella, ja täten ei voi olla mitään nostetta eli nettovoimaa pystysuorassa suunnassa. Tätä on havainnollistettu kuvassa 4.4.

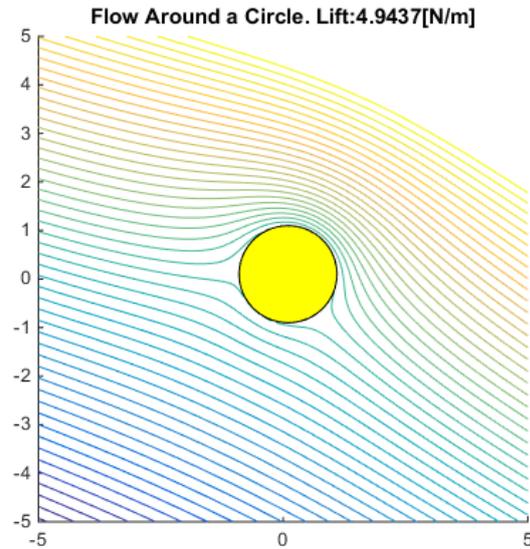


(a) Kutta-Joukowski virtaus sylinterin ohi kohtauskulmalla $\phi = 10^\circ$. Virtauksen suunta on oikealta vasemmalle.

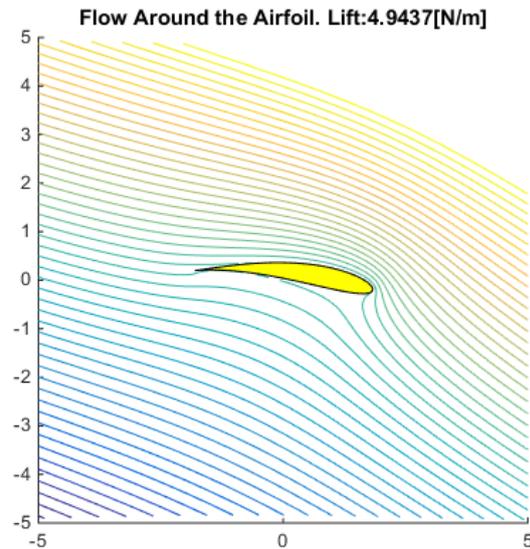


(b) Kutta-Joukowski virtaus siiven ohi kohtauskulmalla $\phi = 10^\circ$. Virtauksen suunta on oikealta vasemmalle.

Kuva 4.7: Nopeudella 30 m/s kulkeva virtaus sylinterin ja siiven ohi, jotka ovat kulmassa 10° virtaukseen nähden. Ympyrän säde on 1 m ja keskipiste on $(0.1, 0.1)$. [9]



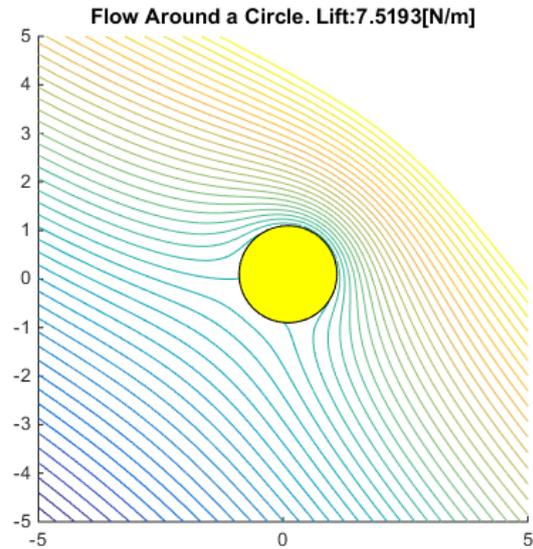
(a) Kutta-Joukowski virtaus sylinterin ohi kohtauskulmalla $\phi = 25^\circ$. Virtauksen suunta on oikealta vasemmalle.



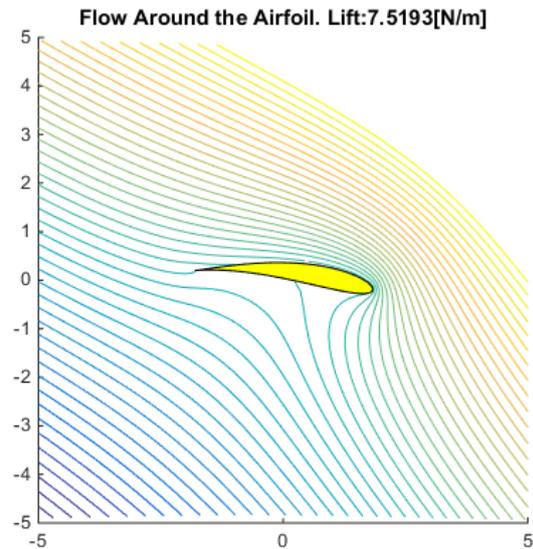
(b) Kutta-Joukowski virtaus siiven ohi kohtauskulmalla $\phi = 25^\circ$. Virtauksen suunta on oikealta vasemmalle.

Kuva 4.8: Nopeudella 30 m/s kulkeva virtaus sylinterin ja siiven ohi, jotka ovat kulmassa 25° virtaukseen nähden. Ympyrän säde on 1 m ja keskipiste on $(0.1, 0.1)$. [9]

Mikä tahansa konformikuvaus säilyttää kompleksipotentialin yksiarvoisuuden ja täten säilyttää nollasirkulaatio-ominaisuuden. Yleisesti kaikki virtaukset lentokoneen siiven ohi, jotka on muodostettu esimerkiksi 4.1.4 myös sallivat yksiarvoiset potentiaalit, ja näin niiden pyörreintegraali on nolla. Tällainen lentokone ei lennä, koska sen siivissä ei ole nostetta. Tietenkin fyysiset lentokoneet lentävät, joten täytyy olla jokin fyysinen oletus, jota ei huomioitu meidän tarkasteltavana ole-



(a) Kutta-Joukowski virtaus sylinterin ohi kohtauskulmalla $\phi = 40^\circ$. Virtauksen suunta on oikealta vasemmalle.



(b) Kutta-Joukowski virtaus siiven ohi kohtauskulmalla $\phi = 40^\circ$. Virtauksen suunta on oikealta vasemmalle.

