TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

JUUSO LINNUSMÄKI

Matematiikan perusopintojen kehittäminen matematiikan kielentämisen avulla

Diplomityö

Tarkastajat:
Dosentti Jorma Joutsenlahti,
Lehtori Terhi Kaarakka,
Yliopistonlehtori Simo Ali-Löytty
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 4.3.2015

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
JUUSO LINNUSMÄKI: Matematiikan perusopintojen kehittäminen matematiikan kielentämisen avulla
Diplomityö, 82 sivua, 35 liitesivua
Elokuu 2015
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Dosentti Jorma Joutsenlahti, Lehtori Terhi Kaarakka, Yliopistonlehtori Simo Ali-Löytty
Avainsanat: Tampereen teknillisen yliopiston opintojen eteneminen, matematiikan opetus, matematiikan kielentäminen

Matematiikan perusopinnot muodostavat ison osan Tampereen teknillisen yliopiston (TTY) perusopintojen opinnoista. Opintojen tarkoituksena on antaa kattavat valmiudet tekniikan ja luonnontieteiden opiskeluun. Opintojen suoritusaktiivisuutta tarkasteltaessa kuitenkin huomataan, että eri opintosuuntien opiskelijat suorittavat matematiikan perusopintoja hyvin vaihtelevasti. Opintojen suoritusaktiivisuutta ja opiskelijoiden oppimistuloksia pyritään jatkuvasti kehittämään TTY:llä erilaisten toimenpiteiden, esimerkiksi matematiikan kielentämisen, avulla.

Matematiikan kielentäminen tarkoittaa ilmaisutapaa, jossa matemaattista ajattelua ilmaistaan matematiikan symbolikielen lisäksi luonnollisella kielellä sekä kuviokielen tai toiminnan avulla. Kielentäminen voi tapahtua suullisesti tai kirjallisesti. Kielentämisen päämääränä on jäsentää ja selkeyttää opiskelijan ajatteluprosessia ja monipuolistaa matemaattista ilmaisua. Kielentäminen on keskeinen matematiikan oppimisen tutkimuskohde, koska on havaittu, että monilla opiskelijoilla vaikeudet matematiikan oppimisessa liittyvät oman ajattelun ilmaisemiseen. Erityisen vaikeana koetaan matematiikan symbolikielen käyttö.

Monipuolisen ilmaisun on nähty edistävän matematiikan oppimista. Kielentäessä eri käsitteille ja operaatioille voidaan luoda monimuotoisempia merkityksiä, mikä syventää opiskelijoiden ymmärrystä. Sen lisäksi, että kielentäjän oma ajattelu jäsentyy, myös muun ryhmän jäsenten matemaattinen ajattelu kehittyy vuorovaikutuksessa kielentäjän kanssa. Opettajan näkökulmasta matematiikan kielentäminen puolestaan helpottaa arviointiprosessia.

Tutkimuksessa havaittiin, että TTY:n opiskelijat kokevat matematiikan kielentämisen positiivisena asiana. Luonnollisen kielen liittäminen osaksi matematiikan tehtävää on tärkeää ja se helpottaa tehtävän ratkaisuprosessia sekä valmiin tehtävän ymmärrystä. Kielentäminen tuo tehtävän ratkaisuun kokonaan uuden perspektiivin, mikä tukee matematiikan oppimista sekä oman osaamisen arviointia. Kielentämistehtävien käyttöä opetuksessa kannattaa jatkaa myös tulevaisuudessa.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Master's Degree Programme in Science and Engineering
JUUSO LINNUSMÄKI : The development of mathematics basic studies using mathematical languaging
Master of Science Thesis, 82 pages, 35 Appendix pages
August 2015
Major: Mathematics
Examiner: Docent Jorma Joutsenlahti, Lecturer Terhi Kaarakka, University Lecturer Simo Ali-Löytty
Keywords: Advancement of studies in Tampere University of Technology, mathematics teaching, languaging mathematics

Mathematics basic studies form a large part of studies in Tampere University of Technology (TUT). The main purpose of these basic studies is to provide wide skills for studying science and engineering. Students from different fields of study finish their basic studies at different time. Basic studies are constantly developed by investigating the advancement of studies and learning results with various ways, like mathematical languaging.

Languaging mathematics is a way to express mathematical thinking with symbolic language and natural language. Hands-on action can also be the mode of expression. Mathematical languaging can be executed both orally and written. The goal is to structure and clarify the student's thinking process and diversify their mathematical expression. Mathematical languaging is an important research subject, because many students' learning difficulties in mathematics are related to mathematics as a language. Especially the formal symbolic language is challenging to many students.

It has been seen that varied ways of expressing increases learning of mathematics. When a student is languaging mathematics, he or she tries to create multiform meanings for mathematical concepts and operations. Languaging also advances the mathematical thinking of other students when they are interacting with the student who is languaging mathematics. From the teacher's point of view, mathematical languaging simplifies the evaluation process.

According to this study, students in TUT have a positive attitude for mathematical languaging. Natural language is an important part of the solution of a given exercise. It helps solving and understanding mathematics. Languaging brings a whole new perspective, which supports the learning of mathematics and students' metacognitive skills. It is advisable to use languaging exersices as a part of teaching also in the future.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella. Työn tekeminen alkoi kesällä 2014 tutkiessani perusopintojen suoritusaktiivisuutta eri opintosuunnissa. Pedagogisia opintoja suorittaessani lukuvuoden 2014-2015 aikana kiinnostuin matematiikan kielentämisestä. Kielentämistä koskeva tutkimus tehtiin syksyn 2014 aikana. Diplomityön kirjoittaminen ajoittui pääosin vuodelle 2015.

Haluan kiittää matematiikan laitosta mahdollisuudesta toteuttaa matematiikkaa ja kasvatustieteitä yhdistelevä poikkitieteellinen diplomityö. Haluan kiittää myös työni ohjaamisesta ja tarkastamisesta dosentti Jorma Joutsenlahtea, lehtori Terhi Kaarakkaa ja yliopistonlehtori Simo Ali-Löyttyä. Lisäksi kiitos kuuluu työtovereilleni tuesta ja kannustuksesta työn teon eri vaiheissa. Suurimmat kiitokset haluan kuitenkin esittää perheelleni ja läheisille, jotka ovat tukeneet minua koko koulu-urani ajan.

Tampereella 16.6.2015

Juuso Linnusmäki

SISÄLLYS

TERMIT JA NIIDEN MÄÄRITELMÄT

TTY	Tampereen teknillinen yliopisto
op	Opintopiste
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko
X	Satunnaismuuttuja
x	Satunnaismuuttuja X arvo
Ω	Satunnaismuuttujan otosavaruus
a_i	Otosavaruuden alkeistapaus
$\mathbb{R}^n$	n-ulotteinen reaaliavaruus
f	Tiheysfunktio
$\sum$	Summamerkintä
$P(X = x)$	Pistetodennäköisyys; todennäköisyys sille, että satunnaismuuttujan X arvo on x
F	Kertymäfunktio
μ, E	Satunnaismuuttujan odotusarvo
A^T	Matriisin A transpoosi
σ^2	Satunnaismuuttujan varianssi
σ	Satunnaismuuttujan keskihajonta
c_{XY}	Yksiulotteisten satunnaismuuttujien X ja Y välinen kovarianssi
r_{XY}	Yksiulotteisten satunnaismuuttujien X ja Y välinen korrelaatio
$N(\mu, \sigma^2)$	Normaalijakauma
Z	Satunnaismuuttuja, joka noudattaa standardoitua normaalijakaumaa
n	Vapausaste
$\chi^2(n)$	χ^2-jakauma vapausasteella n

U	Satunnaismuuttuja, joka noudattaa χ^2-jakaumaa
Γ	Gammafunktio
T	Satunnaismuuttuja, joka noudattaa t-jakaumaa
$t(n)$	t-jakauma vapausasteella n
$\bar{x}$	Otoskeskiarvo
s	Otoskeskihajonta
N	Otoskoko
H_0	Nollahypoteesi
H_1	Vastahypoteesi
θ	Testattava parametri tilastollisessa testauksessa
p	p-arvo, merkitsevyystaso
T_i, S_i	Eri populaatioiden tapauksia
F_i, G_i	Eri populaatioiden esiintymisfrekvenssit satunnaismuuttujina
p_i, q_i	Eri populaatioiden tapauksien todennäköisyydet
f_i, g_i	Tapauksien realisoituneet esiintymisfrekvenssit lukumäärinä
k, l	Indeksi; tapauksien lukumäärä
h	Testisuure, joka noudattaa likimain χ^2-jakaumaa
r	Korrelaatiokerroin
AU	Automaatiotekniikan opintosuunta
B	Biotekniikan opintosuunta
K	Konetekniikan opintosuunta
M	Materiaalitekniikan opintosuunta
R	Rakennustekniikan opintosuunta
S	Sähkötekniikan opintosuunta
SITI	Signaalinkäsittelyn ja tietoliikennetekniikan opintosuunta

TI	Tietotekniikan opintosuunta
TJ	Tietojohtamisen opintosuunta
TL	Teknis-luonnontieteellisen opintosuunta
TU	Tuotantotalouden opintosuunta
Y	Ympäristö- ja energiatekniikan opintosuunta
IMA	Insinöörimatematiikan opintojakso
MA	Matematiikan opintojakso, jonka suorittavat pääsääntöisesti biotekniikan, teknis-luonnontieteellisen ja ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijat insinöörimatematiikan sijaan
LAMA	Laajan matematiikan opintojakso (nykyään nimellä matematiikka)
PM	Pitkä matematiikka
LM	Lyhyt matematiikka

1. JOHDANTO

Matematiikan perusopintojen opintojaksot muodostavat merkittävän osan Tampereen teknillisen yliopiston (TTY) opintojaksotarjonnasta. Opintosuunnasta ja käytettävästä opinto-oppaasta riippuen opiskelijoiden on suoritettava matematiikan perusopintoja vähintään 23-37 opintopistettä. Matematiikan perusopintojen määrä siis vaihtelee sekä opintosuunnittain että opintosuuntien sisällä opintojen suoritusvuodesta riippuen. Matematiikan perusopinnot on tarkoitettu suoritettavan kahden ensimmäisen opiskeluvuoden aikana. [34; 35; 36; 37]

Sen lisäksi, että matematiikan perusopinnot suoritettaisiin kahden ensimmäisen vuoden aikana, tavoitteena on, että opiskelijoiden oppimistulokset olisivat mahdollisimman hyviä. Tämän vuoksi on syytä tutkia, miten TTY:n perusopintojen opintojaksoja voisi kehittää siten, että oppimistulokset paranisivat ja tätä kautta myös matematiikan perusopinnot saataisiin suoritettua tavoiteajassa. On siis tarkasteltava keinoja kehittää matematiikan perusopintojaksojen opetusta ja sitä kautta parantaa opiskelijoiden oppimistuloksia ja opiskelumotivaatiota.

Tässä diplomityössä tutkitaan erityylisiä matematiikan kielentämistehtäviä ja niiden soveltuvuutta TTY:n matematiikan opetukseen. Matematiikan kielentämistehtävillä tarkoitetaan tehtävätyyppiä, jossa matemaattista sisältöä ilmaistaan muille perinteisen matematiikan symbolikielen lisäksi luonnollisella kielellä sekä kuviokielen ja toiminnan avulla. Kielentäminen on konstruointiprosessi, jossa opiskelija tekee näkyväksi matemaattista ajatteluaan. Keskeistä on pyrkiä monipuolisempaan ilmaisuun matematiikan tehtäviä ratkaistaessa ja tätä kautta kehittää opiskelijan matemaattista ajattelukykyä. Tyypillisesti kielentämistehtäviin sisältyy liikkumista matematiikan kielen eri ulottuvuuksien (symbolikieli, luonnollinen kieli, kuviokieli, taktiilinen kieli) välillä. [9, s. 52] Viimevuosina matematiikkaa ja sen oppimista on tarkasteltu enenevästi juuri kielen ja sen oppimisen näkökulmasta [38, s. 233].

1.1 Työn tavoite ja tutkimuskysymykset

Tällä tutkimuksella on tärkeä rooli TTY:n opiskelijoiden yleistä opintomenestystä ajatellen. Matematiikan perusopintojen tarkoituksena on tarjota oppilaille hyvät ja laajat edellytykset tekniikan alan opiskeluun. Hyvää matematiikan osaamista voidaankin perustellusti pitää muun teknisen ja luonnontieteellisen osaamisen perustana. Tämän vuoksi opintojen etenemisen tutkimuksen ja matematiikan opetuksen kehittämisen on oltava jatkuva prosessi, jonka avulla pyritään kehittämään opiskelijoiden oppimista TTY:llä. Tässä työssä perusopintojen kehittämistä tarkastellaan matematiikan kielentämisen näkökulmasta.

Diplomityön tavoitteena on kartoittaa kokonaiskuva TTY:n opiskelijoiden matematiikan perusopintojen suorittamisesta ja opintojen etenemisestä vuosittain lukuvuosina 2010-11, 11-12, 12-13 ja 13-14 eri opintosuunnissa sekä tarkastella kielentämistehtävien soveltuvuutta opintojaksoille oppimisprosessin tueksi. Kielentämistehtävien osalta tutkimuksen kohteena ovat matematiikka 1 ja insinöörimatematiikka B1 -opintojaksoille syksyllä 2014 osallistuneet opiskelijat.

Opintojen etenemisen kartoituksen jälkeen selvitetään, ovatko matematiikan kielentämistehtävät varteenotettava kehityskohde matematiikan perusopintojen opintojaksoilla. Tutkimuksen kohteena ovat kielentämistehtävien vaikutukset oppimistuloksiin ja opiskelijoiden motivaatioon. Lisäksi selvitetään, mitä mieltä opiskelijat ovat kielentämistehtävistä ja onko opiskelijoiden osaamistasolla, oppimisprofiililla tai sukupuolella joitain vaikutuksia mielipiteisiin. Kielentämistehtävien soveltuvuutta tenttikysymyksiksi tutkitaan opintojaksojen kokemusten perusteella.

Tutkimuksen tutkimuskysymykset voidaan muotoilla seuraavasti:

1. Miten opiskelijat edistyvät matematiikan perusopintojen suorittamisessa Tampereen teknillisessä yliopistossa?

2. Minkälainen yhteys kielentämistehtävillä on oppimistuloksiin?

3. Kuinka opiskelijan osaamistaso, oppimisprofiili ja sukupuoli vaikuttavat opiskelijan mielipiteisiin ja asenteisiin kielentämistehtävistä?

4. Millaisia kokemuksia kielentämistehtävistä on tenttikysymyksinä?

1.2 Työn rakenne

Diplomityön aluksi Johdanto-luvun jälkeen Luvussa 2 tarkastellaan tämän tutkimuksen kannalta olennaisia tilastomatematiikan peruskäsitteitä sekä tilastollisen testauksen teoriaa. Sen jälkeen Luvussa 3 tutkitaan Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan perusopintojen suorittamisaktiivisuutta. Luvussa kerrotaan opintojen etenemisen tutkimuksen taustoista, toteutuksesta sekä esitetään tutkimuksen päätulokset. Opintojen etenemisen selvitys muodostaa diplomityön tutkimuksen ensimmäisen osan.

Opintojen etenemisen kartoituksen jälkeen paneudutaan matematiikan kielentämistehtäviin ja niitä koskevaan tutkimukseen. Luku 4 sisältää teoriaosuuden matemaattisesta kielentämisestä sekä kielentämistehtäviä koskevan tutkimuksen kannalta mielenkiintoisten TTY:n opiskelijoiden oppimisprofiilien tarkastelun. Luvussa kuvaillaan myös kielentämistehtäviä koskevan tutkimusprosessin kulkua sekä esitetään tutkimuksen keskeisimmät tulokset matemaattiseen kielentämiseen liittyen. Kielentämistehtäviä koskeva tutkimus muodostaa diplomityön tutkimuksen toisen osan.

Luvussa 5 tarkastellaan tutkimuksen eri osien luotettavuutta validiteetin ja reliabiliteetin käsitteiden avulla. Lopuksi Luvussa 6 tiivistetään työn keskeisimmät tulokset sekä pohditaan kielentämistehtävien soveltuvuutta Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan perusopintojen opintojaksoille. Lisäksi pohditaan jatkotutkimusmahdollisuuksia.

1.3 Aikaisemmat tutkimukset matematiikan kielentämisestä

Suomessa kielentämisen pioneerina voidaan pitää useita tutkimuksia ja artikkeleita aiheesta julkaissutta Jorma Joutsenlahtea Tampereen yliopistosta. Hänen työllään on ollut suuri merkitys matematiikan ja kielen vaikutuksesta oppimiseen. Kielentämistä koskevia tutkimuksia on tehty jokaisella kouluasteella alakoulusta korkeakouluun.

Viimevuosina kielentämistä on omissa pro gradu -tutkielmissaan tutkinut muun muassa Väänänen (*Kirjallinen kielentäminen ja kämmentietokoneet lukion pitkässä matematiikassa* [42]), Kari (*Kielentäminen derivaatan opetuksessa* [13]) ja Sairanen (*Havainnollistavaa algebraa lukiolaisille matemaattisen kielentämisen näkökulmasta* [30]). Nämä tutkimukset liittyvät lukion matematiikan opetukseen.

Tässä työssä kielentämistä koskeva tutkimus koskee matematiikan korkeakouluopetusta. Aikaisemmin kielentämistä yliopistoissa on tarkasteltu muun muassa artikkelissa *Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa* [11]. Artikkeli käsittelee kielentämistehtäviä Tampereen teknillisessä yliopistossa ja Turun yliopistossa lukuvuonna 2012-2013. Tutkimuksessa kävi ilmi, että kielentäminen on opiskelijoille vieras käsite sekä käsitteellisellä että käytännöllisellä tasolla tehtäviä ratkaistaessa. Vastauksien selittämistä ja kommentointia pidettiin kuitenkin pääsääntöisesti myönteisenä asiana. Kielentämistehtävät koettiin hyödyllisiksi, mutta vaivalloisemmiksi kuin perinteiset matematiikan tehtävät. Joukossa oli myös opiskelijoita, joiden mielestä kielentämistehtävät olivat liian vaikeita sekä turhia. Lisäksi tutkimuksessa havaittiin, että suoritusorientoituneelle opiskelijalle kielentämistehtävät voivat olla oppimista haittaavia, koska pelkkä ratkaisumallin ulkoa opettelu ei enää riitä. [11]

Tampereen teknillisessä yliopistossa on tehty kielentämistä koskeva tutkimus myös vuonna 2010, jota käsitellään julkaisussa *What can be done to bridge the competency gap between upper-secondary school and university mathematics?* [32]. Tässä tutkimuksessa kielentämistehtäviä tarkasteltiin insinöörimatematiikka 1 ja laaja matematiikka 1 (nyk. matematiikka 1) -opintojaksoilla. Opiskelijoiden asenne kielentämistehtäviä kohtaan oli pääasiassa positiivinen, mutta noin 35 % koki kielentämisen myös negatiivisena tai selvästi negatiivisena asiana. Insinöörimatematiikan opiskelijoilla asenne oli tutkimuksen mukaan selkeästi negatiivisempi kuin laajan matematiikan opiskelijoilla. Tutkimuksessa tutkittiin myös, mitä mieltä erilaiset opiskelijat ovat kielentämisestä (tarkemmin oppimisprofiileista Luvussa 4.2.4). **Pintasuuntautuneet** opiskelijat suhtautuivat kielentämiseen vastahakoisimmin. **Vertaisoppijat** eivät erityisesti innostuneet kielentämistehtävistä, mutta he kokivat luonnollisen kielen käytön tärkeänä osana matematiikan tehtävien ratkaisuissa. **Omin päin opiskelevat** ja **osaajat** puolestaan suhtautuivat kielentämiseen positiivisesti. Suurin osa heistä myös käyttää luonnollista kieltä matematiikan tehtävissä mielellään. **Tukea tarvitsevien** opiskelijajoukko oli aineistossa niin pieni, joten siihen kuuluvia opiskelijoita ei analysoitu tarkemmin. Yhteenvetona kaikista opiskelijoista voisi sanoa, että he kokevat luonnollisen kielen käytön osana matematiikan tehtävän ratkaisua hyvänä asiana, mutta eivät käytä luonnollista kieltä yhtä mielellään itse tehtäviä ratkaistessaan.

Tämän työn kielentämistä koskeva osuus toimii osaltaan jatkotutkimuksena edellä mainituille korkeakoulujen kielentämistä koskeville tutkimuksille. Erityisesti Joutsenlahden, Sarikan, Kankaan ja Harjulehdon tutkimus [11] linkittyy monelta osin tähän diplomityöhön, ja esimerkiksi matematiikan kielentämistä koskevassa kyselylomakkeessa muutamat väittämät ovat täysin samoja [11, s. 65-66]. Näin tämän diplomityön tuloksia on helppo verrata aikaisemmin tehtyyn tutkimukseen.

2. TUTKIMUKSEN MATEMAATTINEN TAUSTA

Aineiston kuvaaminen tilastomatematiikan tunnuslukujen avulla on keskeinen osa kvantitatiivista tutkimusmenetelmää. Yksinkertaisesti tarkasteltuna tilastotieteellistä tutkimusta voidaankin pitää numerotiedon hyväksikäyttönä, tarkemman analyysin apuvälineenä [40, s. 9]. Tässä luvussa perehdytään tilastomatematiikan teoriaan niiltä osin, kuin se on tämän tutkimuksen kannalta olennaista ja perusteltua.

2.1 Diskreetti satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttujaksi sanotaan funktiota X, jos sen kaikki arvot määräytyvät todennäköisyyksien avulla. Satunnaismuuttujan X arvot muodostavat satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauman [21, s. 29]. Arvo x on puolestaan satunnaismuuttujan jokin tietty yksittäinen arvo [1, s. 29]. Satunnaisvektori $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ on diskreetti, jos sen jokainen alkio on diskreetti satunnaismuuttuja. [25, s. 46] Diskreetti satunnaismuuttuja on satunnaisvektorin $\mathbb{R}^n$ erikoistapaus. Käsitellään seuraavaksi tarkemmin diskreettejä satunnaisvektoreita.

Määritelmä 1. *Funktiota $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, joka liittää reaalilukuvektorin jokaiseen koetulokseen, sanotaan* ***satunnaismuuttujaksi****.*

Diskreetin satunnaisvektorin otosavaruus (Ω) on avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärellinen tai numeroituvasti ääretön diskreetti osajoukko [25, s. 48]

Määritelmä 2. *Satunnaisvektorin X* ***tiheysfunktio*** *$f(x)$ määritellään jokaisessa avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteessä x siten, että*

1. $f(x) = P(X = x)$
2. $\sum_{x \in \Omega} f(x) = 1$
3. $f(x) \geq 0$

Tiheysfunktion avulla voidaan määritellä diskreetin satunnaisvektorin kertymäfunktio [25, s. 48]:

Määritelmä 3. *Diskreetin satunnaisvektorin X* ***kertymäfunktio*** *F on jokaisessa avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteessä x*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{r:\ r \leq x} f(r).$$

Määritellään seuraavaksi vielä diskreettiin satunnaisvektoriin liittyvät keskeiset ominaisuudet: odotusarvo, varianssi, keskihajonta, kovarianssi ja korrelaatio. Näistä keskeisin on odotusarvo, koska sen avulla voidaan määrittää kaikki muut edellä mainitut käsitteet ([21, s. 29], [25, s. 29]).

Määritelmä 4. *Diskreetin satunnaisvektorin X* ***odotusarvo*** *on*

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in \Omega} x f(x).$$

Määritelmä 5. *Diskreetin satunnaisvektorin X* ***varianssi*** *on*

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)(X - \mu)^T].$$

Etenkin yksiulotteisen satunnaismuuttujan kohdalla käytetään tyypillisesti **varianssi**-nimitystä. Moniulotteisen satunnaismuuttujan kohdalla käytetään lisäksi nimityksiä **kovarianssimatriisi** tai **varianssimatriisi** [26, s. 41]. Yksiulotteisen satunnaisvektorin **keskihajontaa** merkitään symbolilla σ. Se on siis varianssin neliöjuuri. ([21, s. 30], [25, s. 29])

Olkoot seuraavassa X_1 ja X_2 saman kokeen kaksi yksiulotteista satunnaismuuttujaa, esimerkiksi kokeessa realisoituvan satunnaisvektorin kaksi komponenttia.

Määritelmä 6. *Satunnaisvektorin komponenttien X_1 ja X_2 välinen* ***kovarianssi*** *on*

$$c(X_1, X_2) = E((X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})).$$

Määritelmä 7. *Satunnaisvektorin komponenttien X_1 ja X_2 välinen* ***korrelaatio*** *on*

$$r(X_1, X_2) = \frac{c(X_1, X_2)}{\sqrt{\sigma_{X_1}^2} \cdot \sqrt{\sigma_{X_2}^2}} = \frac{E((X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}))}{\sqrt{E(X_1 - \mu_{X_1})^2 \cdot E(X_2 - \mu_{X_2})^2}}.$$

Edellisissä määritelmissä $\mu_{X_1} = E(X_1)$, $\mu_{X_2} = E(X_2)$, $\sigma_{X_1}^2 = E(X_1 - \mu_{X_1})^2$ ja $\sigma_{X_2}^2 = E(X_2 - \mu_{X_2})^2$ ([21, s. 30], [25, s. 60]).

2.2 Todennäköisyysjakaumia

Todennäköisyysjakaumat ovat tärkeä osa tilastollista testausta. Tässä kappaleessa käsitellään monista eri jakaumista tämän tutkimuksen kannalta oleellisimmat: normaalijakauma, χ^2-jakauma ja t-jakauma.

2.2.1 Normaalijakauma

Tärkein ja käytetyin jatkuva jakauma on normaalijakauma, jota nimitetään myös Gaussin jakaumaksi. [1, s. 65] Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla μ ja varianssilla $\sigma^2 > 0$ (merkitään $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), jos sen tiheysfunktio on muotoa ([1, s. 65], [21, s. 30])

$$f(x; \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Standardoitu normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja Z voidaan muodostaa satunnaismuuttujan X sekä sen odotusarvon μ ja keskihajonnan σ avulla

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}. \tag{2.2}$$

Satunnaismuuttujalle Z pätee: $\mu_z = 0$, $\sigma_z^2 = 1$ ja koska normaalijakautuneen satunnaismuuttujan affiini muunnos on normaalijakautunut [24, s. 428], niin $Z \sim N(0, 1)$. Normaalijakaumalla on tilastollisessa päättelyssä hyvin keskeinen rooli. Siitä voidaan johtaa useita tilastollisessa päättelyssä hyödyllisiä jakaumia. [21, s. 31-32]

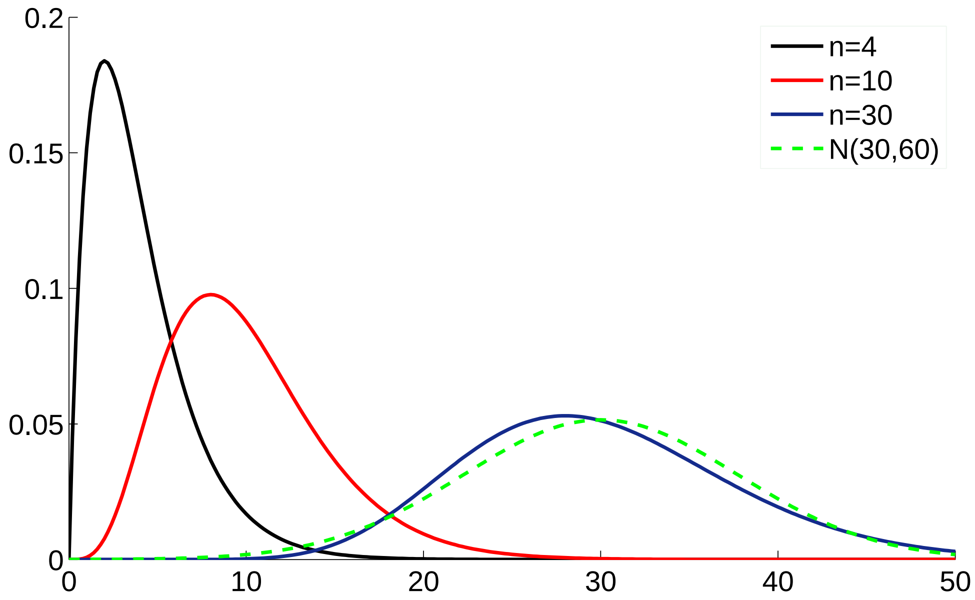
2.2.2 χ^2-jakauma

Olkoon satunnaismuuttujan Z jakauma standardoitu normaalijakauma. Tällöin Z^2 noudattaa χ^2-jakaumaa vapausastein 1 (merkitään $Z^2 \sim \chi^2(1)$). Tilastollisessa testaamisessa χ^2-jakaumalla on tärkeä rooli [21, s. 32-33]. Siitä kerrotaan lisää Kappaleessa 2.4.

Jos satunnaismuuttujat $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ noudattavat standardinormaalijakaumaa ja ovat riippumattomia niin niiden neliösumma

$$U = {Z_1}^2 + {Z_2}^2 + \cdots + {Z_n}^2 \tag{2.3}$$

noudattaa χ^2-jakaumaa vapausastein $\chi^2(n)$. Tätä merkitään $U \sim \chi^2(n)$ [21, s. 31-32]. Tässä jakaumassa vapausaste siis määräytyy neliösummassa summattavien satunnaismuuttujien lukumäärän mukaan. Jakauman muoto on erilainen riippuen vapausasteesta n. Keskeisen raja-arvolauseen perusteella suurilla vapausasteen n arvoilla ($n \geq 30$) χ^2-jakauma on likimain normaalijakauma $N(n, 2n)$. ([1, s. 72-73], [28, s. 9]) Kuvassa 2.1 on piirretty muutamia χ^2-jakaumien tiheysfunktioita sekä normaalijakauman $N(30, 60)$ tiheysfunktio.



Kuva 2.1: Muutamia χ^2-jakaumien tiheysfunktioita vapausasteella n ja normaalijakauman $N(30,60)$ tiheysfunktion kuvaaja.

Tiheysfunktio χ^2-jakaumalle, kun $n \in \mathbb{N}$, on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}, & \text{kun } x > 0 \\ 0, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

missä Γ on Eulerin gammafunktio

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty w^{u-1}e^{-w}dw, \qquad u > 0. \tag{2.5}$$

2.2.3 Studentin t-jakauma

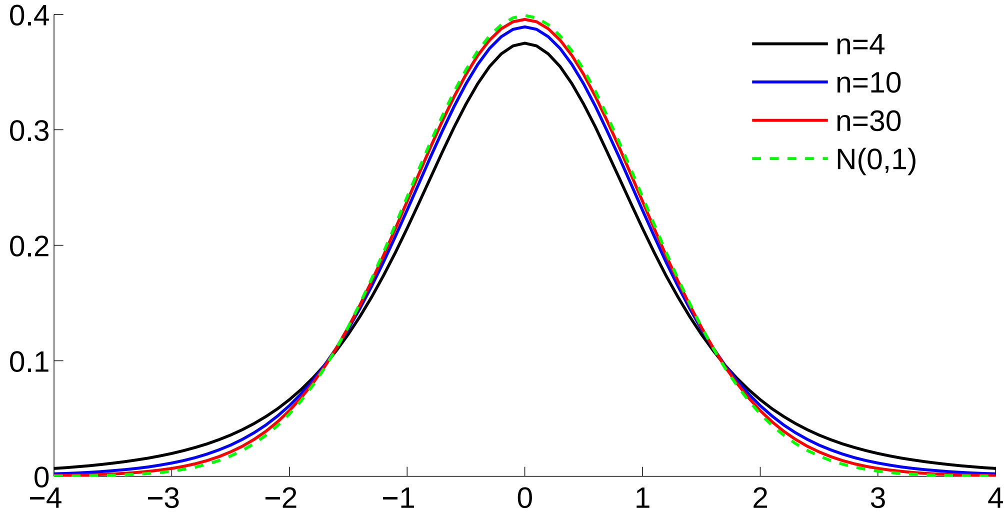
Studentin t-jakaumaa hyödynnetään tilastollisessa testaamisessa t-testiä käytettäessä. Jos satunnaismuuttujat Z ja U ovat riippumattomat, Z noudattaa standardinormaalijakaumaa ja U puolestaan χ^2-jakaumaa vapausasteella n, niin satunnaismuuttuja

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}} \tag{2.6}$$

noudattaa t-jakaumaa vapausastein n. Tätä merkitään $t \sim t(n)$. ([21, s. 32], [28, s. 11]) Studentin t-jakauman tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Studentin t-jakauman vapausaste määräytyy satunnaismuuttujan U vapausasteen perusteella. Normaalijakauman tavoin myös t-jakauma on odotusarvon suhteen symmetrinen muistuttaen näin osittain normaalijakaumaa. Suurella vapausasteen n arvolla ($n \geq 30$) jakauma onkin varsin tarkasti standardinormaalijakauma ([1, s. 75], [28, s. 11]). Kuvassa 2.2 näkyy, kuinka vapausasteen kasvaessa, jakauman muoto lähenee standardinormaalijakaumaa (vihreä).



Kuva 2.2: Muutamia t-jakaumien tiheysfunktioiden kuvaajia vapausasteella n ja normaalijakauman $N(0,1)$ tiheysfunktion kuvaaja.

2.3 Tilastollisia tunnuslukuja

Tässä kappaleessa käsitellään työn kannalta keskeisimpiä tilastollisia tunnuslukuja. Sijaintiluvuista tarkastellaan moodia, mediaania ja aritmeettista keskiarvoa. Sijaintiluvut kuvaavat, mihin suuruusluokkaan tai mittaustason kohtaan suurin osa muuttujan havainnoista sijoittuu. Ne esittävät muuttujan tyypillisimmän arvon tai ainakin luvun, jonka läheisyydessä muuttujan arvoja on eniten. Hajontaluvut puolestaan kuvaavat muuttujan arvon vaihtelua. [41, s. 121, 123] Hajontaluvuista tässä työssä käsitellään keskihajonta.

Moodi eli tyyppiarvo ilmaisee, mitä arvoa aineistossa on eniten. Se on siis se luokka tai muuttujan arvo, missä esiintymistiheys eli frekvenssi on suurin. Keskilukuna moodi sopii moniin tilanteisiin aritmeettista keskiarvoa paremmin, sillä siihen eivät vaikuta äärimmäiset havaintoarvot. ([40, s. 51], [41, s. 121])

Mediaani kuvaa aineiston keskimmäistä havaintoa suuruusjärjestyksessä olevassa aineistossa. Mediaanin molemmille puolille jää yhtä monta havaintoa. Jos aineistossa on parillinen määrä havaintoja, voidaan mediaaniksi valita lähinnä keskikohtaa olevien arvojen aritmeettinen keskiarvo. ([40, s. 51], [41, s. 122])

Aritmeettinen keskiarvo $\bar{x}$ on sijaintiluvuista tunnetuin. Sen avulla voidaan kuvata havaintoarvojen keskimääräistä suuruutta. Keskiarvo on erittäin herkkä poikkeaville havainnoille, minkä vuoksi se ei anna kovin tarkkaa ja oikeaa kuvaa jakaumasta, jos havaintoarvojen joukossa on yksikin muista arvoista suuresti poikkeava arvo. Tämän vuoksi mediaani ja moodi ovat monissa tilanteissa suositeltavampia tunnuslukuja tilastollisen aineiston tulkinnassa. [41, s. 123]

Keskihajonta s kuvaa, kuinka kaukana yksittäisen muuttujan arvot ovat keskimääräisen muuttujan arvosta. Toisin sanoen se ilmaisee muuttujien arvojen etäisyyttä suhteessa muuttujien arvojen aritmeettiseen keskiarvoon. Pieni keskihajonta tarkoittaa, että muuttujan arvot ovat lähellä keskiarvoa ja suuri, että muuttujan arvot ovat hajonneet laajalle alueelle. [41, s. 124-125] Otoskeskihajonta on varianssin neliöjuuri ja se saadaan laskettua kaavalla

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}, \tag{2.8}$$

missä x_i on yksittäisen havainnon arvo ja N on havaintojen lukumäärä. [40, s. 53]

2.4 Tilastollinen testaus

Hypoteesi on tarkoittaa tutkijan ennakko-oletusta tutkimustuloksesta. Hypoteesin testauksessa tutkitaan tutkijan hypoteesille asetettua oletusta ja tutkimuksen avulla saatua tulosta. Testauksen tarkoitus on antaa tukea päätöksen tekoon: onko tutkimuksen tulos hypoteesin mukainen vai onko hypoteesi hylättävä. Testauksesta ja sen avulla saadusta riskitasosta huolimatta tutkija joutuu itse tekemään tulkinnan siitä, voidaanko tutkittavan otoksen perusteella tehdä yleistyksiä perusjoukossa. [41, s. 132-133]

Testauksen ensimmäisessä vaiheessa tutkimushypoteesi ilmaistaan tilastollisen hypoteesin muodossa nollahypoteesin H_0 avulla. Nollahypoteesi voidaan matemaattisesti ilmaista muodossa:

$$H_0 : \theta = \theta_0, \tag{2.9}$$

missä θ on testattava parametri. [21, s. 41]

Nollahypoteesia vastaan olevaa vaihtoehtoista hypoteesia H_1 kutsutaan vastahypoteesiksi. Vastahypoteesi H_1 voidaan puolestaan muotoilla seuraavasti:

$$H_1 : \theta > \theta_0 \tag{2.10}$$

$$H_1 : \theta < \theta_0 \tag{2.11}$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0. \tag{2.12}$$

Kaksi ensin mainittua ovat yksisuuntaisia vastahypoteeseja. Viimeinen on puolestaan kaksisuuntainen vastahypoteesi. Yleisesti ottaen voidaan sanoa, että yksisuuntaisen hypoteesin asettaminen edellyttää aikaisempaa tutkimusta tai tuntemusta tutkittavasta ilmiöstä [18, s. 411-413]. Tässä työssä tilastollisessa testauksessa käytetään kaksisuuntaista vastahypoteesiä.

