TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FARID MEHRABKHANI

STUDY GROUP-TYÖPAJAT JA MATEMAATTISEN MALLINNUKSEN OPETTAMINEN

Diplomityö

Tarkastajat: professorit Seppo Pohjolainen ja Matti Heiliö
Tarkastajat ja aihe hyväksytty Tieto- ja sähkötekniikan tiedekuntaneuvoston kokouksessa 21. toukokuuta 2013

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Sähkötekniikan koulutusohjelma
Mehrabkhani, Farid: Study Group-työpajat ja matemaattisen mallinnuksen opettaminen
Diplomityö, 109 sivua, 0 liitesivua
Toukokuu 2015
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: professorit Seppo Pohjolainen ja Matti Heiliö

Avainsanat: Study Group-työpaja, matemaattinen mallinnus, mallinnus teollisuudessa, teollisuusmatematiikan Study Group-työpajat, matematiikan opetus, matemaattinen osaaminen, matemaattisen mallinnuksen verkostohanke

Jatkuvasti kehittyvässä ja kilpailuhenkisessä nykypäivän teollisuudessa monesti kohdataan ongelmia, joihin ei ole olemassa valmiita ratkaisuja ja eri vaihtoehtojen kokeileminen on käytännössä mahdotonta tai kallista. Tällöin usein joudutaan turvautumaan matemaatikkojen apuun ratkaisujen kehittämisessä. Usein käyttäen matemaattista mallinnusta varmistetaan suhteellisen pienellä kustannuksella paras mahdollinen ratkaisu ongelmaan.

Teollisuuden ongelmien ratkaiseminen auttaa matemaatikoita soveltamaan tietojaan ja mahdollisesti kehittämään uusia matematiikan haaroja. Teollisuus puolestaan tarjoaa työllistymismahdollisuuksia matemaatikoille. Teollisuuden ja akateemisen tutkimuksen välisen suhteen parantamiseksi Oxfordissa perustettiin matematiikan Study Group-työpaja vuonna 1968.

Study Group-työpaja on viikon mittainen tapahtuma, jossa on mukana teollisuuden edustajia ja sovelletusta matematiikasta kiinnostuneita matemaatikoita. Työpajassa esitetään ongelmat, jonka jälkeen matemaatikot pienryhmissä yrittävät ratkaista niitä. Työpajan viimeisenä jokainen pienryhmä esittää ratkaisunsa. Ratkaisu on yleensä matemaattinen malli, jota sovelletaan ongelmaan, ja jota saatetaan myöhemmin jatkokehittää.

Tämän diplomityön alussa esitellään lyhyesti matemaattisen mallinnuksen perusperiaatteita ja muotoja. Tämän jälkeen esitellään Study Group-työpajojen toimintaa ja niiden hyötyä sekä teollisuudelle että akateemiselle tutkimukselle. Tässä työssä tarkastellaan myös matematiikan opetusta ja pohditaan siinä kohdattuja ongelmia, joihin ehdotetaan joitakin ratkaisuvaihtoehtoja. Työn lopussa tarkastellaan miten matemaattista mallinnusta ja Study Group-työpajoista opittuja käytäntöjä voidaan hyödyntää matematiikan opetuksessa. Samalla pohditaan miten opettamalla matemaattista mallinnusta varhaisista vaiheista ja Study Group-tapainen työskentely auttaa ennalta ehkäisemään monia matematiikan opetuksessa kohdattuja ongelmia.

Työssä puhutaan myös matemaattisen mallinnuksen Suomen laajuisesta verkostohankkeesta ja ehdotetaan joitakin ideoita verkostohankkeen matemaattisten mallinnuskurssien kehittämiseksi.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Master's Degree Programme in Electrical Engineering
Mehrabkhani, Farid: Study Groups and the Education of Mathematical Modelling
Master of Science Thesis, 109 pages, 0 Appendix pages
May 2015
Major: Mathematics
Examiners: Professors Seppo Pohjolainen and Matti Heiliö

Keywords: Study Groups, Mathematical Modelling, Modelling in Industry, Mathematics in Industry, Mathematics Education, Mathematical Competence, the Finnish Network of Mathematical Modelling

In today's ever-developing and competitive industry, new problems are faced, to which the solutions are either not explicit or, in some cases, even non-existent. Since a variety of possible solutions exist, it is often impossible or costly for industries to find the best solution to their problems. In these cases, modelling a problem mathematically might be convenient, because it often offers a timely solution at a minimal cost, should the problem in fact be tractable.

Addressing the problems of industry then, helps mathematicians to apply their knowledge and, in some cases, even develop new areas of research in Mathematics. In turn, industry offers employment to mathematicians. An environment emerges from which both parties stand to benefit. To further develop and strengthen this relationship between academia and industry, *Study Groups with Industry* was formed at Oxford in 1968.

Study Groups with Industry is usually a week-long forum to and in which both industrial representatives and applied mathematicians contribute and participate. During the first day of the Study Groups workshop, industrial representatives present their problems, after which mathematicians are divided into smaller groups of their choice to work on a specific problem. During the last day of the workshop, participants regroup as a whole and solutions are presented by the representatives of the smaller groups. The solution is usually a mathematical model to be applied to the problem, which can be later further developed.