Kuva 4.9: Nopeudella 30 m/s kulkeva virtaus sylinterin ja siiven ohi, jotka ovat kulmassa 40° virtaukseen nähden. Ympyrän säde on 1 m ja keskipiste on $(0.1, 0.1)$. [9]

van kappaleen ympärillä olevan virtauksen käsittelyssä. Vaikka ilma on hieman koonpuristuva, niin vesi on kaikissa käytännön sovelluksissa koonpuristumaton ja kuten tiedetään, kantosiipialukseen kohdistuu noste kun se kulkee veden päällä.

Ainoa tapa jolla nosteen voi esittää kuvassa (katso kuva 4.14), on tehdä se yksiarvoisen kompleksinopeuden avulla, jolla on nolasta poikkeava pyörreintegraali, ja

tämä edellyttää, että kompleksipotentiali on moniarvoinen. Eräs funktio, jolla on tällainen ominaisuus on kompleksinen logaritmi

$$\lambda(z) = \log(az + b), \quad \text{jonka derivaatta} \quad \lambda'(z) = \frac{a}{az + b}$$

on yksiarvoinen muualla paitsi pisteessä $z = -b/a$, jossa derivaattaa ei ole. Täten voidaan esitellä kompleksipotentialien parvi

$$\chi_\gamma(z) = z + \frac{1}{z} + i\gamma \log z. \quad (4.17)$$

Vastaava kompleksinen nopeus

$$f_\gamma(z) = \frac{d\chi_\gamma}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{i\gamma}{z} \quad (4.18)$$

lähestyy asymptoottisesti arvoa 1, kun etäisyys origosta kasvaa. Yksikköympyrän kehällä $z = e^{i\theta}$,

$$f_\gamma(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2i\theta} - i\gamma e^{-i\theta} = (\sin \theta + \gamma)ie^{-i\theta}$$

on kompleksisen tangenttivektorin $ie^{-i\theta} = \sin \theta - i \cos \theta$ reaalinen monikerta ja täten sen normaalin suuntainen nopeus tai vuo katoaa, jos ja vain jos γ on reaalinen.

Teoreema 4.2.1 *Jos $f(z)$ on analyyttinen rajoitetussa alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$, niin sitten*

$$\oint_{\partial\Omega} f(z)dz = 0. \quad (4.19)$$

Kaava (4.20)

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i, & a \text{ on käyrän } C \text{ sisällä} \\ 0, & a \text{ on käyrän } C \text{ ulkopuolella.} \end{cases} \quad (4.20)$$

Jos C on käyrä, joka kulkee kerran sylinterin ympäri vastapäivään, niin sitten soveltamalla Cauchyn teoreemaa 4.2.1 ja kaavaa (4.20) saadaan

$$\oint_C f_\gamma(z)dz = \oint_C \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{i\gamma}{z}\right) dz = -2\pi\gamma. \quad (4.21)$$

Kun $\gamma \neq 0$, niin pyörreintegraali on eri suuri kuin nolla ja sylinteriin kohdistuu noste, koska virtaus pääsee kiertämään kappaleen alareunaa kohti.

Virtaviivojen epäsymmetrisyys selittää nosteen, joka kohdistuu sylinteriin. Oletetaan, että $|\gamma| \leq 2$, jolloin patopisteet ovat liikkuneet pisteistä ± 1 , (katso kuva 4.13),

pisteisiin

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}\gamma^2} - \frac{1}{2}i\gamma. \quad (4.22)$$

Kuvasta 4.14 nähdään, kuinka patopisteet siirtyvät alemmas sylinterin pinnalla, kun γ :n arvo pienenee. Patopisteitä ovat kohdat, joissa virtaviivat ovat kohtisuorassa kappaleen pintaa vasten eli virtauksen paikallinen nopeus on nolla.

Kun muodostetaan muutettuja potentiaaleja (4.17) yhdessä Joukowskin muunnoksen (4.8) kanssa, niin saadaan kompleksipotentiali virtaukselle vastaavan lentokoneen siiven ympärillä. Konformikuvaus ei vaikuta kompleksisten integraalien arvoihin ja täten mille tahansa arvolle $\gamma \neq 0$ on olemassa nollasta poikkeava sirku-laatio siiven ympärillä, kun virtausta on muutettu ja lentokone pystyy lentämään.

Nyt ollaan muotoiltu virtaukset siiven ympärillä mielivaltaisella γ :n arvolla pyör-reintegraalia varten ja täten ollaan saatu mielivaltainen määrä nostetta. Saksalainen matemaatikko Martin Kutta oletti vuonna 1902, että vakio γ pitää valita siten, että pystytään pitämään virtausnopeus siiven takana jättöreunassa, joka tarkoittaa, että virtaus ei saa irrota lentokoneen siiven pinnasta, koska muutoin virtaus muuttuu turbulentiksi. Tämä edellyttää, että jättöreunassa $\zeta = 1$ on patopiste. Joukowskin kuvauksessa (4.8) jättöreuna vastaa kohtaa $w = 1$ ja täten, affiinikuvauksessa (4.6) vastaava piste yksikköympyrällä on

$$z = \frac{1 - \beta}{\alpha} = e^{i(\psi - \phi)}, \quad \text{missä} \quad \phi = \text{Arg } \alpha, \quad \psi = \text{Arg}(1 - \beta) \quad (4.23)$$

kuten esimerkissä 4.1.4, vaaditaan että $|\alpha| = |1 - \beta|$ ja $\alpha \in (-\pi, \pi]$, jotta yksikköympyrän kuva kulkee kohdan $w = 1$ kautta. Yhtälö (4.23) vastaa yhtälöä (4.22). Saadaan Kuttan vakio

$$\gamma = 2 \sin(\phi - \psi), \quad (4.24)$$

joka tuottaa saman sirkulaation kuin yhtälö (4.21). [1]

Esimerkivirtaukset siivelle ja sylinterille on esitetty kuvissa 4.7, 4.8 ja 4.9. Seuraavassa taulukossa 4.2 on esitetty samalla kohtauskulmalla, mutta eri virtausnopeuksilla saatujen siipiprofilien nosteen arvoja. Huomataan, että suuremmilla nopeuksilla saadaan suurempi noste. [9]