Nollahypoteesi ja vastahypoteesi eivät ole samanarvoisia, vaan uusi vastahypoteesi on osoitettava päteväksi tiukemmin kriteerein kuin nollahypoteesi. Poikkeamat eri tilastollisissa tunnusluvuissa halutaan aina ensin selittää johtuvaksi satunnaisesta vaihtelusta, jotta ei tehtäisi varomattomasti paikkaansa pitämättömiä johtopäätöksiä. Vasta sitten, kun tunnuslukujen poikkeamat ovat tarpeeksi suuria, voidaan sanoa poikkeamien johtuvan jostain muusta kuin satunnaisvaihtelusta. Tällaisessa tapauksessa nollahypoteesi hylätään. [18, s. 413]

Hypoteesin testaamisen ajatus on siinä, että vain toinen hypoteeseista H_0 ja H_1 on oikea. Vastahypoteesi hyväksytään, jos nollahypoteesi pystytään kumoamaan. Toisaalta, jos vastahypoteesi ei kumoa nollahypoteesiä, jää nollahypoteesi voimaan. [18, s. 413]

Päätösteoriassa tarkastellaan nollahypoteesin H_0 hylkäämistä ja hyväksymistä. Keskeisin apuväline hypoteesien tutkimiseen on testisuure, millä tarkoitetaan "sellaista tilastollista menettelyä, jolla pyritään pääsemään selvyyteen siitä, jääkö H_0 voimaan vai hylätäänkö se". Testisuureeksi käy mikä tahansa tunnusluku, joka toteuttaa seuraavat ehdot: [18, s. 413-414]

- Testisuureen suuret arvot tarkoittavat, että aineisto puhuu nollahypoteesia vastaan ja erityisesti, mitä suuremman arvon testisuure saa, sitä voimakkaammin se puhuu nollahypoteesia vastaan.

- Testisuureen taustalla oleva jakauma tunnetaan, kun H_0 on voimassa.

Päätösteoriassa keskeistä on, millä todennäköisyydellä nollahypoteesin hylkäämisessä tehtiin virhe. Tällöin tutkitaan merkitsevyystasoa eli riskitasoa hylätä oikea nollahypoteesi. Yleisesti käytössä olevia riskitasoja ovat 0,05, 0,01 ja 0,001. ([18, s. 414], [21, s. 42])

Tilastollisessa testauksessa käytettävä p-arvo on todennäköisyys, jolla vähintäänkin yhtä merkittävät ero tuloksessa saadaan käyttämällä nollahypoteesia H_0 kuin vastahypoteesia H_1. Se siis kertoo, millä todennäköisyydellä nollahypoteesi H_0 on oikea. [21, s. 42-43] Yleisesti tieteellisellä kentällä on tapana käyttää kolmea eri merkitsevyystasoa:

Taulukko 2.1: p-arvon tulkinta [18, s. 416]

p-arvo	Riskitaso	Sanallinen kuvaus
p < 0,001	0,1 %	erittäin merkitsevä
p < 0,01	1,0 %	merkitsevä
p < 0,05	5,0 %	melkein merkitsevä

Lisäksi, jos $0,05 < p < 0,10$, voidaan saatua tulosta pitää tilastollisesti suuntaa antavana eli oireellisena [7, s. 7]. Merkitsevyystason eli p-arvon ilmoittamalla riskillä nollahypoteesi hylätään. Mitä pienempi p-arvo on, sitä pienempi riski on, että nollahypoteesi hylätään virheellisesti. Edellä mainitut p-arvot ovat vakiintuneita tyypillisesti tieteessä käytettyjä riskitasoja. Niiden tulkinta on kuitenkin aina tutkijan omalla vastuulla. On jossain määrin jopa mieletöntä, että tilastollisessa testaamisessa p-arvon avulla tehtävä johtopäätös on radikaalisti erilainen, jos arvo on $0,052$ tai $0,048$. Tämän vuoksi p-arvon ilmoittaminen sanallisen kuvauksen lisäksi on hyvä tieteellinen tapa [18, s. 417]. Hypoteesien testaamisen lisäksi p-arvoa voidaan käyttää mallien sopivuuden mittana, eli kuvaamaan kuinka hyvin jokin malli kuvaa aineistoa. [21, s. 43]

2.5 Ristiintaulukointi ja χ^2-testi

Ristiintaulukoinnin avulla pyritään selvittämään liittyvätkö vertailtavat muuttujat toisiinsa vai eivät [40, s. 72]. Mikäli halutaan eksakti tieto siitä, onko ryhmien välillä todellista eroa vai johtuuko se sattumasta, voidaan asiaa tutkia Khiin neliö- eli χ^2-testin avulla [18, s. 333].

Vertailtavien populaatioiden jakaumat ovat äärellisiä diskreettejä jakaumia. Olkoon populaation 1 tapaukset $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ja populaation 2 tapaukset vastaavasti $S_1, S_2, \ldots, S_l$. Lisäksi tapauksille voidaan määrittää pistetodennäköisyydet:

$$P(T_1) = p_1, \ldots, P(T_k) = p_k \quad \text{ja} \quad P(S_1) = q_1, \ldots, P(S_l) = q_l. \tag{2.13}$$

Testiä varten tarvitaan myös yhteispistetodennäköisyydet

$$P(T_i \cap S_j) = p_{ij} \quad (i = 1, \ldots, k \text{ ja } j = 1, \ldots, l). \tag{2.14}$$

Näitä todennäköisyyksiä ei kuitenkaan oleteta tunnetuiksi, sillä testaus tehdään otoksien lukumäärien avulla. Tapauksien $T_1, \ldots, T_k$ esiintymisfrekvenssit satunnaismuuttujina ovat $F_1, \ldots, F_k$ ja otoksessa realisoituneina lukuina $f_1, \ldots, f_k$. Vastaavasti tapauksien $S_1, \ldots, S_l$ frekvenssit satunnaismuuttujina ovat $G_1, \ldots, G_l$ ja otoksesta realisoituneina lukuina $g_1, \ldots, g_l$. Yhteistapauksen $P(T_i \cap S_j)$ esiintymisfrekvenssi on satunnaismuuttujana F_{ij} ja otoksessa realisoituneena lukuna f_{ij}. Näiden avulla saadaan muodostettua seuraavanlainen kontigenssitaulu, missä N on otoskoko.

	S_1	S_2	$\ldots$	S_l	$\sum$
T_1	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$\ldots$	$f1,l$	f_1
T_2	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$\ldots$	$f2,l$	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
T_k	$f_{k,1}$	$f_{k,2}$	$\ldots$	fk,l	f_k
$\sum$	g_1	g_2	$\ldots$	g_l	N

Populaatioiden riippumattomuus on nyt nollahypoteesi H_0. Tämän testaamiseen voidaan muodostaa testisuure

$$h = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(f_{i,j} - \frac{f_i g_j}{N}\right)^2}{\frac{f_i g_j}{N}}, \tag{2.15}$$

joka noudattaa likimain χ^2-jakaumaa vapausasteella $n = (k-1)(l-1)$, kun H_0 on tosi ja N on suuri. Tämän todistus on suhteellisen pitkä. Kiinnostunut lukija voi perehtyä todistukseen lähteen [17, s. 63, 81] avulla. Testin optimaalisen toiminnan kannalta lukujen $f_i g_j / N$ tulisi kaikkien olla vähintään viisi. Se ei kuitenkaan ole testin välttämätön edellytys. Mitä suurempi otoskoko N on, sitä tarkemmin testisuure h noudattaa χ^2-jakaumaa. [28, s. 42-43]

Taulukosta voidaan määritetyn h-arvon avulla lukea, millä todennäköisyydellä muuttujat eroavat toisistaan jonkun ominaisuuden suhteen. Tämä tapahtuu siis p-arvoa tarkastelemalla. [18, s. 333-334] Mitä suurempi laskettu h-arvo on, sitä pienempi on p-arvo ja täten sitä merkitsevämpi ero tilastollisesti ryhmien välillä on jossain ominaisuudessa [40, s. 115].

Tässä tutkimuksessa otoskoko on sen verran suuri, että χ^2-testiä voidaan soveltaa tutkimukseen sellaisenaan. Tutkimuksille, joissa otoskoko on pienempi, tarvitsee usein käyttää Yatesin jatkuvuuskorjainta tai Fisherin tarkkaa testiä, jotta tulokset olisivat luotettavia. [18, s. 336-336]

2.6 Korrelaatio ja sen merkitsevyys

Kahden muuttujan välisen yhteyden tärkeä indikaattori on korrelaatio. Muuttujat voivat korreloida positiivisesti, mikä tarkoittaa sitä, että ensimmäisen muuttujan arvon ollessa korkea, myös toinen arvo on korkea. Toisaalta korrelaatio voi olla myös negatiivinen. Tällöin ensimmäisen muuttujan arvon ollessa korkea, toinen on pieni. [18, s. 339]

Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokertoimen, jota nimitetään lyhyesti myös vain korrelaatioksi, avulla voidaan mitata kahden intervalli- tai suhdelukuasteikollisen muuttujan välistä riippuvuutta. Korrelaatio määriteltiin aikaisemmin Määritelmässä 4.22.

Korrelaatiokerroin r voi saada arvoja välilä $[-1 \dots 1]$. Mitä lähempänä luku on nollaa, sitä vähemmän muuttujien välillä on yhteyttä keskenään. Voidaan sanoa, että jos korrelaatiokerroin on välillä $[0{,}8 \dots 1]$, se on erittäin korkea. Välillä $[0{,}6 \dots 0{,}8[$ korrelaatio on puolestaan korkea ja välillä $[0{,}4 \dots 0{,}6[$ melko korkea. [18, s. 345-346]

Korrelaation tilastollista merkitsevyyttä voidaan tutkia testisuureen avulla, joka noudattaa nollahypoteesin vallitessa t-jakaumaa vapausastein $N-2$. Nollahypoteesi H_0 on "korrelaatio ei perusjoukossa eroa nollasta". Testisuure saadaan laskettua kaavalla

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{2.16}$$

missä r on korrelaatiokerroin ja N on otoskoko. Testisuureen avulla voidaan t-taulukosta lukea sitä vastaava p-arvo, joka tarkoittaa korrelaation tilastollista merkitsevyyttä. [18, s. 346-347]

Korrelaatiokertoimen merkitsevyys riippuu korrelaatiosta r ja otoskoosta N. Jos otoskoko on pieni, ei suurikaan korrelaatio ole tilastollisesti merkitsevä. Toisaalta suuressa otoksessa pienempikin korrelaatio on tilastollisesti merkitsevä. Korrelaatio siis saattaa olla tilastollisesti merkitsevä, vaikka se ei olisikaan kovin suuri. [18, s. 347]

3. OPINTOJEN ETENEMINEN TAMPEREEN TEKNILLISESSÄ YLIOPISTOSSA

Tässä luvussa tutkitaan opiskelijoiden opinnoissa suoriutumista Tampereen teknillisessä yliopistossa (TTY) vuosina 2010-2014. Erityinen mielenkiinto kohdistuu matematiikan perusopintoihin ja niiden suorittamiseen.

3.1 Tausta

Matematiikan ensimmäisen vuoden perusopintoihin kuuluvat pääsääntöisesti insinöörimatematiikan opintojaksot 1 (5 op), 2 (5 op), 3 (5 op) ja 4 (4 op). Tietotekniikan ja tietojohtamisen koulutusohjelmissa opintojakson insinöörimatematiikka 4 sijaan suoritetaan algoritmimatematiikka (4 op). Lisäksi vuodesta 2013 lähtien sähkötekniikan koulutusohjelmassa insinöörimatematiikka 4 -opintojakson on voinut korvata jollain toisen vuoden matematiikan perusopintojen opintojaksolla. Osassa opintosuunnista, käytettävästä opinto-oppaasta riippuen, insinöörimatematiikan opintojaksojen sijaan opiskelijat suorittavat sisällöltään matemaattisesti syvällisemmät opintojaksot matematiikka 1 (5 op), 2 (5 op), 3 (5 op) ja 4 (4 op). [34; 35; 36; 37]

Toisen vuoden matematiikan perusopinnot muodostuvat opintojaksoista algoritmimatematiikka (4 op), todennäköisyyslaskenta (4 op), vektorianalyysi (4 op), tilastomatematiikka (4 op), Fourier'n menetelmät (4 op), operaatiotutkimus (4 op) ja diskreettimatematiikka (4 op). Riippuen opintosuunnasta ja käytössä olevasta opinto-oppaasta edellä mainituista opintojaksoista on sisällytettävä tutkintoon vähintään 1-3 opintojaksoa. Tietotekniikan ja tietojohtamisen opintosuunnissa toisen vuoden opintojaksona voidaan suorittaa myös insinöörimatematiikka 4 (4 op). Teknis-luonnontieteelliseen opintosuuntaan kuuluu enemmän matematiikan perusopintoja, joista osa on eri opintojaksoja kuin edellä mainitut. [34; 35; 36; 37]

Yhteenveto Tampereen teknillisen yliopiston opintosuunnista, niiden lyhenteistä ja niihin kuuluvista matematiikan perusopinnoista on esitettynä Taulukossa 3.1.

Taulukko 3.1: Opintosuunnat, niiden lyhenteet sekä 1. ja 2. vuoden matematiikan perusopinnot koulutusohjelmittain [34; 35; 36; 37].

Opintosuunta	Lyhenne	1. vuosi: 2010-2013	1. vuosi: 2013 ->
Automaatiotekniikka	AU	Ins.mat. 1-4	Ins.mat. 1-4
Biotekniikka	B	Ins.mat. 1-4	Matematiikka 1-4
Konetekniikka	K	Ins.mat. 1-4	Ins.mat. 1-4
Materiaalitekniikka	M	Ins.mat. 1-4	Ins.mat. 1-4
Rakennustekniikka	R	Ins.mat. 1-4	Ins.mat. 1-4
Sähkötekniikka	S	Ins.mat. 1-4	Ins.mat. 1-3
Signaalinkäsittely ja tietoliikennetekniikka	SITI	Ins.mat. 1-4	Lakkautettu opintosuunta
Tietotekniikka	TI	Ins.mat. 1-3 + alg.mat.	Ins.mat. 1-3 + alg.mat.
Tietojohtaminen	TJ	Ins.mat. 1-3 + alg.mat.	Ins.mat. 1-3 + alg.mat.
Teknis-luonnontieteellinen	TL	Laaja mat. 1-4	Matematiikka 1-4
Tuotantotalous	TU	Ins.mat. 1-4	Ins.mat. 1-4
Ympäristö- ja energiatekniikka	Y	Ins.mat. 1-4	Matematiikka 1-4
2. vuoden opintojaksoja suoritetaan 1-3 opintosuunnasta ja käytössä olevasta opinto-oppaasta riippuen			

Tarkasteltavat opiskelijat ovat aloittaneet opintonsa TTY:llä vuosina 2010-2013. Tutkimuksessa käytetään monissa yhteyksissä käsitettä lukuvuosi ja sen perässä jotain vuosilukua. Tällä käsitteellä viitataan aina kokonaiseen kahden lukukauden mittaiseen ajanjaksoon eli lukuvuoteen, joka on alkanut kyseisenä vuotena. Esimerkiksi lukuvuosi 2010 viittaa lukuvuoteen 2010-2011.

3.2 Tutkimusaineisto, -menetelmä ja toteutus

Tutkimuksessa analysoitiin opiskelijoiden matematiikan opintopistemääriä ensimmäisenä ja toisena opiskeluvuotena. Ensimmäisen opiskeluvuoden opintojen suoriutumista tarkasteltiin vuosina 2010-2013 aloittaneilla opiskelijoilla. Toisen vuoden opintojen etenemisen tutkimuksessa mukana olivat puolestaan vuosina 2010-2012 aloittaneet opiskelijat. Tarkastelun kohteena oli, kuinka suuri osuus eri opintosuuntien opiskelijoista suoritti tavoitteen mukaiset 19 opintopistettä ensimmäisen opiskeluvuoden aikana. Vastaavasti selvitettiin, kuinka monta prosenttia opintosuuntien opiskelijoista oli toisen vuoden loppuun mennessä suorittanut kaikki opintosuunnan opinto-oppaan määritetyt matematiikan perusopinnot. Matematiikan perusopintojen suorittamisen lisäksi tarkasteltiin opintojen etenemistä yleisesti. Tämä tehtiin selvittämällä, kuinka suuri osuus opiskelijoista on ensimmäisenä ja toisena opiskeluvuonna suorittanut opintoja 55 opintopistettä tai enemmän. 55 opintopistettä suorittavien opiskelijoiden lukumäärä on mielenkiintoinen myös siksi, että se vaikuttaa TTY:n rahoituksen määrään merkittävästi (11 %) [23].

Opiskelijoiden opinnoissa etenemiseen liittyvä selvitys tehtiin pääosin syksyn 2014 aikana Excel-ohjelmistoa hyödyntäen. Tutkimuksessa käytetty aineisto on peräisin

Tampereen teknillisen yliopiston opintotoimiston tietokannasta. Tutkimus on luonteeltaan kartoittava, joten siinä ei oteta kantaa siihen, mistä opintosuuntien väliset ja sisäiset erot opintojen suorittamisessa eri vuosien välillä johtuvat. Tavoitteena on ainoastaan antaa kokonaiskuva opintojen suorittamisesta eri opintosuunnissa eri vuosina. Tarkempi vuosittaisten erojen syiden analysointi vaatisi kattavaa lisätutkimusta. Sen suorittaminen jätetään jatkotutkimusten harteille.

3.3 Tulokset

Tarkastellaan seuraavaksi opintojen etenemisen tuloksia eri opintosuunnissa eri vuosina aloittaneilla opiskelijoilla. Aluksi tutkitaan opiskelijoiden opinnoissa etenemistä heidän ensimmäisenä opiskeluvuotenaan. Tämän jälkeen opinnoissa suoriutumista tarkastellaan myös toisena opiskeluvuotena. Opintojen etenemisen vuosittaisten erojen tilastollinen merkitsevyys eri opintosuunnissa on raportoitu Liitteisiin B.1 ja B.2. Tilastollinen testaus on tehty käyttämällä kaksisuuntaista vastahypoteesiä

3.3.1 Ensimmäisen vuoden opintojen eteneminen

Tässä kappaleessa tarkastellaan, kuinka monta prosenttia eri opintosuuntien opiskelijoista suorittaa matematiikan ensimmäisen vuoden perusopinnot (19 op) ensimmäisen opiskeluvuoden aikana. Suoritettavia matematiikan opintojaksoja ei ole yksilöity tarkemmin, vaan tässä selvityksen lähtökohtana on ainoastaan suoritettujen opintopisteiden lukumäärä. Lisäksi matematiikan opintojen suorittamisaktiivisuutta verrataan opiskelijoiden yleiseen suoriutumiseen opinnoissa. Yleiseksi tavoitteeksi on tässä tutkimuksessa asetettu, että opiskelijat suorittaisivat 55 opintopistettä lukuvuoden aikana.

Tutkittavasta aineistosta on rajattu pois opiskelijat, joilla on aikaisempia suorituksia matematiikasta esimerkiksi edellisessä opintosuunnassa tai korkeakoulussa. Lisäksi opiskelijat, joilla ei ole tarkasteluvuonna yhtään opintosuoritusta yhdessäkään oppiaineessa, on rajattu tutkittavan aineiston ulkopuolelle, sillä tällöin katsotaan, että he eivät ole yliopistossa aktiivisesti läsnäolevia opiskelijoita. Taulukossa 3.2 on esitetty opiskelijoiden ensimmäisen vuoden opinnoissa eteneminen eri opintosuunnissa opintojen aloitusvuoden mukaan jaoteltuna.

Taulukko 3.2: Suhteelliset osuudet eri opintosuuntien opiskelijoista, jotka suorittavat ensimmäisenä opiskeluvuotenaan matematiikan perusopinnot (19 op). Lisäksi on esitetty suhteelliset osuudet opiskelijoista, jotka suorittavat 55 opintopistettä tai enemmän ensimmäisenä opiskeluvuotenaan. Taulukon vuosiluku kuvaa opintojen aloitusvuotta. Opintosuunnan koko tarkoittaa opiskelijoiden keskimääräistä lukumäärää kyseisessä opintosuunnassa tarkasteltavien vuosien aikana.

Opinto-suunta	Opinto-suunnan koko	1. vuoden opinnot							
		19 op. matematiikkaa suoritettu				55 op. suoritettu			
		2010	2011	2012	2013	2010	2011	2012	2013
TL	41	59,6 %	56,6 %	74,4 %	77,8 %	55,3 %	42,2 %	71,4 %	63,9 %
AU	61	60,3 %	49,1 %	44,8 %	48,3 %	45,2 %	35,8 %	44,8 %	40,0 %
SITI	25	33,3 %	21,7 %	12,0 %	-	33,3 %	17,4 %	16,0 %	-
TU	42	71,2 %	74,4 %	59,5 %	77,8 %	69,2 %	64,1 %	59,5 %	88,9 %
Y	33	80,6 %	65,7 %	58,3 %	45,8 %	61,1 %	57,1 %	75,0 %	45,8 %
B	19	64,3 %	36,0 %	52,9 %	70,0 %	71,4 %	36,0 %	70,6 %	60,0 %
S	78	62,0 %	41,3 %	48,8 %	51,8 %	33,8 %	28,0 %	47,6 %	56,6 %
TJ	42	36,0 %	16,7 %	36,6 %	66,7 %	30,0 %	19,0 %	31,7 %	66,7 %
TI	81	29,3 %	27,8 %	50,6 %	50,0 %	16,0 %	16,7 %	25,9 %	29,5 %
K	64	36,8 %	63,2 %	53,6 %	63,5 %	24,6 %	29,8 %	49,3 %	39,2 %
R	88	39,1 %	48,4 %	64,1 %	59,0 %	27,2 %	29,7 %	34,8 %	51,3 %
M	47	42,2 %	31,0 %	50,9 %	51,6 %	31,1 %	25,9 %	43,4 %	41,9 %
YHT % / N		49,5 % 316	43,8 % 277	52,0 % 329	58,4 % 323	37,6 % 240	31,4 % 199	44,5 % 282	49,9 % 276

Taulukosta 3.2 havaitaan, että suoritetuilla matematiikan opintopisteillä ja 55 opintopisteen kertymisellä on selvä riippuvuus. Tämä johtuu siitä, että matematiikan perusopintojen osuus on varsin suuri ensimmäisen vuoden opintojen kokonaismäärästä. Lisäksi huomataan, että 19 opintopistettä ensimmäisenä vuonna matematiikkaa opiskelevien ja yhteensä kaikkia aineita 55 opintopistettä tai enemmän opiskelevien opiskelijoiden suhteellinen määrä on tarkasteltavien vuosien aikana kasvanut. Ero on sekä matematiikan opintojen etenemisen että yleisen opintojen suorittamisen suhteen tilastollisesti erittäin merkitsevä ($p < 0{,}00005$). Opinnoissa edistyminen on siis kehittynyt hyvin tarkasteltavien vuosien aikana. Vuosi 2011 on tässä suhteessa kuitenkin poikkeava. Vuonna 2011 aloittaneilla opiskelijoilla kertyi sekä matematiikan opintoja että opintoja yleisesti selvästi heikommin muihin tarkasteltaviin vuosiin verrattuna. Taulukosta 3.2 havaitaan myös, että ensimmäisen vuoden matematiikan perusopintoja suoritetaan vaihtelevalla aktiivisuudella opintosuunnasta riippuen. Tarkastellaan seuraavaksi opintosuuntakohtaisia eroja hieman tarkemmin. Ensimmäisen vuoden matematiikan perusopintojen opintopistekertymien pylväsdiagrammit eri opintosuunnissa on esitettynä Liitteessä A.

Opintosuuntakohtaiset erot

Matematiikan ensimmäisen vuoden perusopinnot suorittaa tavoiteaikataulussa noin puolet TTY:n opiskelijoista. Teknis-luonnontieteellisen ja tuotantotalouden opiskelijoista suurin saa ensimmäisen vuoden matematiikan perusopinnot suoritettua tavoiteaikataulussa. Heikoiten ensimmäisen vuoden matematiikan perusopinnot saavat valmiiksi tietotekniikan, tietojohtamisen sekä materiaalitekniikan opiskelijat. Viime vuosina osassa edellä mainituista opintosuunnista on kuitenkin tapahtunut merkittävää kehitystä matematiikan opintojen suorittamisen suhteen. Tietotekniikan ja tietojohtamisen, mutta myös konetekniikan ja rakennustekniikan opiskelijoilla suoritusaktiivisuus on kohentunut huomattavasti tarkasteltavien vuosien aikana (TI: 29,3 % → 50,0 %; TJ: 36,0 % → 66,7 %; K: 36,8 % → 63,5 %; R: 39,1 % → 59,0 %). Eroja vuosien 2010 ja 2013 välillä opinnoissa suoriutumisessa voidaan pitää tilastollisesti merkitsevinä (TI: $p = 0{,}009$; TJ: $p = 0{,}006$; K: $p = 0{,}002$; R: $p = 0{,}010$).

Positiivisena kehityksenä voidaan pitää myös sitä, että vuonna 2013 biotekniikan ja teknis-luonnontieteellisen opintosuunnissa puolet opiskelijoista suoritti matematiikan opintoja ensimmäisenä opiskeluvuotenaan enemmän kuin tavoitteen mukaiset 19 opintopistettä. Tietotekniikan ja materiaalitekniikan opintosuunnissa vuonna 2010 noin viidennes opiskelijoista ei opiskellut ensimmäisenä vuotenaan yhtäkään matematiikan opintojaksoa. Vuonna 2013 vastaava luku oli enää alle viisi prosenttia (kts. tarkemmin Liitteestä A).

Negatiivista kehitys matematiikan perusopintojen suorittamisessa on ollut ympäristö- ja energiatekniikan opintosuunnassa. Vuonna 2010 aloittaneista ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoista valtaosa (80 %) suoritti ensimmäisen vuoden matematiikan opinnot tavoiteajassa. Vuonna 2013 ensimmäisen vuoden matematiikan opinnot suoritti enää alle puolet (45,8 %) opintosuunnan opiskelijoista. Verrattaessa vuoden 2010 ja 2013 opiskelijoiden opinnoissa suoriutumista keskenään, on ero tilastollisesti merkitsevä ($p = 0{,}005$). Mielenkiintoista on myös se, että vuonna 2013 aloittaneista ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoista joka kahdeksas (12,5 %) ei suorittanut yhtäkään ensimmäisenä vuoden matematiikan perusopintojen opintojaksoa (Liite A.12). Muina vuosina vastaavia tapauksia ei ole ollut juuri lainkaan.

Opintojen yleinen suorittamisaktiivisuus on parantunut tarkasteltavien vuosien aikana. 55 opintopistettä ensimmäisenä opiskeluvuotena suorittavien opiskelijoiden osuus on kasvanut 37,6 prosentista noin 50 prosenttiin. Kehitystä on tapahtunut liki kaikissa opintosuunnissa. Selkeintä kehitys on ollut tietotekniikan, tietojohtamisen, rakennustekniikan, sähkötekniikan ja tuotantotalouden opintosuunnissa. Erot vuosien 2010 ja 2013 välillä edellä mainituissa opintosuunnissa ovat opintosuunnasta riippuen tilastollisesti melkein merkitseviä (TI: $p = 0{,}047$), merkitseviä (S: $p = 0{,}005$; TU: $p = 0{,}030$) tai erittäin merkitseviä (TJ: $p = 0{,}001$; R: $p = 0{,}001$). Ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoilla matematiikan opintojen etenemisen lisäksi myös yleinen opintojen suorittaminen on tarkasteltavien vuosien aikana heikentynyt. Eroa ei kuitenkaan voi pitää tilastollisesti merkitsevänä ($p = 0{,}244$).

3.3.2 Opintojen yleinen eteneminen toisena opiskeluvuotena

Tässä kappaleessa tarkastellaan yleistä opintojen etenemistä sekä matematiikan perusopintojen etenemistä eri aloitusvuosien opiskelijoilla opintosuunnittain toisena opiskeluvuotena. Tarkoituksena on tutkia, kuinka suuri osa opiskelijoista suorittaa kaikki opintosuunnan tavoitteen mukaiset matematiikan perusopinnot toisen lukuvuoden loppuun mennessä. Lisäksi selvitetään, kuinka moni opiskelija suorittaa yleisesti opintoja 55 opintopistettä tai enemmän toisen opiskeluvuoden aikana.

Kappaleessa ei yksilöidä suoritettavaa matematiikan kurssia. Tutkitaan siis ainoastaan, onko opiskelija suorittanut matematiikan opintoja yhteensä opinto-oppaassa määritetyn opintopistemäärän verran. Opintosuuntien perusopintojen matematiikan opintopistemäärät vaihtelevat opintosuunnittain ja ovat tarkemmin esitettynä Taulukossa 3.3.

Taulukko 3.3: Opintosuuntien kandidaattivaiheen perusopintoihin kuuluva matematiikan opintopistemäärävaatimus vuosina 2010-2012 aloittaneilla opiskelijoilla [35; 36; 37].

Opintosuunta	Opintopistemäärä
AU	31
B	27
K	23
M	23
R	23
S	27
SITI	31
TI	27
TJ	27
TL	37
TU	27
Y	27

Joissakin opintosuunnissa opiskelijalla on valittavanaan perusopintojen opintojaksoja matematiikan ja jonkun muun aineen väliltä. Tällöin kyseenomaisen opintosuunnan opiskelijoilla kuuluu perusopintoihin eri määrä matematiikan opintoja. Taulukossa 3.3 kandidaattivaiheen matematiikan opintopistemäärävaatimus on asetettu opinto-oppaan minimin mukaisesti.

Matematiikan opintosuorituksia tutkitaan kahden ensimmäisen lukuvuoden ajalta. Aineistosta on rajattu pois opiskelijat, joilla ei ole opintosuorituksia ensimmäisenä tai toisena läsnäolovuonna. Lisäksi tutkittavan aineiston ulkopuolelle on rajattu opiskelijat, jotka ovat opiskelleet matematiikkaa ennen ensimmäistä läsnäolovuotta nykyisessä opintosuunnassaan.

Taulukossa 3.4 on esitetty opiskelijoiden toisen vuoden opinnoissa eteneminen eri opintosuunnissa opintojen aloitusvuosittain.

Taulukko 3.4: Suhteelliset osuudet eri opintosuuntien opiskelijoista, jotka suorittavat kahden ensimmäisen opiskeluvuoden aikana kaikki opintosuunnan opinto-oppaan määrittelemät matematiikan perusopinnot (23-37 op). Lisäksi on esitetty suhteelliset osuudet opiskelijoista, jotka suorittavat 55 opintopistettä toisena opiskeluvuotenaan. Taulukon vuosiluku kuvaa opintojen aloitusvuotta. Opintosuunnan koko tarkoittaa opiskelijoiden keskimääräistä lukumäärää kyseisessä opintosuunnassa tarkasteltavien vuosien aikana. Katkoviivat taulukossa erottavat opiskelija ryhmät toisistaan sen mukaan, kuuluuko heidän matematiikan perusopintoihin 37, 31, 27 vai 23 opintopistettä.

Opinto-suunta	Opinto-suunnan koko	2. vuoden opinnot					
		Matematiikan perusopinnot suoritettu			55 op. suoritettu		
		2010	2011	2012	2010	2011	2012
TL	36	58,5 %	52,8 %	80,6 %	65,9 %	55,6 %	67,7 %
AU	53	52,2 %	39,0 %	21,6 %	43,3 %	31,7 %	31,4 %
SITI	19	47,1 %	23,5 %	22,7 %	29,4 %	23,5 %	31,8 %
TU	39	62,2 %	55,3 %	34,3 %	68,9 %	78,9 %	62,9 %
Y	31	23,5 %	46,7 %	34,5 %	47,1 %	60,0 %	72,4 %
B	15	66,7 %	31,8 %	25,0 %	66,7 %	36,4 %	41,7 %
S	68	66,7 %	49,3 %	61,3 %	55,6 %	46,3 %	54,7 %
TJ	38	27,5 %	35,9 %	27,8 %	37,5 %	41,0 %	55,6 %
TI	64	35,2 %	33,8 %	43,1 %	29,6 %	32,3 %	40,3 %
K	54	59,1 %	71,2 %	67,7 %	43,2 %	44,2 %	53,8 %
R	83	67,9 %	57,5 %	71,8 %	29,8 %	42,5 %	60,0 %
M	42	50,0 %	34,1 %	60,0 %	18,4 %	25,0 %	26,7 %
YHT % / N		52,9 % 285	46,7 % 248	51,1 % 285	43,2 % 233	43,1 % 229	50,2 % 280

Noin puolet opiskelijoista suorittaa kaikki matematiikan perusopinnot tavoiteajassa eli kahden ensimmäisen vuoden aikana. Matematiikan opinnot tavoiteajassa suorittaneiden osuus on kuitenkin hieman vähentynyt. Ero vuosina 2010 ja 2012 aloittaneiden opiskelijoiden välillä ei tosin ole tilastollisesti merkitsevä ($p = 0{,}551$). Yleisesti opintoja 55 opintopistettä tai enemmän suorittavien opiskelijoiden osuus on samaan aikaan kuitenkin hieman kasvanut. Eroa voidaan pitää tilastollisesti suuntaa antavana ($p = 0{,}053$).

Opintosuuntakohtaisesti erot ovat melko suuria. Osan eroista selittää se, että matematiikan perusopinnot ovat eri opintosuunnissa eri laajuisia. Tarkastellaan seuraavaksi eroja hieman tarkemmin.

Opintosuuntakohtaiset erot

Matematiikan perusopinnot suorittavat aikataulussa parhaiten konetekniikan, rakennustekniikan ja materiaalitekniikan opiskelijat. Tämä johtuu siitä, että heidän matematiikan perusopinnot ovat muita opintosuuntia suppeammat, laajuudeltaan vain 23 opintopistettä. Myös sähkötekniikan opiskelijoista yli puolet suorittaa matematiikan perusopinnot tavoiteajassa, mikä on hyvä saavutus verrattuna muihin opintosuuntiin, joissa matematiikan perusopinnot ovat 27 opintopisteen laajuiset.

Vuonna 2012 aloittaneet opiskelijat olivat poikkeava opiskelijaryhmä teknis-luonnontieteellisessä opintosuunnassa. Heistä valtaosa (80,6 %) suoritti matematiikan perusopinnot tavoiteaikataulussa. Vastaava luku aikaisempina vuosina on ollut noin 50-60 prosenttia. Eroa vuosina 2010 ja 2012 aloittaneiden välillä voidaan pitää tilastollisesti melkein merkittävänä ($p = 0{,}046$). Matematiikan perusopintojen suorittamisaktiivisuus on parantunut myös tietotekniikan, konetekniikan ja materiaalitekniikan opiskelijoilla. Erot näissä opintosuunnissa vuonna 2010 ja 2012 aloittaneiden välillä on noin kymmenen prosenttiyksikköä. Tilastollisesti eroja ei kuitenkaan voi pitää merkitsevinä.

Selkeästi negatiivista kehitys on ollut automaatiotekniikan, tuotantotalouden ja biotekniikan opintosuunnissa. Vuonna 2012 aloittaneista tuotantotalouden opiskelijoista vain noin kolmannes (34,3 %) suoritti kaikki matematiikan perusopinnot tavoiteajassa. Aikaisemmin vuonna 2010 aloittaneista tavoiteajassa selvisi reilusti yli puolet (62,2 %) opiskelijoista. Eroa voidaan pitää tilastollisesti melkein merkitsevänä ($p = 0{,}013$). Vielä suurempi muutos on tapahtunut biotekniikan opiskelijoilla (B: 66,7 % $\rightarrow$ 25,0 %). Ero on kuitenkin tilastollisesti vain melkein merkitsevä ($p = 0{,}041$), koska opintosuunnassa on opiskelijoita lukumäärällisesti vähän.

Automaatiotekniikan opiskelijoilla matematiikan perusopinnot tavoiteajassa suorittaneiden määrä on vähentynyt hyvin voimakkaasti. Vuonna 2010 yli puolet (52,2 %) opiskelijoista suoritti matematiikan perusopinnot tavoiteajassa. Vuonna 2012 vastaavaan pystyi vain noin viidennes (21,6 %) opiskelijoista. Eroa voidaan pitää tilastollisesti erittäin merkitsevänä ($p = 0{,}001$).

Aikaisemmin todettiin, että opintojen yleinen suoritusaktiivisuus on hieman kehittynyt myös toisena opiskeluvuotena. Tässä suhteessa ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijatkaan eivät ole poikkeus. He suorittavat itse asiassa toisena opiskeluvuotenaan opintoja erittäin hyvin verrattuna muihin opintosuuntiin. Vuonna 2010 aloittaneista ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoista hieman alle puolet (47,1 %) suoritti toisena opiskeluvuotenaan 55 opintopistettä tai enemmän. Vastaava luku vuonna 2012 aloittaneilla oli huomattavasti suurempi (72,4 %). Tilastollisesti eroa voidaan pitää melkein merkitsevänä ($p = 0{,}042$). Yleisen opintojen etenemisen suhteen positiivisinta kehitys on ollut rakennustekniikan opiskelijoilla. Vuonna 2010 aloittaneista vain noin kolmannes (29,8 %) suoritti toisena opiskeluvuotenaan 55 opintopistettä kun taas vuonna 2012 aloittaneista samaan pystyi reilusti yli puolet (60,0 %) opiskelijoista. Ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä ($p < 0{,}0005$).