Edellisissä esimerkeissä lentokoneen siiven oletetaan säilyttävän poikkileikkausprofiilin muodon z -akselin suunnassa ja tämä edellyttää, että siivet ovat riittävän pitkät. Tällaisille siiville lentäminen on laminaaria virtausta ja tämä malli on pätevä siihen asti kun siipi alkaa kaventua kohti kärkeä. Monimutkaisimpia siipiprofileja pitää tarkastella kolmiulotteisessa virtausmalleissa ja kompleksianalyysi ei ole enää sovellettavissa. Kaksiulotteinen versio, jota on analysoitu tähän mennessä tarjoaa kuitenkin tärkeitä vihjeitä kolmiulotteisen virtauksen käyttäytymisestä. [1]

Taulukko 4.2: Eri virtausnopeuden arvoilla saatuja nosteen arvoja, kun kohtauskulma on 20° . Katso kuva 4.6. [9]

nopeus v [m/s]	kohtaus- kulma ϕ [$^\circ$]	ympyrän keski- pisteen x -koordinaatti [m]	ympyrän keski- pisteen y -koordinaatti [m]	säde r [m]	noste L [N/m]
5	20	0.1	0.1	1	0.6668
20	20	0.1	0.1	1	2.6673
35	20	0.1	0.1	1	4.6677

4.3 Sylinteriin kohdistuva paine ja noste

Tässä kappaleessa tarkastellaan potentiaalivirtausta ja painejakautumaa pyöreän sylinterin ympärillä. Muodostetaan potentiaali, josta ratkaistaan nopeus- ja painejakautumat sylinterin ympärillä. Integroidaan jälkimmäinen, jotta saadaan nosteelle kerroin.

Potentiaalivirtaus sylinterin ohi, jossa on sirkulaatiota, on x -suuntaisen yhtenäisen virtauksen superpositio eli dipoli. (Katso kuva 2.10(b), jossa dipoli on sylinterin sisällä.) Dipoli on origossa ja osoittaa negatiivisen x -akselin suuntaan ja pyörre sijaitsee origossa. Täten potentiaali systeemille on

$$\varphi = Vx + \mu \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ja

$$\psi = Vy - \mu \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$$

missä vapaan virtauksen vaakasuora nopeus on $U_\infty = V$, $\tan^{-1} \frac{y}{x} = \theta$ ja $x^2 + y^2 = r$. *Vapaa virtaus* on virtaus, joka on riittävän kaukana virtauksessa olevasta kappaleesta siten, että kappale ei enää vaikuta virtaukseen. Skaalataan ongelma niin, että kaikki nopeudet jaetaan nopeudella V ja täten skaalattu vapaa virtausnopeus on $V = 1$. Skaalataan myös kaikki etäisyydet sylinterin säteellä $R = \sqrt{\mu/V}$; täten $R = 1$ merkitsee, että dipolin lähdekentän voimakkuus $\mu = 1$. Virtaviivat suuntautuvat lähteestä pois päin ja päättyvät nieluun. Sirkulaation lähdekentän voimakkuutta on merkitty Γ :lla. Näillä muutoksilla nopeuspotentiaali voidaan kirjoittaa uudelleen

$$\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (4.25)$$

ja virtafunktio

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + y^2). \quad (4.26)$$

Otetaan gradientti nopeuspotentiaalista φ niin saadaan nopeuden komponentit analyttiselle funktiolle $f(z) = u(x, y) - iv(x, y)$:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (4.27)$$

ja

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4.28)$$

Bernoullin yhtälön mukaan [7]:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = H, \quad (4.29)$$

missä H on vakio. Jos arvioidaan H :ta kaukana ylävirrassa, missä virtaus on yhtenäinen ja V on nopeus, p on paine, p_∞ on normaali ilmanpaine ja ρ on ilman tiheys.

$$\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}$$

Bernoullin yhtälöstä, saadaan painekertoimen C_p yhtälö

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 1 - \left(\frac{u^2 + v^2}{V^2} \right). \quad (4.30)$$

Ratkaistaan painekenttä Bernoullin yhtälöstä

$$p = p_\infty + \rho \left(\frac{V^2}{2} - \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (4.31)$$

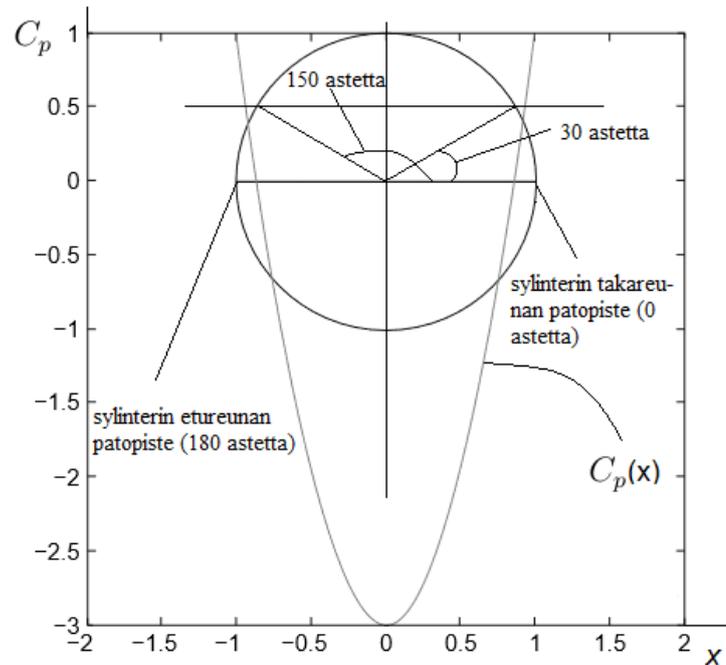
Lopulta, Bernoullin yhtälöstä (4.30), voidaan ratkaista painekerroin C_p seuraavasti:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 1 - (u^2 + v^2) \quad (4.32)$$

Kuva 4.10 näyttää painejakautuman sylinterin ympärillä, kun ei ole sirkulaatiota eli nostekerroin $C_L = 0$. Nostekertoimen yhtälö on

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 R} = 8\pi \sin \alpha \quad (4.33)$$

Minimi painekerroin on $C_p = -3$ keskikohdassa sylinterin päällä ja alla. Maksimi painekerroin $C_p = 1$ löytyy sylinterin etu- ja takareunan patopisteiden kohdalta. Painejakautuma sylinterin päällä on sama kuin sylinterin alla, joten kuvassa näkyy vain yksi käyrä.