Selkeästi negatiivista kehitys opintojen yleisessä suorittamisessa ei ole ollut kuin automaatiotekniikan opiskelijoilla. Heidän joukossa toisena opiskeluvuotena vähintään 55 opintopistettä suorittaneiden opiskelijoiden osuus on vähentynyt noin 43,3 prosentista vajaaseen kolmasosaan (31,3 %). Tilastollisesti eroa voidaan pitää melkein merkitsevänä ($p = 0{,}023$). Kehitys automaatiotekniikan opintosuunnassa on siis samansuuntainen kuin matematiikan opintojen kohdalla.

4. MATEMATIIKAN KIELENTÄMISEN TUTKIMUS

Tässä luvussa perehdytään matematiikan kieleen ja kielentämiseen Tampereen teknillisessä yliopistossa. Aluksi tarkastellaan kielen ja kielentämisen käsitettä matematiikassa sekä esitellään erilaisia kielentämisstrategioita ja tehtävämalleja. Lisäksi paneudutaan erilaisiin koulutusorientaatioihin, oppimisstrategioihin sekä -tyyleihin ja näiden pohjalta muodostettuihin TTY:n opiskelijoiden oppimisprofiileihin. Luvussa perehdytään myös matematiikan kielentämistä koskevaan tutkimukseen. Tarkastelun kohteena ovat valittu tutkimusmenetelmä, tutkimuksen toteutus, aineisto ja tutkimuksen analysointi. Lisäksi esitetään tutkimuksen päätulokset.

4.1 Matematiikka ja kielentäminen

Perinteinen tarkat notaatiot sisältävä matematiikan symbolikieli on opiskelijoille jossain määrin vierasta, mikä aiheuttaa vaikeuksia matematiikan opiskeluun ja oppimiseen [15, s. 11]. Symbolikielen haasteiden vuoksi on perusteltua ilmaista matemaattista ajattelua myös muuten kuin symbolikieltä käyttäen. Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan sellaista ilmaisutapaa, jossa matemaattista ajattelua ilmaistaan symbolikielen lisäksi suullisesti ja kirjallisesti luonnollisella kielellä sekä kuvioiden tai toiminnan avulla [9, s. 52]. Kielentämisen avulla on tarkoitus jäsentää ja selkeyttää opiskelijan omaa ajatteluprosessia ja monipuolistaa opiskelijan matemaattista ilmaisua. [10, s. 5] Viime vuosina matematiikkaa ja sen oppimista onkin tarkasteltu erityisesti juuri matematiikan kielen ja sen oppimisen näkökulmasta [38, s. 233].

4.1.1 Matematiikka ja kieli

Matematiikan ja kielen yhteys on monitahoinen. Kielet voidaan luokitella luonnollisiin kieliin ja keinotekoisiin kieliin. Formaalit kielet, kuten esimerkiksi matematiikan symbolikieli, kuuluvat keinotekoisiin kieliin. Luonnollisilla kielillä puolestaan tarkoitetaan kansallisia kieliä, joiden avulla ihmisten välinen kommunikaatio tapahtuu. [9, s. 47] Matematiikan kieltä käytetään monilla eri aloilla. Sen lisäksi, että matematiikan kieli liittyy vahvasti luonnontieteisiin ja teknologiaan, tarvitaan sitä myös esimerkiksi taloudessa. [32, s. 1]

Matematiikan symbolikielellä on oma tyypillinen rakenne, käyttötarkoitus ja sanasto. Symbolikieli on kehittynyt, jotta monimutkaisia matemaattisia ideoita ja prosesseja voitaisiin käsitellä mahdollisimman täsmällisesti. Se ei siis ole vain kokoelma erilaisia matemaattisia symboleita, vaan tapa ilmaista erilaisia asioita ja keskustella niistä. Luonnollinen kieli on jossain määrin liian monitulkintainen asioiden eksaktiin ilmaisuun. [15, s. 12]

Matematiikan kielen hyvänä puolena pidetään yleisesti sitä, että sen avulla monimutkaisia ajatusrakennelmia, määritelmiä ja erilaisia lainalaisuuksia voidaan esittää yksikäsitteisesti ja tarkasti [16, s. 220]. Matematiikan kieleen ei kuitenkaan sisälly mitään tiettyä kokoelmaa säännöistä, miten asiat pitäisi eri tilanteissa ilmaista. On vain olemassa vakiintuneita tapoja ilmaista tiettyjä rakenteita. Eri asiayhteyksissä ilmaisutavat voivatkin vaihdella. Esimerkiksi funktion derivaatalle on olemassa useita erilaisia ilmaisutapoja. Tämä tukee myös ajatusta siitä, että matematiikka kehittyy kielen tavoin tuottaen uusia ilmaisutapoja jo ennestään tutuille käsitteille ja rakenteille. Useimpien matematiikan osa-alueiden sisällä merkinnät ja ilmaisutavat ovat kuitenkin hyvin vakiintuneita. [38, s. 235] Matematiikan kieli muuttuu jatkuvasti myös silloin, kun uusia asioita sisällytetään matemaattiseen diskurssiin [15, s. 12].

Matematiikan symbolikieli eroaa monella tavalla jokapäiväisessä arkielämässä käytetystä luonnollisesta kielestä. Symbolikieli on tyyliltään tyypillisesti mahdollisimman kompaktia. Tämä tarkoittaa sitä, että matemaattisessa ilmaisussa ovat mukana ainoastaan merkinnät, jotka ovat välttämättömiä tai muuten perustellusti tarpeellisia. Symbolikielen avulla ilmaistaessa ei tyypillisesti käytetä mitään ylimääräisiä sanoja. Näin ilmaisu pyritään pitämään mahdollisimman yksinkertaisena. [15, s. 13-15] Matematiikan kielellä ei myöskään voida ilmaista mitä tahansa. Matematiikan kieli eroaa tässäkin suhteessa monelta osin luonnollisesta kielestä. Matematiikan kielen avulla ei voi kertoa esimerkiksi affektioista eli tunnetiloista. Tämän lisäksi matematiikassa ei ole mennyttä aikaa, nykyisyyttä tai tulevaisuutta, vaan ajatellaan, että kaikki vain yksinkertaisesti "on". [8, s. 46]

Matematiikan kielessä ja luonnollisessa kielessä sanoilla saattaa olla eri merkityksiä. Tällaisia sanoja ovat esimerkiksi arvo, kompakti, integrointi, tasainen tai tiheä. Lisäksi on olemassa iso joukko sanoja, joilla on merkitys ainoastaan matematiikan kielellä. Esimerkiksi sanoilla hypotenuusa tai punkteerattu ympäristö ei ole merkitystä luonnollisella kielellä. [15, s. 12] Usein on vaikeaa erotella, onko jokin merkintä matemaattinen vai kielitieteellinen, sillä useat matemaattiset merkinnät ovat myös kielitieteellisiä tai päinvastoin [16, s. 217].

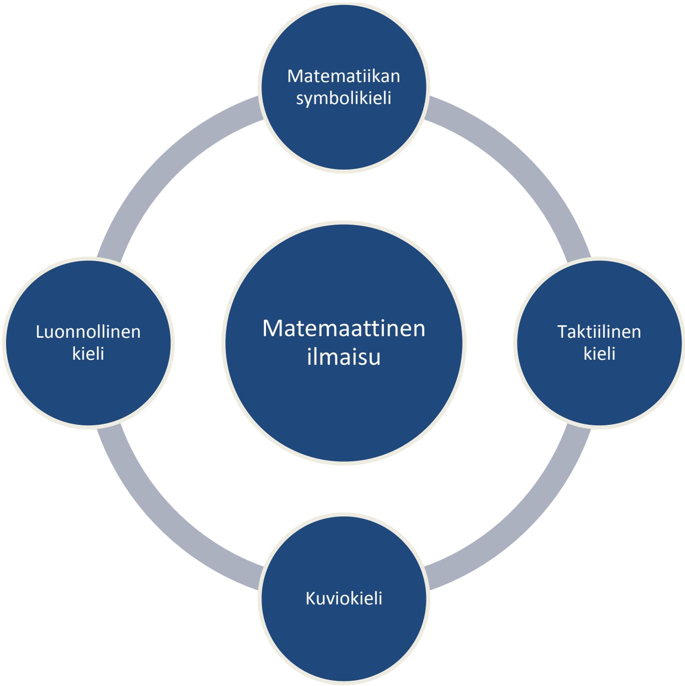
Matemaattista sisältöä on mahdollista ilmaista myös ilman ainuttakaan matemaattista symbolia. 1900-luvulla erityisesti geometrian alan matemaatikoilla oli tapana ilmaista matematiikkaa luonnollisen kielen avulla ja välttää matemaattisten symbolien käyttöä. Matematiikkaa pyrittiin kirjoittamaan luonnollisen kielen avulla kokonaisin lausein. Matemaattiset symbolit olivat sulautettuna luonnollisella kielellä kirjoitettujen lauseiden joukkoon. Luonnollisen kielen tukena käytettiin paljon myös erilaisia graafisia esitystapoja. [16, s. 217]

Matematiikkaa voidaan ilmaista siis myös graafien ja erilaisten kuvioiden avulla. Tästä matematiikan kielen osa-alueesta käytetään nimeä matematiikan kuviokieli. [10, s. 6] Ero kuviokielen ja matematiikan symbolikielen välillä on usein häilyvä [16, s. 217].

Matemaattisen kuvion, diagrammin tai yhtälön tulkitsemiseen tarvitaan verbaalista luonnollista kieltä. Diagrammin tai yhtälön avulla voidaan helposti havainnollistaa eri asioiden välisiä suhteita erityisesti kun kyseessä on abstraktit asiat. Tarkempaa tarkastelua varten on kuitenkin käytettävä myös luonnollista kieltä, jotta voidaan tutkia yhtälön, diagrammin tai kuvion suhteita muihin esitettyihin asioihin. Matematiikan kielen eri osa-alueet nivoutuvatkin tiiviisti toisiinsa. Kielen osa-alueita käytetään rinnakkain siten, että kielen eri osa-alueet tukevat ja täydentävät toisiaan. [16, s. 218]

Edellä on kerrottu matemaattisen ilmaisun eri muodoista. Todettiin, että matematiikkaa voidaan ilmaista matematiikan symbolikielen lisäksi myös luonnollisella kielellä tai kuviokielellä. Jossain määrin ilmaisutapana voidaan käyttää myös käsillä tekemistä, jolloin kyseessä on taktiilinen toiminnan kieli. Taktiilinen toiminnan kieli huomioi matematiikan opetuksessa käytettäviä toiminnallisia opetusmateriaaleja. Toiminnallisuus matematiikassa painottuu vahvasti koulumatematiikkaan. [9, s. 51-52, 54]

Kuvassa 4.1 on esitettynä matematiikan kielen eri osa-alueet [9, s. 52].



Kuva 4.1: Matematiikkaa voidaan ilmaista matematiikan symbolikielen, luonnollisen kielen, taktiilisen kielen ja kuviokielen avulla. Taktiilinen toiminnan kieli esiintyy lähinnä peruskoulun matematiikassa. [9, s. 52]

Matematiikan ilmaisun osa-alueista korkeakouluissa vahvimmin esillä on symbolikieli. Opiskelijat tukeutuvat symbolikielen käyttöön usein matematiikan tehtäviä ratkaistessaan. [11, s. 61] Luonnollinen kieli korostuu lähinnä suullisessa ilmaisussa. Kuviokieltä käytetään paikoitellen luento-opetuksessa ja useissa tietokoneella tehtävissä harjoituksissa. Kielentämisen avulla ratkaisuihin pyritään lisäämään monipuolisemmin matematiikan eri kieliä [32, s. 4].

4.1.2 Matemaattisen ajattelun kielentäminen

Matemaattinen ajattelu on käsitteenä hyvin laajasti käytetty ja sen tarkka määrittely on hankalaa. Tässä diplomityössä kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen tiedon monipuolista käsittelyä, jota ohjaavat ajattelijan metakognitiot eli yksilön tiedot omista kognitiivis-emotionaalisista prosesseista. Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisua tyypillisesti suullisesti tai kirjallisesti. Tällöin puhutaan myös suullisesta tai kirjallisesta kielentämisestä [10]. Kielentäminen itsessään on konstruointiprosessi, jossa matemaattista sisältöä ilmaistaan muille. Matemaattinen sisältö voi olla esimerkiksi jokin käsite, matemaattisen tehtävän ratkaisu tai jokin matemaattinen teksti tai lauseke. [9, s. 46]

Jotta opiskelija voi ilmaista oman ajatuksensa idean muille, on hänellä oltava siitä suhteellisen selkä käsitys. Kielentäessä opiskelija joutuukin pohtimaan asiaan liittyviä keskeisiä piirteitä sekä jäsentämään matemaattista ajatteluaan reflektoinnin avulla. [9, s. 52] Myös muiden opiskelijoiden matemaattinen ajattelutaito kehittyy, kun he kuuntelevat tai lukevat toisen oppilaan tuotosta. Tällöin he voivat verrata kuultua tai luettua tuotosta omiin käsityksiinsä ja tarpeen tullen kehittää niitä. [32, s. 4] Suullisen kielentämisen osalta voidaan puhua myös dialogisesta kielentämisestä, jolloin matemaattinen ajattelu kehittyy kaikilla dialogin osapuolilla. [9, s. 48].

Kielentämisessä matematiikan ilmaisussa käytetään matematiikan symbolikielen (lausekkeet, laskutoimitukset, symbolit jne.) rinnalla kuviokieltä (geometriset kuviot, kuvaajat, kaaviot jne.) ja luonnollista kieltä (tavallisesti äidinkieli). Koulumatematiikan puolella matematiikkaa voidaan ilmaista myös toiminnan avulla. [9, s. 52] Erilaisia matemaattisia ongelmia ratkaistaessa opiskelija voi käyttää ratkaisussaan useita matematiikan kielen osa-alueita ja valita kulloinkin itselleen parhaiten sopivan tavan dokumentoida tehtävän ratkaisun ymmärrettävään muotoon [11, s. 61]. Päämääränä on monipuolistaa omaa matemaattista ilmaisua ja käyttää joustavasti tehtävän ratkaisun eri vaiheissa eri ilmaisutapoja [16, s. 218].

Opiskelijoiden vakavimmat vaikeudet matematiikan oppimisessa liittyvät ajattelun kääntämiseen matematiikan kielelle pikemminkin kuin varsinaisen tehtävän ratkaisemiseen [38, s. 238]. On havaittu, että jokaisella koulutasolla matematiikan kielen käyttäminen ja ymmärtäminen on koettu haasteelliseksi. Haasteet liittyvät matematiikan kielen sanastoon, notaatioon ja loogisten konnektiivien käyttöön. Vaikeuksia aiheuttavat etenkin matematiikan kielen ja luonnollisen kielen väliset erot. [19, s. 7]

Formaalin matematiikan symbolikielen ja representaatioiden tasojen välinen kielentämisongelma näyttäytyy joskus jopa siten, että jos tehtävässä on annettu vihjeitä sen ratkaisemiseksi, oppilaat turvautuvat niihin vain harvoin. Tämä johtunee siitä, että vihjeet ovat annettu matematiikan symbolikielellä, jolloin niiden kääntäminen luonnolliselle kielelle on oppilaille usein liian vaikeaa. Kielentämiseen liittyvänä ongelmana voidaan nähdä sekin, että opiskelijoilla on vaikeuksia erottaa todistustehtävän väite ja annetut propositiot toisistaan. Kielentämisongelma on siis hyvin yleismaailmallinen. [38, s. 238]

Monipuolisen kirjoittamisen matematiikan tehtäviä ratkaistaessa on nähty edistävän matematiikan oppimista.([10, s. 5], kts. [20, s. 233-255]) Matematiikan eri kielten avulla matematiikan eri käsitteille ja operaatioille voidaan luoda monimuotoisempia merkityksiä, mikä syventää opiskelijoiden ymmärrystä. Liikkumista eri kielten välillä voidaan kutsua koodinvaihdoksi. [9, s. 51] Tossavainen toteaakin esimerkiksi analyysin oppimisen edellyttävän, että "oppija kykenee operoimaan sekä havainnollisten mielikuviensa tasolla että varsinaisen matematiikan symbolikielen tasolla ja ennen kaikkea liikkumaan joustavasti näiden tasojen välillä". Toisaalta esimerkiksi raja-arvotarkastelussa on luonnollista käyttää mielikuvien tasolla ilmaisuja, joita ei voida suodaan kääntää matematiikan symbolikielelle. Myös yksittäisten käsitteiden, esimerkiksi käsitteen luku, omaksuminen yleensä edellyttää luonnollisen kielen tavanomaisen käytön rajojen ylittämistä. [38, s. 239-240]

Opettajan näkökulmasta kirjalliset perustelut ovat helpompia arvioida, jos niissä on matematiikan symbolikielen lisäksi myös luonnollista kieltä. Luonnollisen kielen liittäminen ratkaisuun usein paljastaa suoraan, kuinka perusteellisesti opiskelija on ymmärtänyt tehtävän ratkaisun eri vaiheet. ([10, s. 5], kts. [20, s. 233-255]).

Matemaattisen ajattelun kielentämisen merkitys oppimiselle ja opetukselle voidaan tiivistää seuraaviin näkökulmiin [9, s. 53]:

1. Kielentäjän oma ajattelu jäsentyy ja ymmärrys käsitteistä kasvaa puheen sekä kirjoitetun tekstin avulla.

2. Muun ryhmän jäsenten matemaattinen ajattelu kehittyy muiden kielentävien oppilaiden kanssa vuorovaikutuksessa.

3. Opiskelijoiden matemaattisen ajattelun ja osaamisen tason arviointi helpottuu.

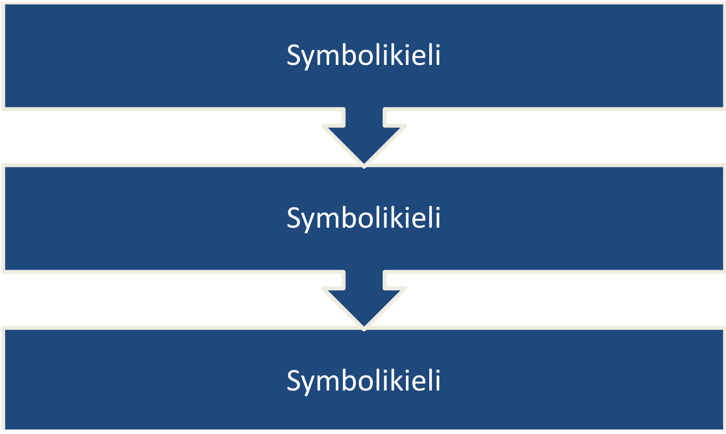
Kielentämisessä korostuu siis monet oppimisen ja opetuksen näkökulmat. Tarkastellaan seuraavaksi erilaisia kielentämismalleja ja tehtävätyyppejä.

4.1.3 Kirjallisen kielentämisen malleja ja tehtävätyyppejä

Joutsenlahti on kehittänyt viisi erilaista kirjallisen kielentämisen mallia, joita voidaan käyttää matematiikan tehtävien ratkaisujen esittämiseen. Nämä mallit ovat: standardi-, kertomus-, tiekartta-, päiväkirja- ja kommenttimalli. [10, s. 6] Kielentämiseen liittyviä erilaisia tehtävätyyppejä on useita erilaisia, joista seuraavia on tutkittu korkeakouluissa myös aikaisemmin: koodaus, täydennys, virheen etsintä, ratkaisusta tehtävä, ratkaisun argumentointi, tiedonseulonta ja omin sanoin selitys. [31, s. 26]

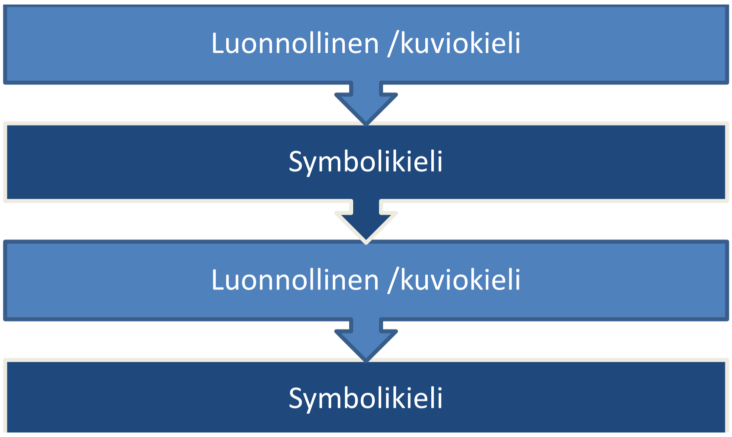
Ratkaisumallit

Standardimalli on pelkkään matematiikan symbolikieleen perustuva ratkaisumalli. Ratkaisussa ei ole mukana luonnollista tai kuviokieltä, vaan se koostuu lausekkeista, laskusta ja tehtävän vastauksesta. Standardimallissa päämääränä on päästä lopputulokseen mahdollisimman suoraviivaisesti matematiikan symbolikieltä käyttäen. Ratkaisu on kompakti eikä se tue opiskelijan omaa ymmärrysprosessia yhtä hyvin kuin muut ratkaisumallit. Standardimallin avulla ilmaistua matemaattista ajattelua on usein myös haastavaa seurata. [10, s. 6] Kuvassa 4.2 on havainnollistettu standardimallia. Nuoli ilmaisee ratkaisun etenemisen suuntaa.



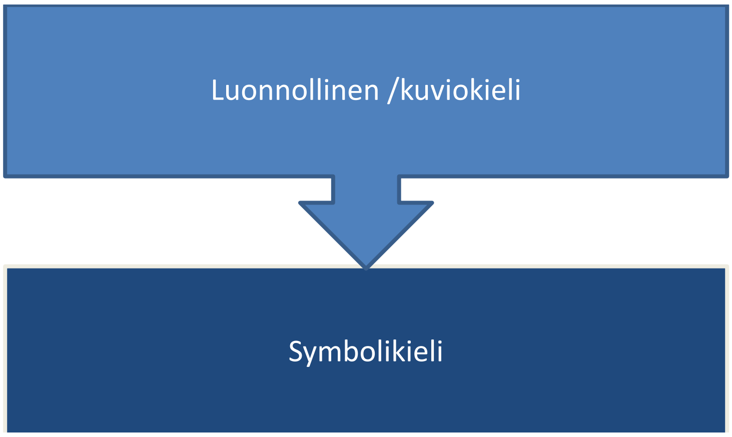
Kuva 4.2: Standardimalli [10, s. 6]

Kertomusmallissa ratkaisun eri vaiheita kuvataan luonnollisen ja kuviokielen avulla. Ratkaisussa käytetään tarkoituksenmukaisesti eri kieliä oman ajatusprosessin tukemiseen. Nimensä mukaisesti mallissa ikään kuin kerrotaan, mitä ratkaisun seuraavassa vaiheessa tehdään. Lukijan on helppo seurata kertomusmallilla tehtyä tehtävän ratkaisua. Ratkaisusta näkyy selkeästi, kuinka hyvin tehtävän ratkaisija on ymmärtänyt ratkaisun eri vaiheet. Usein tätä mallia käytetään esimerkiksi lukion matematiikan oppikirjojen esimerkeissä. [10, s. 6] Kuvassa 4.3 on havainnollistettu kertomusmallia.



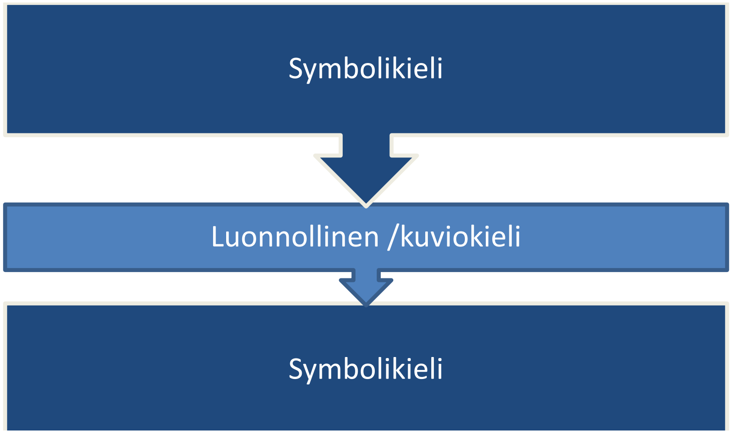
Kuva 4.3: Kertomusmalli [10, s. 6]

Tiekarttamallissa matemaattisen tehtävän ratkaisuprosessi kuvataan aluksi kokonaan luonnollisen ja mahdollisesti kuviokielen avulla. Ratkaisun aluksi siis muodostetaan yleinen ymmärrys ratkaistavasta tehtävästä ja sen ratkaisun eri vaiheista. Tämän jälkeen tehtävä täydennetään symbolikielen avulla. Ratkaisun toinen vaihe on siis edellä käsitellyn standardimallin kaltainen. [10, s. 6-7] Kuvassa 4.4 on havainnollistettu tehtävän ratkaisua tiekarttamallin avulla.



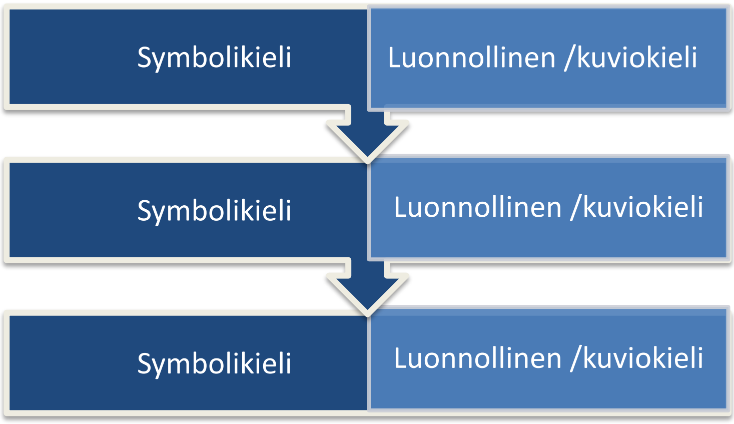
Kuva 4.4: Tiekarttamalli [10, s. 6-7]

Päiväkirjamallissa ratkaisun esittämisessä käytetään luonnollista tai kuviokieltä tilanteissa, joissa tehtävän ratkaisija käyttää normaalisti matematiikan symbolikieltä, mutta kohtaa tehtävää ratkaistessaan ongelman. Ongelmakohdassa tehtävän ratkaisija pyrkii luonnollisen ja kuviokielen avulla jäsentämään omaa ajatteluaan ja etenemään tehtävän ratkaisussa. Kirjoitusprosessin tarkoituksena on omien ajatusten selkeyttäminen vuorovaikutuksessa oman tekstin kanssa. Ongelmakohdasta selvittyään, tehtävän ratkaisija käyttää ratkaisuprosessissa jälleen matematiikan symbolikieltä. Tarvittaessa luonnolliseen tai kuviokieleen voidaan turvautua tehtävänratkaisun useammassakin vaiheessa, jos tehtävä tuottaa ratkaisijalleen ongelmia. [10, s. 7] Kuvassa 4.5 on havainnollistettu matematiikan tehtävän ratkaisuprosessia päiväkirjamallia käyttäen.



Kuva 4.5: Paivakirjamalli [10, s. 7]

Kommenttimallissa ratkaisun esittämisessä käytetään luonnollista ja kuviokieltä matematiikan symbolikielen rinnalla. Tämä tarkoittaa sitä, että matemaattiset merkinnät ovat ratkaisun toisessa sarakkeessa ja matemaattisia merkintöjä perusteleva luonnollinen tai kuviokieli toisessa sarakkeessa. Kommenttimalli on yleisesti käytössä perinteisessä liitutaulutyöskentelyssä, jossa opettaja perustelee tekemiään merkintöjä viereiseen sarakkeeseen. [10, s. 12-13] Perusteluita esitetään myös luonnollisen kielen avulla. Kuvassa 4.6 on havainnollistettu kommenttimallin avulla ratkaistua tehtävää.



Kuva 4.6: Kommenttimalli [10, s. 12-13]

Edellä mainituista malleista korkeakoulumatematiikassa tehtävien ratkaisut ovat esitetty usein vain matematiikan symbolikielen avulla eli ne ovat standardimallin mukaisia [11, s. 61]. Lukiossa opiskelijoita painotetaan perustelemaan ratkaisuaan luonnollisen kielen ja kuvioiden avulla Tällöin kyseessä on kommentti- tai päiväkirjamalli.

Tehtävätyypit

Kielentämisen tehtävätyypeistä tyypillisin on koodinvaihto (koodaus), joka tarkoittaa liikkumista matematiikan eri kielten osa-alueiden välillä. Kielten välillä liikkumista sisältyy kielentämistehtäviin usein ainakin jossain muodossa. Seuraavassa on listattuna erilaisia kielentämistehtävätyyppejä ([38, s. 239], [11, s. 62], [31, s. 26]):

1. **Koodaustehtävässä** opiskelijan on ilmaistava matematiikan symbolikielellä esitettyjä asioita luonnollisella kielellä ja kuviokielellä tai päinvastoin. Koodaus voi olla myös kuviokielen ja luonnollisen kielen välistä.

2. **Täydennystehtävässä** tehtävän ratkaisu on puutteellinen eli siitä puuttuu joitakin osia. Tässä tehtävätyypissä opiskelijan on täydennettävä ratkaisun kannalta oleelliset puuttuvat osat.

3. **Virheenetsintätehtävässä** opiskelija etsii matemaattisesta esityksestä virheitä tai puutteita sekä korjaa ne.

4. **Ratkaisusta tehtävä -tehtävätyypissä** on annettu matemaattisen ongelman ratkaisu. Opiskelijan on sen pohjalta laadittava ratkaisua vastaava sopiva tehtävänanto.

5. **Ratkaisun argumentointi -tehtävässä** opiskelijan on perusteltava matemaattista esitystä matematiikan kielten eri osa-alueiden avulla. Matemaattinen esitys voi olla joko annettu tai opiskelijan itse tekemä.

6. **Tiedonseulontatehtävässä** opiskelijan on tarkasteltava kyseessä olevan tehtävän tehtävänantoa ja etsittävä siitä ratkaisun kannalta olennainen informaatio.

7. **Omin sanoin selitys -tehtävätyypissä** selitetään jokin asia omin sanoin käyttämättä matematiikan symbolikieltä. Selittäessään opiskelija voi tukeutua luonnolliseen kieleen tai kuviokieleen.

Tässä tutkimuksessa kielentämistehtäviä luotaessa syntyi uusi kielentämistehtävätyyppi, jossa liikutaan matematiikan abstraktin ja konkreettisen tason välillä (tehtävätyyppi 8). Lisäksi tässä ja aikaisemmissa tutkimuksissa käytössä ollut tehtävämalli, jossa järjestetään matematiikan tehtävän ratkaisun vaiheet loogiseen järjestykseen, erotettiin tässä tutkimuksessa omaksi tehtävätyypikseen (tehtävätyyppi 9).

8. **Matematiikan konkretisointi -tehtävätyypissä** matemaattiselle sisällölle on tarkoitus keksiä vastine tai käyttötarkoitus arkielämästä. Päämääränä on liikkua abstraktin ja konkreettisen tason välillä sekä osoittaa opiskelijalle matematiikan merkityksiä opiskelukontekstin ulkopuolella.

9. **Ratkaisun järjestäminen -tehtävätyypissä** matematiikan tehtävän ratkaisun eri vaiheet ovat annettu valmiiksi, mutta ne eivät ole loogisessa järjestyksessä. Tässä tehtävätyypissä opiskelijan on järjestettävä ratkaisun elementit oikeaan järjestykseen.

Usein edellisen kaltainen jako edellä mainittuihin erilaisiin tehtävätyyppeihin on liian jyrkkä. Monissa kielentämistehtävissä eri tehtävätyypit yhdistyvät sulavasti toisiinsa ja ne sisältävät osia useista eri tehtävätyypeistä. Taulukossa 4.1 on esitetty, miten edellä mainitut tehtävätyypit esiintyivät opintojaksojen kielentämistehtävissä.

Taulukko 4.1: Opintojaksojen kielentämistehtävien sisältämät tehtävätyypit.

Opintojakso/Harjoitus	Tehtävätyypit
IMA/1	1,7
IMA/2	2,4
IMA/3	5,7
IMA/4	2,4,7,9
IMA/5	1,3,7
MA/1	3
MA/2	1,5
MA/3	1,7
MA/4	2,4
MA/5	1,5,7
MA/6	1
IMA/Tentti	1,5,7
MA/Tentti	1,2,5,7

Opintojaksoilla kielentämistehtäviin sisältyi useimmiten koodausta (tehtävätyyppi 1) ja omin sanoin selittämistä (tehtävätyyppi 7). Näiden lisäksi kielentämistehtävissä esiintyi useaan otteeseen ratkaisujen täydennystä (tehtävätyyppi 2) ja argumentointia (tehtävätyyppi 5) sekä tehtävän ratkaisun avulla tehtävänannon muodostamista (tehtävätyyppi 4).

Esimerkkitehtäviä

Esitellään tässä muutamia kielentämistehtäväesimerkkejä, joista Esimerkki 2:sta käytettiin myös tässä tutkimuksessa matematiikka 1 -opintojaksolla sekä hieman mukaillen myös insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla. Kaikki tutkimuksessa käytetyt kielentämistehtävät on esitetty Liitteessä C.

Esimerkissä 1 sisältää elementtejä useista eri kielentämistehtävätyypeistä. Esimerkissä on mukana omin sanoin selittämistä, tehtävän täydennystä ja ratkaisun argumentointia. Lisäksi tehtävässä pyritään liittämään matematiikkaa käytäntöön soveltamalla joukko-oppia arkielämän tilanteisiin. Esimerkki siis yhdistelee kielentämistehtävätyyppejä 2, 5, 7 ja 8.

ESIMERKKI 1

a) Selitä sanallisesti ilman matemaattisia symboleita, mitä tarkoittaa joukkojen yhdiste ja leikkaus?
b) Anna arkielämän esimerkki joukoista A ja B joiden leikkaus on tyhjä.
c) Anna arkielämän esimerkki joukoista A, B ja C joiden leikkaus on epätyhjä.

d) Perustele sievennyksen jokainen kohta ja täytä puuttuvat kohdat: (A^c tarkoittaa joukon A komplementtia)

$$\begin{aligned}(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c) &= (A \cap (B^c \cup B)) \cup (B \cap A^c)\\ &= (\qquad\quad) \cup (\qquad\quad)\\ &= \dots\\ &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c)\\ &= \dots\\ &= \dots\end{aligned}$$

Esimerkissä 2 on mukana osia kahdesta eri kielentämistehtävätyypistä. Esimerkissä on muodostettava ratkaisun perusteella tehtävän tehtävänanto. Lisäksi tehtävä sisältää ratkaisun puuttuvien osien täydentämistä. Esimerkissä on elementtejä tehtävätyypeistä 2 ja 4.

ESIMERKKI 2

Ohessa on laskuharjoitustehtävän ratkaisu. Täydennä ratkaisun puuttuvat kohdat sekä keksi harjoitukselle sopiva tehtävänanto.

Ratkaisu

$$\begin{aligned}\dots &= y\\ \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= y\\ \Rightarrow \dots\dots\dots &= 2ye^x\\ \Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 &= 0 \qquad \| + \dots\dots\\ \Rightarrow \dots\dots\dots &= \dots\dots\dots\\ \Rightarrow (e^x - y)^2 &= \dots\dots\dots\\ \overset{\text{neg. neliöjuuri ei käy}}{\Rightarrow} e^x &= y + \sqrt{y^2+1}\\ \Rightarrow x &= \ln(y + \sqrt{y^2+1})\end{aligned}$$

Esimerkissä 3 on mukana koodausta eli liikutaan matematiikan eri kielten välillä. Lisäksi esimerkissä on matemaattisten käsitteiden omin sanoin selittämistä. Esimerkki siis sisältää elementtejä tehtävätyypeistä 1 ja 7.