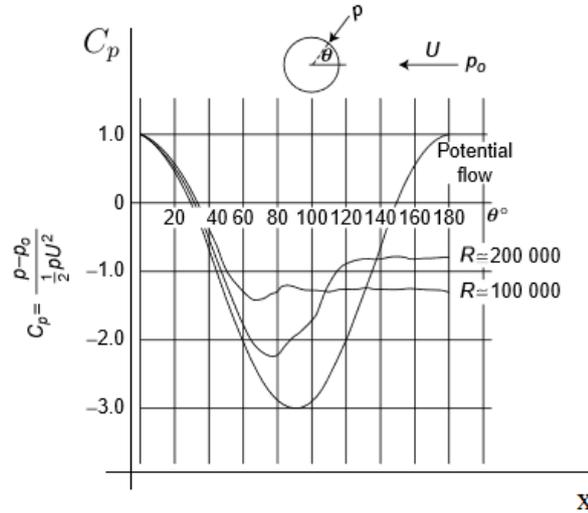


Kuva 4.10: Painejakauma sylinterin ympärillä, kun sirkulaatio $\Gamma = 0$. Tässä painekerroin C_p on esitettyä etäisyyden x funktiona [7].

Seuraavaksi on lueteltu joitain tärkeitä näkökohtia liittyen sylinterin ympärillä olevan potentiaalivirtauksen painejakaumaan.

1. Patopisteissä (0° ja 180°) paine-ero ($p - p_0$) on positiivinen ja vastaa lukua $\rho U^2/2$.
2. Asteiden 30 ja 150 kohdalla, missä $\sin \theta = 1/2$, $p - p_0$ on nolla ja näissä pisteissä nopeus on sama kuin vapaan virtauksen.
3. Asteiden 30 ja 150 välillä C_p on negatiivinen, mikä osoittaa, että arvo p on pienempi kuin p_0 yhtälössä (4.30).
4. Painejakauma on symmetrinen pystysuoran akselin suhteen ja näin sylinteriin ei kohdistu voimaa.

Kuvassa 4.11 on verrattu ideaalista painejakaumaa kokeellisesti saatuun. Myöskään tässä kuvassa ei ole sirkulaatiota, joten nostekerroin $C_L = 0$. Kuva näyttää että todellinen painejakauma on sama kuin teoreettinen 70° asteeseen asti, mutta eroaa radikaalisti sen jälkeen. Voidaan havaita, että sylinterin takaosan jälkeen painekerroin C_p pysyy negatiivisena. Tämä rikkoo symmetrian pystysuoran akselin suhteen ja tuottaa voiman virtauksen suuntaan. Tämä ei tarkoita, että potentiaalivirtaus sylinterin ympärillä olisi hyödytön. Se on hyödyllinen, koska tämä virtauskenttä voidaan kuvata lentokoneen siiven ympärillä olevaan virtauskenttään.



Kuva 4.11: Painejakauma sylinterin ympärillä, kun nostekerroin $C_L = 0$. [7].

Esitetään sama ongelma napakoordinaateissa. Säilytetään V ja R yhtälöissä. Tämä helpottaa meitä tulkitsemaan skaalauksen tarkoitusta, jota sovellettiin aiemmin. Napakoordinaateissa ongelman nopeuspotentiaali voidaan kirjoittaa seuraavasti, kun $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ja $r^2 = x^2 + y^2$:

$$\phi = V \left(r + \frac{\mu}{rV} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta,$$

missä $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$. Jos määritetään parametri $R = \sqrt{\mu/V}$ uudelleen, niin

$$\phi = V \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (4.34)$$

Nopeuskentän radiaalinen komponentti on

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) V \cos \theta \quad (4.35)$$

ja tangenciaalinen komponentti on puolestaan

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) V \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (4.36)$$

Nopeuden radiaalinen komponentti pisteessä $r = R$:

$$u_r = \left(1 - \frac{R^2}{R^2} \right) V \cos \theta = (1 - 1) V \cos \theta = 0$$

on nolla. Täten, $r = R$ on suljetun pyöreän virtaviivan säde ja täten sylinterin pinta

V :n poikittaisessa virtauksessa. Tälle pinnalle $u_\theta = -2V \sin \theta + \Gamma/2\pi R$. Sijoitetaan tämä Bernoullin yhtälöön (4.31), niin saadaan tarkka ratkaisu painejakaumalle sylinterin pinnalla, joka on

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho \left[V^2 - \left(-2V \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right] \quad (4.37)$$

Noste L ja väliaineen vastus d , jotka vaikuttavat sylinteriin määritetään seuraavasti:

$$L = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta, \quad \text{nosteelle}$$

ja

$$d = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta, \quad \text{väliaineen vastukselle.}$$

Lasketaan integraalit, niin saadaan

$$L = -\rho V \Gamma \quad (4.38)$$

$$d = 0 \quad (4.39)$$

Yhtälö (4.38) on nimeltään Kutta-Joukowskiin teoreema ja yhtälö (4.39) on D'Alembert'n paradoksi.

Kaava dimensiottomalle painekertoimelle:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 1 - \left(-2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R V} \right)^2 \quad (4.40)$$

Jos $\Gamma = 0$, niin

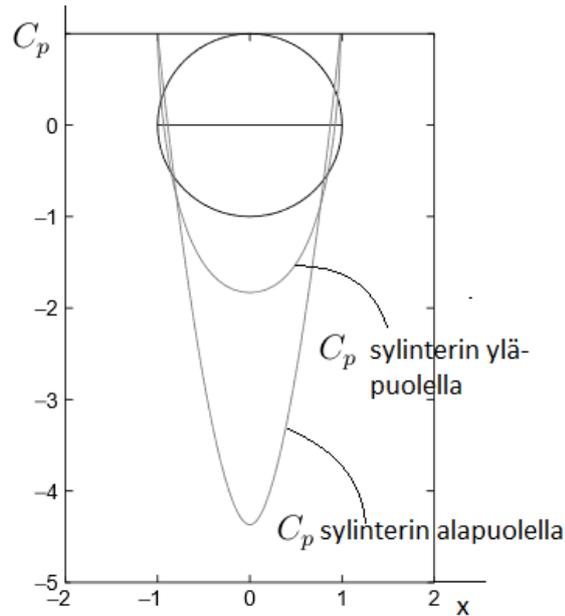
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta.$$

Pisteissä $\theta = 0$ ja π (sylinterin taka- ja etureuna), tämä on 1. Pisteessä $\theta = \pi/2$ ja $3\pi/2$, tämä on -3. Nämä tulokset vahvistavat tulokset, jotka näkyvät kuvassa 4.10.

Kuvassa 4.12 on esitetty painejakauma sylinterin ympärillä, kun $\Gamma = -2$. Huomataan, että nostekerroin C_L on kaksinkertainen Γ :n arvoon nähden, koska käytettiin arvoja $V = 1$ ja $R = 1$.

Sirkulaatio voidaan liittää geometriseen parametriin α , jota on havainnollistettu kuvassa 4.14, jossa on kuvattu virtaviivat sylinterin ympärillä eri Γ :n arvoilla. Matlab-koodi löytyy liitteestä H. Kulma α on sylinterin takaosan patopisteen kulmasijainti mitattuna horisontaalista akselista. Se on yhteydessä pyörrekenttään seuraavalla tavalla. Sylinterin pinnalla nopeus on

$$\mathbf{u} = (u_r, u_\theta) = (0, -2V \sin \theta + \Gamma/2\pi R)$$



Kuva 4.12: Painejakauma sylinterin ympärillä pyörrekentässä; nostekerroin $C_L = 4$ eli noste $L \neq 0$ ja sylinteriin kohdistuu noste. [7].

Patopisteet ovat pisteissä $u_\theta = 0$, jos ne sijaitsevat sylinterin pinnalla, sillä patopisteissä virtaus tulee kohtisuorassa sylinterin pintaa vasten ja virtaus pysähtyy. Täten ne sijaitsevat kohdassa

$$\sin \theta \equiv \sin \alpha = \frac{\Gamma}{4\pi RV}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\Gamma}{4\pi RV} \right) \quad (4.41)$$

tai

$$\Gamma = 4\pi RV \sin \alpha \quad (4.42)$$

Korvaamalla yhtälö (4.42) Kutta-Joukowskiin teoreemalla, saadaan

$$L = \rho V \Gamma = 8\pi \frac{1}{2} \rho V^2 R \sin \alpha.$$

Täten nostekerroin α :n avulla lausuttuna on

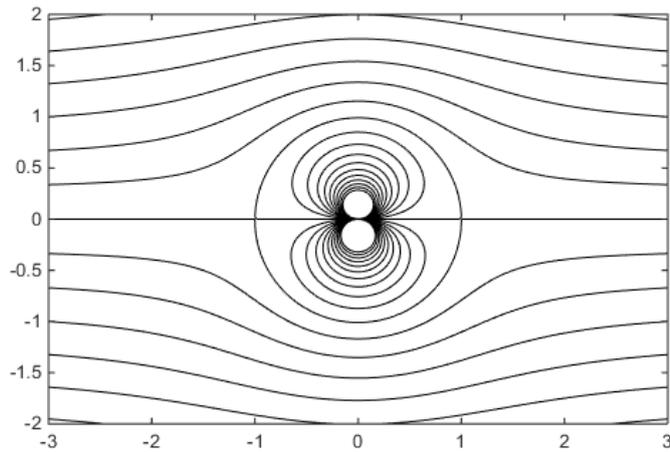
$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 R} = 8\pi \sin \alpha \quad (4.43)$$

Ratkaisemalla $\sin \alpha$ yhtälöstä (4.42) ja sijoittamalla se yhtälöön (4.43), voidaan nos-

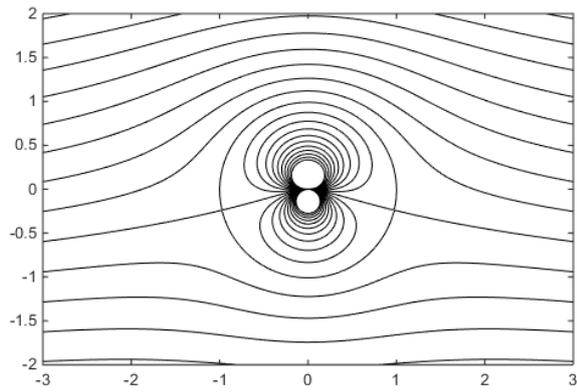
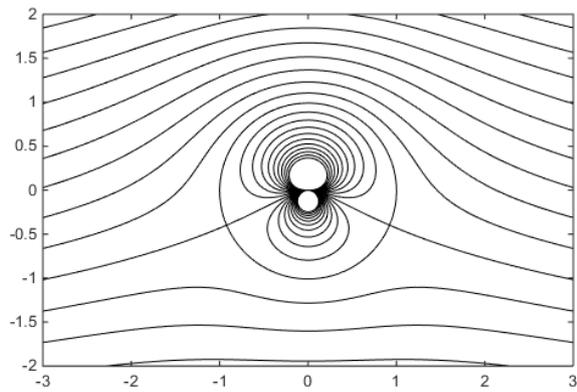
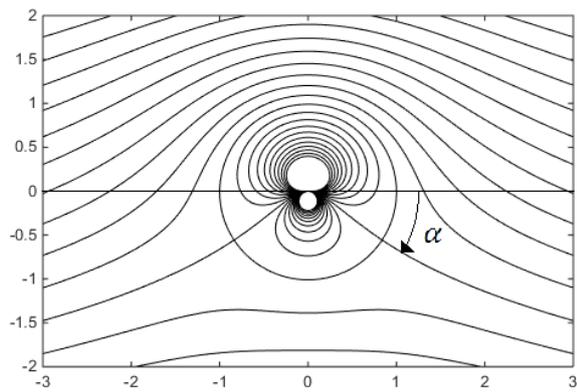
tekerroin C_L kirjoittaa myös näin

$$C_L = 2 \frac{\Gamma}{RV} \quad (4.44)$$

Tätä nostekerrointa käytetään yleisesti sylinterille, missä R on pituuskaala. Kuva 4.13 havainnollistaa tilannetta, jossa noste on nolla, kun ei ole sirkulaatiota eli kun $\Gamma = 0$. Matlab-koodi löytyy liitteestä H. [7]



Kuva 4.13: Virtaus sylinterin ympärillä, kun $\Gamma = 0$. [7].