ESIMERKKI 3

a) Selvitä omin sanoin ilman matematiikan symboleja, mitä tarkoittaa joukon osajoukko?
b) Mitä voit sanoa joukoista A ja B, jos ne ovat toistensa osajoukkoja?
c) Ilmaise matemaattisin merkinnöin luonnollisen kielen lause: "Alkio z kuuluu joukkoon B, joka on joukkojen A ja C leikkauksen ja D ja E yhdisteen erotuksen osajoukko."
d) Kuvatkoot p ja q seuraavia lauseita:

$$p : \textit{Opiskelen ahkerasti.}$$
$$q : \textit{Läpäisen kurssin.}$$

Kirjoita lauselogiikan kielellä symboleja p ja q käyttäen:

- *Jos opiskelen ahkerasti, niin läpäisen kurssin.*
- *En opiskele ahkerasti.*
- *Opiskelen ahkerasti tai en läpäise kurssia.*
- *Läpäisen kurssin, mutta en opiskele ahkerasti.*
- *Läpäistäkseni kurssin minun on opiskeltava ahkerasti.*
- *Jos en opiskele ahkerasti tai en läpäise kurssia, niin opiskelen ahkerasti ja en läpäise kurssia.*

4.2 Erilaiset opiskelijat

Koulutusorientaatiot, oppimisstrategiat ja oppimistyylit voidaan luokitella monella eri tavalla. Ne vaikuttavat kaikki opiskeluun ja oppimisen prosessiin. Tässä kappaleessa esitellään koulutusorientaatioita, oppimisstrategioita ja oppimistyylejä. Näiden avulla Tampereen teknillisessä yliopistossa on selvitetty opiskelijoiden matematiikan oppimisprofiileja, jotka pyrkivät kuvaamaan opiskelijoiden oppimisen tapoja, tyylejä sekä yleistä suhtautumista matematiikkaan. Todellisuudessa oppimisprofiili on sekoitus useista eri oppimisprofiileista, mutta usein jokin profiilityypeistä on ainakin jollain tasolla dominoiva. [12]

4.2.1 Koulutusorientaatiot

Orientaatiolla tarkoitetaan opiskelijan henkilökohtaisia tavoitteita, pyrkimyksiä, motiiveja ja odotuksia. Koulutusorientaatiot toimivat opiskelu- ja oppimistoimintojen ohjaajina. Ne voidaan jakaa ammatilliseen, akateemiseen, persoonalliseen ja sosiaaliseen orientaatioon. Edellä mainituista kolme ensimmäistä voidaan lisäksi jakaa kahteen eri komponenttiin; sisäiseen ja ulkoiseen. Esimerkiksi jos opiskelijan akateeminen orientaatio on ulkoinen, on hänen tavoitteena ainoastaan koulutuspolulla eteneminen oppimistuloksista välittämättä. Sisäisen akateemisen orientaation omaava opiskelija puolestaan haluaa opiskella asioita ymmärtämisen ja oppimisen vuoksi. [27, s. 3-4]

Henkilökohtaiseen kasvuun ja kehitykseen suuntautuminen käsitetään persoonallisena orientaationa. Sisäisen persoonallinen orientaatio pyrkii erityisesti omien henkilökohtaisten näkökulmien laajentamiseen ja uusien haasteiden kohtaamiseen. Ulkoinen persoonallinen orientaatio viittaa aikaisempien menneiden epäonnistumisten kompensaatioon. [27, s. 3-4]

Sosiaalisen orientaation kannalta keskeisessä osassa on se ympäristö, jossa vuorovaikutus tapahtuu sekä kyseisessä ympäristössä viihtyminen. Koulutus- ja opiskeluorientaation rinnalla orientaatioon vaikuttaa myös tilanne. Tällöin puhutaan tilanneorientaatiosta. Sillä tarkoitetaan opiskeluun suuntautumista ja sen vaihtelua vallitsevan tilanteen mukaan. [27, s. 3-4]

Orientaatio kuvaa yleisesti lähinnä opiskelijoiden asennetta opiskeluun. Oppimisstrategiat, -tyylit ja -menetelmät tarkoittavat niitä tapoja ja keinoja, joihin opiskelijat tukeutuvat uusia asioita oppiakseen. [27, s. 6-7]

4.2.2 Oppimistrategiat

Oppimisstrategialla tarkoitetaan opiskelijan tapaa lähestyä ja ratkaista jotain tehtävää. Strategia valitaan tehtävän, opiskelijakulttuurin ja opiskelijan oman oppimiskäsityksen mukaan. [27, s. 6-7]

Tiedonprosessoinnin perusteella voidaan erotella pinta- ja syväsuuntautuneet oppimisstrategiat. Pintasuuntautuneet opiskelijat keskittyvät opiskelussa yksittäisiin irrallisiin asioihin ja yrittävät muistaa ne ulkoa. Syväsuuntautuneet opiskelijat puolestaan pyrkivät ymmärtämään kokonaisuuden ja muokkaamaan omia käsityksiään siten, että käsitys tukee kokonaisuutta. Syväsuuntautuneet opiskelijat ovat tavallisesti sisäisesti motivoituneita toisin kuin pintasuuntautuneet opiskelijat, joiden motivaatio on enemmän ulkoista. [27, s. 8]

Vaiheittaisoppija opiskelee uuden asian vaiheittain, jolloin kokonaisuus jää usein hahmottamatta. Vaiheittaisoppija keskittyy tyypillisesti ensin yksityiskohtiin: yksittäisiin sääntöihin ja menettelytapoihin. Holistit suuntautuvat opiskeluun kokonaisvaltaisesti huomattavasti laaja-alaisemmin. He pyrkivät hahmottamaan kokonaiskuvan ja karsimaan siitä ylimääräiset asiat pois. [27, s. 8-9]

4.2.3 Oppimistyylit

Oppimistyyli on tiedostamaton taipumus käyttää tietynlaisia oppimisstrategioita tai -tapoja. Opiskelumenetelmä kuvaa niitä yksilöllisiä tapoja tai toimintoja, jotka tulevat esille oppimisen aikana. [27, s. 6-7]

Oppimistyylit voidaan jakaa divergoivaan, akkomodoivaan, assimiloivaan ja konvergoivaan tyyliin. Divergoivalle tyylille havaintojen tekeminen ja niiden reflektiivinen pohtiminen on tavanomaista. Divergoiva henkilö tarkastelee tilanteita usein monista eri näkökulmista. Matematiikan opiskelun kontekstissa divergoivan oppimistyylin edustajaa kutsutaan myös tulkitsijaksi. Assimiloivalle tyylille puolestaan tyypillistä on käsitteiden ja yleistysten tekeminen. Assimiloivalla henkilöllä päättelykyky ja teoreettisten mallien luomiskyky on hyvä. Usein assimiloiva opiskelija on teoriasuuntautunut. Assimiloivan oppimistyylin omaavaa henkilöä kutsutaan matematiikan opiskelun yhteydessä myös analysoijaksi. [27, s. 9-10]

Konvergoivan oppimistyylin opiskelijat yrittävät muodostaa käsityksiä ja yleistyksiä. Erona assimiloivaan tyyliin on, että muodostettuja käsitteitä käytetään myös uusissa tilanteissa. Konvergoivan oppimistyylin opiskelijan vahvuuksia ovat käytännönsovellukset, ongelmanratkaisut ja päätöksien tekeminen. Matematiikassa tätä oppimistyyliä voidaan kutsua myös yhdistelijäksi. Akkomodoivan tyylin opiskelijalle tiedon saaminen perustuu omaan kokemukseen. Tietojen muokkaamisessa turvaudutaan pohtimisen sijaan kokeilemiseen. Akkomodoivan tyylin opiskelijoiden vahvuudet ovat suunnitelmien toteuttamisessa. He luottavat paljon ulkopuolisiin tietolähteisiin. Matematiikan opiskelussa tällaista opiskelijaa voidaan kutsua oppimistyyliltään sopeutujaksi. [27, s. 10]

4.2.4 Oppimisprofiilit

Tampereen teknillisessä yliopistossa kaikki opiskelijat suorittavat matematiikan perustaitotestin. Testin alussa opiskelijoita pyydetään määrittämään matematiikan oppimista koskevista kuvauksista opiskelijaa itseään parhaiten kuvaava vaihtoehto. Opiskelijoiden vastausten perusteella heille määritetään oppimisprofiilimalli. Oppimisprofiilimalleja on tutkittu Tampereen teknillisessä yliopistossa aikaisemmin (kts. [27]), minkä perusteella sopiviksi profiilimalleiksi ovat valikoituneet: tukea tarvitsevat, osaajat, pintasuuntautuneet mallista oppijat, vertaisoppijat ja omin päin opiskelevat [27, s. 38-40]. Seuraavassa on esitetty oppimisprofiilimallien kuvaukset sellaisenaan, kuin ne esitetään matematiikan perustaitojentestin kysymyksenasettelussa:

1. profiili (Pintasuuntautunut mallista oppija): Kiinnostukseeni matematiikkaa kohtaan vaikuttaa enemmän koulutusohjelma kuin oma mielenkiinto. Lasken tehtävän usein samalla tavalla kuin se on esitetty kirjassa tai tunnilla, enkä yleensä mieti omaa menetelmää tehtävän ratkaisemiseksi. Kykenen oppimaan matematiikkaa kopioimalla esimerkkiratkaisuja kunhan pidän ajatuksen mukana.

2. profiili (Vertaisoppija): Opiskelen mielelläni matematiikkaa yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa ja laskiessani toivon, että saan neuvoa, jos en kykene itsenäisesti tehtävää ratkaisemaan. Kiinnitän huomiota esimerkkeihin ja koen, että matematiikan oppiminen on tarpeellista. Tehtäviä laskettaessa on mielestäni tärkeää saada oikea vastaus, vaikka joissakin kohdissa ratkaisua olisi virheitä. Pidän siitä, että yrittämisestä palkitaan.

3. profiili (Tukea tarvitseva): Opiskellessani matematiikkaa haluan, että minua opastetaan henkilökohtaisesti vaikeissa kohdissa. Opettajan antamat esimerkit ja opetustapa vaikuttavat paljon siihen, miten omaksun asian. En mielelläni sovella malliratkaisuja uusiin tehtäviin. Jätän vaikeat tehtävät tekemättä tai kesken. Matematiikan "kieli" vaikuttaa minusta vaikealta.

4. profiili (Omin päin opiskeleva): Pystyn oppimaan matematiikkaa, jos koen tarvitsevani sitä. En laske tehtäviä mielelläni kavereiden kanssa, vaan opin parhaiten itsekseni pohtimalla. En myöskään tarvitse opettajan tukea oppimisessani. Laskutehtävien kopioiminen ei edistä oppimistani.

5. profiili (Osaaja): Haluan oppia matematiikkaa syvällisesti, enkä halua opetella asioita ulkoa. Laskiessani vaikeaa tehtävää en luovuta helpolla, vaan yritän ratkaista sen. Pärjään mielestäni hyvin matematiikassa.

Pintasuuntautuneet mallista oppijat ovat pääasiassa tiedon vastaanottajia ja pyrkivät opiskelussaan ulkoa opettelun ja toiston kautta kurssin läpäisemiseen ja hyvään kurssiarvosanaan. Opiskelu tapahtuu pääosin esimerkkien ja tehtävien kopioinnin tuella. Pintasuuntautuneet oppijat tarvitsevat selkeän jäsennetyn materiaalin ja paljon mallisuorituksia. [27, s. 76]

Vertaisoppijoiden asenne matematiikkaa kohtaan on positiivinen. Heille tärkeää opiskelussa on muiden opiskelijoiden ja opettajan tuki. Opiskelussa saatetaan käyttää ulkolukua ja kopioimista, mutta pääosin he kuitenkin pyrkivät syvälliseen oppimiseen. [27, s. 77]

Tukea tarvitsevien suhtautuminen matematiikkaa kohtaan on heikko. Opiskelumenetelmänä käytetään korostetusti kopioimista ja ulkolukua. He kaipaavat myös yksilöllistä neuvontaa ja opastusta. Oma oppimisen ohjautuvuus on myös heikkoa eivätkä he ota vastuuta omasta oppimisestaan. [27, s. 77]

Omin päin oppijoiden opiskelu on merkitysorientoitunutta. Oppimisen tavoitteena on saada tiedot ja taidot työhön ja harrastuksiin. Matematiikkaa itsessään ei koeta kiinnostavana. [27, s. 77]

Osaajien opiskelussa tavoitteena on kehittyminen, mielenkiinto ja oppimisen ilo. Suhtautuminen matematiikan opiskeluun on pääsääntöisesti positiivinen. Heidän työskentelyssä korostuu oma päättely eivätkä he kaipaa paljoa malliesimerkkejä. Opiskelun säätelyn suhteen osaajat ovat itseohjautuvia. Oman ymmärryksen lisääntyminen on tenteissä menestymistä merkittävämpää. [27, s. 78]

Tässä diplomityössä kielentämistä koskevassa tutkimuksessa käytetään näitä oppimisprofiileja.

4.3 Kielentämistä koskevan tutkimuksen toteutus

Matematiikan kielentämistehtäviä koskevassa tutkimuksessa tavoitteena on selvittää opiskelijoiden yleisiä asenteita kielentämistehtäviä kohtaa. Lisäksi tutkitaan, miten kielentämistehtävät vaikuttavat oppimistuloksiin. Tutkimuksessa on kiinnostuttu, miten oppilaat kokevat luonnollisen kielen osana matematiikkaa ja miten se vaikuttaa matematiikan tehtävän ratkaisun ilmaisemiseen. Yhtenä keskeisenä tutkimuksen kohteena on myös selvittää, kokevatko oppilaat kielentämistehtävät motivoivina, erilaisina matematiikan tehtävinä.

Kielentämistä koskevia kysymyksiä tutkittaessa otetaan huomioon opiskelijan menestyminen matematiikan opinnoissa sekä opiskelijoiden erilaiset oppimistavat. Tällöin voidaan tutkia, vaikuttaako opiskelijan osaamistaso tai oppimisprofiili kielentämistehtäviä koskeviin asenteisiin ja mielipiteisiin. Tutkimuksessa selvitetään myös, onko sukupuolella merkitystä opiskelijoiden suhtautumiseen kielentämistehtäviä kohtaan. Yleisten asenteiden, mielipiteiden ja oppimistuloksien lisäksi tutkimuksessa selvitetään, miten kielentämistehtävät koetaan tenttitehtävinä. Tätä tutkitaan kursseille osallistuneiden opiskelijoiden näkökulman sijaan opintojaksojen luennoitsijoiden näkökulmasta.

4.3.1 Tutkimusmenetelmän tausta

Laadullista eli kvalitatiivista tutkimusta on vaikea määritellä selvärajaisesti. Yksinkertaisesti määritellen se voidaan ymmärtää aineiston ja analyysin muodon einumeraaliseksi kuvaukseksi [3, s. 9]. Yleisesti sillä kuitenkin tarkoitetaan kokonaista joukkoa erilaisia tutkimuskäytäntöjä. Keskeisiä metodeja ovat havainnointi, aineistoanalyysi, erilaiset haastattelu ja litterointi [18, s. 196-205]. Aineiston analyysin tarkoituksena on luoda aineistoon selkeyttä ja tuottaa tutkittavasta asiasta uutta tietoa. Päämääränä ei ole pyrkiä tilastollisiin yleistyksiin, vaan pikemminkin tarkoituksena on kuvata tapahtumaa, ymmärtää paremmin tietynlaista toimintaa tai antaa teoreettisesti mielekäs tulkinta jostakin ilmiöstä. [3, s. 34, 104]

Määrällinen eli kvantitatiivinen tutkimus pyrkii antamaan yleisen kuvan muuttujien välisistä relaatioista. Tutkimusmenetelmässä tietoa käsitellään ja kuvaillaan numeerisesti tilastollisina tunnuslukuina. Usein tilastollinen käsittely onkin keskeinen osa määrällistä tutkimusta (kts. Luku 2). Olennaiset tulokset esitetään myös sanallisesti. Määrälliselle tutkimukselle on ominaista tutkimukseen osallistuvien suuri määrä. Tutkimuksen tarkoituksena on selittää, kuvata, kartoittaa, vertailla ja ennustaa ilmiöitä tai asioita. Tavoitteena on esittää saadut tutkimustulokset yleistettävinä teorioina. Aineiston hankinnassa käytetään tyypillisesti valmiiksi konstruoituja vakioituja kysely- tai haastattelulomakkeita. Tutkimuksissa voidaan hyödyntää myös erilaisia rekistereitä, joissa tieto on jo valmiiksi kerättynä. [41, s. 13-35]

Mixed methods -tutkimusmenetelmässä yhdistetään määrällinen ja laadullinen tutkimus. Usein on järkevää valita toinen menetelmistä tutkimuksen pääasialliseksi tutkimusmenetelmäksi. Tutkimuksen lähestymistapa voi olla suuremmilta osin esimerkiksi määrällinen, jolloin tapaustutkimusten avulla voidaan joitakin tiettyjä aineiston "tyyppiarvoja" tutkia syvällisemmin. Tutkimusmenetelmiä yhdistämällä eli menetelmätriangulaation avulla tutkimukseen saadaan lisää syvyyttä ja luotettavuutta. [18, s. 245]

4.3.2 Tutkimusmenetelmien käyttö, aineisto ja tutkimuksen eteneminen

Matematiikan kielentämistehtäviä koskeva tutkimus tehtiin TTY:llä uusien opiskelijoiden ensimmäisillä matematiikan opintojaksoilla syksyllä 2014. Tutkimukseen osallistuivat insinöörimatematiikka B1 ja matematiikka 1 -opintojaksojen opiskelijat. Matematiikka 1 -opintojakso on suunnattu biotekniikan, teknis-luonnontieteellisen sekä ympäristö- ja energiatekniikan opintosuuntien opiskelijoille. Lisäksi opintojaksolla opiskelee muutamia muiden opintosuuntien opiskelijoita, jotka ovat valinneet opintojakson oman kiinnostuksenkohteensa perusteella. Insinöörimatematiikka B1 -opintojaksoa opiskelevat puolestaan pääosin sähkötekniikan ja tietotekniikan opintosuuntien opiskelijat. [34]

Tutkimus aloitettiin laatimalla kummallekin opintojaksolle viikoittaisten harjoitusten yhteyteen erityylisiä opetettavaan aihealueeseen liittyviä kielentämistehtäviä. Palautettavat kielentämistehtävät laadittiin yhteistyössä opintojaksojen vastuuhenkilöiden kanssa syksyn 2014 aikana. Tehtävät pyrittiin laatimaan siten, että ne ovat mahdollisimman monipuolisia ja että niissä tulee esille monia erilaisia kielentämistehtävätyyppejä. Kielentämistehtävätyyppejä on esitelty tarkemmin Kappaleessa 4.1.3. Palautettuja kielentämistehtäviä on aineistossa valtavasti, yhteensä liki 1000 tehtävää. Tehtävien tarkoitus oli tutustuttaa opiskelijat paremmin kielentämiseen. Palautettuja tehtäviä ei analysoida tässä tutkimuksessa.

Kielentämistehtävät olivat merkitty erikseen viikkoharjoituksiin ja ne palautettiin viikoittain laskuharjoituksissa tai niitä ennen. Insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla palautettavia kielentämistehtäviä oli yhteensä viisi ja matematiikka 1 -opintojaksolla kuusi kappaletta. Insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla kielentämistehtävät palautettiin paperiversiona laskuharjoitusten pitäjälle. Matematiikka 1 -opintojaksolla opiskelijat puolestaan latasivat viikoittain tekemänsä kielentämistehtävän sähköiselle Moodle-alustalle ennen viikon ensimmäisiä laskuharjoituksia. Kaikki opintojaksoilla käytetyt kielentämistehtävät ovat esitettynä liitteessä C.

Molempien opintojaksojen lopuksi viimeisissä laskuharjoituksissa järjestettiin kielentämistehtäviä koskeva strukturoitu kysely, joka on esitettynä Liitteessä E. Se toteutettiin paperisella kyselylomakkeella, jossa kysyttiin opiskelijan perustietoja (opiskelijanumero, sukupuoli, jne.) ja suhtautumista matematiikan kielentämiseen. Loppukyselyssä opiskelijoille esitettiin 16 väittämää kielentämiseen liittyen. Väittämiin vastattiin valitsemalla itseään parhaiten kuvaava vaihtoehto neliportaisen likert-asteikon avulla. Kyselyn laadinnassa väittämien operationalisointiin pyrittiin kiinnittämään erityistä huomiota, jotta väittämät mittaisivat mahdollisimman hyvin tutkittavaa asiaa. Osa väittämistä on täsmälleen samoja kuin tutkimuksessa *Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa* [11]. Tässä diplomityössä saatuja tuloksia on täten helppo vertailla edellä mainitun tutkimuksen tuloksiin. Väittämien jälkeen loppukyselyssä oli lisäksi kaksi avointa kysymystä. Kysymykset koskivat opintojakson aikana oppimiseen myönteisesti vaikuttaneita asioita ja yleistä suhtautumista opintojakson aikana olleisiin kielentämistehtäviin.

Kyselylomakkeen opiskelijanumeron avulla kyselyn tulokset yhdistettiin TTY:n matematiikan laitoksen tietokannasta saatavaan lisätietoon. Tietokannasta haettiin lisää opintojaksojen opiskelijoita koskevaa tutkimuksen kannalta olennaista informaatiota. Osaamistason määrittämistä varten tietokannasta haettiin opiskelijoiden perustaitotestin tulos sekä tenttiarvosana. Näiden lisäksi matematiikan laitoksen tietokannan avulla tutkimukseen osallistuneet opiskelijat yhdistettiin opiskelijan oppimisprofiiliin, joka määritettiin perustaitotestin yhteydessä. Oppimisprofiilista ja sen määrittämisestä on kerrottu lisää Kappaleessa 4.2.4.

Tässä tutkimuksessa määrällistä tutkimusta käytetään kielentämistä koskevien mielipiteiden ja asenteiden mittaamiseen. Lisäksi määrällisen tutkimuksen avulla tutkitaan kielentämisen vaikutuksia oppimistuloksiin ja motivaatioon. Tarkoituksena on selvittää kielentämistä koskevien yleisten mielipiteiden lisäksi, millainen yhteys opiskelijan osaamistasolla, oppimisprofiililla ja opiskelijan sukupuolella on kielentämistehtäviä koskeviin asenteisiin. Edellä mainittujen ominaisuuksien mukaan opiskelijoita jaetaan erillisiin luokkiin, joita tutkitaan ja vertaillaan tutkimuksessa tarkemmin. Määrällisen tutkimuksen tulosten analysoinnissa käytetään tilastomatematiikan keinoja, joita on tarkemmin esitelty Luvussa 2. Tilastollisessa testauksessa käytettään kaksisuuntaista vastahypoteesiä.

Määrällisen tutkimuksen lisäksi kielentämistehtäviä analysoidaan myös laadullisin menetelmin. Opintojaksojen kyselylomakkeessa oli likert-astekko -väittämien lisäksi kaksi avointa kysymystä kielentämiseen ja opintojaksolla tapahtuneeseen oppimiseen liittyen. Tässä tutkimuksessa avointen kysymysten vastauksien analyysiin käytetään sisällönanalyysiä. Avointen kysymysten vastaukset jaetaan teemoihin asiasisällön mukaan ja vastauksista pyritään löytämään yhtäläisyyksiä ja eroja. Edelleen niitä tutkimalla vastauksista pyritään luomaan tiivistetty ja hyvin jäsennetty kokonaisuus, jota voidaan käyttää tutkimuksessa analyysin tukena. [29]

Sekä insinöörimatematiikka B1 että matematiikka 1 -opintojaksojen ensimmäisissä tenteissä oli yksi kielentämistehtävä. Ne on esitetty Liitteessä D. Tehtävien soveltuvuutta tenttitehtäviksi tutkittiin opintojaksojen vastuuhenkilöille kohdistetun puolistrukturoidun kyselyn avulla. Kysely koostui viidestä avoimesta kysymyksestä ja se järjestettiin keväällä 2015. Kysely on kokonaisuudessaan esitetty Liitteessä F. Opintojaksojen vastuuhenkilöiden vastauksia analysoidaan sisällönanalyysin avulla.

4.4 Tutkimuksen määrällinen analyysi

Tässä kappaleessa analysoidaan tutkimusta määrällisesti ja esitellään sen avulla saatuja keskeisimpiä tuloksia. Aluksi tarkastellaan yleisiä tuloksia kielentämiseen liittyen. Lisäksi analysoidaan osaamistason, oppimisprofiilin ja sukupuolen vaikutusta matematiikan kielentämiseen.

4.4.1 Yleisiä tuloksia

Matematiikan kielentämistä opintojaksoilla tutkittiin kirjallisen kyselylomakkeen (Liite E) avulla. Taulukossa 4.2 on esitettynä opiskelijoiden vastauksien jakautuminen eri väittämiin. Otos muodostuu kaikista kyselylomakkeeseen vastanneista henkilöistä. Puutteellisten vastauksien vuoksi otoksen suuruus kuitenkin hieman vaihtelee eri väittämissä. Kato on 4-11 ja otos 176-183 opiskelijaa väittämästä riippuen.

Opiskelijat vastasivat väittämiin neliportaisen likert-asteikon avulla. Tutkimuksen analyysivaiheessa vaihtoehdot "täysin samaa mieltä" ja "osittain samaa mieltä" kuitenkin samaistettiin vaihtoehdoksi "samaa mieltä" ja vastaavasti myös vaihtoehdot "täysin eri mieltä" ja "osittain eri mieltä" yhdistettiin vaihtoehdoksi "eri mieltä". Tämä tehtiin χ^2-testin vaatimusten vuoksi (kts. Kappale 2.5). Pienissä 2x2 taulukoissa ei saa olla yhtään alle viiden suuruista odotettua frekvenssiä ($f_i g_j/N$). Suuremmissa taulukoissa niitä saa olla korkeintaan 20 %, jotta testi on pätevä. Alle yhden suuruisia odotettuja frekvenssejä ei puolestaan saa olla lainkaan.

Taulukko 4.2: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia (N=176-183).

Kysymys	Eri mieltä	Samaa mieltä	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	23,2 %	76,8 %	181
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	20,9 %	79,1 %	182
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	89,2 %	10,8 %	176
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	11,0 %	89,0 %	182
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	24,4 %	75,6 %	180
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	37,0 %	63,0 %	181
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	75,6 %	24,4 %	180
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	43,0 %	57,0 %	179
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	59,3 %	40,7 %	182
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	53,0 %	47,0 %	183
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	63,9 %	36,1 %	180
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	30,0 %	70,0 %	180
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	53,3 %	46,7 %	180
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	54,1 %	45,9 %	181
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	85,7 %	14,3 %	182
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	60,6 %	39,4 %	180

Tarkemmat kyselyn tulokset ovat esitettynä liitteissä G.1, G.2, G.3, G.4 G.5. Myös väittämien välinen korrelaatiomatriisi on esitettynä Liitteessä H.1.

Luonnollinen kieli osana matematiikkaa yleisesti

Luonnollisen kielen käyttöön matemaattisessa ilmaisussa suhtaudutaan erittäin positiivisesti. Tutkimukseen vastanneista opiskelijoista suurin osa käyttää arkikieltä ratkaisun tukena mielellään (väittämä 7; 76,8 %). Sen lisäksi, että luonnollisen kielen käyttö on opiskelijoille mieluisa tapa ilmaista matemaattista ajattelua, he kokevat sen myös monin tavoin oppimisen ja ymmärtämisen kannalta hyödylliseksi. Luonnollinen kieli auttaa matematiikan tehtävän ratkaisun eri vaiheiden seuraamista ja ymmärtämistä (väittämä 8; 79,0 %) sekä jäsentää omaa matemaattista ajattelua tehtävänratkaisuprosessin aikana (väittämä 18; 70,0 % ja väittämä 21; 85,7 %). Luonnollisen kielen hyöty matematiikassa ei kuitenkaan rajoitu vain matematiikan tehtävien ratkaisuvaiheeseen. Sanalliset perustelut ja arkikieli helpottavat tehtävänratkaisuprosessin lisäksi matematiikan eri käsitteiden ymmärtämistä ja käsittelyä (väittämä 9; 89,2 %.). Luonnollisella kielellä tapahtuva suullinen kielentäminen on myös suurimman osan mielestä mieluinen tapa ilmaista matemaattista ajattelua (väittämä 12; 63,0 %).

Luonnollisen kielen ohella myös perinteisellä matematiikan symbolikielellä on matemaattisessa ilmaisussa hyvin keskeinen rooli. Tutkimuksen perusteella opiskelijat käyttävät luonnollisen kielen lisäksi myös matematiikan symbolikieltä mielellään matematiikan tehtäviä ratkaistessaan (väittämä 11; 75,6%). Kielet esiintyvätkin opiskelijoiden matemaattisessa ilmaisussa rinnakkain yhtä mielekkäinä matemaattisen ilmaisun tapoina. Tämä havainto tukee hyvin kielentämisen keskeistä tavoitetta - pyrkimystä monipuoliseen matemaattiseen ilmaisuun, jossa opiskelija voi kulloinkin valita itselleen sopivimman tavan dokumentoida tehtävän ratkaisun sekä käyttää eri ilmaisutapoja siten, että ne täydentävät luontevasti toisiaan ja samalla kehittävät kielentäjän matemaattista ajattelua ([11, s. 61], [10, s. 5]).

Tulokset ovat hyvin samankaltaisia aikaisemmin tehtyjen tutkimusten kanssa. Tässä tutkimuksessa väittämät 8, 14 ja 18 muotoiltiin samalla tavalla kuin aikaisemmin tehdyssä Joutsenlahden ym. tutkimuksessa [11]. Siinä todettiin tämän tutkimuksen tavoin, että matematiikan tehtävän ratkaisua on helpompi ymmärtää, kun siinä on matematiikan symbolikielen lisäksi myös luonnollista kieltä. Aikaisemmassa tutkimuksessa opiskelijat olivat vielä tätä tutkimusta enemmän samaa mieltä tämän väitteen kanssa. Ero tutkimusten välillä on tilastollisesti melkein merkitsevä (p = 0,031). Joutsenlahden ym. tutkimuksessa [11] opiskelijat kokivat myös oman kirjallisen kommentoinnin ja väliotsikoinnin positiivisempana asiana kuin tähän tutkimukseen osallistuneet opiskelijat. Ero on tilastollisesti lähes merkitsevä (p = 0,034).

Alle puolet opiskelijoista kokee sanallisten perustelujen kirjoittamisen vaikeaksi ja työlääksi (väittämä 14; 57,0 % ja väittämä 16; 53,0%). Toisaalta suurin osa opiskelijoista kuitenkin väittää, että luonnollisen kielen liittäminen ratkaisun osaksi vie jonkin verran aikaa (väittämä 22; 60,0 %). Tämä saattaa johtua siitä, että opiskelijan kokemus sanallisten tehtävien työläydestä on yksilöllistä. Vaikka myönnetään, että perustelujen kirjoittaminen vie aikaa, kirjoitusprosessia ei kuitenkaan välttämättä koeta itsessään vaativaksi tai työlääksi. Tähän vaikuttaa se, kuinka paljon opiskelijat ovat ylipäätään valmiita tekemään töitä ratkaistakseen matematiikan tehtäviä. Joutsenlahden ym. tutkimuksessa [11] sanallisten perustelujen kirjoittaminen nähtiin hieman vaikeampana kuin tässä tutkimuksessa. Ero tutkimusten välillä ei kuitenkaan ole tilastollisesti merkitsevä ($p = 0{,}375$).

Taulukossa 4.3 on esitetty samaa mieltä olevien opiskelijoiden prosentuaaliset osuudet tässä ja Joutsenlahden ym. tutkimuksessa [11].

Taulukko 4.3: Kielentämistä koskevan kyselyn tuloksia tässä ja Joutsenlahden ym. tutkimuksessa [11].

Kysymys	Samaa mieltä (%)	
	Tämä tutkimus	Vertailukohde
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	79,1 %	88,8 %
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	57,0 %	51,7 %
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	70,0 %	81,0 %

Vuonna 2010 tehdyssä Siliuksen ym. tutkimuksessa [32] opiskelijat eivät pitäneet luonnollisen kielen liittämistä matematiikan tehtävän ratkaisuun mieluisana asiana. Tässä tutkimuksessa suhtautuminen on kuitenkin päinvastainen. Osa tutkimusten välisestä erosta selittyy tosin sillä, että aikaisemmassa tutkimuksessa väittämien vastausvaihtoehdoissa oli mukana myös neutraali vastausvaihtoehto. Muilta osin Siliuksen ym. tutkimuksessa [32] luonnollinen kieli nähtiin tämän tutkimuksen tavoin pääosin positiivisena matemaattisen ilmaisun tapana.

Erilaiset matematiikan tehtävät

Opiskelijat haluavat vaihtelua ja monipuolisuutta käytettäviin tehtävätyyppeihin. Matematiikan tehtäviä ratkaistessaan opiskelijat kaipaavat erityisesti erityylisiä tehtävätyyppejä (väittämä 10; 89,0 %). Myös sanallisia tehtäviä pidetään yleisesti innostavina (väittämä 13; 75,6 %). Syy liittyy mahdollisesti siihen, että sanalliset tehtävät ovat usein muita tehtäviä huomattavasti konkreettisempia ja sen vuoksi helpommin lähestyttäviä. Ne ovat monissa tilanteissa myös jollakin tavalla kytköksissä johonkin käytännön ongelmaan. Tämän vuoksi tehtävän ratkaiseminen saatetaan nähdä muita tehtäviä mielekkäämpänä. Sanallisissa tehtävissä opiskelijoilla on myös enemmän vapauksia matemaattisen ilmaisun suhteen. Tehtävänannot ovat tyypillisesti kirjoitettu arkikielellä eikä tehtävän ratkaisutapaa ole tarkasti etukäteen sidottu. Opiskelijalla on tällöin mahdollisuus lähteä prosessoimaan ongelmaa sekä dokumentoimaan sen ratkaisua haluamallaan tavalla. Sanallisiin tehtävään liittyy myös vähemmän kielellisiä ongelmia kuin esimerkiksi analyysitehtäviin [38, s. 238].

Kielentämistehtävät opintojaksoilla

Suurin osa opintojaksojen opiskelijoista oli sitä mieltä, että kielentämistehtävät vaikuttivat oppimistuloksiin positiivisesti (väittämä 15; 59,3 %). Insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla opiskelijat eivät kuitenkaan kokeneet kielentämistehtäviä yhtä hyödyllisiksi kuin matematiikka 1 -opintojaksolla (väittämä 15; IMA: 53,6 % ja Ma: 65,9 %). Eroa opintosuuntien voidaan pitää tilastollisesti suuntaa antavana ($p =$ 0,093). Myös tehtävien vaikeusasteessa oli opintosuuntien välillä eroa. Opiskelijoiden vastauksen väittämään 20 on esitetty Taulukossa 4.4.

Taulukko 4.4: Opintojakso vs. väittämä 20 -ristiintaulukointi. (Väittämä 20: Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.) N = 181.

Opintojakso		Väite 20	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
MA	N	32	52
	%	38,1 %	61,9 %
IMA	N	66	31
	%	68,0 %	32,0 %

Kielentämistehtävien vaikeusaste-ero johtuu siitä, että opiskelijoilla oli opintojaksoilla eri kielentämistehtävät ratkaistavanaan. Ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä ($p <$ 0,0005). Matematiikka 1 -opintojaksolla kielentämistehtäviin liittyi jonkin verran myös Matlab-ohjelmiston käyttöä. Ohjelma oli entuudestaan suurimmalle osalle opiskelijoista vieras, mikä osaltaan saattaa selittää matematiikka 1 -opintojakson kielentämistehtävien haastavuutta. Insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla tehtävät olivat puolestaan liian helppoja.

Kielentämistehtävien motivoivuutta mitattiin väittämien 17 ja 19 avulla ($r =$ 0,578; $p <$ 0,0005). Kummallakaan opintojaksoista kielentämistehtäviä ei koettu erityisen motivoivina tai innostavina (väittämä 19; 45,9 % ja väittämä 17; 36 %). Kielentämistehtävien laatimiseen on käytettävä enemmän aikaa, jotta niistä saataisiin paremmin oppimista tukevia. Erityisesti on kiinnitettävä huomiota tehtävien vaikeustasoon. Liian helpot tai vaikeat tehtävät eivät tue oppimista eivätkä ne ole tehtävinä erityisen innostavia.

4.4.2 Erot opintojaksojen välillä

Aikaisemmin todettiin, että matematiikka 1 -opintojakson opiskelijat kokivat kielentämistehtävät oppimisen kannalta hyödyllisempinä kuin insinöörimatematiikka B1 -opintojakson opiskelijat (väittämä 15). Lisäksi havaittiin, että matematiikka 1 -opintojaksolla kielentämistehtävät olivat huomattavasti haastavampia (väittämä 20). Tässä kappaleessa tarkastellaan muita kyselyn perusteella havaittuja eroja opiskelijoiden suhtautumisessa kielentämiseen. Opintojaksokohtaiset loppukyselyn tulokset ovat esitettynä Liitteessä G.2.

Opiskelijoiden kyselylomakkeiden vastauksien perusteella matematiikka 1 -opintojakson opiskelijat näyttäisivät kokevan oman kirjallisen väliotsikoinnin ja muun kommentoinnin tehtävän ratkaisun kannalta hyödyllisempänä kuin insinöörimatematiian opiskelijat. Eroa opintojaksojen välillä voidaan pitää tilastollisesti suuntaa antavana (p= 0,054). Taulukossa 4.5 on esitettynä opintojaksojen opiskelijoiden vastauksien jakautuminen väitteen 18 kohdalla.

Taulukko 4.5: Opintojakso vs. väittämä 18 -ristiintaulukointi. (Väittämä 18: Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.) N = 180.

Opintojakso		Väite 18: Eri mieltä	Väite 18: Samaa mieltä
MA	N	19	64
	%	22,9 %	77,1 %
IMA	N	35	62
	%	36,1 %	63,9 %

Insinöörimatematiikan opiskelijat eivät siis koe oman kirjallisen kommentoinnin auttavan yhtä paljoa tehtävän ratkaisuprosessia kuin matematiikka 1 -opintojakson opiskelijat. Väittämän 18 lisäksi omien sanallisten perustelujen hyötyä mittaa väittämä 21. Myös sen perusteella matematiikka 1 -opintojakson opiskelijat kokevat omat luonnollisella kielellä kirjoiteut perustelut tärkeämpinä. Ero opintojaksojen välillä väittämän 21 kohdalla ei kuitenkaan ole kovin suuri eikä sitä voi pitää tilastollisesti merkittävänä (p = 0,202). Insinöörimatematiikan opiskelijoiden hieman negatiivisempaa suhtautumista sanallisten perusteluiden kirjoittamista kohtaan tukee myös väittämän 7, joka koskee luonnollisen käytön mieluisuutta, vastauksien jakautuminen. Tämänkään väittämän kohdalla ero ei kuitenkaan ole tilastollisesti merkittävä (p = 0,218). Perustelujen kirjoittamisen vaativuudessa tai työläydessä ei tässä tutkimuksessa havaittu eroja opintojaksojen opiskelijoiden välillä. On kuitenkin huomioitava, että yleisesti luonnollinen kieli koetaan positiivisena molempien opintojaksojen opiskelijoiden keskuudessa. Havaittu ero koskee siis ainoastaan kielentäjän omaa luonnollisen kielen käyttöä matematiikan tehtävän ratkaisun osana.