(a) Noste arvolla $\Gamma = -3$.(b) Noste arvolla $\Gamma = -5$.(c) Noste arvolla $\Gamma = -7$.

Kuva 4.14: Sylinteriin kohdistuva noste eri Γ :n arvoilla. Kuvassa 4.14(c) on määritetty myös kulma α . [7].

5. YHTEENVETO

Tämän diplomityön alussa tarkasteltiin kompleksifunktiota ja konformikuvauksiin liittyvää pohjustavaa teoriaa. Jotta pystyttiin hyödyntämään kompleksifunktioita virtaustilanteissa niin luotiin yhteys ideaalisten virtausten ja Cauchy-Riemannin yhtälöiden välille ja se onnistui harmonisten funktioiden avulla. Näin pystyttiin hyödyntämään analyyttisiä funktioita joissakin yksinkertaisissa virtaustilanteissa, kuten virtauksessa kulman ja sylinterin ohi.

Konformikuvausten osalta huomattiin, että kulmat säilyvät. Esimerkiksi kahden käyrän välinen kulma saatiin tietystä pisteestä siten, että otettiin kaksiulotteisessa avaruudessa käyrien tangenttien välinen kulma. Tärkein esimerkki konformikuvauksesta on Joukowskin muunnos. Joukowskin muunnos kuvaa origokeskisen yksikköympyrän ensin ympyräksi toiselle tasolle, joka ei välttämättä ole origokeskinen ja tämän jälkeen kolmannelle tasolle. Tuloksena voi olla ellipsi, lentokoneen siiven profiili tai jonkin muun mallinen kaareutuva profiili riippuen siitä, mitä parametrien arvoja käytetään.

Viimeisessä osiossa käsiteltiin lentokoneen siipeä ja siihen kohdistuvaa nostetta. Virtaviivat sylinterimäisen kappaleen ympärillä muuttuivat virtaviivoiksi lentokoneen siiven ympärille Joukowskin muunnoksen avulla. Jotta fyysinen lentokone lentäisi, niin siihen pitää kohdistua noste ja se saatiin hyödyntämällä kompleksista integraalia. Integraalin avulla saatiin laskettua sirkulaatio, joka mahdollistaa nosteen. Myös painejakaumalla havaittiin olevan vaikutusta nosteseen.

Esimerkkien kuvissa, joissa on kuvattu lentokoneen siiven profileja, on laskettu nostelle arvoja Matlab-koodin avulla, joka löytyy liitteestä G. Lisäksi taulukoiden 4.1 ja 4.2 arvoista huomattiin, että kohtauskulman ϕ ja nopeuden v kasvaessa, noste myös kasvoi, kun muut parametrien arvot pysyivät vakiona. Kohtauskulman arvolla $\phi = 0$ siipeen ei kohdistunut lainkaan nostetta.

LÄHTEET

- [1] Olver, P.J. 2013. Complex Analysis and Conformal Mapping. University of Minnesota. 78 s.
http://www.math.umn.edu/~olver/ln_/cml.pdf, haettu 25.06.2015
- [2] Brown J.W., Churchill R.V. 2009. Complex Variables and Applications. 8. painos. New York. McGraw-Hill. 448 s.
http://engold.ui.ac.ir/~h.sadeghian/vid/Complex_Variables.pdf,
haettu 10.06.2015
- [3] Mathews J.H., Howell R.W. 2001. Complex Analysis for Mathematics and Engineering. 4. painos. Mississauga. Jones and Bartlett Publisher. 596 s.
- [4] Seppo Pohjolainen, P. 2006, Kompleksimuuttujan funktiot MAT-31080 luentomoniste, TTY Matematiikan laitos
- [5] Parker MacCready, 2009, Fluids 2009
http://faculty.washington.edu/pmacc/Classes/Fluids_2009/Homework/PS6_answers.pdf, Haettu 10.06.2015
- [6] Ahmed Al Makky, 2012-2015, Computational FluidDynamics is the Future: Matlab Flow Modelling
<http://cfd2012.com/matlab-stream-functions.html>, haettu 10.06.2015
- [7] Houghton, Carpenter, Collicott, Valentine. 2013. Aerodynamics for Engineer Students, chapter 3, Elsevier Ltd.
http://booksite.elsevier.com/samplechapters/9780080966328/Chapter_3.pdf haettu 10.06.2015
- [8] Weisstein, Eric W. "Conformal Mapping." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. 1999-2015.
<http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>,
haettu 10.06.2015
- [9] Dario Isola, 2005, Matlab Central
http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8870-joukowski-airfoil-transformation/content//Joukowski_Transformation.m, haettu 10.06.2015
- [10] Wikipedia
http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8870-joukowski-airfoil-transformation/content//Joukowski_Transformation.m, haettu 10.06.2015

- [11] Mathfaculty
<http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews//c2003/JoukowskiTransMod.html>, haettu 10.06.2015
- [12] H.K. Versteeg, W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics the finite volume method. 2. painos. 2007. Pearson Education Limited
<https://ekaoktariyantongroho.files.wordpress.com/2008/04/an-introduction-to-computational-fluid-dynamics-versteeg.pdf>,
haettu 13.08.2015
- [13] E.C. Zachmanoglou, Dale W. Thoe, P. 1976, Introduction to Partial Differential Equations with Applications, Baltimore USA, The Williams & Wilkins Company. 405 s.
- [14] Juha Partanen, P.2008, Matemaattinen analyysi -kurssin luentomoniste, Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
<http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/matanalyysi/luennot/sivut1-106.pdf>, haettu 5.9.2015
- [15] Tobias Ylömäki, P. 2014, Matemaattisen analyysin tukikurssin luentomoniste, Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
<http://blogs.helsinki.fi/ylomaki/files/2014/09/kerta1.pdf>,
haettu 5.9.2015
- [16] Keijo Ruohonen, P. 2013, Graafiteoria kurssin luentomoniste, TTY Matematiikan laitos
<http://math.tut.fi/~ruohonen/GT.pdf>, haettu 5.9.2015
- [17] Keijo Ruohonen, P. 2011, Vektorikentät kurssin luentomoniste, TTY Matematiikan laitos
<http://math.tut.fi/~ruohonen/VK.pdf>, haettu 14.9.2015
- [18] Wikipedia
<https://fi.wikipedia.org/wiki/Dipoli>, haettu 6.9.2015
- [19] T.M. Apostol, P. 1967 Calculus Volume 1, 2. painos, Blaisdell Publishing Company, 656 s.
- [20] Vuorinen, luentomoniste, Turun yliopisto
<http://users.utu.fi/vuorinen/CA10/ft10.pdf>, haettu 9.9.2015
- [21] Irrotational plane flows of an inviscid fluid, University of Genoa, Faculty of Engineering Department of Environmental Engineering http://www.diam.unige.it/~irro/conformi_e.html, haettu 8.9.2015

- [22] Part A Fluid Dynamics and Waves, 17.02.2014
<https://www0.maths.ox.ac.uk/system/files/coursematerial/2014/2862/9/fluids3.pdf>, haettu 9.9.2015
- [23] Mapping in Wing Aerodynamics, Thomas Johnson, 04.06.2013
http://www.math.washington.edu/~morrow/336_13/papers/thomas.pdf,
haettu 13.9.2015
- [24] Ilmailutoimittajat, Jouni Laukkanen
<http://www.ilmailutoimittajat.fi/seli/nostovoimansynty.html>, haettu 17.9.2015

A. HORIZONTAL FLOW

```

% cylinder.m 12/1/2009 Parker MacCready
%
% http://faculty.washington.edu/pmacc/Classes/Fluids_2009/
% Homework/PS6_answers.pdf
% this plots the streamfunction for potential flow
% parallel to x-axis

clear

% make axes

xymax = 2;
x = linspace(-xymax, xymax, 100);
y = linspace(-xymax, xymax, 100);

[X,Y] = meshgrid(x,y);
R = sqrt(X.^2 + Y.^2);
sin_th = Y./R;
cos_th = X./R;

phi = R.*cos_th;
psi = R.*sin_th;

contour(X,Y,psi, -3:.25:3, '-b');

xlabel('X Axis')
ylabel('Y Axis')
title('Stream function')
axis equal
axis tight

```

B. FLOW PAST CORNER

```

% @Copyright by Ahmed Al Makky 2012–2015 – http://cfd2012.com
%
% http://cfd2012.com/matlab-stream-functions.html
% this code plots fluid flow past an interior corner

clc
clear
NGRIDPOINTS=100;
Contour_density=50;
xx0=0;
xx=1;
dx=(xx-xx0)/(NGRIDPOINTS);
ii=xx0;
for i=1:NGRIDPOINTS;
ii=ii+1;
jj=xx0;
for j=1:NGRIDPOINTS;
jj=jj+1;
X(i,j)=ii*dx;
Y(i,j)=jj*dx;
end
end
for i=1:NGRIDPOINTS;
for j=1:NGRIDPOINTS;
Z(i,j)=X(i,j)*Y(i,j);
end
end
figure('Position',[10 10 1700 900])
[C,h] = contour(X(:,:,),Y(:,:,),Z(:,:,), Contour_density);

axis equal
title('Stream Function','FontSize',14)

```

```
xlabel('X Axis','FontSize',14)
ylabel('Y Axis','FontSize',14)
set(gca,'XLim',[0 xx0],'YLim',[0 xx0])
```

C. HYPERBOL

```

% cylinder.m 12/1/2009 Parker MacCready
%
% http://faculty.washington.edu/pmacc/Classes/Fluids_2009/
% Homework/PS6_answers.pdf
% this plots the streamfunction and velocity
% potential for potential flow along hyperbols

clear

% make axes
xymax = 2;
x = linspace(-xymax, xymax, 100);
y = linspace(-xymax, xymax, 100);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

R = sqrt(X.^2 + Y.^2);
sin_th = Y./R;
cos_th = X./R;

phi = 1./2.*R.^2.*((cos_th).^2 - (sin_th).^2);
psi = R.^2.*sin_th.*cos_th;

figure
contour(X,Y,phi, -3:.25:3, 'r');
hold on
[cc, hh] = contour(X,Y,phi, -3:1:3, 'r');

contour(X,Y,psi, -3:.25:3, 'b');
[cc, hh] = contour(X,Y,psi, -3:1:3, 'b');

xlabel('X Axis')

```

```
ylabel('Y Axis')  
title('\phi=RED \psi=BLUE')  
axis equal  
axis tight
```

D. CYLINDER

```

% cylinder.m 12/1/2009 Parker MacCready
%
% http://faculty.washington.edu/pmacc/Classes/Fluids_2009/
% Homework/PS6_answers.pdf
% this plots the streamfunction and velocity potential
% for potential flow around a cylinder

clear

% make axes
xymax = 2;
x = linspace(-xymax,xymax,100);
y = linspace(-xymax,xymax,100);
% note that x and y don't include 0
[X,Y] = meshgrid(x,y);

R = sqrt(X.^2 + Y.^2);
sin_th = Y./R;
cos_th = X./R;

U = 1;
a = 1;

phi = U*(R + a*a./R).*cos_th;
psi = U*(R - a*a./R).*sin_th;

figure
contour(X,Y,phi,-3:.25:3,'-r');
hold on
[cc,hh] = contour(X,Y,phi,-3:1:3,'-r');

contour(X,Y,psi,-3:.25:3,'-b');

```

```
[cc, hh] = contour(X, Y, psi, -3:1:3, '-b');
```

```
xlabel('X Axis')
```

```
ylabel('Y Axis')
```

```
title('\phi=RED \psi=BLUE')
```

```
axis equal
```

```
axis tight
```

E. DOUBLET

```

% cylinder.m 12/1/2009 Parker MacCready
%
% http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html
% this plots the streamfunction and velocity
% potential for double lemniscate

clear

% make axes

xymax = 2;
x = linspace(-xymax, xymax, 100);
y = linspace(-xymax, xymax, 100);

[X,Y] = meshgrid(x,y);
R = sqrt(X.^2 + Y.^2);
th = asin(Y./R);

A=1;

phi = A./(R.^1).*cos(th);
psi = -A./(R.^1).*sin(th);

figure
contour(X,Y,phi,-3:.25:3,'-r');
hold on
[cc, hh] = contour(X,Y,phi,-3:1:3,'-r');

contour(X,Y,psi,-3:.25:3,'-b');
[cc, hh] = contour(X,Y,psi,-3:1:3,'-b');