Siliuksen ym. tutkimuksessa [32] havaittiin tämän tutkimuksen tavoin, että laajan matematiikan (nyk. matematiikka) opiskelijat kokivat luonnollisella kielellä kirjoitetut väliotsikot insinöörimatematiikan opiskelijoita myönteisempänä asiana. Samassa tutkimuksessa huomattiin myös, että laajan matematiikan opiskelijat suhtautuvat luonnollisen kielen käyttöön osana matematiikan tehtävän ratkaisua myönteisemmin kuin insinöörimatematiikan opiskelijat. Tämän tutkimuksen tulokset ovat siis hyvin samankaltaisia Siliuksen ym. tutkimuksen [32] kanssa.

Tässä diplomityössä tehdyssä tutkimuksessa ero luonnollisen kielen käytössä opintojaksojen välillä ei tosin ole yhtä suuri kuin aikaisemmassa tutkimuksessa. Tämä saattaa osaltaan johtua siitä, että nykyisen matematiikan (ent. laaja matematiikka) opiskelijat ovat useammasta eri opintosuunnasta peräisin eivätkä heidän opinnot ole kokonaisuudessaan yhtä voimakkaasti painottuneita matematiikkaan kuin aikaisemmilla laajan matematiikan opiskelijoilla. Laajaa matematiikkaa (nyk. matematiikka) opiskelivat pääsääntöisesti ainoastaan teknis-luonnontieteellisen koulutusohjelman opiskelijat, joiden opinnoissa matematiikalla oli hyvin keskeinen rooli. Nykyisen matematiikka 1 -opintojakson opiskelijoista suhteellisesti huomattavasti pienemmän osan opinnot suuntautuvat yhtä syvällisesti matematiikkaan.

Matematiikka 1 -opintojakson opiskelijat pitävät sanallisia tehtäviä motivoivampina (väittämä 13) kuin insinöörimatematiikan opiskelijat. Taulukossa 4.6 on esitetty opintosuuntakohtaiset erot väittämän 13 suhteen.

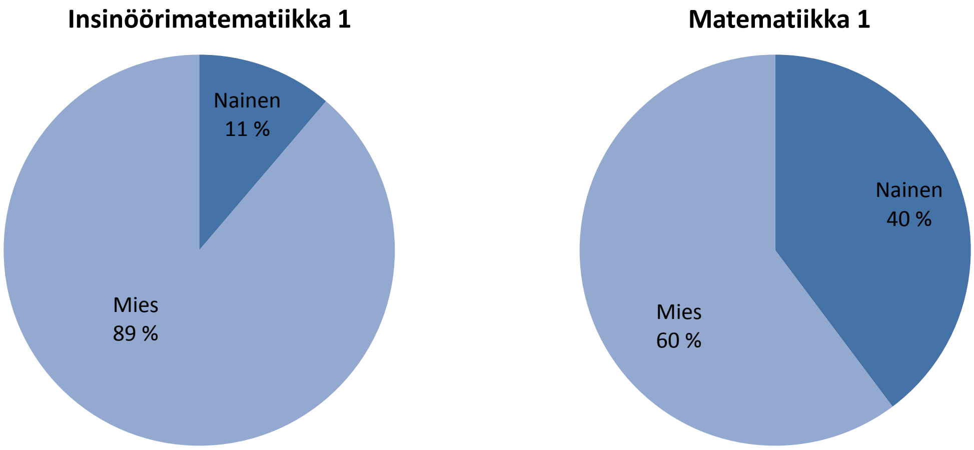
Taulukko 4.6: Opintojakso vs. väittämä 13 -ristiintaulukointi. (Väittämä 13: Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.) N = 180.

Opintojakso		Väite 13: Eri mieltä	Väite 13: Samaa mieltä
MA	N	69	15
	%	82,1 %	17,9 %
IMA	N	67	29
	%	69,8 %	30,2 %

Ero sanallisten tehtävien motivoivuudessa ei kuitenkaan ole tilastollisesti merkitsevä ($p = 0{,}054$), vaan ainoastaan suuntaa antava. Syy sanallisten tehtävien motivoivuuseroon opintojaksojen välillä saattaa johtua opintojaksojen opiskelijarakenteen erosta. Matematiikka 1 -opintojakson opiskelijat ovat keskimäärin motivoituneempia opiskelemaan matematiikkaa, minkä vuoksi he todennäköisesti kokevat soveltavat matematiikan tehtävät innostavampina.

4.4.3 Sukupuolten väliset erot ja kielentäminen

Tässä kappaleessa tutkitaan, onko opiskelijan sukupuolella vaikutusta hänen asenteisiin ja mielipiteisiin kielentämistehtäviä kohtaan. Tarkoituksena on selvittää, sopivatko kielentämistehtävät paremmin miehille vai naisille ja kokevatko he kielentämisen jossain määrin eri tavalla. Liitteessä G.3 on esitetty miesten ja naisten vastaukset loppukyselyyn. Kuvassa 4.7 on havainnollistettu opiskelijoiden sukupuolijakaumaa opintojaksoilla.



Kuva 4.7: Sukupuolten välinen jakauma opintojaksoilla. Insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolla miehiä on 90 ja naisia 11. Matematiikka 1 -opintojaksolla miehiä on 52 ja naisia 33.

Valtaosa (76,3 %) opintojaksojen opiskelijoista on miehiä. Opintojaksojen välillä sukupuolijakauma on kuitenkin selvästi erilainen. Matematiikka 1 -opintojaksolla naisten osuus on noin 40 %, kun insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla vastaava luku on ainoastaan noin 11 %.

Väittämien 8 ja 21 avulla mitattiin opiskelijoiden suhtautumista luonnolliseen kieleen matematiikan tehtävän ratkaisun osana. Miesten ja naisten vastaukset väittämiin on esitetty taulukoissa 4.7 ja 4.8.

Taulukko 4.7: Opiskelijan sukupuoli vs. väittämä 8 -ristiintaulukointi. (Väittämä 8: Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.) N = 181.

Sukupuoli		Väite 8	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Miehet	N	34	103
	%	24,8 %	75,2 %
Naiset	N	4	40
	%	9,1 %	90,9 %

Taulukko 4.8: Opiskelijan sukupuoli vs. väittämä 21 -ristiintaulukointi. (Väite 21: Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.) N = 181.

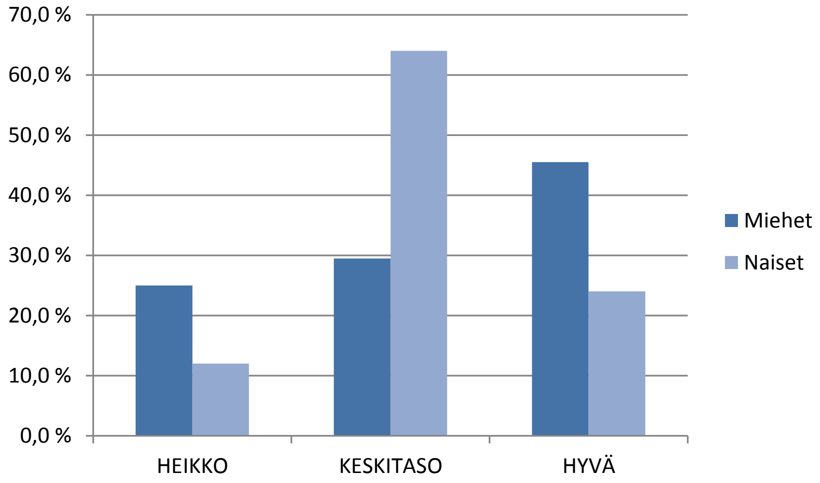
Sukupuoli		Väite 21	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Miehet	N	113	24
	%	82,5 %	17,5 %
Naiset	N	42	2
	%	95,5 %	4,5 %

Taulukoista 4.7 ja 4.8 havaitaan, että naiset kokevat luonnollisen kielen auttavan tehtävän ratkaisun hahmottamisessa miehiä enemmän. Sanalliset perustelut ovat naisten mielestä hyödyllisempiä ja ne helpottavat tehtävän ymmärtämistä. Valtaosa miesopiskelijoista on myös tätä mieltä, mutta heidän kantansa ei ole yhtä voimakas kuin naisilla. Eroa voidaan pitää tilastollisesti melkein merkitsevänä (väittämä 8; p = 0,026 ja väittämä 21; p = 0,033). Naisopiskelijat kokevat myös hyötyvänsä sanallisten perusteluiden kirjoittamisesta tehtävää ratkaistaessa hieman miehiä enemmän (väittämä 18). Eroa ei kuitenkaan voi pitää tilastollisesti merkitsevänä (p = 0,130).

Naiset suhtautuvat ylipäätään luonnolliseen kieleen hieman miehiä hieman positiivisemmin (väittämät 7 ja 9). Erot ovat kuitenkin näiden väittämien kohdalla kohtalaisen pieniä, eivätkä täten tilastollisesti merkitseviä (väittämä 7; p = 0,669 ja väittämä 9; p = 0,706). Luonnollisen kielen käytön helppoudessa tai työläydessä ei havaita sukupuolten välillä tilastollista eroa. (väittämät 14, 16 ja 22).

Naisten hieman positiivisempaa suhtautumista luonnollista kieltä kohtaan voi perustella sillä, että useiden tutkimusten (kts. esim. [4], [6]) mukaan naiset ovat lukutaidoltaan, kielentuntemukseltaan ja kirjoitustaidoiltaan miehiä parempia. Heidän yleinen suhtautuminen äidinkieltä kohtaan on myös miehiä positiivisempi. Tämän vuoksi naiset luultavasti myös kokevat luonnollisen kielen osana matematiikan tehtävän ratkaisua miehiä mielekkäämpänä ja tärkeämpänä.

Matematiikka 1 -opintojaksolla sukupuolten välisessä osaamistasossa (Osaamistaso määritelty Kappaleessa 4.4.4) havaittiin tilastollisesti melkein merkitsevä ero ($p = 0{,}020$). Osaamistasoltaan hyviä on huomattavasti enemmän miesopiskelijoissa ja keskitasoisia naisopiskelijoissa. Ero osaamistasossa johtuu pääosin naisopiskelijoiden heikosta tenttimenestyksestä matematiikka 1 -opintojaksolla. Vastaavaa osaamistasoeroa ei havaittu insinöörimatematiikan opiskelijoilla. Kuvassa 4.8 on havainnollistettu sukupuolten välistä osaamistasoeroa matematiikka 1 -opintojaksolla.



Kuva 4.8: Sukupuolten väliset erot matematiikan osaamistasossa Matematiikka 1 -opintojaksolla

Tutkimuksessa havaittiin, että matematiikka 1 -opintojakson naisopiskelijat pitivät opintojakson kielentämistehtäviä selvästi miehiä vaikeampina (väite 20). Kielentämistehtävien haasteet johtuvat sukupuolten välisestä osaamiserosta. Opintojakson aihepiiri oli jostain syystä naisopiskelijoille erityisen haastava, sillä tenttimenestyksen perusteella sukupuolten välinen ero osaamisessa on huomattavasti yleistä osaamistasoeroa merkittävämpi. Eroa kielentämistehtävien vaikeusasteessa sukupuolten välillä voidaan pitää tilastollisesti merkitsevänä ($p = 0{,}008$). Osaamistasoeron havaittiin vaikuttavan osaltaan myös suullisen kielentämisen mielekkyyteen matematiikka 1 -opintojaksolla. Naiset kokivat suullisen kielentämisen epämiellyttävämpänä kuin miehet. Ero on tilastollisesti suuntaa antavana ($p = 0{,}080$). Vastaavat havainnot huomataan myös seuraavassa Kappaleessa 4.4.4, jossa matematiikan osaamistason ja kielentämiseen liittyvien asenteiden sekä kokemusten yhteyttä tutkitaan tarkemmin. Syytä naisopiskelijoiden heikommalle osaamistasolle matematiikka 1 -opintojaksolla ei tässä tutkimuksessa tullut esille.

4.4.4 Osaamistason yhteys kielentämiseen

Tarkan matematiikan osaamistason määrittäminen on hyvin hankalaa. Matematiikka on kumulatiivinen oppiaine, jossa uusi tieto konstruoidaan aina vanhan tiedon päälle [33, s. 20]. Tämän perusteella osaamistason mittarina voisi käyttää opiskelijan viimeisintä matematiikan suoritusta. Osaamistason määrittämiseen yhden suorituksen perusteella liittyy kuitenkin epävarmuustekijöitä - osaamistasoltaan hyväkin saattaa joskus epäonnistua. Tämän vuoksi tässä diplomityössä opiskelijan osaamistaso määritellään useamman suorituksen perusteella. Osaamistasoon vaikuttaa opiskelijan ylioppilasarvosana, perustaitotestin pistemäärä ja opintojakson ensimmäisen tentin tenttiarvosana. Edellä mainituista jokainen vaikuttaa osaamistasoon kolmanneksen. Pitkän matematiikan ylioppilaskokeen (PM) arvosanan maksimipistemäärä on 6 pistettä, perustaitotestin 16 pistettä ja tentin 5 pistettä. Jos opiskelija on kirjoittanut lyhyen matematiikan (LM) ylioppilaskirjoituksissa, jaetaan hänen ylioppilaskokeen arvosanan mukainen pistemäärä luvulla kaksi. Tällöin opiskelijan osaamistaso saadaan määritettyä kaavalla

$$Osaamistaso = \begin{cases} \frac{Ylioppilasarvosana}{6} + \frac{Perustaitotesti}{16} + \frac{Tenttiarvosana}{5}, & \text{jos PM} \\ \frac{Ylioppilasarvosana}{12} + \frac{Perustaitotesti}{16} + \frac{Tenttiarvosana}{5}, & \text{jos LM.} \end{cases}$$

Tämän avulla opiskelijat edelleen jaettiin kolmeen ryhmään: osaamistasoltaan heikkoihin, keskitasoisiin ja hyviin. Tarkastelun ulkopuolelle on jätetty opiskelijat, joilla ei ole suoritusmerkintää matematiikan ylioppilaskirjoituksista, perustaitotestistä tai tentistä.

Tutkimuksessa ei havaittu, että osaamistaso vaikuttaisi opiskelijoiden mielipiteisiin tai asenteisiin luonnollista kieltä kohtaan kirjallisen kielentämisen osalta. Osaamistasosta riippumatta opiskelijat kokevat kirjallisen sanallisen ilmaisun tärkeänä osana matemaattista ilmaisua. Osaamistaso ei myöskään vaikuta opiskelijoiden kokemukseen sanallisten perustelujen kirjoittamisen työläydestä. Perustelujen kirjoittamisen helppoudessa havaittiin kuitenkin pientä eroa, erityisesti osaamistasoltaan heikkojen ja keskitasoisten/hyvien välillä. Heikot opiskelijat kokevat sanallisten perusteluiden kirjoittamisen hieman muita opiskelijoita haastavampana. Ero ei kuitenkaan ole tilastollisesti merkitsevä (p = 0,157).

Aikaisemmin todettiin, että opiskelijat ratkaisevat mielellään erityylisi matematiikan tehtäviä. Suurin osa opiskelijoista pitää myös sanallisia tehtäviä innostavana tehtävätyyppinä. Osaamistasolla on kuitenkin vaikutusta opiskelijoiden suhtautumiseen erityylisten matematiikan tehtävien ratkaisemista kohtaan (väittämä 10). Osaamistasoltaan hyvistä käytännössä katsoen kaikki (97,9 %) ratkaisevat mielellään rutiinitehtävistä eroavia matematiikan tehtäviä. Heikoista viidennes keskittyisi mieluummin vain entuudestaan tuttuihin rutiinitehtäviin. Osaamistasolla on myös merkitystä siihen, kuinka innostavina opiskelijat kokevat matematiikan sanalliset tehtävät (väittämä 13). Ero on kohtalaisen suuri erityisesti osaamistasoltaan heikkojen ja keskitasoisten/hyvien välillä. Taulukoissa 4.9 ja 4.10 on esitetty opiskelijoiden vastaukset väittämiin 10 ja 13.

Taulukko 4.9: Opiskelijan osaamistaso vs. väittämä 10 -ristiintaulukointi. (Väite 10: Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.) N = 142.

Osaamistaso		Väite 10	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Heikko	N	5	24
	%	17,2 %	82,8 %
Keskitaso	N	6	59
	%	9,2 %	90,8 %
Hyvä	N	1	47
	%	2,1 %	97,9 %

Taulukko 4.10: Opiskelijan osaamistaso vs. väittämä 13 -ristiintaulukointi (Väite 13: Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.) N = 141.

Osaamistaso		Väite 13	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Heikko	N	17	12
	%	58,6 %	41,4 %
Keskitaso	N	54	10
	%	84,4 %	15,6 %
Hyvä	N	37	11
	%	77,1 %	22,9 %

Ero erilaisten matematiikan tehtävien mielekkyydessä suhteessa osaamistasoon on tilastollisesti suuntaa antava (väittämä 10; $p = 0{,}065$). Osaamistason vaikutus erilaisten matematiikan tehtävien ratkaisemisen mielekkyyteen ei tuloksena kuitenkaan ole kovin yllättävä. Matematiikan hyvä osaaminen itsessään sisältää matematiikan soveltamisen taidon ja kyvyn käyttää matematiikkaa työkaluna erityylisissä ongelmissa. Tyypillisesti ihmiset myös tykkäävät tehdä asioita, joita he osaavat.

Sanalliset tehtävät motivoivat osaamistasoltaan keskitasoisia ja hyviä enemmän kuin heikkoja. Eroa voidaan pitää tilastollisesti melkein merkitsevänä (väittämä 13;

$p = 0{,}025$). Myös sanalliset tehtävät vaativat opiskelijalta matematiikan soveltamisen taitoa. Osaamistasoltaan heikoille matematiikan soveltaminen on haastavampaa, minkä vuoksi he eivät luultavasti koe sanallisia tehtäviä yhtä innostavina.

Aikaisemmin todettiin, että matematiikka 1 -opintojakson naisopiskelijat suhtautuivat suulliseen kielentämiseen miesopiskelijoita hieman negatiivisemmin. Syyn suhtautumiseen todettiin olevan naisten heikompi osaamistaso matematiikassa. Osaamistason vaikutus matemaattiseen ilmaisuun suullisesti havaitaan myös tarkasteltaessa kaikkia tutkimukseen osallistuneita opiskelijoita. Taulukossa 4.11 on esitetty opiskelijoiden vastauksien jakautuminen väittämään 12.

Taulukko 4.11: Opiskelijan osaamistaso vs. väittämä 12 -ristiintaulukointi (Väite 12: Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.) N = 142.

Osaamistaso		Väite 12	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Heikko	N	11	19
	%	36,7 %	63,6 %
Keskitaso	N	27	37
	%	42,2 %	57,8 %
Hyvä	N	9	39
	%	18,8 %	81,3 %

Taulukosta 4.11 havaitaan, että osaamistasoltaan hyvät pitävät suullista kielentämistä muita opiskelijoita mielekkäämpänä. Eri ryhmien välistä eroa voidaan pitää tilastollisesti melkein merkitsevänä ($p = 0{,}030$). Havaintoa voidaan perustella sillä, että kielentäessään matemaattista sisältöä, on opiskelijalla oltava siitä selkeä jäsentynyt kuva. Tähän vaikuttaa luonnollisesti myös opiskelijan osaamistaso. Osaamistasoltaan heikot ja keskitasoiset eivät ilmaise matematiikkaa yhtä mielellään suullisesti, koska se paljastaa helposti puutteet heidän osaamisessaan. Matematiikan suullinen ilmaisu saattaa olla monille heikoista opiskelijoista myös liian haastavaa.

Osaamistasolla on luonnollisesti vaikutusta myös opiskelijoiden kokemuksiin opintojaksojen kielentämistehtävien vaikeustasosta (väittämä 20). Opiskelijoiden vastauksien jakauma väittämään 20 on esitetty Taulukossa 4.12.

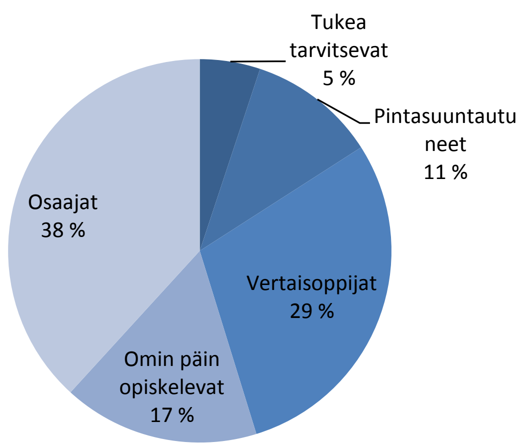
Taulukko 4.12: Opiskelijan osaamistaso vs. väittämä 20 -ristiintaulukointi (Väite 20: Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.) N = 142.

Osaamistaso		Väite 20	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Heikko	N	14	16
	%	46,7 %	53,3 %
Keskitaso	N	30	34
	%	46,9 %	53,1 %
Hyvä	N	34	14
	%	70,8 %	29,2 %

Taulukosta 4.12 havaitaan, että kielentämistehtävät olivat sopivan haastavia osaamistasoltaan heikoille ja keskitasoisille. Hyvät sen sijaan pitivät tehtäviä liian helppoina. Eroa voidaan pitää tilastollisesti melkein merkitsevänä ($p = 0{,}025$).

4.4.5 Oppimisprofiilit ja kielentämistehtävät

Tässä luvussa tarkastellaan opiskelijan oppimisprofiilin ja kielentämistehtäviin liittyvien asenteiden ja mielipiteiden riippuvuutta toisistaan. Tarkoitus on tutkia, onko eri oppimisprofiilien opiskelijoiden välillä eroja suhtautumisessa kielentämistehtäviä kohtaan. Oppimisprofiilit ovat määritelty TTY:ssa suoritetun matematiikan perustaitotestin alkukysymyksen perusteella. Oppimisprofiileista on kerrottu lisää Kappaleessa 4.2.4. Kuvassa 4.9 on esitetty eri oppimisprofiilien suhteelliset osuudet insinöörimatematiikka B1 ja matematiikka 1 -opintojaksoilla.



Kuva 4.9: Oppimisprofiilien suhteelliset osuudet insinöörimatematiikan ja matematiikan opintojaksoilla.

Opiskelijoista suurin osa on oppimisprofiililtaan osaajia. Vertaisoppijoita on opiskelijoista noin kolmannes. Tukea tarvitsevia opiskelijoita on ainoastaan kahdeksan eli noin 5 % opintojaksojen opiskelijoista.

Opintojaksojen ja sukupuolten välillä oppimisprofiilien jakaumassa on useita merkittäviä eroja. Taulukossa 4.13 on esitetty oppimisprofiilien jakautuminen opintojaksojen ja sukupuolten välillä.

Taulukko 4.13: Oppimisprofiilien jakautuminen opiskelijoiden sukupuolten ja opintosuuntien välillä.

Oppimisprofiili	Opintojakso		Sukupuoli	
	IMA	MA	Nainen	Mies
Tukea tarvitsevat	2,3 %	8,2 %	10,3 %	3,3 %
Pintasuuntaunut	15,9 %	5,5 %	17,9 %	9,0 %
Vertaisoppija	31,8 %	26,0 %	33,3 %	27,9 %
Omin päin opiskeleva	18,2 %	15,1 %	12,8 %	18,0 %
Osaaja	31,8 %	45,2 %	25,6 %	41,8 %

Opintosuuntien välillä on erityisesti eroa pintasuuntautuneiden, osaajien ja tukea tarvitsevien määrässä. Osaajia on suhteellisesti suurempi osuus matematiikka 1 -opintojaksolla. Insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla vastaavasti pintasuuntautuneiden opiskelijoiden osuus on suurempi. Mielenkiintoista on myös se, että insinöörimatematiikan opiskelijoissa on vähemmän oppimisprofiililtaan tukea tarvitsevia.

Tutkimukseen osallistuneista naisista suhteellisesti suurempi osa määrittelee itsensä oppimisprofiililtaan tukea tarvitsevaksi tai pinta-suuntautuneeksi. Miehet puolestaan luokittelevat itse itsensä useammin oppimisprofiililtaan osaajaksi.

Sukupuolten väliset erot oppimisprofiileissa ovat merkittäviä. Tässä tutkimuksessa ei kuitenkaan oteta kantaa, mistä oppimisprofiilierot sukupuolten välillä johtuvat, mutta yksi varteenotettava syy saattaa olla miesten ja naisten erot matematiikkakuvassa. Kiinnostunut lukija voi katsoa lisätietoa Näätäsen kirjasta *Matematiikka, naiset ja osaamisyhteiskunta* [22] sekä Hannulan artikkelista *Matematiikka ja sukupuoli (Teoksessa: Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen)* [5].

Oppimisprofiilien vaikutus kielentämiseen

Oppimisprofiililtaan osaajat erottuvat kielentämistä koskevissa väittämissä monien kysymysten kohdalla selkeästi omana ryhmänään. Myös pintasuuntautuneissa opiskelijoissa havaittiin eroa luonnollisen kielen käytön suhteen. Oppimisprofiililtaan tukea tarvitsevia oli tutkimukseen osallistuneista ainoastaan kahdeksan, minkä vuoksi ryhmän tilastollinen analysointi ei ole mielekästä. Omin päin opiskelevat ja vertaisoppijat eivät eroa tilastollisesti merkittävästi oppimisprofiililtaan muista kuin osaajista. Tarkastellaan seuraavaksi oppimisprofiilien välisiä eroja tarkemmin.

Tutkimuksen perusteella oppimisprofiililtaan osaajat eivät tukeudu luonnollisen kielen käyttöön matematiikan tehtävän ratkaisemisessa yhtä mieluusti kuin muut opiskelijat (väittämä 7). Taulukossa 4.14 on esitetty opiskelijoiden vastauksien jakauma väittämään 7.

Taulukko 4.14: Oppimisprofiili vs. väittämä 7 -ristiintaulukointi.(Väite 7: Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.) N = 157.

Oppimisprofiili		**Väite 7**	
		Eri mieltä	**Samaa mieltä**
Osaajat	**N**	18	42
	%	30,0 %	70,0 %
Muut	**N**	17	80
	%	17,5 %	82,5 %

Eroa voidaan pitää tilastollisesti suuntaa antavana ($p = 0{,}068$). Osaajat suhtautuvat matematiikkaan muita positiivisemmin ja haluavat oppia sitä enemmän [27, s. 78]. Luonnollisen kielen käytön mielekkyyden ero tehtävän ratkaisun osana johtuukin luultavasti juuri osaajien suuremmasta kiinnostuksesta matematiikkaa kohtaan. He näkevät matematiikan kielen loogisena, eksaktina ja kompaktina rakenteena, jossa luonnollinen kieli ei ole yhtä tärkeässä osassa kuin muiden oppimisprofiilien opiskelijoilla. Osaajat tukeutuvatkin matematiikan tehtävän ratkaisua perusteltaessa hieman muita opiskelijoita mieluummin symbolikielen käyttöön (väittämä 11). Eroa symbolikielen käytön mielekkyydessä ei tosin voi pitää tilastollisesti merkitsevänä ($p = 0{,}147$).

Osaajat kokevat sanallisten perustelujen kirjoittamisen muita opiskelijoita helpompana (väite 14, $p = 0{,}016$) sekä vähemmän aikaa (väite 22, $p = 0{,}099$) ja vaivaa (väite 16, $p = 0{,}101$) vievinä. Opiskelijoiden vastaukset väittämiin 14, 16 ja 22 on esitetty taulukoissa 4.15, 4.16 ja 4.17.

Taulukko 4.15: Oppimisprofiili vs. väittämä 14 -ristiintaulukointi. (Väite 14: Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.) N = 157.

Oppimisprofiili		Väite 14	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Osaajat	N	18	43
	%	29,5 %	70,5 %
Muut	N	47	49
	%	49,0 %	51,0 %

Taulukko 4.16: Oppimisprofiili vs. väittämä 16 -ristiintaulukointi. (Väite 16: Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.) N = 159.

Oppimisprofiili		Väite 16	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Osaajat	N	38	23
	%	62,3 %	37,7 %
Muut	N	48	50
	%	49,0 %	51,0 %

Taulukko 4.17: Oppimisprofiili vs. väittämä 22 -ristiintaulukointi. (Väite 22: Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.) N = 157.

Oppimisprofiili		Väite 22	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Osaajat	N	31	29
	%	51,7 %	48,3 %
Muut	N	63	34
	%	64,9 %	35,1 %

Osaajille sanallisten perustelujen kirjoittaminen on helppoa ja vaivatonta. He saattavatkin kokea luonnollisen kielen käytön osittain turhauttavana ratkaistessaan matematiikan tehtävää. Muiden tekemiin sanallisiin perusteluihin osaajat suhtautuvat yhtä myönteisesti kuin muut opiskelijat.

Sen lisäksi, että osaajat kokivat luonnollisen kielen käytön matemaattisessa ilmaisussa muita opiskelijoita helpommaksi, pitivät he myös opintojaksojen kielentämistehtäviä vaikeusasteeltaan helpompina (väittämä 20). Eroa voidaan pitää tilastollisesti merkitsevänä (p = 0,004). Opiskelijoiden vastaukset väittämään 20 on esitetty Taulukossa 4.18.

Taulukko 4.18: Oppimisprofiili vs. väittämä 20 -ristiintaulukointi. (Väite 20: Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.) N = 158.

Oppimisprofiili		Väite 20	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Osaajat	N	42	19
	%	68,9 %	31,1 %
Muut	N	44	53
	%	45,4 %	54,6 %

Tulos ei ole yllättävä, sillä osaajien opiskelussa korostuu oma looginen ajattelu ja päättely. Syvällisen ymmärtämisen avulla osaajat pyrkivät lisäämään omaa tietämystään matematiikassa. [27, s. 78] Kielentämistehtävissä kyse on juuri opiskelijan omasta konstruointiprosessista, jossa keskeistä on opiskelijan oman ajattelun kehittäminen ja jäsentäminen.

Osaajien ja muiden opiskelijoiden välillä on tilastollisesti merkitsevä ero ($p =$ 0,008) myös erityylisten tehtävien ratkaisemisen mielekkyydessä (väittämä 10). Opiskelijoiden vastaukset väittämään 10 on esitetty Taulukossa 4.19.

Taulukko 4.19: Oppimisprofiili vs. väittämä 10 -ristiintaulukointi. (Väite 10: Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.) N = 158.

Oppimisprofiili		Väite 10	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Osaajat	N	1	60
	%	1,6 %	98,4 %
Muut	N	14	83
	%	14,4 %	85,6 %

Osaajat pitävät erityylisiä matematiikan tehtäviä mukavampina kuin muut opiskelijat. Myös sanallisten tehtävien motivoivuudessa (väittämä 13) on samansuuntainen ero, mutta sitä ei voida kuitenkaan pitää tilastollisesti merkitsevänä ($p = 0{,}116$). Aikaisemmin Kappaleessa 4.4.4, jossa tarkasteltiin osaamistason vaikutusta sanallisten tehtävien motivointiin ja erityylisten tehtävien mielekkyyteen, havaittiin myös samankaltainen ero. Osaajat ovat keskimäärin matematiikan osaamistasoltaan etevämpiä kuin muiden oppimisprofiilien opiskelijat (Liite I.1). Tämän vuoksi aikaisemmin osaamistasotarkastelun yhteydessä havaittu ero näkyy myös oppimisprofiileja tarkasteltaessa. Jos vertailukohdaksi otetaan oppimisprofiililtaan tukea tarvitsevat ja pintasuuntautuneet, myös sanallisten tehtävien motivoivuudessa on tilastollisesti melkein merkitsevä ero ($p = 0{,}031$).

Pintasuuntautuneet mallista oppijat kokevat oman kirjallisen kommentoinnin ja väliotsikoinnin helpottavan matematiikan tehtävän ratkaisua selvästi muita oppimisprofiileja enemmän (väittämä 18). Opiskelijoiden vastaukset väittämään on esitetty Taulukossa 4.20.

Taulukko 4.20: Oppimisprofiili vs. väittämä 18 -ristiintaulukointi. (Väite 18: Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.) N = 158.

Oppimisprofiili		Väite 18	
		Eri mieltä	Samaa mieltä
Pintasuunt.	N	1	17
	%	5,6 %	94,4 %
Muut	N	46	94
	%	32,9 %	67,1 %

Pintasuuntautuneiden opiskelijoiden ero kirjallisen kommentoinnin hyödyn välillä muihin opiskelijoihin verrattuna on tilastollisesti melkein merkitsevä ($p = 0{,}017$). Pintasuuntautuneet mallista oppijat laskevat tehtävät usein samalla tavalla kuin ne on esitetty esimerkeissä tai luennolla. Heidän opiskelussaan korostuu mallista kopioiminen. [27, s. 76-77] Oma kirjallinen kommentointi on pintasuuntautuneille luultavasti tärkeää, jotta he kykenevät seuraamaan oman ratkaisunsa eri vaiheita myös myöhemmin esimerkiksi tenttiin lukiessaan. Pintasuuntautuneet tarvitsevatkin opintojakson läpäistäkseen selkeän ja jäsennetyn oppimateriaalin [27, s. 76-77]. Omalla toiminnallaan he pyrkivät luomaan itselleen helposti luettavan ja ymmärrettävän oppimateriaalin.

4.5 Tutkimuksen laadullinen analyysi

Tässä kappaleessa tutkitaan opiskelijoiden asenteita kielentämistä kohtaan laadullisin menetelmin. Tarkastelun kohteena on kyselylomakkeen jälkimmäinen avoin kysymys: "Kerro suhtautumisestasi opintojaksolla olleisiin palautettaviin kielentämistehtäviin." Ensimmäistä avointa kysymystä "Mitkä asiat ovat vaikuttaneet myönteisesti oppimiseesi opintojakson aikana?" ei tarkastella tässä tutkimuksessa, koska se ei suoranaisesti liittynyt matematiikan kielentämiseen. Pääasiassa sen vastaukset käsittelivät luennoitsijan ja harjoitusassistentin ominaisuuksia, tehtävien tekemistä pienryhmissä, opintojaksojen "prujuja", lisämateriaaleja, opiskelijoiden omaa motivaatiota sekä luentojen ja laskuharjoitusten rakennetta ja ominaisuuksia. Muutamissa vastauksissa kuitenkin mainittiin, että myös kielentäminen on vaikuttanut oppimiseen myönteisesti.

Kyselyn avoimen kysymyksen analyysin lisäksi tässä kappaleessa tutkitaan kielentämistehtävien soveltuvuutta tenttitehtäviksi opintojaksojen luennoitsijoille tehdyn kyselyn pohjalta.

4.5.1 Kyselyn avoin kysymys

Kyselylomakkeen jälkimmäisessä avoimessa kysymyksessä opiskelijoilta kysyttiin heidän suhtautumista opintojakson kielentämistehtäviin. Vastauksia analysoitiin sisällönanalyysin avulla jakamalla opiskelijoiden vastaukset eri teemoihin. Aluksi tarkasteltiin opiskelijoiden yleistä suhtautumista opintojakson kielentämistehtäviin. Tyhjiä vastauksia oli 52. Lisäksi neljän opiskelijan suhtautuminen oli avoimen kysymyksen vastauksen perusteella epäselvä. Tyhjät ja epäselvät vastaukset jätettiin tarkastelun ulkopuolelle.

Yleinen suhtautuminen

Opiskelijat jaettiin opintojaksojen kielentämistehtäviin positiivisesti, neutraalisti ja negatiivisesti suhtautuviin. Opintojaksojen kielentämistehtäviin positiivisesti, neutraalisti ja negatiivisesti suhtautuneiden opiskelijoiden suhteelliset osuudet on esitetty Taulukossa 4.21.

Taulukko 4.21: Opiskelijoiden suhtautuminen opintojaksojen kielentämistehtäviin (Kerro suhtautumisestasi opintojaksolla olleisiin palautettaviin kielentämistehtäviin). N = 153.

Kysymys 24		
Positiivinen	**N**	79
	%	51,6 %
Neutraali	**N**	51
	%	33,3 %
Negatiivinen	**N**	23
	%	15,0 %

Opiskelijoista siis hieman yli puolet suhtautui avoimen kysymyksen analyysin perusteella opintojaksojen kielentämistehtäviin positiivisesti. Kolmasosalla yleinen suhtautuminen oli neutraali ja 15 prosentilla negatiivinen. Avoimen kysymyksen perusteella suhtautumisessa ei havaittu tilastollista eroa opintojakson, opiskelijan sukupuolen, osaamistason tai oppimisprofiilin välillä. Matematiikka 1 -opintojaksolla suhtautuminen kuitenkin vaikuttaisi olevan insinöörimatematiikka B1 -opintojaksoa hieman positiivisempi. Ero ei ole kuitenkaan tilastollisesti merkitsevä ($p = 0{,}152$).

Kyselylomakkeen väittämät 15 (väite käännetty positiiviseksi), 17, 19 ja 20 koskivat myös suhtautumista opintojaksojen kielentämistehtäviin. Tutkimuksessa havaittiin, että väittämien 15, 17, 19 sekä avoimen kysymyksen avulla määritetyn suhtautumisen välillä on korrelaatiota. Suhtautumisen ja väittämien väliset korrelaatiot ovat esitettynä Taulukossa 4.22.

Taulukko 4.22: Väittämien 15, 17, 19 ja opiskelijan avoimen kysymyksen perusteella määritetyn suhtautumisen välinen korrelaatio. (Väite on käännetty positiiviseksi (*), korrelaatio on tilastollisesti erittäin merkitsevä (**). N=152-181.