```

```
xlabel('X Axis')  
ylabel('Y Axis')  
title('\phi=RED \psi=BLUE')  
axis equal  
axis tight
```

F. JOUKOWSKI TRANSFORMATION

```

% http://booksite.elsevier.com/samplechapters/9780080966328
% /Chapter_3.pdf

% Joukowski transformation MATLAB code
%
% Example of conformal mapping of a circle to an airfoil
%
%                               AE425–ME425 Aerodynamics
% Daniel T. Valentine ..... January 2009
% Circle in (xp,yp) plane:  $R = \sqrt{xp^2 + yp^2}$ ,  $R > 1$ 
% Complex variables of three complex planes of interest:
%    $zp = xp + i*yp \implies$  Circle plane
%    $z = x + i*y \implies$  Intermediate plane
%    $w = u + i*v \implies$  Airfoil (or physical) plane
clear;clc
% Step 1: Select the parameters that define the airfoil of
% interest.
% (1) Select the  $a =$  angle of attack alpha
a = -2;           % in degrees
a = a*pi/180;    % Conversion to radians
% (2) Select the parameter related to thickness of the
% airfoil:
e = .1;
% (3) Select the shift of y-axis related to camber of
% the airfoil:
f = .1;
% (4) Select the trailing edge angle parameter:
te = .05;        %  $0 < te < 1$  ( $0 \implies$  cusped trailing edge)
n = 2 - te;      % Number related to trailing edge angle.
tea = (n^2-1)/3; % This is a Karman–Trefftz extension.
% Step 2: Compute the coordinates of points on circle in
% zp-plane:
R = 1 + e;

```

```
theta = 0:pi/200:2*pi;
yp = R*sin(theta);
xp = R*cos(theta);
% Step 3: Transform coordinates of circle from zp-plane to
% z-plane:
z = (xp - e) + 1i.*(yp + f);
% Step 4: Transform circle from z-plane to airfoil in
% w-plane
% (the w-plane is the "physical" plane of the airfoil):
rot = exp(1i*a); % Application of angle of attack.
w = rot.*(z + tea*1./z); % Joukowski transformation.
% Step 5: Plot of circle in z-plane on top of airfoil in
% w-plane
plot(xp,yp), hold on
plot(real(w),imag(w),'r'),axis image, hold off
```

G. JOUKOWSKI TRANSFORMATION WITH LIFT

```

% http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8870
% -joukowski-airfoil-transformation/content//Joukowski_
% Transformation.m
%
%-----
%                JOUKOWSKI TRANSFORMATION
%-----
% Created by:  Dario Isola , Politecnico di Milano , Italy
% Date:       29, october , 2005
%-----

clear all
close all
clc
disp('-----')
disp('  Joukowski Transformation Input Manager          ')
disp('-----')
v_inf = input('  Asymptotic Speed Modulus [m/s]:  ');
v = v_inf/v_inf;
theta = input('  Asymptotic Speed Angle [deg]:  ');
theta = theta*pi/180;
disp('-----')
s_x = input('  Circle Origin , X_0 [m]:  ');
s_y = input('  Circle Origin , Y_0 [m]:  ');
s = s_x + 1i*s_y;
r = input('  Radius [m]:  ');
disp('-----')
disp('  If Solution visualization is uncorrect          ')
disp('  try modify Tolerance TOLL                      ')
disp('-----')

```

```

% FLUID PARAMETER
rho = 1.225;
% TRANSFORMATION PARAMETER
lambda = r-s;
% CIRCULATION
beta = (theta);
k = 2*r*v*sin(beta);
Gamma = k/(2*pi); %CIRCULATION

%COMPLEX ASYMPTOTIC SPEED
w = v * exp(1i*theta);

%TOLLERANCE
toll = +5e-2;

% GENERATING MESH
x = meshgrid(-5:.1:5);
y = x';

% COMPLEX PLANE
z = x + 1i*y;

% Inside-circle points are Excluded!
for a = 1:length(x)
    for b = 1:length(y)
        if abs(z(a,b)-s) <= r - toll
            z(a,b) = NaN;
        end
    end
end

% AERODYNAMIC POTENTIAL
f = w*(z) + (v*exp(-1i*theta)*r^2)./(z-s) + 1i*k*log(z);

% JOUKOWSKI TRANSFORMATION,
J = z+lambda^2./z;

%GRAPHIC - Circle and Joukowski Airfoil
angle = 0:.1:2*pi;

```

```
z_circle = r*(cos(angle)+1i*sin(angle)) + s;  
z_airfoil = z_circle+lambda^2./z_circle;
```

```
% KUTTA JOUKOWSKI THEOREM
```

```
L = v_inf*rho*Gamma;
```

```
L_str = num2str(L);
```

```
%PLOTTING SOLUTION
```

```
figure(1)
```

```
hold on
```

```
contour(real(z),imag(z),imag(f),-5:.2:5)
```

```
fill(real(z_circle),imag(z_circle),'y')
```

```
axis equal
```

```
axis([-5 5 -5 5])
```

```
title(strcat('Flow Around a Circle. Lift: ',L_str,'[N/m] '));
```

```
figure(2)
```

```
hold on
```

```
contour(real(J),imag(J),imag(f),-5:.2:5)
```

```
fill(real(z_airfoil),imag(z_airfoil),'y')
```

```
axis equal
```

```
axis([-5 5 -5 5])
```

```
title(strcat('Flow Around the Airfoil. Lift: ',L_str,'[N/m] '));
```

H. CYLINDER WITH LIFT

```

% http://booksite.elsevier.com/samplechapters/9780080966328
% /Chapter_3.pdf
%
% this plots the streamfunction for potential
% flow around a cylinder when it experiments lift
mu = 1;
gam = 0;
V=1;
x = -3:.02:3;
y = -2:.02:2;
xx = ones;
yy = ones;
psis = ones;
for m = 1:length(x)
    for n = 1:length(y)
        xx(m,n) = x(m);
        yy(m,n) = y(n);
        psis(m,n) = V*y(n) - mu*y(n)/(x(m)^2+(y(n)+.01)^2) ...
            - (gam/4/pi)*log(x(m)^2+(y(n)+.01)^2);
    end
end
end
contour(xx,yy,psis,-3:.3:3,'k'),
axis image

```