	Suhtautuminen	**Väite 15***	**Väite 17**	**Väite 19**
Suhtautuminen	1	0,505**	0,611**	0,367**
Väite 15*	0,505**	1	0,525**	0,509**
Väite 17	0,611**	0,525**	1	0,578**
Väite 19	0,367**	0,509**	0,578**	1

Opiskelijoiden suhtautuminen kielentämistehtäviin on avoimen kysymyksen perusteella samansuuntainen kuin väittämien avulla määrällisesti tutkittaessa. Kielentämistehtävien vaikeustasolla (väittämä 20) ei havaittu olevan yhteyttä suhtautumisen tai väittämien 15, 17 ja 19 kanssa.

Vastauksissa esiintyneet teemat

Opiskelijoiden vastauksista esiintyi yhteensä 12 eri teemaa. Opiskelijoiden vastauksia analysoitaessa, niistä kolme esiintyi huomattavasti muita teemoja useammin. Kaikki teemat ja esiintymisen frekvenssit on esitetty Taulukossa 4.23.

Taulukko 4.23: Yleisimmin esiintyneet teemat opiskelijoiden avoimen kysymyksen vastauksissa. N = 153.

Teema	Vastausten prosenttiosuus (%)
Ymmärtämisen apu ja uudet näkökulmat	28,5 %
Vaihtelu ja erilaisuus	17,9 %
Helppoja tehtäviä	10,6 %
Oppimisen kannalta turhia tehtäviä	6,6 %
Ongelmat laitteiden ja ohjelmistojen kanssa	6,6 %
Mielenkiintoisia ja innostavia	6,0 %
Tehtävät eivät motivoivia tai kiinnostavia	6,0 %
Liian vaikeita tehtäviä	6,0 %
Työläitä ja aikaa vieviä	5,3 %
Tehtävät eivät eroa muista tehtävistä	4,6 %
Sopiva vaikeustaso	4,0 %
Opiskelijan myöntämä laiskuus	3,3 %

Eniten opiskelijoiden vastauksissa korostui, että kielentämistehtävät ovat auttaneet ymmärtämään asioita ja asioiden välisiä yhteyksiä paremmin. Opiskelijat puhuivat monissa vastauksissa kielentämisestä myös "uutena näkökulmana", joka monipuolistaa heidän matemaattista ajatteluaan.

> *"Ymmärsin heti, että tarkoituksena on tehdä opiskelijalle selväksi kuinka hyvin hän oikeasti osaa asian ja saada hänet ajattelemaan matematiikkaa/k.o. asiaa eri perspektiivistä."* (MA19)

Kielentämistehtävät nähtiin positiivisina myös niiden erilaisuuden vuoksi. Ne toivat kaivattua vaihtelua matematiikan opiskeluun. Toisaalta joukossa oli useita opiskelijoita, joiden mielestä kielentämistehtävät olivat liian helppoja. Osan vastauksista kävi myös ilmi, että ne eivät ole oppimisen kannalta tarpeellisia. Määrällisen tutkimuksen yhteydessä Kappaleessa 4.4.1 saatiin vastaavia tuloksia.

Tarkastellaan seuraavaksi vielä tarkemmin, miten eri tavalla kielentämistehtäviin suhtautuneet opiskelijat painottivat omissa vastauksissaan.

Kielentämistehtäviin positiivisesti suhtautuneet opiskelijat

Opintojaksojen kielentämistehtäviin positiivisesti suhtautuneet painottivat avoimen kysymyksen vastauksissaan eniten Taulukon 4.24 mukaisia teemoja.

Taulukko 4.24: Kielentämistehtäviin positiivisesti suhtautuneiden vastauksissa esiintyneitä teemoja. N = 79.

Teema	Vastausten prosenttiosuus (%)
Ymmärtämisen apu ja uudet näkökulmat	44,3 %
Vaihtelu ja erilaisuus	26,6 %
Helppoja tehtäviä	12,7 %
Tehtävien mielenkiintoisuus ja innostavuus	8,9 %
Tehtävien sopiva vaikeustaso	6,3 %

Lähes puolessa positiivisesti suhtautuneiden vastauksissa ilmeni, että kielentämistehtävät ovat auttaneet ymmärtämään opiskeltavan asian paremmin. Lisäksi erittäin monissa vastauksissa korostettiin jo aikaisemmin mainittua näkökulma-asiaa. Vastauksissaan opiskelijat kertovat kielentämistehtävien auttavan huomaamaan monia asioita, mihin ei muuten tehtäviä ratkaistessaan osaisi kiinnittää huomiota. Uudet näkökulmat tehtävän ratkaisussa koettiin hyvin positiivisena asiana. Kielentämisen arveltiin myös jäsentävän ja selkeyttävän omaa matemaattista ajattelua ja kehittävän opiskelijan omia metakognitiivisia taitoja. Opiskelijat kokivat, että kielentämistehtävien avulla huomasi selkeästi omat heikkoutensa ja vahvuutensa.

> *"Tehtävät olivat hyvää harjoitusta, koska pystyäkseen selittämään asiat selkeästi on osia ymmärrettävä hyvin. Tehtävissä huomasi usein, ettei joitain asioita ollutkaan aikaisemmin ymmärtänyt niin hyvin kuin oli luullut."* (MA8)

> *"Niissä tuli esiin asioita, joita ei välttämättä tullut ajatelleeksi muuten."* (MA20)

> *" - - kun joutuu prosessoimaan vaikean käsitteen kirjalliseen muotoon niin ainakin itselle ajatteluprosessi avasi käsitteitä paremmin."* (IMA180)

Uusien näkökulmien ja oppimisen syventämisen lisäksi kielentämistehtävät koettiin positiivisiksi niiden erilaisuuden takia. Useissa vastauksissa korostui, että ne olivat mukavaa vaihtelua muiden tehtävien laskennan lomassa. Kielentämistehtävien koettiin myös aktivoivan ajattelua eri tavalla kuin normaalit matematiikan tehtävät niiden erilaisuuden vuoksi.

> *"Ne olivat mukavaa vaihtelua ja haastoivat uudella tavalla."* (MA29)

> *"Ne toivat mukavaa vaihtelua ja uusia näkökulmia tehtäviin. Huomasin myös aluksi tehneeni ne liian "hutiloiden" ja loppua kohti huolimattomuusvirheiden määrä väheni."* (MA52)

> *"Hyvin erilaisia verrattuna muihin tehtäviin, mikä oli hyvä asia."* (IMA182)

Suhteellisen monissa vastauksissa otettiin kantaa myös kielentämistehtävien vaikeustasoon. Vastauksista kävi ilmi, että tehtävät olisivat voineet olla hieman vaikeampi. Toisaalta joukossa oli useita opiskelijoita, jotka kokivat tehtävät kannustaviksi niiden sopivan vaikeustason vuoksi ja saivat oppimisen oivalluksia opintojakson aikana juuri kielentämistehtävissä.

> *"Ne ovat olleet mielekkäitä, vaikka välillä liian yksinkertaisia."* (IMA97)

> *"Suhtautumiseni on hyvä. Tehtävät ovat olleet erilaisia ja sopivan helppoja sekä mukavia pohtia."* (MA27)

> *"Kielentämistehtävät onnistuivat paremmin kuin monet muut tehtävät."* (MA59)

Kielentämistehtävien vaikeustason problemaattisuus havaittiin myös analysoitaessa kyselylomakkeen aineistoa määrällisesti. Tehtävien suunnitteluun on siis käytettävä enemmän aikaa ja mietittävä, miten niistä saisi vaikeustasoltaan sopivampia.

Tehtävien mielenkiintoisuus ja innostavuus nousivat esille osassa positiivisesti suhtautuneiden vastauksista. Määrällisen tutkimuksen pohjalta tehtäviä ei koettu erityisen motivoivina tai mielenkiintoisina. Avoimen kysymyksen perusteella kielentämistehtävät olivat kuitenkin ainakin osalle motivoivia tehtäviä.

> *"Mielenkiintoista ja hyödyllista pohtia tehtäviä myös toisesta näkökulmasta."* (MA73)

> *"Mielenkiintoisempia kuin muut tehtävät"* (IMA135)

Kielentämistehtäviin neutraalisti suhtautuneet opiskelijat

Taulukossa 4.25 on esitetty neutraalisti kielentämistehtäviin suhtautuneiden opiskelijoiden avoimen kysymyksen vastausten teemoja. Osittain teemat ovat samoja, kuin positiivisesti suhtautuneilla.

Taulukko 4.25: Kielentämistehtäviin neutraalisti suhtautuneiden vastauksissa esiintyneitä teemoja. N = 51.

Teema	Vastausten prosenttiosuus (%)
Ymmärtämisen apu ja uudet näkökulmat	15,7 %
Ongelmat laitteiden ja ohjelmistojen kanssa	15,7 %
Tehtävät eivät eroa muista tehtävistä	13,7 %
Helppoja tehtäviä	11,8 %
Vaihtelu ja erilaisuus	9,8 %
Työläitä ja aikaa vieviä	7,8 %

Neutraalisti kielentämistehtäviin suhtautuvat kokevat myös kielentämistehtävien auttavan asioiden ymmärtämistä. Yhtä suurella osalla opiskelijoista vastauksissa esiintyivät myös tietotekniset ongelmat ja haasteet sekä Matlab-ohjelmiston käyttö. Näiden vastauksien osuus on huomattavan suuri siihen nähden, että ne kaikki liittyvät matematiikka 1-opintojaksoon, sillä insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla kielentämistehtäviin ei sisältynyt Matlab-ohjelmistolla tehtäviä osuuksia tai sähköistä palautusta Moodle-oppimisympäristöön. Erityisen turhauttavaksi koettiin ratkaisujen skannaaminen, koska monilla ei ollut kotona skanneria käytössä. Tämän takia viikonloppuna oli tultava kouluun skannaamaan kielentämistehtävä ja palautettava se sitten Moodleen. Monet opiskelijoista kokivat myös Matlab-ohjelmiston käytön hyvin vaikeaksi ja olisivat kaivanneet lisää siinä lisää opetusta.

"Ihan ok, välillä ongelmia kun piti tulostaa ja skannata." (MA33)

"Turhautumista niiden skannaamisen kanssa ja tämän takia koululla ramppaamiseen." (MA86)

"Matlabtehtävät ärsyttivät eniten, koska Matlabin käyttö oli äärettömän (yli 9000) vaikeaa." (MA79)

"Muuten ihan jeees - - Matlab tukiopetus olis voinu olla helmee" (MA78)

Monet neutraalisti kielentämistehtäviin suhtautuneista opiskelijoista eivät näe kielentämistehtävissä juurikaan eroa muihin tehtäviin verrattuna. He kokevat tehtävät tavallisina matematiikan tehtävinä muiden joukossa. He eivät huomanneet niiden aktivoivan ajattelua eri tavalla tai tuovan esille uusia näkökulmia heidän matemaattisessa ajattelussa.

"En edes huomannut mitään erityistä." (MA67)

"En ymmärtänyt tarkoitusta. Samanlaisia kuin muutkin tehtävät" (IMA172)

Avoimista vastauksista kävi lisäksi ilmi, että tehtävät olivat monille liian helppoja. Positiivisena neutraalisti kielentämistehtäviin suhtautuneiden joukossa nähtiin kuitenkin tehtävien erilaisuus. Osa mainitsi myös, että tehtävät olivat työläitä ja aikaa vieviä.

Kielentämistehtäviin negatiivisesti suhtautuneet opiskelijat

Tarkastellaan lopuksi vielä, millaisia teemoja kielentämistehtäviin negatiivisesti suhtautuneet opiskelijat toivat vastauksissaan ilmi. Taulukossa 4.26 on esitetty opiskelijoiden vastauksissa useimmiten havaittuja teemoja.

Taulukko 4.26: Kielentämistehtäviin negatiivisesti suhtautuneiden vastauksissa esiintyneitä teemoja. N = 23.

Teema	Vastausten prosenttiosuus (%)
Oppimisen kannalta turhia tehtäviä	30,4 %
Tehtävät eivät motivoivia tai kiinnostavia	30,4 %
Liian vaikeita tehtäviä	21,7 %
Opiskelijan myöntämä laiskuus	8,7 %

Negatiivisesti opintojakson kielentämistehtäviin suhtautuneista opiskelijoista noin kolmasosa pitivät kielentämistehtäviä oppimisen kannalta hyödyttöminä. Tehtävät eivät myöskään olleet erityisen kiinnostavia tai motivoivia. He eivät kokeneet, että kielentämistehtävät olisivat edistäneet oppimista opintojakson aikana. Tehtävät tuntuivat heistä lähinnä turhauttavilta. Sanallisia perusteluja ei koettu tarpeellisiksi. Opiskelijoiden vastauksista ei kuitenkaan käynyt ilmi myöskään matematiikan symbolikielen paremmuus luonnolliseen kieleen verrattuna.

> *"Tuntui siltä, että minun pitäisi yksityiskohtaisesti perustella, miksi 1+1=2"* (MA70)
>
> *"Kiinnittävät huomion perusasioihin, mutta tuntuvat osittain turhilta."* (IMA164)

Tehtävät olivat osalle myös liian vaikeita. Erityisesti tehtävänannon ymmärtämisessä oli haasteita ja ne koettiin paikoitellen sekaviksi. Kokemukseen on luultavasti vaikuttanut kielentämistehtävien erilaisuus muihin tehtäviin verrattuna. Opiskelijat eivät ole tottuneet ratkaisemaan kielentämistehtävien kaltaisia matematiikan tehtäviä aiemmin, mikä on saattanut aiheuttaa osassa opiskelijoista hämmennystä. Haastavuuden tunnetta voi aiheuttaa myös se, että usein kielentämistehtäviin ei ole yhtä tiettyä täsmälleen oikeaa ratkaisua. Normaaleissa matematiikan tehtävissä edetään systemaattisesti tehtävänannosta kohti tehtävän ratkaisua, mutta kielentämistehtävissä tilanne on puolestaan usein käännetty päälaelleen.

> *"Ne olivat yleensä vaikeita ja joskus epäselviä tehtävänantoja."* (MA11)

> *"Kielentämistehtäven tehtävänanto oli ajoittain monimutkainen ja vaikeasti ymmärrettävä, esim. aukkojen täydentäminen oli hämäävää."* (IMA121)

Pari opiskelijaa myös myönsi oman laiskuutensa, mikä on osaltaan myös saattanut vaikuttanut mielipiteeseen kielentämistehtävistä. He eivät kokeneet tehtäviä mielenkiintoisina tai tarpeellisina eivätkä sen vuoksi jaksaneet tai viitsineet panostaa kielentämistehtävien tekemiseen.

> *"Jaksoin tehdä ehkä 1 tai 2. Matematiikan sanallinen käsittely on välillä hiusten halkomista."* (IMA99)

> *"En kokenut kielentämistehtäviä mielekkäinä. Huomaan suorittaneeni nämä tehtävät mahdollisimman nopeasti, jotta vain saan ne pois tehtävälistalta. En jaksanut panostaa niihin yhtään tarvittua enempää."* (MA2)

4.5.2 Kielentämistehtävät tenttikysymyksinä

Molemmilla opintojaksoilla oli tenttitehtävänä yksi kielentämistehtävä. Ne on esitetty liitteessä D. Matematiikka 1 -opintojakson tentissä kielentämistehtävän pistekeskiarvo oli 3,4/6 pistettä. Muiden tenttitehtävien pistekeskiarvot olivat 3,8, 3,1 ja 2,2 pistettä. Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson tentissä kielentämistehtävän pistekeskiarvo oli puolestaan 4,1/6 pistettä. Muista tehtävistä opiskelijat saivat keskimäärin 4,8, 3,6 ja 4,1 pistettä.

Kielentämistehtävät eivät siis osoittautuneet muita tenttitehtäviä haastavimmiksi, vaan niiden pistekeskiarvot olivat muiden tenttitehtävien kanssa samansuuruisia. Matematiikka 1 -opintojakson tentissä kielentämistehtävän moodi oli kuusi ja insinöörimatematiikka 1 -opintojakson tentissä 5,5 pistettä. Useimmat siis osasivat tehtävän hyvin, mutta joukossa oli myös alhaisen pistemäärän saaneita. Matematiikka 1 -opintojaksolla kuusi pistettä sai noin 30 % opiskelijoista. Vastaavasti noin kolmannes opiskelijoista sai 5,5-6 pistettä Insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolla. Alle 3 pistettä matematiikka 1 - opintojaksolla sai lähes 40 % opiskelijoista. Vastaava luku insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolla oli noin 20 %.

Puolistrukturoitu kysely opintojaksojen vastuuhenkilöille

Opintojaksojen vastuuhenkilöiden puolistrukturoidun kyselyn vastauksien perusteella kielentämistehtävien avulla on vähintäänkin yhtä helppo mitata opiskelijan matemaattisen ymmärryksen syvyyttä kuin perinteisillä matematiikan tehtävillä. Toisaalta kokemus kielentämistehtävistä tenttitehtävinä on vielä hyvin rajallinen. Tehtävätyypissä nähdään kuitenkin paljon mahdollisuuksia.

> *"Mielestäni kielentämistehtävällä voi olla jopa helpompi yrittää mitata osaamisen syvyyttä - -"*

> *"Kielentämistehtävissä on huomattava potentiaali siihen, että niiden avulla saisi nykyistä paremmin opiskelijan ymmärryksen esille."*

Kielentämistehtävien laadinta on haastavaa. Syy tehtävän laadinnan vaikeuteen on lähinnä tehtävien erilaisuus tavallisiin tehtäviin verrattuna. Tehtävien tekeminen saattaa tosin rutiinin myötä helpottua. Erityisen tärkeänä kielentämistehtävien laadinnassa pidetään sitä, että tehtävän pisteytykseen kiinnitetään huomiota jo tehtävää suunniteltaessa. Muuten tehtävien pisteytyksestä ja tarkastamisesta tulee helposti hyvinkin haastavaa.

> *"Kielentämistehtävissä mielestäni tulee helpommin tehtyä vaikeasti pisteytettäviä tehtäviä jos ei jo laadinnassa ota tätä huomioon."*

Kielentämistehtävistä voi laatia kaikentasoisia tenttitehtäviä. Niiden avulla voidaan mitata yhtä hyvin perustason tai vaativamman tason asioita. Opintojaksojen luennoitsijoiden aikaisempi kokemus kielentämistehtävistä tenttitehtävinä rajoittuu lähinnä vaativiin tehtäviin, mutta myös helpompien tehtävien laadintaan on kiinnostusta.

> *" - - en näe ongelmaa tehdä myös perustasoa mittaavaa kielentämistehtävää."*

Kielentämistehtävistä tenttitehtävinä on jäänyt positiivinen kuva, ja niiden käyttöä aiotaan jatkaa myös tulevaisuudessa.

5. LUOTETTAVUUSTARKASTELU

Tutkimuksen luotettavuutta kuvataan perinteisesti reliabiliteetin ja validiteetin käsitteillä. Reliabiliteetti viittaa tutkimuksen toistettavuuteen. [18, s. 64-65] Tutkimuksen validiteettia arvioitaessa puolestaan tarkastellaan, kuinka hyvin käytetty mittari soveltuu mitattavan asian mittaamiseen [14].

Validi mittari tarkoittaa, että mittari kuvaa tarkasti sitä asiaa, jota halutaan mitata. [14] Validiteetti voidaan edelleen jakaa sisäiseen ja ulkoiseen validiteettiin. Ulkoinen validius viittaa tutkimuksen yleistävyyteen. Sisäisen validiteetin tarkastelussa kiinnitetään huomiota, ovatko tutkimuksessa käytetyt käsitteet teorian mukaisia, tarkasteltavan ilmiön hyvin kattavia sekä huolellisesti operationalisoituja. Lisäksi voidaan tarkastella yksittäisiä käsitteitä ja niiden operationalisointia vielä tarkemmin. Samaa käsitettä mittaavien osioiden tulisi korreloida toistensa kanssa muita osioita enemmän. Mittarilla mitattua arvoa voidaan myös verrata johonkin toiseen arvoon, joka toimii validiuden kriteerinä. Kriteeri voi olla esimerkiksi samalla mittarilla mitattu jokin muu arvo tai toisella mittarilla samanaikaisesti mitattu arvo. [18, s. 64-65]

Käytettävä mittari on reliaabeli, jos samalla mittarilla saadaan samankaltaisia tuloksia suoritettaessa mittaus uudelleen. Tutkimuksen reliabiliteetti voidaan laskea esimerkiksi rinnakkaismittauksen, toistomittauksien tai mittarin yhtenäisyyden avulla. [18, s. 64-67]

5.1 Opintojen etenemisen tutkimus

Opintojen etenemisen tutkimuksen data on peräisin Tampereen teknillisen yliopiston opintotoimistosta ja sitä analysoitiin Excel-ohjelmiston avulla. Päämääränä oli kartoittaa, kuinka eri opintosuuntien opiskelijat opinnoista suoriutuvat. Tutkimuksen tekijällä ei ollut vaikutusta saatuihin tuloksiin, sillä opintojen etenemisen tutkimus sisälsi ainoastaan valmiin datan järjestämistä sopivaan muotoon. Dataa käsiteltiin ja järjestettiin huolella. Tutkimus on helposti toistettavissa samalla aineistolla.

Tutkimuksessa käytettiin matematiikan perusopintojen suorittamisen mittarina opiskelijan matematiikan opintopistekertymää. Puutteellisen datan vuoksi opintojaksoja ei voitu yksilöidä tarkemmin, mikä hieman vääristää opintojen etenemistä koskevia tuloksia. Opiskelijajoukossa saattaa olla joitakin opiskelijoita, jotka eivät ole suorittaneet matematiikan perusopintoja, mutta ovat suorittaneet muita matematiikan opintoja. Opintopistemäärän avulla tarkasteltuna he kuitenkin tämän tutkimuksen valossa ovat suorittaneet perusopinnot, vaikka näin ei todellisuudessa välttämättä ole. Matematiikan opintopistekertymän käyttö opintojaksojen suorittamisen mittarina ei kuitenkaan olennaisesti vaikuta tutkimuksen tarkkuuteen. Tämä todennettiin testaamalla. Testauksessa pienemmillä otoksilla, joilla data ei ollut puutteellista ja opintojaksot pystyttiin identifioimaan juuri matematiikan perusopintoihin kuuluviksi, saatiin samankaltaisia tuloksia kuin tutkittaessa opinnoissa etenemistä suuremmilla otoksilla vain opintopistekertymän avulla. Opintopistekertymää voidaan siis pitää suhteellisen validina mittarina.

Opiskelijajoukko rajattiin siten, että tutkimuksen ulkopuolelle jätettiin opiskelijat, jotka eivät olleet suorittaneet tarkasteltavina vuosina yhtäkään opintopistettä. Tämä tehtiin siksi, että joukossa oli useita opiskelijoita, jotka olivat ilmoittautuneet lukuvuodelle läsnäoleviksi, mutta eivät syystä tai toisesta kuitenkaan aktiivisesti opiskelleet. Tämä osaltaan myös lisäsi tutkimuksen luotettavuutta.

5.2 Matematiikan kielentämistä koskeva tutkimus

Matematiikan kielentämistä tutkittiin insinöörimatematiikka B1 - ja matematiikka 1 -opintojaksoilla. Tutkimukseen osallistui yhteensä 187 opiskelijaa. Tutkimukseen osallistuneiden suuri määrä antoi hyvät edellytykset tutkia opiskelijoiden asenteita kvantitatiivisen tutkimuksen avulla. Toisaalta laadullisin menetelmin aineiston analyysiin pyrittiin saamaan lisää syvyyttä.

Tutkimuksen kyselylomakkeessa käsitteiden operationalisointiin kiinnitettiin erityistä huomiota, jotta kaikki tutkittavat ymmärtäisivät kyselylomakkeen väittämät samalla tavalla. Kyselylomakkeessa oli useita väittämiä, jotka mittasivat samaa asiaa. Näiden kysymysten välillä oli odotusten mukaista korrelaatioita, mikä osaltaan lisää tutkimuksen validiteettia.

Tässä tutkimuksessa osaamistaso määritettiin ylioppilaskirjoitusarvosanan, perustaitotestituloksen ja tenttiarvosanan painotettuna summana siten, että jokainen tekijä vaikuttaa osaamistasoon yhtä paljon. Tähän päädyttiin, koska osaamistason määrittämiseen yhden arvosanan tai pistemäärän perusteella liittyy aina virhetekijöitä. Matematiikkaa voidaan pitää myös kumulatiivisena oppiaineena - uusi tieto omaksutaan aina vanhan tiedon varaan. Tämän vuoksi esimerkiksi ylioppilasarvosanan vaikutusta osaamistasossa voidaan pitää suhteellisen korkea. Toisaalta perustaitotestin tulos perustuu vain 45 minuutin testiin ja yhden tehtävän osaamisen merkitys kasvaa verrattain suureksi. Tässä tutkimuksessa ylioppilasarvosanan, perustaitotestin pistemäärän ja tenttiarvosanan painotettu summa koettiin kuitenkin suhteellisen validiksi osaamistason mittariksi. Myönnetään, että siihen liittyy joitakin virhelähteitä, mutta toisaalta absoluuttisesti täsmällisen osaamistason määrittäminen on haastavaa, ellei peräti mahdotonta. Osaamistason määritys vaikuttaa myös tutkimuksen reliabiliteettiin. Osaamistason sekä kielentämiseen liittyvien asenteiden ja kokemusten yhteys on yleisellä tasolla ainoastaan suuntaa antava.

Tutkimuksen tulosten analyysivaiheessa saatuja tuloksia verrattiin muihin tutkimuksiin ja havaittiin, että aikaisemmissa tutkimuksissa tulokset olivat hyvin samankaltaisia muutamia poikkeuksia lukuun ottamatta. Tutkimusta verrattiin erityisesti TTY:ssa aikaisemmin tehtyyn Sarikan [31] sekä Siliuksen ym. [32] tutkimuksiin. Tässä tutkimuksessa osa kyselylomakkeen väittämistä oli samoja, kuin Sarikan tutkimuksessa ja niiden kohdalla myös tulokset olivat samankaltaisia. Tutkimuksen tuloksia voidaankin pitää suhteellisen luotettavina ja yleisen kielentämisen osalta yleistettävinä. Tutkimuksen reliabiliteetin voidaan sanoa olevan hyvä kielentämistutkimuksen yleisessä osiossa. Opintojaksojen kielentämistehtäviä koskeva osuus tutkimuksesta sen sijaan ei luonnollisestikaan ole yleistettävissä.

Tutkimuksen validiteettia pyrittiin lisäämään myös aineisto- ja menetelmätriangulaation avulla. Kielentämistä koskevia asenteita ja mielipiteitä tutkittiin ja analysoitiin sekä määrällisesti että laadullisesti. Kyseessä on niin kutsuttu mixed methods -menetelmä [2]. Saadut tulokset olivat sopusoinnussa keskenään. Laadullista aineistoa analysoitaessa käytettiin myös tutkijatriangulaatiota. Sen avulla varmistettiin, etteivät tutkijan omat ennakkokäsitykset vaikuttaneet aineiston tulkintaan.

Ennen tutkimuksen suoritusta tutkija perehtyi kattavasti tutkimuksen aiheeseen lähdekirjallisuuden avulla, mikä osaltaan parantaa myös tutkimuksen validiteettia. Tutkimuksen objektiivisuuden lähtökohtana voidaan pitää tutkijan omaa tietoisuutta omista ennakkokäsityksistään eli tutkijan on tunnistettava subjektiivisuutensa. Tutkijan ennakkokäsitysten ei annettu vaikuttaa tutkimuksen analyysiin tai tulosten raportointiin millään tavalla.

5.3 Tutkimuksen kokonaisluotettavuus

Edellä on tarkasteltu tutkimuksen eri osioiden luotettavuutta erikseen. Kokonaisuudessaan tutkimus tehtiin huolellisesti, rehellisesti ja tarkasti. Koko tutkimusprosessin ajan hyvä tieteellinen käytäntö [39] huomioitiin perusteellisesti. Kokonaisuudessaan tutkimuksen luotettavuutta voidaan pitää hyvänä.

Kielentämistä koskevan tutkimuksen yleisistä tuloksista osa voidaan yleistää laajemminkin korkeakoulujen matematiikan kielentämistä koskeviksi. Opintojaksojen kielentämistä koskevat tulokset eivät sen sijaan ole yleistettävissä. Opintojen etenemisen tutkimus ei luonnollisesti ole myöskään laajemmin yleistettävissä.

6. YHTEENVETO

Tässä kappaleessa esitetään työn keskeiset tulokset sekä pohditaan niiden merkitystä. Edelleen tutkimuksen tuloksista tehdään johtopäätöksiä. Lisäksi esitetään jatkotutkimusmahdollisuuksia.

6.1 Keskeiset tulokset

Työssä kartoitettiin opiskelijoiden suoriutumista Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan perusopintojen opintojaksoilla. Opintojaksojen kehityskohteena tutkittiin kielentämistehtävien käyttöä. Seuraavassa on esitelty työn tuloksien pääkohdat.

6.1.1 Opintojen eteneminen

Ensimmäisen lukuvuoden opiskelijoiden opintojen eteneminen on kehittynyt selvästi tutkimuksessa tarkasteltavan ajanjakson aikana. Vähintään 55 opintopistettä suorittavien ensimmäisen lukuvuoden opiskelijoiden määrä on kasvanut noin 38 prosentista lähes 50 prosenttiin. Vastaavasti myös matematiikan ensimmäisen vuoden perusopinnot tavoiteajassa suorittaneiden määrä on kasvanut hieman vajaasta 50 prosentista melkein 60 prosenttiin. Vuosi 2011 on muusta kehityksestä poikkeava. Tällöin opinnoissa eteneminen on ollut kautta linjan muita tarkasteltavia vuosia heikompaa. Opinnoista suoriutuminen on vahvasti opintosuuntakohtaista. Erot opintosuuntien välillä ovat suuria.

Lähes kaikissa opintosuunnissa matematiikan ensimmäisen vuoden opinnoissa etenemisessä on tapahtunut kehitystä. Osassa opintosuunnista kehitys on ollut nopeaa ja merkittävää. Tällaisia opintosuuntia ovat tietojohtamisen, tietotekniikan, konetekniikan ja rakennustekniikan opintosuunnat. Negatiivista kehitys on ollut ainoastaan ympäristö- ja energiatekniikan opintosuunnassa.

Matematiikan ensimmäisen vuoden perusopintojen suorittamisen kehittymisen tavoin myös opintojen yleinen eteneminen toisena opiskeluvuotena on hieman parantunut. Samaan aikaan matematiikan opinnoissa ei kuitenkaan ole nähtävillä vastaavaa kehitystä, vaan matematiikan perusopintojen suorittamisaktiivisuus tavoiteajassa on jopa hieman heikentynyt - tosin vain muutamalla prosenttiyksiköllä.

Teknis-luonnontieteellisen, sähkö-, kone-, rakennus- ja materiaalitekniikan opintosuunnissa tavoiteajassa kaikki matematiikan perusopinnot suorittavien opiskelijoiden osuus on muita opintosuuntia suurempi. Tilastollisesti merkitsevää tai melkein merkitsevää kehitys on ollut teknis-luonnontieteellisen opintosuunnassa. Eteneminen on puolestaan selvästi heikentynyt automaatiotekniikan, biotekniikan ja tuotantotalouden opintosuunnissa. Tämä tarkoittaa, että näissä opintosuunnissa yhä harvempi opiskelija suorittaa kaikki matematiikan perusopinnot tavoiteajassa eli kahden ensimmäisen lukuvuoden aikana.

Ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opinnoissa etenemisessä on siis tarkasteltavana ajanjaksona tapahtunut merkittävää kehitystä. Vastaavanlainen kehitys ei kuitenkaan näytä ulottuvat toisen vuoden matematiikan perusopintojen opintojaksoille.

6.1.2 Matematiikan kielentäminen

Opiskelijat suhtautuvat luonnollisen kielen käyttöön matematiikan opetuksessa positiivisesti. Sen käyttö koetaan mieluisaksi ja hyödylliseksi. Sen lisäksi, että luonnollisen kielen koetaan helpottavan matematiikan tehtävän ratkaisun ymmärtämisessä, auttaa se myös opiskelijaa tehtävänratkaisuprosessissa. Luonnollisen kielen avulla opiskelija jäsentää matematiikan tehtävän ratkaisua ja samalla omaa ajatteluaan. Monet opiskelijat kertovat kielentämisen tuovan matematiikan käsittelyyn kokonaan uuden näkökulman, mikä monipuolistaa heidän matemaattista ilmaisuaan ja ajatteluaan. Matematiikan kielentäminen tuo esille asioita, joita opiskelijat eivät muuten välttämättä ajattelisi lainkaan. Valtaosa opiskelijoista kokee myös haastavien käsitteiden ymmärtämisen ja käsittelyn helpottuvan luonnollisen kielen avulla. Yleisesti sanallisten perustelujen kirjoittamista ei koeta erityisen vaikeaksi tai työlääksi. Opiskelijat kuitenkin myöntävät, että niiden kirjoittamiseen menee jonkin verran aikaa.

Opiskelijat suhtautuivat tässä tutkimuksessa opintojaksoilla käytettyihin kielentämistehtäviin pääasiassa positiivisesti ja kertoivat niiden vaikuttaneen oppimiseen myönteisesti. Joukossa oli kuitenkin myös suhteellisen suuri joukko opiskelijoita, jotka eivät pitäneet tehtäviä oppimista tukevina tai mielenkiintoisina. Osa opiskelijoista ei ymmärtänyt matematiikan kielentämisen päämäärää.

Opiskelijat kertoivat oppineensa kielentämistehtävien avulla uusia asioita erityisesti matematiikka 1 -opintojaksolla. Insinöörimatematiikka B1 -opintojaksolla tehtävät koettiin liian helpoiksi, minkä vuoksi opintojakson opiskelijat eivät kokeneet hyötyneensä kielentämistehtävistä yhtä paljoa. Heistäkin silti hieman yli puolet kertoi kielentämisen vaikuttaneen oppimiseen positiivisesti. Matematiikka 1 -opintojaksolla kielentämistehtävät olivat opiskelijoiden mielestä puolestaan liian vaikeita. Opiskelijat pitivät erityisen haastavina kielentämistehtävien Matlab-osioita.

Suurin ongelma opintojaksojen kielentämistehtävissä oli kuitenkin niiden motivoivuus. Hieman yli puolet opiskelijoista kertoi etteivät opintojaksojen kielentämistehtävät olleet innostavia ja vain reilu kolmannes opiskelijoista koki tehtäviä ratkaistessaan onnistumisen elämyksiä. Tehtävien motivoivuuteen vaikuttavia tekijöitä ei suoranaisesti tullut tutkimuksessa esille, mutta tehtävien vaikeustasolla saattoi olla tähän vaikutusta. Matematiikka 1 -opintojaksolla innostuneisuuteen myös vaikutti tehtävien palautustapa - kielentämistehtävien skannaaminen ja palauttaminen Moodleen koettiin varsin hankalana.

Opiskelijoiden vastauksien perusteella he kaipaavat erityylisiä matematiikan tehtäviä. Myös sanalliset tehtävät koetaan mukaviksi. Vaihtelu ja erilaisuus olivat myös yksi keskeinen teema tutkittaessa opiskelijoiden suhtautumista kielentämistehtäviin. Osaamistasolla näyttäisi kuitenkin olevan vaikutusta erityisesti erilaisten tehtävien ratkaisemisen mielekkyyteen. Osaamistasoltaan hyvät ratkaisevat muita opiskelijoita mieluummin erilaisia tavallisista tehtävistä poikkeavia matematiikan tehtäviä. Osaamistaso vaikuttaa vastaavasti myös sanallisten tehtävien innostavuuteen.

Pääosin opiskelijat suhtautuvat suulliseen kielentämiseen positiivisesti. Heikoilla opiskelijoilla suhtautuminen on kuitenkin jonkin verran muita negatiivisempi. Tämä johtuu todennäköisesti siitä, että he kokevat suullisen kielentämisen paljastavan heidän puutteensa matemaattisessa ajattelussa.

Naisopiskelijat näyttävät tutkimuksen mukaan asennoituvan positiivisemmin luonnolliseen kieleen matematiikassa kuin miehet. Naiset kokevat, että luonnollinen kieli matematiikan tehtävän ratkaisussa on heille tärkeämpi. Oman kirjallisen kommentoinnin ja muun luonnollisen kielen käytön matematiikassa sekä miehet että naiset kokevat kuitenkin yhtä tärkeäksi. Sukupuolten välinen ero liittyy siis tämän tutkimuksen mukaan ainoastaan valmiin matematiikan tehtävän ratkaisun ymmärtämiseen. Eroa voidaan ainakin osittain selittää naisten paremmalla asenteella äidinkieltä kohtaan.

Naisopiskelijat kokevat kielentämistehtävät miehiä haastavampina. Eroa voi perustella sillä, että miesopiskelijat olivat opintojaksolla käsitellyissä aihekokonaisuuksissa osaamistasoltaan keskimäärin naisia parempia. Erot sukupuolten oppimisprofiileissa saattavat olla tässä myös keskeinen selittäjä, sillä miesopiskelijoissa suhteellisesti suurempi osa on osaajia ja vastaavasti naiset määrittelevät itsensä useammin oppimisprofiililtaan pintasuuntautuneeksi.

Oppimisprofiileja tarkasteltaessa eroja kielentämistehtäviin liittyvissä asenteissa havaittiin oikeastaan vain osaajien ja pintasuuntautuneiden kohdalla. Kaikkien oppimisprofiilien opiskelijat pitävät luonnollista kieltä ja sen käyttöä erittäin hyödyllisenä. Pintasuuntautuneet turvautuvat ratkaisussaan kuitenkin muita mieluummin luonnollisen kielen käyttöön sekä kokevat myös omat kirjalliset kommentit ja perustelut muita tarpeellisemmiksi.

Oppimisprofiililtaan osaajat pitävät erilaisia matematiikan tehtäviä sekä sanallisia tehtäviä muita opiskelijoita mielekkäämpinä. He myös kokivat opintojaksojen kielentämistehtäviä keskimäärin helpompina. Osaajille luonnollisella kielellä kirjoitettujen perusteluiden kirjoittaminen on muita opiskelijoita helpompaa, eivätkä he pidä kirjoittamista myöskään yhtä työläänä tai aikaa vievänä kuin muut opiskelijat.

Kielentämistehtäviä pidettiin hyvinä tenttitehtävinä ja niiden käyttöä aiotaan jatkaa myös tulevaisuudessa. Tehtävien laatiminen on tosin rutiinin puutteen vuoksi normaalia tenttitehtävää haastavampaa ja erityisesti niiden pisteytykseen on kiinnitettävä paljon huomiota jo tehtävää suunniteltaessa. Kielentämistehtävien avulla opiskelijan osaamistason mittaaminen koettiin helpoksi.

6.2 Johtopäätökset

Tutkimuksen perusteella opintojen etenemisessä on tapahtunut edistystä etenkin ensimmäisen vuoden matematiikan perusopintojen kohdalla. Kehitys ei kuitenkaan jostain syystä näytä ulottuvan ensimmäistä vuotta pidemmälle. Toisen vuoden matematiikan perusopintojen suorittamisessa kehitystä ei tutkimuksen mukaan havaittu. Erilaiset jo tehdyt kehitystoimenpiteet matematiikan ensimmäisen vuoden perusopintojen kohdalla ovat siis toimineet suhteellisen hyvin. Vastaavaa työtä kannattaa tulevaisuudessa kohdistaa nykyistä enemmän myös toisen vuoden perusopintojen opintojaksoille.

Matematiikan kielentämistä koskevan tutkimuksen perusteella kielentämistehtävät ovat erittäin varteenotettava kehityskohde matematiikan perusopintojen opintojaksoilla. Kielentämistehtäviä on jatkossakin hyvä hyödyntää osana opetusta erilaisina matematiikan tehtävinä. Lisäksi opiskelijoita kannattaa muutenkin motivoida monipuolistamaan matemaattista ilmaisuaan matematiikan tehtäviä ratkaistaessa. Tutkimuksen mukaan luonnollinen kieli tukee oppimista ja auttaa ongelmien ratkaisuprosessissa. Kielentämistehtävien hyöty oppimisessa kiteytyy matemaattisen ajattelun monipuolistumiseen.

6.3 Jatkotutkimusmahdollisuudet ja työn onnistuminen

Opintojen etenemisen tutkimuksen osalta voisi olla hyödyllistä pyrkiä laajemmin tarkastelemaan, mitkä eri tekijät vaikuttavat opinnoissa etenemiseen. Tämä edellyttää suhteellisen pitkää ja laajaa useamman vuoden mittaista pitkittäistutkimusta. Tutkimus kuitenkin saattaisi tuottaa arvokasta tietoa, jonka avulla opintojaksoja voitaisiin entisestään kehittää. Toisaalta vastaavan tyyppisen tutkimuksen voi tehdä myös vertaamalla yhden tietyn vuoden eri opintosuuntien opiskelijoita keskenään. Näin opiskelijatyypeistä voitaisiin löytää joitakin keskeisiä faktoreita, jotka vaikuttavat opinnoissa etenemiseen.

Tutkimuksessa kielentämistehtävien ongelmaksi nousi niiden motivoivuus ja vaikeustaso. Tämän vuoksi olisi hyödyllistä tutkia, millaiset matematiikan tehtävät opiskelijat kokevat innostaviksi. Korkeakouluopiskelijoiden asenteita kielentämistehtäviä kohtaan voisi tutkia myös laadullisesti tätä tutkimusta tarkemmin esimerkiksi ryhmähaastatteluja käyttäen. Tässä tutkimuksessa ei tutkittu kuviokielen käyttöä osana kielentämistehtäviä, koska kuviokieli ei sopinut kovin hyvin opintojaksoilla käsiteltäviin aihealueisiin. Kuviokieltä oli kuitenkin mukana muutamassa tutkimuksen kielentämistehtävässä. Kuviokielen käyttöä voisi tarkastella tarkemmin jollain muulla matematiikan opintojaksolla.

Tutkimuksessa havaittiin ikään kuin sivutuloksena, että naisten ja miesten välillä on selkeitä eroja osaamistasossa ja oppimisprofiileissa. Erityisen mielenkiintoinen oli havainto siitä, että matematiikka 1 -opintojaksolla naisten osaamistaso on miehiä selvästi heikompi. Vaikka naiset suoriutuivat perustaitotestistä miehiä paremmin, he eivät kuitenkaan tentistä saaneet yhtä hyviä arvosanoja kuin miesopiskelijat. Miesten ja naisten matematiikan osaamista ja matematiikkakuvaa voisi olla mielenkiintoista tutkia laajemmin korkeakoulukontekstissa ja tarkastella syitä sukupuolten välisille eroilla matematiikan osaamisessa ja siihen liittyvissä asenteissa ja uskomuksissa. Samalla olisi myös mielenkiintoista tutkia sukupuolten välisiä eroja oppimisprofiileissa.

Tutkimus onnistui tavoitteessaan hyvin. Työtä ohjaaville tutkimuskysymyksille saatiin teoreettisesti mielekkäitä perusteltuja vastauksia. Tutkimuksen tulokset ovat myös helposti hyödynnettävissä matematiikan perusopintoja kehitettäessä. Opintojen suorittamisen selvityksessä havaittujen erojen tarkempi selvitys olisi ollut mielenkiintoinen lisä tutkimukseen. Se olisi kuitenkin vaatinut kattavaa lisätutkimusta aiheesta, minkä vuoksi tarkempi syiden selvitys jätettiin jatkotutkimusten varaan.

LÄHTEET

[1] Barnes, W., J. Statistical Analysis for Engineers and Scientists: A computer-Based Approach. Texas 1994, McGraw-Hill, Inc. 397 p.

[2] Creswell, J. Research desingn - Qualitative, Quantitative, Mixed methods Aprroaches. Second edition. Lincoln 2003, University of Nebrasca.

[3] Eskola, J., Suoranta, J. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Rovaniemi 1996, Lapin yliopisto, Kasvatustieteiden tiedekunta. 201 s.

[4] Eurasto, H. Tyttöjen ja poikien erilaiset asenteet äidinkielen tunteihin. Tampere 1998, Osuuskunta Vastapaino.

[5] Hannula, M. S., Kupari P., Pehkonen L., Räsänen, P., Soro, R. Matematiikka ja sukupuoli. Julkaisussa: Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T., Malinen, P. (toim.). Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä 2004, s. 170-197.

[6] Harjunen, E., Rautopuro J. Kielenkäytön ajattelua ja ajattelun kielentämistä, Äidinkielen ja kirjallisuuden oppimistulokset perusopetuksen päättövaiheessa 2014: keskiössä kielentuntemus ja kirjoittaminen. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus, Tampere 2015, Juvenes Print - Suomen Yliopistopaino Oy. 188 s.

[7] Heikkilä, T. Tilastollinen tutkimus, verkkomateriaalit, Muuttujien väliset riippuvuudet - esimerkkejä. 2014, Edita. 41 s.

[8] Jamison, R. Learning the Language of Mathematics. In Language and Learning Across the Disciplines. Volume 4, Number 1. Illinois Institute of Technology and Georgia Southern University 2010, 45-54 pp.

[9] Joutsenlahti, J., Rättyä, K. Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Julkaisussa: Kauppinen M., Rautiainen, M. ja Tarnanen, M. (toim.). Rajaton tulevaisuus, Kohti kokonaisvaltaista oppimista, Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014. Jyväskylä 2015, Suomen ainedidaktinen tutkimusseura. s. 45-61.

[10] Joutsenlahti, J. Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Julkaisussa: Asikainen, M., Hirvonen, P. ja Sormunen, K. (toim.). Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa, Matematiikka ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. Joensuu 2010. s. 3-15.

[11] Joutsenlahti J., Sarikka, H., Kangas, J., Harjulehto, P. Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa. Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Assosiation. Jyväskylä 2013, Jyväskylä University Printing House. s. 59-70.

[12] Kailanto, M. Mistä matematiikan osaaminen ja oppiminen koostuu [WWW]. [viitattu 14.4.2015]. Saatavissa: http://wiki.tut.fi/MatoOpas/4Mist%E4MatematiikanOsaaminenJaOppiminenKoostuu

[13] Kari, A. Kielentäminen derivaatan opetuksessa. Opinnäytetyö. Helsinki 2013. Helsingin yliopisto, Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Matematiikan ja tilastotieteen laitos. 77 s.

[14] KvantiMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto [WWW]. Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto. 2008. [viitattu 19.5.2015]. Saatavissa: http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/mittaaminen/luotettavuus.html

[15] Lee, C. Language for learning mathematics. Berkshire England 2006, Open University Press. 123 p.

[16] Lemke J., Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. In Anderson, M., Saenz-Ludlow, A., Zellweger, S. and Cifarelli, V., (Eds.). Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing. Ottawa 2002, Legas Publishing. 215-234 pp.

[17] Massachusetts Institute of Technology. Statistics for Applications: Lecture Notes [WWW]. [viitattu 16.6.2015]. Saatavissa: http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-443-statistics-for-applications-fall-2006/lecture-notes/lecture11.pdf, http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-443-statistics-for-applications-fall-2006/lecture-notes/lecture13.pdf

[18] Metsämuuronen, J. Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. 3. painos. Jyväskylä 2005, International Methelp Ky. 1292 s.

[19] Morgan, C., Craig, T., Schutte, M., Wagner, D. Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. ZDM Mathematics Education 46 (2014) 6. 843-853 pp.

[20] Morgan, C. The place of pupil writing in learning, teaching and assesing mathematics. In: Gates P. (toim.) Issues in mathematics teaching. London 2001. 32-244 pp.

[21] Nummenmaa, T., Konttinen, Kuusinen, J., Leskinen, E. tutkimusaineiston analyysi. 1997, WSOY. 397 s.

[22] Näätänen, M. Matematiikka, naiset ja osaamisyhteiskunta. 2000, Tummavuoren kirjapaino. 160 s.

[23] Opetus ja kulttuuriministeriö. Yliopistojen rahoitusmalli vuodesta 2013 alkaen [WWW]. [viitattu 2.9.2014]. Saatavissa: http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Koulutus/yliopistokoulutus/hallinto_ohjaus_ja_rahoitus/liitteet/OKM_rahoitusmalli-muistio.pdf .

[24] Pfeiffer, P., E. Probability for Applications. 1990, Springer-Verlag. 679 p.

[25] Perttula, A., Vattulainen, K., Suurhasko, T. Todennäköisyyslaskenta. Versio 9/2012. Tampereen teknillinen yliopisto. 98 s.

[26] Pohjavirta, A., Ruohonen, K. Laaja tilastomatematiikka. 2005. Tampereen teknillinen yliopisto. 136 s.

[27] Pohjolainen, S., Raassina, H., Silius, K., Huikkola, M., Turunen, E. TTY:n insinöörimatematiikan opiskelijoiden asenteet, taidot ja opetuksen kehittäminen. Tampere 2006. 127 s.

[28] Ruohonen, K. Tilastomatematiikka. 2011 Tampereen teknillinen yliopisto 2011. 87 s.

[29] Saaranen-Kauppinen, S., Puusniekka, A. KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto [WWW]. Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto. 2006. [viitattu 1.4.2015]. Saatavissa: http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L7_3_2.html

[30] Sairanen, S. Havainnollistavaa algebraa lukiolaisille matemaattisen kielentämisen näkökulmasta. Opinnäytetetyö. Turku 2013. Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos. 100 s.

[31] Sarikka, H. Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena. Tampere 2014. Tampereen teknillinen yliopisto, Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma. 66 s.

[32] Silius K., Pohjalainen S., Kangas J., Miilumäki T., Joutsenlahti J. What can be done to bridge the competency gap between upper-secondary school and university mathematics? Global Engineering Education Conference (EDUCON), Princess Sumaya University for Technology in Amman, Jordan 2011, IEEE. pp. 428-436.

[33] Taipale, A. Matematiikan, lukemisen ja kirjoittamisen vaikeuksien päällekkäistyminen nuoruusiässä. Väitöskirja. Joensuu 2009. Joensuun yliopisto, kasvatustieteiden tiedekunta, N:o 135. 181 s.

[34] Tampereen teknillinen yliopisto. TTY - Opinto-opas 2013-2014 [WWW]. [viitattu 2.9.2014]. Saatavissa: http://www.tut.fi/wwwoppaat/opas2013-2014/perus/tutkinnot/

[35] Tampereen teknillinen yliopisto. TTY - Opinto-opas 2012-2013 [WWW]. [viitattu 26.9.2014]. Saatavissa: http://www.tut.fi/wwwoppaat/opas2012-2013/perus/tutkinnot/

[36] Tampereen teknillinen yliopisto. TTY - Opinto-opas 2011-2012 [WWW]. [viitattu 26.9.2014]. Saatavissa: http://www.tut.fi/wwwoppaat/opas2011-2012/perus/tutkinnot/

[37] Tampereen teknillinen yliopisto. TTY - Opinto-opas 2010-2011 [WWW]. [viitattu 26.9.2014]. Saatavissa: http://www.tut.fi/wwwoppaat/opas2010-2011/perus/tutkinnot/

[38] Tossavainen, T., Matematiikan kieliaspekti ja matematiikkakuva. Julkaisussa Niikko A., Pellikka I., ja Savolainen E. (toim.) Oppimista, opetusta, monitieteisyyttä, Kirjoituksia kuninkaankartanonmäeltä. Joensuun 2007. Joensuun yliopistopaino. s. 233-243.

[39] Tutkimuseettinen neuvottelukunta. Hyvä tieteellinen käytäntö [WWW]. [viitattu 25.5.2015]. Saatavissa: http://www.tenk.fi/fi/htk-ohje/hyva-tieteellinen-kaytanto

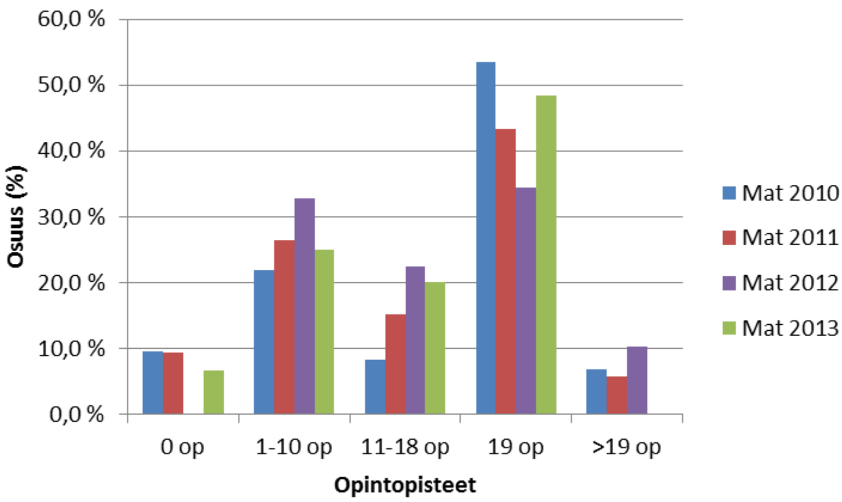
[40] Valli, R. Johdatus tilastolliseen tutkimukseen. 2001. PS-kustannus. 118 s.

[41] Vilkka, H. Tutki ja mittaa, Määrällisen tutkimuksen perusteet. Helsinki 2007, Tammi. 189 s.

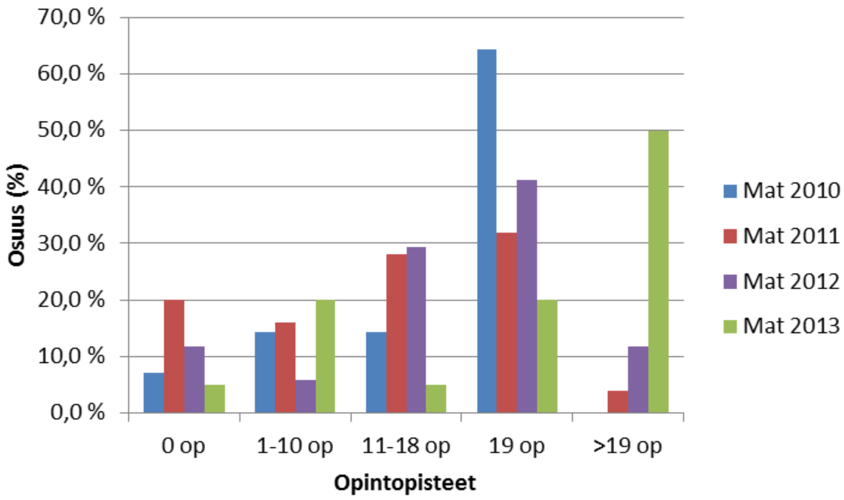
[42] Väänänen, E. Kirjallinen kielentäminen ja kämmentietokoneet lukion pitkässä matematiikassa. Opinnäytetyö. Tampere 2014. Tampereen yliopisto, Informaatiotieteiden yksikkö. 56 s.

A. ENSIMMÄISEN VUODEN MATEMATIIKAN PERUSOPINTOJEN SUORITTAMINEN

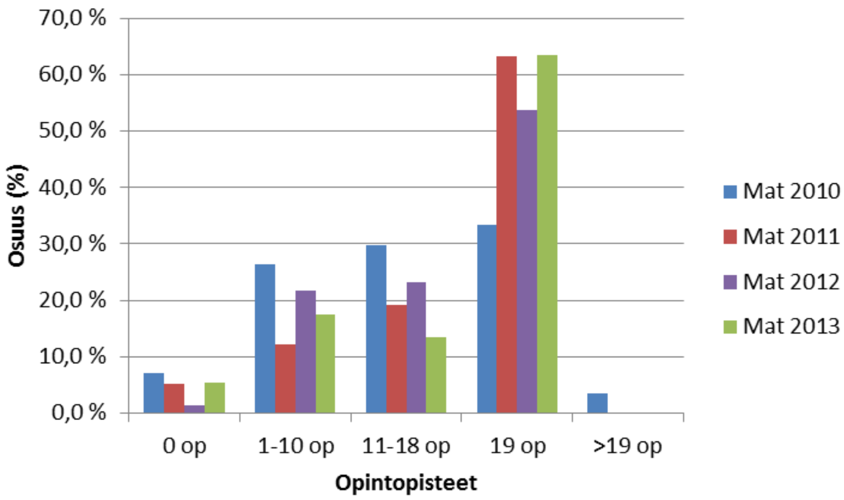
Pylväsdiagrammeissa A.1-A.12 on kuvattu, kuinka monta prosenttia opiskelijoista eri opintosuunnissa saa 0, 1-10, 11-18, 19 tai yli 19 opintopistettä. 0 opintopistettä saaneet opiskelijat eivät ole suorittaneet yhtäkään matematiikan opintojaksoa. 1-10 opintopistettä puolestaan viittaa pääsääntöisesti yhteen tai kahteen, 11-18 opintopistettä kolmeen ja 19 opintopistettä neljään suoritettuun opintojaksoon. Yli 19 opintopistettä saaneet opiskelijat ovat suorittaneet matematiikan opintoja ensimmäisenä vuonna enemmän kuin tavoitteen verran. Opiskelijajoukossa on muutamia opiskelijoita, jotka ovat suorittaneet muita opintojaksoja kuin mitä opinto-oppaissa [34; 35; 36; 37] määritellään, joten tulokset eivät ole absoluuttisen tarkkoja (kts. Kappale 5.1).



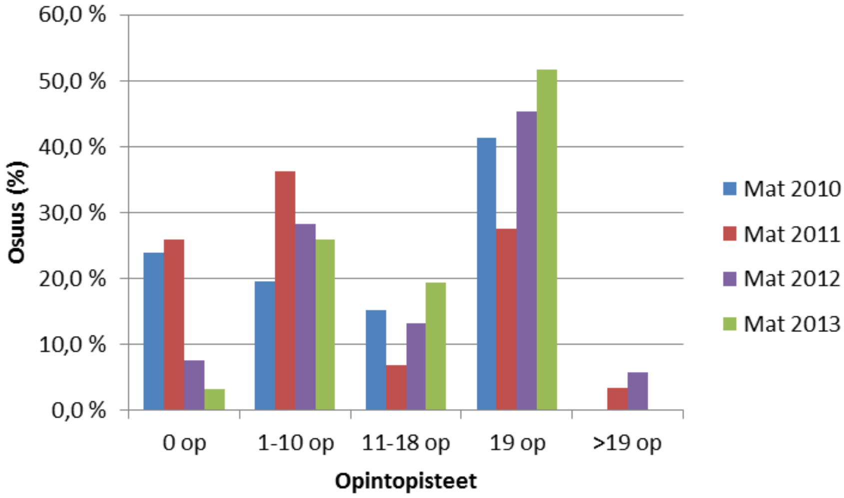
Kuva A.1: Automaatiotekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



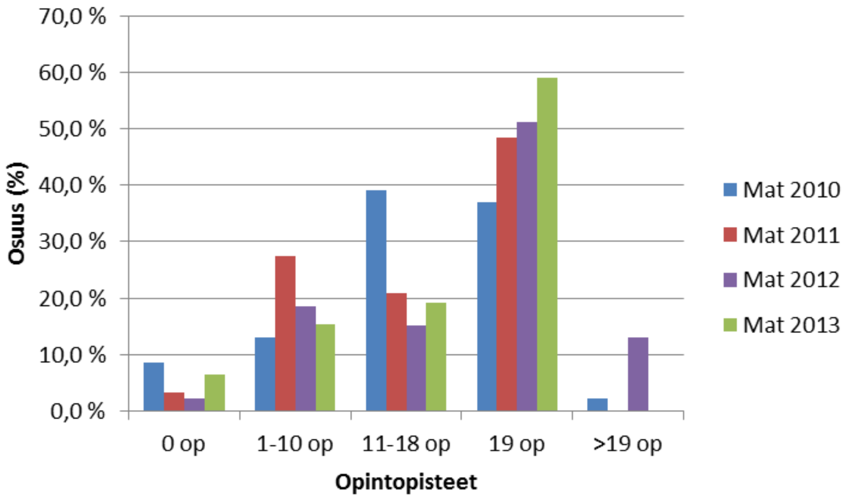
Kuva A.2: Biotekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



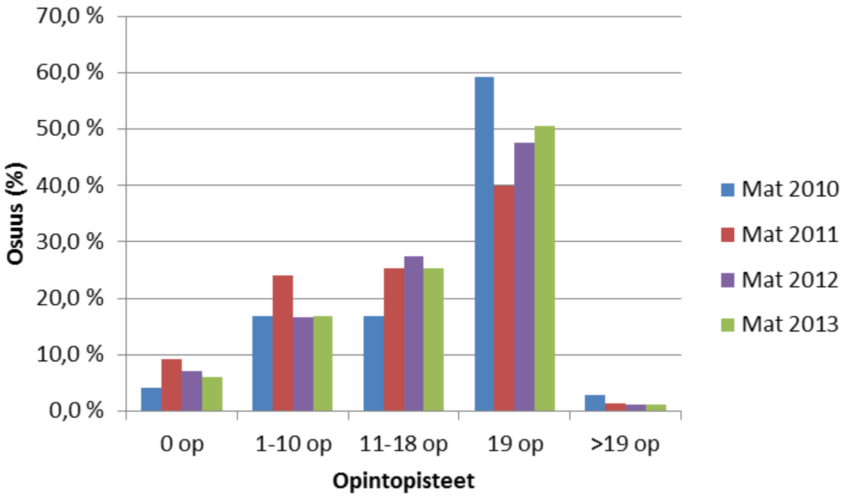
Kuva A.3: Konetekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



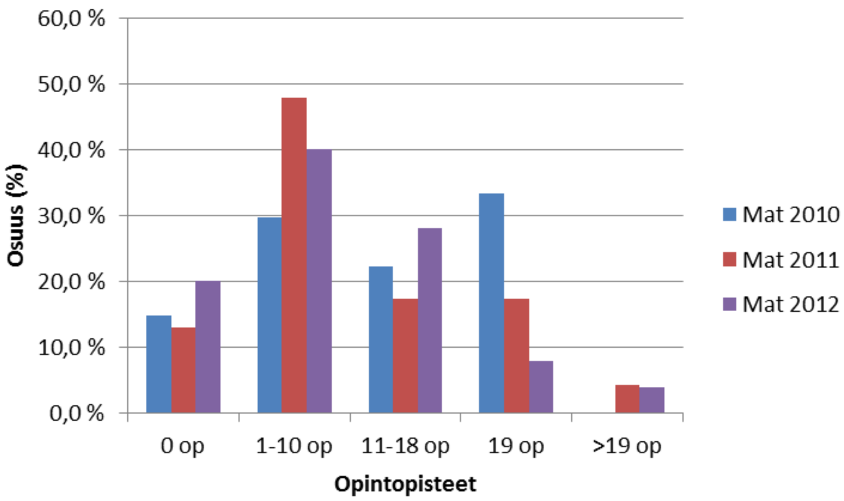
Kuva A.4: Materiaalitekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



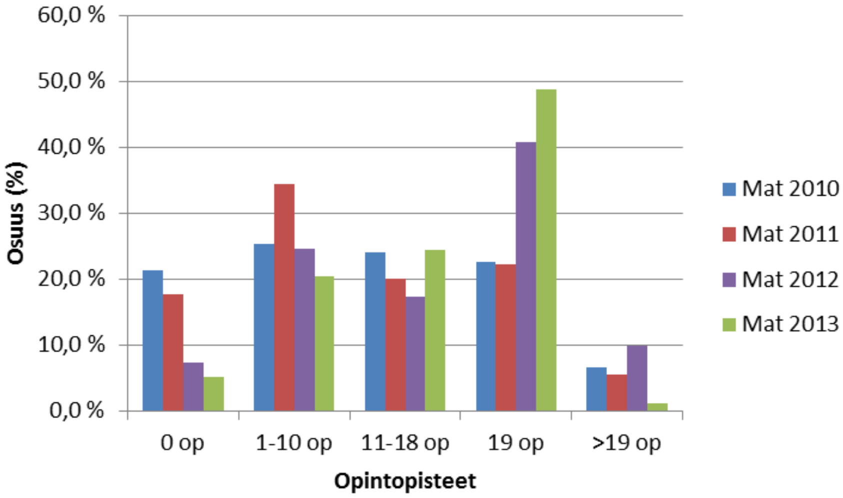
Kuva A.5: Rakennustekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



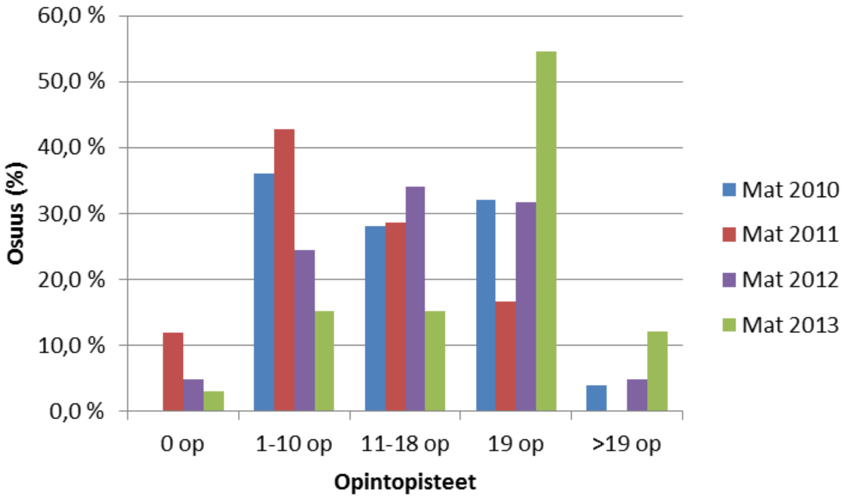
Kuva A.6: Sähkötekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



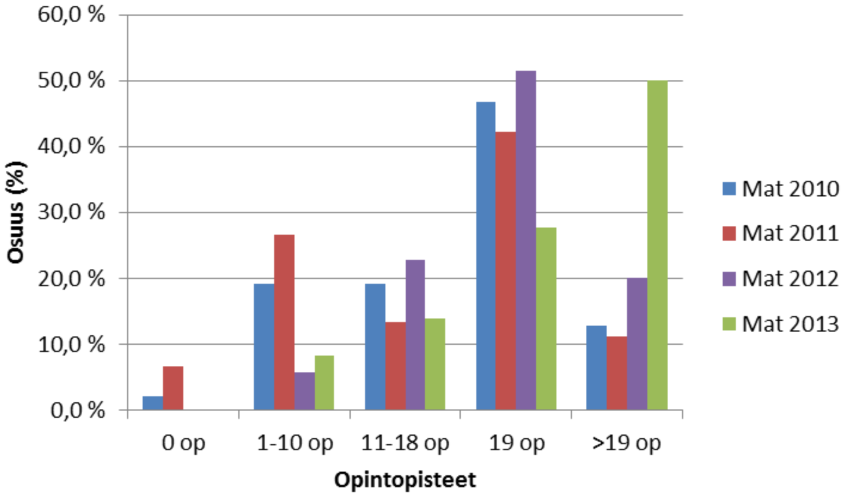
Kuva A.7: Signaalinkäsittely ja tietoliikennetekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



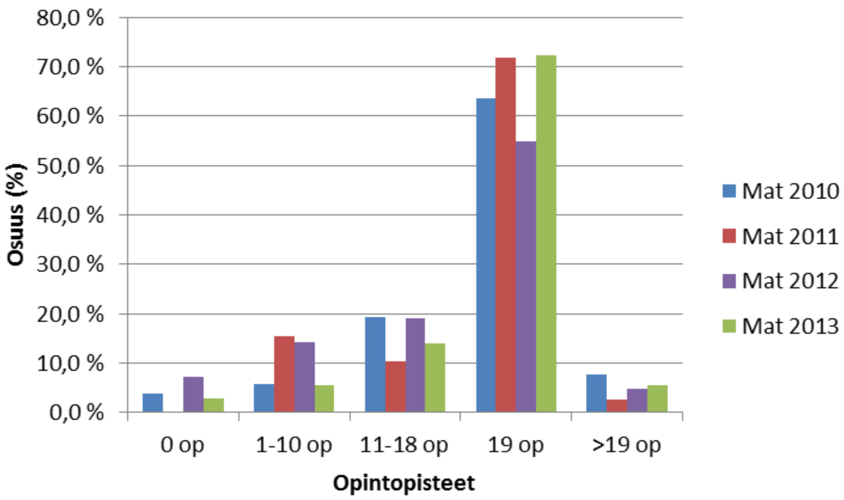
Kuva A.8: Tietotekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



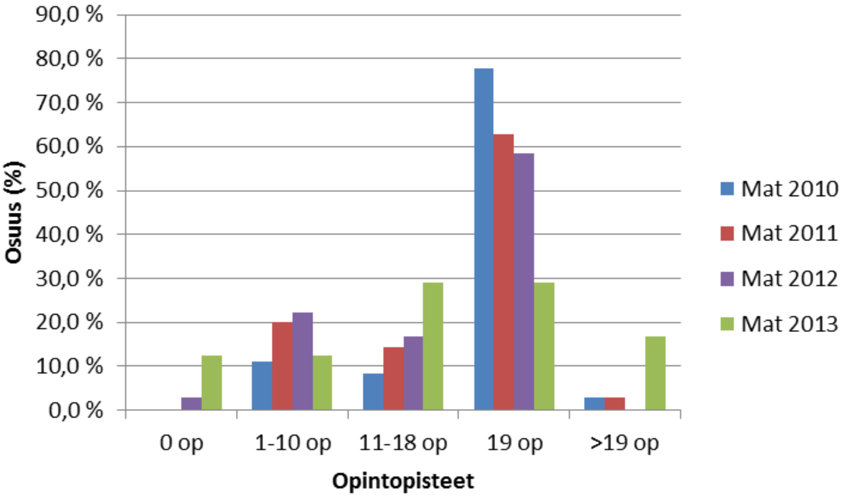
Kuva A.9: Tietojohtamisen ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



Kuva A.10: Teknis-luonnontieteellisen opintosuunnan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



Kuva A.11: Tuotantotalouden ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.



Kuva A.12: Ympäristö- ja energiatekniikan ensimmäisen lukuvuoden matematiikan opintojen suoritukset aloitusvuosittain.

B. OPINTOJEN ETENEMISEN TILASTOLLINEN MERKITSEVYYS

Taulukko B.1: Matematiikan ensimmäisen vuoden opintojen ja opintojen yleisen suorittamisen erojen tilastollinen merkitsevyys eri opintosuunnissa vuosina 2010 ja 2013 aloittaneiden opiskelijoiden välillä. Signaalinkäsittelyn ja tietoliikennetekniikan (SITI) opintosuunta lakkautettiin vuonna 2012. Testaus on tehty käyttämällä kaksisuuntaista vastahypoteesiä.

	p-arvo	
Opintosuunta	**19 op. mat**	**55 op.**
SITI	-	-
TI	0,009	0,047
M	0,420	0,333
R	0,010	0,001
AU	0,168	0,546
TJ	0,006	0,001
K	0,002	0,077
S	0,205	0,005
TL	0,079	0,431
B	0,726	0,493
Y	0,005	0,244
TU	0,487	0,030

Taulukko B.2: Matematiikan kaikkien perusopintojen ja opintojen yleisen suorittamisen vuosittaisten erojen tilastollinen merkitsevyys eri opintosuunnissa toisena opiskeluvuotena vuosina 2010 ja 2012 aloittaneiden opiskelijoiden välillä. Testaus on tehty käyttämällä kaksisuuntaista vastahypoteesiä.

	p-arvo	
Opintosuunta	**mat. perusop.**	**55 op.**
SITI	0,110	0,872
TI	0,372	0,217
M	0,361	0,373
R	0,580	0,000
AU	0,001	0,023
TJ	0,978	0,115
K	0,358	0,275
S	0,516	0,917
TL	0,046	0,866
B	0,041	0,219
Y	0,337	0,042
TU	0,013	0,571

C. OPINTOJAKSOJEN VIIKOITTAISET KIELENTÄMISTEHTÄVÄT

C.1 Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson kielentämistehtävät

5. Selosta lyhyesti omin sanoin, mitä tarkoittaa injektio, surjektio ja bijektio. Mainitse näistä myös esimerkkifunktiot, sekä hahmottele niiden kuvaajat. Etsi esimerkkifunktiollesi myös käänteisfunktiot mikäli mahdollista.

Kuva C.1: Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson harjoitus 1.

3. Ohessa on laskuharjoitustehtävän ratkaisu. Täydennä ratkaisun puuttuvat kohdat sekä keksi harjoitukselle sopiva tehtävänanto.

Ratkaisu

$$
\begin{aligned}
& & \ldots &= y \\
&\Leftrightarrow & \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= y \\
&\Leftrightarrow & \ldots\ldots\ldots &= 2ye^x \\
&\Leftrightarrow & (e^x)^2 - 2ye^x - 1 &= 0 \qquad ||\text{sij } t := e^x \\
&\Leftrightarrow & \ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots \\
&\Leftrightarrow & t &= \ldots\ldots\ldots \\
&\overset{\text{neg. neliöjuuri ei käy}}{\Leftrightarrow} & e^x &= y + \sqrt{y^2+1} \\
&\Leftrightarrow & x &= \ln(y + \sqrt{y^2+1})
\end{aligned}
$$

Kuva C.2: Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson harjoitus 3.

8. **(a)** Määrittele omin sanoin, mitä tarkoittaa käsitteet raja-arvo ja jatkuvuus.

(b) Ratkaise ohessa oleva tehtävä ja perustele kaikki välivaiheet omin sanoin.

Tehtävä

Millä k:n arvolla

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ k - x^2, & x > 2 \end{cases}$$

on jatkuva funktio.

(c) Perustele jatkuvuuden käsitteen avulla, että funktiolla $f(x) = x^4 + 2x - 1$ on nollakohta välillä $x \in (0,1)$. Havainnollista perusteluita omin sanoin.

Kuva C.3: Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson harjoitus 3.

8. **(a)** Selitä omin sanoin miten termit derivaatta, funktion kulku ja ns. kriittiset pisteet eli derivaatan nollakohdat ja pisteet, joissa derivaattaa ei ole olemassa, liittyvät toisiinsa?

(b) Ohessa on tehtävänannon ratkaisu viidessä eri osassa. Osat ovat väärässä järjestyksessä. Järjestä osat loogisesti järkevään järjestykseen ja selvitä harjoituksen tehtävänanto. Täydennä myös ratkaisun puuttuvat osat.

1. $x = \ldots$ ei kuulu tarkasteltavalle välille, joten tutkitaan vain piste $x = \ldots$ ja välin päätepisteet $x = -2$ ja $x = 2$.

2. $g(x)$ on polynomi, joten sillä ei ole singulariteettipisteitä. Kriittiset pisteet saadaan derivaatan nollakohdista

3. $g(-2) = 0, \qquad g(-1) = \ldots, \qquad g(2) = \ldots.$

4. Siis maksimiarvo välillä $[-2,2]$ on 7 ja minimiarvo on -20.

5. $g'(x) = 3(x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = \ldots \quad$ tai $\quad x = \ldots.$

Kuva C.4: Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson harjoitus 4.

8. Ohessa on kaksi kompleksilukuihin liittyvää eri tehtävää. Oletetaan, että tehtävät on ratkaissut insinöörimatematiikka 1- kurssille osallistunut opiskelija ja on tehnyt niissä muutamia virheitä. Korjaa virheet. Pystyykö opiskelija virheistä huolimatta näyttämään, että hän hallitsee asian? Kommentoi lyhyesti tenttijän tekemiä virheitä. Pisteytä myös tehtävät. Yhden tehtävän maksimipistemäärä on 6 pistettä.

Tehtävä 1

Ratkaise $z \in \mathbb{C}$, kun $(2+j)z+1-j=2+2j$.

Vastaus 1

$$\begin{aligned}(2+j)z+1-j &= 2+2j \\ \Leftrightarrow (2+j)z &= 1+3j \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1+3j}{2+j} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{(1+3j)(2+j)}{5} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{2+6j+j-3}{5} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{-1+7j}{5}\end{aligned}$$

Tehtävä 2

Hae polynomin $p(x)=x^3-5x^2+4x+10$ nollakohdat.

Vastaus 2

$x=-1$ havaitaan nollakohdaksi, sillä $p(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+10=0$, joten $x-(-1)=x+1$ on tekijä. Täten saadaan

$$p(x)=(x+1)(x^2-6x+10).$$

Toisen asteen polynomin nollakohdat saadaan ratkaisukaavalla:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot10}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}=-3\pm 2j$$

Nollakohdat ovat -1, $-3-j$ ja $-3+j$

Kuva C.5: Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson harjoitus 5.

C.2 Matematiikka 1 -opintojakson kielentämistehtävät

4. Tämä tehtävä palautetaan moodleen pdf versiona. Tehtävän voi esimerkiksi tulostaa, tehdä ja skannata pdf:ksi tai tehdä korjaukset suoraan tehtävä paperin pdf versioon sopivalla tietokone ohjelmalla. Tehtävänä on osoittaa, että kaikille luonnollisille luvuille $n \in \mathbb{N}$ pätee $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$. Tässä merkintä $\sum_{i=1}^{n} 2i$ tarkoittaa summaa $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2+4+6+\cdots+2n$.

   Seuraavassa on kolme erilaista tapaa todistaa induktioväite, joista jokainen sisältää virheen/virheitä.

   (a) Käy ratkaisut ajatuksella lävitse ja korjaa ne oikeiksi mahdollisimman vähillä muutoksilla.

   Todistus.

   Alkuaskel: kun $n = 1$ niin v.p. $\sum_{i=1}^{1} 2i = 2$ ja o.p. $1 \cdot (1+1) = 2$, joten väite on tosi kun $n = 1$.

   Induktio-oletus: väite on tosi kun $n = k$ ts. $\sum_{i=1}^{k} 2i = k(k+1)$.

   Induktioväite: $\sum_{i=1}^{k+1} 2i = (k+1)((k+1)+1)$.

   1. Todistus induktioväitteelle:

   $$\sum_{i=1}^{k+1} 2i = 2(k+1) + \sum_{i=1}^{k} i \overset{i.o.}{=} 2(k+1) + k(k+1) = (k+1)(2+k) = (k+1)((k+$$

   Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

   2. Todistus induktioväitteelle:

   $$\text{v.p. on } \sum_{i=1}^{k+1} 2i = 2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) = k(k+1)+2(k+1) = k^2+3$$

   $$\text{o.p. on } (k+1)((k+1)+1) = (k+1)^2+1 = k^2+3k+2$$

   Koska v.p. on yhtä suuri kuin o.p. niin induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

   3. Todistus induktioväitteelle:

   $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} 2i &= (k+1)((k+1)+1) \\ \Rightarrow 2(k+1) + \sum_{i=1}^{k} 2i &= k^2+3k+2 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} 2i &= k^2+k \\ \overset{i.o.}{\Rightarrow} k(k+1) &= k^2+k \\ \Rightarrow k^2+k &= k^2+k \\ \Rightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

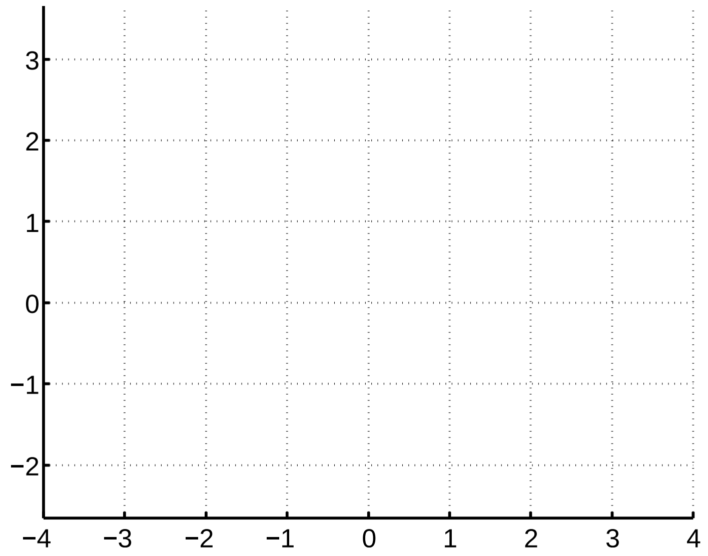
   Joten, induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

   $\square$

   (b) Mikä on mielestäni selkein/ymmärrettävin todistus ko. induktioväitteelle?

Kuva C.6: Matematiikka 1 -opintojakson harjoitus 1.

4. Olkoon $f(x) = |x-1| - 2$ ja $g(x) = |f(x)|$
(a) Piirrä funktion $g(x)$ kuvaaja välillä $[-2,3]$ oheiseen kuvaajaan.



(b) Selitä miten teit edellisen tehtävän ja perustele miksi menetelmäsi toimii?

(c) Piirrä matlabilla funktion $g(x)$ kuvaaja välillä $[-2,3]$. Tämän voi tehdä esimerkiksi luomalla vektorin x, joka sisältää luvut $[-2,-1.999,\ldots,2.999,3]$

» `x=-2:0.001:3;`

Punaisen (red) viivan (-) voi piirtää komennolla

» `plot(x,abs(abs(x-1)-2),'r-');`

Jpg-muotoisen kuvan voi tallentaa kovalevylle komennolla

» `print(gcf,'-djpeg','matematiikka1kuva1.jpg')`

Tutustu yllä olevien komentojen help-teksteihin: » `help :`, » `help plot`, » `help abs`, » `help print`, » `help gcf`

(d) Palauta tämä paperi täydennettynä ja kuva "matematiikka1kuva1.jpg" moodleen.

Kuva C.7: Matematiikka 1 -opintojakson harjoitus 2.

4. **(a)** Selosta lyhyesti omin sanoin, mitä tarkoittaa injektio, surjektio ja bijektio. Mainitse näistä myös esimerkkifunktiot, sekä hahmottele niiden kuvaajat. Etsi esimerkkifunktiollesi myös käänteisfunktiot mikäli mahdollista.
(b) Anna esimerkki funktiosta $f : [0,2] \to [0,2]$, joka on bijektio.
(c) Anna esimerkki funktiosta $g : [0,1] \to [0,1)$, joka on bijektio.

Kuva C.8: Matematiikka 1 -opintojakson harjoitus 3.

4. Ohessa on laskuharjoitustehtävän ratkaisu. Täydennä ratkaisun puuttuvat kohdat sekä keksi harjoitukselle sopiva tehtävänanto.

Tehtävänanto:____

____

Ratkaisu

$$\ldots\ldots\ldots = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots = 2ye^x$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \qquad || + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow (e^x - y)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{\text{neg. neliöjuuri ei käy}}{\Leftrightarrow} e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

Kuva C.9: Matematiikka 1 -opintojakson harjoitus 4.

4. Vastaa kysymyksiin ja perustele jokainen välivaihe sanallisesti.
Väite: Osoita, että $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = 4$.
Mitä tämä väite tarkoittaa?

Minkälaisella todistuksella tämä todistetaan? Mikä on todistuksen rakenne?

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ m.v. ja $\delta = \varepsilon$. **Perustelu:**
Jos $0 < |x-3| < \delta$ niin

$|\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} - 4|$

$= |\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} - 4|$

$= |\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} - 4|$

$= |\sqrt{x+1}+2-4|$

$= |\sqrt{x+1}-2|$

$< |x+1-4|$

$= |x-3|$

$< \delta$

$= \varepsilon$

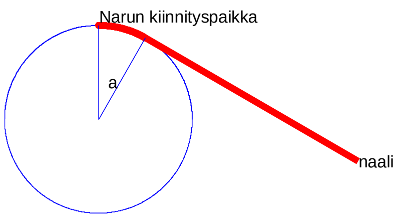
Joten $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon > 0 : 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} - 4| < \varepsilon$ □

Kuva C.10: Matematiikka 1 -opintojakson harjoitus 5.

4. Oletetaan kuvitteellinen tilanne, että naali on sylinterinmuotoisen rakennuksen ulkopuolella seinässä kiinni narulla, jonka pituus on tasan puolet rakennuksen ympärysmitasta. Piirrä matlabilla alueen rajat, jonka sisällä naali pääsee kulkemaan. Oleta, että rakennuksen leikkauskuvion (ympyrän) keskipiste on origo ja säde on yksi. Narun kiinnityspaikaksi valitse piste $(0,1)$. Vihje: Osan rajasta voi piirtää komennolla:

```
a = 0:0.001:pi;plot(sin(a)+(pi-a).*cos(a),cos(a)-(pi-a).*sin(a))
```

Alla olevaan kuvaan on piirretty eräs paikka, jonne naali pääsee. Kuvassa parametri $a = \frac{\pi}{6}$.



Lisäksi ratkaise numeerisesti missä kohtaa alueen rajat leikkaavat x-koordinaattiakselin ja piirrä ne samaan kuvaan. Toisen leikkauskohdan saa ratkaisemalla yhtälöstä:

$$\cos(\alpha) - (\pi - \alpha)\sin(\alpha) = 0,$$

kulman α kun $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ja sijoittamalla tämän x-koordinaatinlausekkeeseen. Tämän voi tehdä monella eri tavalla, esimerkiksi komennolla:

```
a=fzero(@(a) cos(a)-(pi-a)*sin(a),[0 pi/2])
plot(sin(a)+(1-a)*cos(a),0,'r*')
```

Palauta moodleen matlabilla piirtämäsi kuva.

Lisäietoa naalista löytyy osoitteesta:
http://fi.wikipedia.org/wiki/Naali
Funktionaaleista löytyy tietoa osoitteesta:
http://en.wikipedia.org/wiki/Functional_(mathematics)

Kuva C.11: Matematiikka 1 -opintojakson harjoitus 6.

D. OPINTOJAKSOJEN TENTTIEN KIELENTÄMISTEHTÄVÄT

D.1 Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson tentin kielentämistehtävä

(a) (2 pistettä) Mikä on arkussinin laajin mahdollinen määrittelyjoukko ja arvojoukko?

(b) (4 pistettä) Alla on todistettu, että arkussinin derivaatta muuttujan x suhteen on $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, kun $|x| < 1$.
Perustele todistuksen jokainen yhtäsuuruus . Käytä perusteluissasi apuna luonnollista kieltä.

$$D_x(\arcsin(x)) \overset{(i)}{=} \frac{1}{D_y(\sin(y))} \overset{(ii)}{=} \frac{1}{\cos(y)} \overset{(iii)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} \overset{(iv)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

D.2 Matematiikka 1 -opintojakson tentin kielentämistehtävä

Alla on osoitettu, että $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Määritä todistuksessa oleva positiiviluku δ siten, että todistus on pätevä. Kirjoita todistus vastauspaperiin ja perustele jokainen välivaihe täsmällisesti. Lopuksi kerro sanallisesti (luonnollisella kielellä) mitä todistuksessa on tehty ja mitä se tarkoittaa.

Todistus.

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta = \ldots > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta|x|} \geq \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} \geq |M| + 0.1 > M$$

$\square$

E. KYSELY OPISKELIJOILLE

Kysely kielentämisestä

Kielentämistehtävällä tarkoitetaan sellaista tehtävää, jossa olennaisena osana on luonnollisen kielen liittäminen osaksi ratkaisua. Erilaisia kielentämistehtävätyyppejä ovat mm. virheen etsintä, ratkaisun selittäminen tai täydentäminen, ratkaisun perustelu, omin sanoin selittäminen, matematiikan kielten eri osa-alueiden välillä tapahtuva kääntäminen ja tehtävän tiedonseulonta. Opintojakson aikana osaa tehtävätyypeistä käytettiin laskuharjoituksissa erikseen palautettavina tehtävinä.

Kyselyn vastauksia käytetään matematiikan oppimisen tutkimukseen niin, että opiskelijan anonymiteetti säilyy.

Perustiedot

1. Opiskelijanumero: _________________________

2. Sukupuoli (ympyröi oikea vaihtoehto):

Mies Nainen

3. Koulutusohjelma: _________________________

4. Palautin opintojakson aikana kielentämistehtäviä yhteensä (ympyröi oikea vaihtoehto):

0 1 2 3 4 ≥5 en tiedä

5. Suoritin ylioppilastutkinnossani (ympyröi oikea vaihtoehto):

Pitkän matematiikan Lyhyen matematiikan En suorittanut matematiikkaa

En ole suorittanut suomalaista ylioppilastutkintoa

6. Ylioppilaskirjoitusten arvosana matematiikasta (ympyröi oikea vaihtoehto):

I A B C M E L

En tiedä/muista En suorittanut matematiikkaa

En ole suorittanut suomalaista ylioppilastutkintoa

<u>Vastaa seuraaviin kysymyksiin rastittamalla sinua parhaiten kuvaava vaihtoehto</u>

0=täysin eri mieltä
1=osittain eri mieltä
2=osittain samaa mieltä
3=täysin samaa mieltä

Väite	**0**	**1**	**2**	**3**
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.				
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.				
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.				
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.				
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.				
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.				
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.				
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.				
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.				
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.				
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.				
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.				
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.				
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.				
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.				
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.				

23. Mitkä asiat ovat vaikuttaneet myönteisesti oppimiseesi opintojakson aikana?

____

____

____

24. Kerro suhtautumisestasi opintojaksolla olleisiin palautettaviin kielentämistehtäviin.

____

____

____

Kiitos vastauksestasi!

F. KYSELY OPINTOJAKSOJEN VASTUUHENKILÖILLE

1. Onko kokemuksesi mukaan kielentämistehtävien avulla helppoa vai vaikeaa mitata tentissä opiskelijan matemaattisen ymmärryksen syvyyttä?
2. Oliko kielentämistehtävien laadinta tenttiin helppoa vai haastavaa?
3. Miten koet kielentämistehtävien tarkistamisen ja pisteytyksen?
4. Miten koet kielentämistehtävien vaikeustason tentissä?
5. Aiotko käyttää kielentämistehtäviä tenttitehtävinä myös tulevaisuudessa?

G. OPISKELIJAKYSELYN TULOKSET

G.1 Yleiset tulokset

Taulukko G.1: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=176-183)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	7,2 %	16,0 %	54,1 %	22,7 %	2	181
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	1,6 %	19,2 %	44,0 %	35,2 %	2	182
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	43,2 %	46,0 %	9,7 %	1,1 %	1	176
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	1,1 %	9,9 %	58,2 %	30,8 %	2	182
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	4,4 %	20,0 %	49,4 %	26,1 %	2	180
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	8,8 %	28,2 %	45,9 %	17,1 %	2	181
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	12,8 %	62,8 %	19,4 %	5,0 %	1	180
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	7,3 %	35,8 %	48,0 %	8,9 %	2	179
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	12,1 %	47,3 %	27,5 %	13,2 %	1	182
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	10,4 %	42,6 %	37,2 %	9,8 %	1	183
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	15,6 %	48,3 %	31,7 %	4,4 %	1	180
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	3,9 %	26,1 %	50,6 %	19,4 %	2	180
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	18,9 %	34,4 %	41,1 %	5,6 %	2	180
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	9,9 %	44,2 %	34,8 %	11,0 %	1	181
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	33,5 %	52,2 %	12,1 %	2,2 %	1	182
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	16,7 %	43,9 %	32,2 %	7,2 %	1	180

G.2 Opintojaksokohtaiset tulokset

Taulukko G.2: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia insinöörimatematiikka 1 -opintojaksolla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=93-98)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	9,3 %	17,5 %	54,6 %	18,6 %	2	97
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	3,1 %	20,6 %	44,3 %	32,0 %	2	97
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	40,9 %	48,4 %	8,6 %	2,2 %	1	93
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	2,0 %	8,2 %	58,2 %	31,6 %	2	98
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	5,2 %	17,5 %	53,6 %	23,7 %	2	97
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	7,3 %	31,3 %	42,7 %	18,8 %	2	96
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	12,5 %	57,3 %	22,9 %	7,3 %	1	96
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	8,3 %	33,3 %	53,1 %	5,2 %	2	96
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	12,4 %	41,2 %	33,0 %	13,4 %	1	97
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	5,1 %	45,9 %	36,7 %	12,2 %	1	98
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	12,5 %	56,3 %	26,0 %	5,2 %	1	96
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	4,1 %	32,0 %	51,5 %	12,4 %	2	97
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	20,8 %	34,4 %	41,1 %	5,6 %	2	96
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	11,3 %	56,7 %	29,9 %	2,1 %	1	97
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	34,7 %	48,0 %	13,3 %	4,1 %	1	98
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	16,7 %	43,8 %	33,3 %	6,3 %	1	96

Taulukko G.3: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia Matematiikka 1 -opintojaksolla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=83-85)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	4,8 %	14,3 %	53,6 %	27,4 %	2	84
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	17,6 %	43,5 %	38,8 %	2	85
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	45,8 %	43,4 %	10,8 %	0,0 %	0	83
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	0,0 %	11,9 %	58,3 %	29,8 %	2	84
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	3,6 %	22,9 %	44,6 %	28,9 %	2	83
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	10,6 %	24,7 %	49,4 %	15,3 %	2	85
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	13,1 %	69,0 %	15,5 %	2,4 %	1	84
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	6,0 %	38,6 %	42,2 %	13,3 %	2	83
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	11,8 %	54,1 %	21,2 %	12,9 %	1	85
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	16,5 %	38,8 %	37,6 %	7,1 %	1	85
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	19,0 %	39,3 %	38,1 %	3,6 %	1	84
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	3,6 %	19,3 %	49,4 %	27,7 %	2	83
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	16,7 %	35,7 %	39,3 %	8,3 %	2	84
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	8,3 %	29,8 %	40,5 %	21,4 %	2	84
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	32,1 %	57,1 %	10,7 %	0,0 %	1	84
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	16,7 %	44,0 %	31,0 %	8,3 %	1	84

G.3 Sukupuolikohtaiset tulokset

Taulukko G.4: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia naisopiskelijoilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=42-44)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	4,7 %	16,3 %	48,8 %	30,2 %	2	43
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	9,1 %	43,2 %	47,7 %	3	44
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	55,8 %	34,9 %	7,0 %	2,3 %	0	43
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	0,0 %	11,6 %	65,1 %	23,3 %	2	43
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	2,3 %	25,6 %	51,2 %	20,9 %	2	43
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	13,6 %	34,1 %	38,6 %	13,6 %	2	44
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	7,0 %	67,4 %	18,6 %	7,0 %	1	43
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	7,0 %	44,2 %	39,5 %	9,3 %	1	43
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	6,8 %	52,3 %	25,0 %	15,9 %	1	44
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	9,1 %	45,5 %	40,9 %	4,5 %	1	44
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	23,3 %	41,9 %	30,2 %	4,7 %	1	43
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	0,0 %	20,9 %	53,5 %	25,6 %	2	43
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	15,9 %	34,1 %	45,5 %	4,5 %	2	44
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	4,7 %	23,3 %	53,5 %	18,6 %	2	43
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	38,6 %	56,8 %	4,5 %	0,0 %	1	44
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	16,7 %	42,9 %	26,2 %	14,3 %	1	42

Taulukko G.5: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia miesopiskelijoilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=132-138)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	8,0 %	16,1 %	55,5 %	20,4 %	2	137
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	2,2 %	22,6 %	44,5 %	30,7 %	2	137
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	38,6 %	50,0 %	10,6 %	0,8 %	1	132
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	1,4 %	8,7 %	56,5 %	33,3 %	2	138
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	5,1 %	18,4 %	48,5 %	27,9 %	2	136
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	7,4 %	25,7 %	48,5 %	18,4 %	2	136
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	14,7 %	61,0 %	19,9 %	4,4 %	1	136
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	7,4 %	33,3 %	50,4 %	8,9 %	2	135
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	13,9 %	45,3 %	28,5 %	12,4 %	1	137
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	10,9 %	41,3 %	36,2 %	11,6 %	1	138
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	13,2 %	50,0 %	32,4 %	4,4 %	1	136
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	5,1 %	27,9 %	50,0 %	16,9 %	2	136
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	20,0 %	34,1 %	40,0 %	5,9 %	2	135
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	11,7 %	51,1 %	28,5 %	8,8 %	1	137
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	31,4 %	51,1 %	14,6 %	2,9 %	1	137
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	16,8 %	43,8 %	34,3 %	5,1 %	1	137

G.4 Osaamistasokohtaiset tulokset

Taulukko G.6: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia osaamistasoltaan heikoilla opiskelijoilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=28-30)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	10,3 %	10,3 %	55,2 %	24,1 %	2	29
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	20,0 %	46,7 %	33,3 %	2	30
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	50,0 %	35,7 %	10,7 %	3,6 %	0	28
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	0,0 %	17,2 %	58,6 %	24,1 %	2	29
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	6,7 %	33,3 %	40,0 %	20,0 %	2	30
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	13,3 %	23,3 %	40,0 %	23,3 %	2	30
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	13,8 %	44,8 %	20,7 %	20,7 %	1	29
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	16,7 %	36,7 %	33,3 %	13,3 %	1	30
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	23,3 %	43,3 %	20,0 %	13,3 %	1	30
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	16,7 %	30,0 %	40,0 %	13,3 %	2	30
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	23,3 %	33,3 %	36,7 %	6,7 %	2	30
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	3,3 %	20,0 %	53,3 %	23,3 %	2	30
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	13,3 %	30,0 %	46,7 %	10,0 %	2	30
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	0,0 %	46,7 %	36,7 %	16,7 %	1	30
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	36,7 %	43,3 %	16,7 %	3,3 %	1	30
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	30,0 %	26,7 %	33,3 %	10,0 %	2	30

Taulukko G.7: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia osaamistasoltaan keskitasoisilla opiskelijoilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=62-65)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	6,2 %	12,3 %	58,5 %	23,1 %	2	65
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	1,5 %	23,1 %	32,3 %	43,1 %	3	65
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	50,0 %	43,8 %	6,3 %	0,0 %	0	64
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	1,5 %	7,7 %	63,1 %	27,4 %	2	65
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	1,6 %	17,7 %	56,5 %	24,2 %	2	62
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	7,8 %	34,4 %	51,6 %	6,3 %	2	64
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	7,8 %	76,6 %	15,6 %	0,0 %	1	64
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	6,3 %	32,8 %	54,7 %	6,3 %	2	64
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	13,8 %	44,6 %	30,8 %	10,8 %	1	65
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	9,2 %	47,7 %	36,9 %	6,2 %	1	65
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	9,5 %	50,8 %	33,3 %	6,3 %	1	63
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	3,1 %	29,7 %	46,9 %	20,3 %	2	64
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	14,1 %	39,1 %	40,6 %	6,3 %	2	64
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	7,8 %	39,1 %	42,2 %	10,9 %	2	64
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	33,8 %	49,2 %	12,3 %	4,6 %	1	65
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	14,1 %	51,6 %	25,0 %	9,4 %	1	64

Taulukko G.8: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia osaamistasoltaan hyvillä opiskelijoillaa: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=45-48)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	2,1 %	22,9 %	52,1 %	22,9 %	2	48
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	25,0 %	50,0 %	25,0 %	2	48
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	37,8 %	46,7 %	15,6 %	0,0 %	1	45
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	0,0 %	2,1 %	47,9 %	50,0 %	3	48
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	2,1 %	10,4 %	58,3 %	29,2 %	2	48
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	6,3 %	12,5 %	58,3 %	22,9 %	2	48
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	16,7 %	60,4 %	20,8 %	2,1 %	1	48
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	4,3 %	31,9 %	53,2 %	10,6 %	2	47
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	8,3 %	54,2 %	20,8 %	16,7 %	1	48
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	10,4 %	47,9 %	33,3 %	8,3 %	1	48
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	18,8 %	43,8 %	35,4 %	2,1 %	1	48
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	8,3 %	18,8 %	50,0 %	22,9 %	2	48
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	25,0 %	31,3 %	39,6 %	4,2 %	2	48
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	18,8 %	52,1 %	20,8 %	8,3 %	1	48
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	35,4 %	58,3 %	6,3 %	0,0 %	1	48
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	10,4 %	43,8 %	39,6 %	6,3 %	1	48

G.5 Oppimisprofiilikohtaiset tulokset

Taulukko G.9: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia oppimisprofiililtaan pintasuuntautuneilla mallistaoppijoilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=17-18)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	0,0 %	11,8 %	58,8 %	29,4 %	2	17
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	22,2 %	33,3 %	44,4 %	3	18
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	50,0 %	38,9 %	5,6 %	5,6 %	0	18
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	5,9 %	11,8 %	58,8 %	23,5 %	2	17
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	11,8 %	58,8 %	29,4 %	2	17
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	11,1 %	27,8 %	50,0 %	11,1 %	2	18
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	5,9 %	64,7 %	17,6 %	11,8 %	1	17
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	5,6 %	44,4 %	38,9 %	11,1 %	1	18
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	16,7 %	61,1 %	16,7 %	5,6 %	1	18
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	0,0 %	50,0 %	44,4 %	5,6 %	1	18
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	16,7 %	50,0 %	27,8 %	5,6 %	1	18
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	0,0 %	5,6 %	77,8 %	16,7 %	2	18
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	22,2 %	38,9 %	38,9 %	0,0 %	1;2	18
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	5,6 %	44,4 %	44,4 %	5,6 %	1;2	18
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	33,3 %	50,0 %	16,7 %	0,0 %	1	18
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	16,7 %	55,6 %	16,7 %	11,1 %	1	18

Taulukko G.10: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia oppimisprofiililtaan vertaisoppijoilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=44-46)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	2,2 %	15,2 %	56,5 %	26,1 %	2	46
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	21,7 %	45,7 %	32,6 %	2	46
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	47,7 %	38,6 %	13,6 %	0,0 %	0	44
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	0,0 %	8,7 %	73,9 %	17,4 %	2	46
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	4,4 %	26,7 %	51,1 %	17,8 %	2	45
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	6,5 %	37,0 %	45,7 %	10,9 %	2	46
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	6,5 %	65,2 %	23,9 %	4,3 %	1	46
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	4,4 %	46,7 %	46,7 %	2,2 %	1;2	45
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	17,4 %	45,7 %	30,4 %	6,5 %	1	46
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	8,7 %	37,0 %	47,8 %	6,5 %	2	46
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	11,1 %	57,8 %	28,9 %	2,2 %	1	45
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	2,2 %	35,6 %	46,7 %	15,6 %	2	45
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	13,0 %	32,6 %	41,3 %	13,0 %	2	46
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	6,7 %	31,1 %	48,9 %	13,3 %	2	45
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	43,5 %	41,3 %	13,0 %	2,2 %	0	46
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	15,6 %	46,7 %	35,6 %	2,2 %	1	45

Taulukko G.11: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia oppimisprofiililtaan tukea tarvitsevilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=8)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	0,0 %	12,5 %	62,5 %	25,0 %	2	8
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	0,0 %	62,5 %	37,5 %	2	8
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	62,5 %	37,5 %	0,0 %	0,0 %	0	8
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	0,0 %	25,0 %	62,5 %	12,5 %	2	8
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	0,0 %	50,0 %	50,0 %	0,0 %	1;2	8
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	12,5 %	0,0 %	62,5 %	25,0 %	2	8
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	0,0 %	37,5 %	50,0 %	12,5 %	2	8
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	12,5 %	37,5 %	37,5 %	12,5 %	1;2	8
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	0,0 %	50,0 %	25,0 %	25,0 %	1	8
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	0,0 %	62,5 %	37,5 %	0,0 %	1	8
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	12,5 %	50,0 %	25,0 %	12,5 %	1	8
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	0,0 %	25,0 %	50,0 %	25,0 %	2	8
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	12,5 %	50,0 %	37,5 %	0,0 %	1	8
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	0,0 %	50,0 %	25,0 %	25,0 %	1	8
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	25,0 %	50,0 %	25,0 %	0,0 %	1	8
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	37,5 %	25,0 %	37,5 %	0,0 %	0;2	8

Taulukko G.12: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia oppimisprofiililtaan omin päin opiskelevilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=25-26)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	11,5 %	11,5 %	50,0 %	26,9 %	2	26
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	3,8 %	11,5 %	34,6 %	50,0 %	3	26
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	60,0 %	36,0 %	4,0 %	0,0 %	0	25
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	0,0 %	19,2 %	53,8 %	26,9 %	2	26
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	8,0 %	12,0 %	52,0 %	28,0 %	2	25
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	7,7 %	30,8 %	53,8 %	7,7 %	2	26
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	12,0 %	68,0 %	16,0 %	4,0 %	1	25
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	8,0 %	36,0 %	48,0 %	8,0 %	2	25
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	7,7 %	50,0 %	26,9 %	15,4 %	1	26
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	11,5 %	38,5 %	38,5 %	11,5 %	1;2	26
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	15,4 %	38,5 %	34,6 %	11,5 %	1	26
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	7,7 %	23,1 %	34,6 %	34,6 %	2;3	26
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	19,2 %	42,3 %	30,8 %	7,7 %	1	26
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	15,4 %	38,5 %	34,6 %	11,5 %	1	26
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	30,8 %	53,8 %	11,5 %	3,8 %	1	26
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	23,1 %	42,3 %	19,2 %	15,4 %	1	26

Taulukko G.13: Kielentämistehtäviä koskevan kyselyn tuloksia oppimisprofiililtaan osaajilla: 0 = täysin eri mieltä, 1= osittain eri mieltä, 2 = osittain samaa mieltä, 3 = täysin samaa mieltä. (N=58-61)

Kysymys	0	1	2	3	Moodi	N
7. Käytän matematiikassa mielelläni luonnollista kieltä ratkaisun tukena.	10,0 %	20,0 %	53,3 %	16,7 %	2	60
8. Sellaista matematiikan tehtävää, jossa on selitetty vaiheita luonnollisella kielellä, on helpompi ymmärtää kuin sellaista, jossa on vain matematiikan symbolikieltä.	1,7 %	26,7 %	45,0 %	26,7 %	2	60
9. Luonnollinen kieli ei mielestäni auta haastavien käsitteiden ymmärtämistä tai käsittelyä.	27,6 %	56,9 %	13,8 %	1,7 %	1	58
10. Ratkaisen mielelläni erityylisiä matematiikan tehtäviä.	0,0 %	1,6 %	44,3 %	54,1 %	3	61
11. Perustelen ratkaisuni välivaiheita mielelläni käyttämällä matematiikan kaavoja tai muuta matematiikan symbolikieltä.	3,3 %	13,1 %	50,8 %	32,8 %	2	61
12. Selitän mielelläni muille matematiikan tehtävän ratkaisuani.	8,3 %	21,7 %	43,3 %	26,7 %	2	60
13. Sanalliset tehtävät (muutkin kuin kielentämistehtävät) eivät yleisesti ottaen motivoi minua.	19,7 %	62,3 %	13,1 %	4,9 %	1	61
14. Perustelujen kirjoittaminen sanallisesti on mielestäni helppoa.	8,2 %	21,3 %	59,0 %	11,5 %	2	61
15. En koe oppimistulosteni parantuneen opintojaksolla olleiden kielentämistehtävien ansiosta.	13,1 %	44,3 %	24,6 %	18,0 %	1	61
16. Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan tehtävän ratkaisussa on työlästä.	16,4 %	45,9 %	26,2 %	11,5 %	1	61
17. Koin opintojakson kielentämistehtävät innostavina.	20,0 %	40,0 %	36,7 %	3,3 %	1	60
18. Oma kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi helpottavat matematiikan tehtävän ratkaisua.	6,6 %	24,6 %	49,2 %	19,7 %	2	61
19. Koin opintojakson aikana onnistumisen elämyksiä kielentämistehtävien parissa.	20,0 %	31,7 %	45,0 %	3,3 %	2	60
20. Opintojakson kielentämistehtävät eivät olleet helppoja.	13,1 %	55,7 %	21,3 %	9,8 %	1	61
21. Sanallisten perustelujen liittäminen osaksi tehtävän ratkaisua on turhaa.	29,5 %	55,7 %	11,5 %	3,3 %	1	61
22. Tehtävän perustelu sanallisesti ei juuri vie aikaa.	10,0 %	41,7 %	40,0 %	8,3 %	1	60

H. KORRELAATIOMATRIISIT

H.1 Korrelaatiot kyselyn väittämien välillä

Taulukko H.1: Väittämien vastauksien välinen korrelaatiomatriisi (tilastollisesti melkein merkitsevä korrelaatio (*), tilastollisesti merkitsevä korrelaatio (**).

	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	V18	V19	V20	V21	V22
V7	1,00	0,263**	-0,11	0,01	-0,10	0,07	-0,09	0,173*	-0,180*	-0,401**	0,257**	0,257**	0,12	-0,10	-0,222**	0,177*
V8	0,263**	1,00	-0,424**	-0,01	-0,12	-0,03	-0,03	0,10	-0,04	-0,08	0,14	0,213**	0,04	-0,07	-,0176*	0,05
V9	-0,11	-0,424**	1,00	0,06	0,190*	-0,03	0,211**	-0,178*	0,12	0,05	-0,259**	-0,169*	-0,215**	0,01	0,07	0,02
V10	0,01	-0,01	0,06	1,00	0,10	0,276**	-0,183*	0,12	-0,07	-0,09	0,12	-0,08	0,12	-0,14	-0,11	0,179*
V11	-0,10	-0,12	0,190*	0,10	1,00	0,03	0,04	0,08	-0,04	0,09	0,03	-0,11	-0,08	-0,07	0,03	-0,04
V12	0,07	-0,03	-0,03	0,276**	0,03	1,00	0,00	0,10	-0,11	0,04	0,292**	-0,05	0,173*	-0,195**	-0,01	0,12
V13	-0,09	-0,03	0,211**	-0,183*	0,04	0,00	1,00	-0,08	0,10	0,193**	-0,199**	0,01	-0,10	-0,02	0,13	0,04
V14	0,173*	0,10	-0,178*	0,12	0,08	0,10	-0,08	1,00	-0,15	-0,268**	0,13	0,06	0,12	-0,201**	-0,153*	0,268**
V15	-0,180*	-0,04	0,12	-0,07	-0,04	-0,11	0,10	-0,15	1,00	0,158*	-0,406**	-0,173*	-0,461**	0,02	0,204**	-0,02
V16	-0,401**	-0,08	0,05	-0,09	0,09	0,04	0,193**	-0,268**	0,158*	1,00	-0,208**	-0,09	-0,260**	0,12	0,211**	-0,340**
V17	0,257**	0,14	-0,259**	0,12	0,03	0,292**	-0,199**	0,13	-0,406**	-0,208**	1,00	0,09	0,531**	-0,08	-0,204**	0,11
V18	0,257**	0,213**	-0,169*	-0,08	-0,11	-0,05	0,01	0,06	-0,173*	-0,09	0,09	1,00	0,14	0,04	-0,263**	0,05
V19	0,12	0,04	-0,215**	0,12	-0,08	0,173*	-0,10	0,12	-0,461**	-0,260**	0,531**	0,14	1,00	-0,02	-0,203*	0,04
V20	-0,10	-0,07	0,01	-0,14	-0,07	-0,195**	-0,02	-0,201**	0,02	0,12	-0,08	0,04	-0,02	1,00	0,07	-0,245**
V21	-0,222**	-0,176*	0,07	-0,11	0,03	-0,01	0,13	-0,153*	0,204**	0,211**	-0,204**	-0,263**	-0,203**	0,07	1,00	-0,202**
V22	0,177*	0,05	0,02	0,179*	-0,04	0,12	0,04	0,268**	-0,02	-0,340**	0,11	0,05	0,04	-0,245**	-0,202**	1,00

H.2 Osaamistason ja kyselyn väittämien välinen korrelaatio

Taulukko H.2: Osaamistason ja väittämien vastauksien välinen korrelaatio (tilastollisesti melkein merkitsevä korrelaatio (*), tilastollisesti merkitsevä korrelaatio (**).

Väite	7	8	9	10	11	12	13	14
Osaamistaso	-0,047	-0,039	0,037	0,196**	0,233**	0,163	-0,126	0,118
Väite	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
Osaamistaso	0,021	-0,078	-0,043	-0,017	-0,089	-0,196**	-0,153	0,035

I. OSAAMISTASON JA OPPIMISPROFIILIEN VÄITTÄMIEN YHTEYS

Taulukko I.1: Osaamistason ja oppimisprofiilin välinen ristiintaulukointi (TT = tukea tarvitseva, PS = pintasuuntautunut, VO = vertaisoppija, OP= omin päin opiskeleva, O = osaaja).

Osaamistaso		Oppimisprofiili				
		TT	PS	VO	OP	O
Heikko	LKM	4	5	7	6	10
	%	12,5 %	15,6 %	21,9 %	18,8 %	31,3 %
Keskitaso	LKM	1	9	24	15	16
	%	1,5 %	13,8 %	36,9 %	23,1 %	24,6 %
Hyvä	LKM	3	2	9	4	30
	%	6,3 %	4,2 %	18,8 %	8,3 %	62,5 %