This Master of Science thesis begins with a brief introduction to mathematical modelling. It continues to describe how Study Groups around the world function and how they benefit both industry and academic partners. In addition, mathematics education and problems faced in that area are discussed. The research done about Study Groups suggests that these practices can be applied to improve the teaching of not only mathematical modelling but also mathematics education in general. In this work, it becomes clear that by teaching mathematical modelling and applying the practices of the Study Groups, many challenges faced in mathematics education can be addressed efficiently. Moreover, this thesis describes the potential of the Finnish National Network for Mathematical Modelling and suggests some thoughts of its improvement.

ALKUSANAT

Tämä työ on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella. Tämä Diplomityö käsittelee kahta toisiinsa liittyvää aihetta. Toisaalta työn tarkoituksena on lisätä tietoisuutta teollisuusmatematiikan Study Group-työpajoista ja toisaalta tuoda julki ajatuksia, miten matemaattista mallinnusta voidaan hyödyntää opetuksessa ja minkälaista on hyvä matematiikan opetus.

Haluan kiittää työni tarkastajat professorit Seppo Pohjolaista ja Matti Heiliötä. He ovat olleet kärsivällisesti mukana ohjaamassa työtä ja auttamassa ongelmatilanteissa. He myös kannustivat minua saamaan työni loppuun erinäisistä kiireistäni ja vaikeuksistani huolimatta.

Tämän työn loppuun saattamiseen ja opintojen päättämiseen meni odotettua kauemmin. Tästä johtuen haluan kiittää perhettäni, erityisesti äitiäni ja veljeäni, jotka olivat kärsivällisiä ja tukivat minua koko opiskelujeni ajan. Seuraava Ellen Sturgis Hooperin runosta muokattu versio kiteyttää hyvin tunnettani:

"I slept and dreamed that life was beauty
I woke and found that life was duty
Lo! I did my duty
And found that life was beauty!"

Tein tämän työn osittain kiinnostuksesta auttaa kehittämään matematiikan opetusta kaikilla koulutustasoilla. Toivon voivani jatkaa siinä myös tulevaisuudessa.

Tampere, 30. toukokuuta 2015

Farid Mehrabkhani
Kärkikuja 2 C 72
33720 Tampere
+358 408 287 861
farid.mehrabkhani@gmail.com

SISÄLLYS

TERMIT JA LYHENTEET

CAS	Computer Algebra System
CEID	Centre of Computational Engineering and Integrated Design
CFD	Computational fluid dynamics
CIMS	Center for Industrial Mathematics and Statistics
CSC	IT Center for Science
ECCOMAS	European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering
ECMI	European Consortium for Mathematics in Industry
EMS	European Mathematical Society
ESGI	European Study Group with Industry
ESMI	European Society for Molecular Imaging
ICIAM	International Council for Industrial and Applied Mathematics
LUT	Lappeenranta University of Technology
MACSI	Mathematics Applications Consortium for Science and Industry
MM	Mathematical Modelling (Matemaattinen Mallinnus)
MSK-64	Medvedev–Sponheuer–Karnik scale
MPI	Mathematical Problems in Industry
NDP	National Development Plan
RPI	Rensselaer Polytechnic Institute
SFI	Science Foundation Ireland
SGI	Study Group with Industry
SIAM	Society for Industrial and Applied Mathematics
SPbSTU	Saint-Petersburg State Polytechnic University
TKK	Helsinki University of Technology
TUT	Tampere University of Technology
WIP	Worcester Polytechnic Institute

1 JOHDANTO

Alati kehittyvässä ja kilpailuhenkisessä nykypäivän teollisuudessa törmätään ongelmiin, joihin ei ole olemassa valmiita ratkaisuja ja eri vaihtoehtojen kokeileminen on käytännössä mahdotonta tai kallista. Tällöin matemaattisesta mallinnuksesta ja simuloinnissa voi olla hyötyä. Tästä johtuen usein joudutaan turvautumaan matemaatikkojen apuun ongelmien ratkaisujen kehittämisessä. Näin saatetaan löytää suhteellisen halvalla ja nopeassa ajassa paras mahdollinen tai riittävän hyvä ratkaisu ongelmaan.

Teollisuuden ongelmien ratkaiseminen auttaa matemaatikoita kehittämään uusia matematiikan haaroja, menetelmiä tai sovelluksia matematiikan eri osa-alueille. Teollisuus puolestaan tarjoaa työllistymismahdollisuuksia sovelletusta matematiikasta kiinnostuneille matemaatikoille. Tällainen ympäristö, joka on molempia osapuolia hyödyntävä, toimii erinomaisena tilaisuutena kehittämään teollisuuden ja akateemisten tiedemiesten välistä suhdetta. Tämän suhteen ylläpitämiseksi ja molemminpuolisen hyödyn kehittämiseksi Oxfordissa on perustettu matematiikan Study Group-työpaja vuonna 1968.

Matematiikan Study Group-työpaja on foorumi, jossa etsitään ratkaisuja teollisuuden ongelmiin [1]. Siinä toimivat soveltamisesta kiinnostuneet matemaatikot, jotka yhdessä pohtien ja ideoiden yrittävät hakea ratkaisua teollisuuden esittämään ongelmaan. Heidän ratkaisunsa on matemaattinen malli, jota sovelletaan kyseiseen ongelmaan.

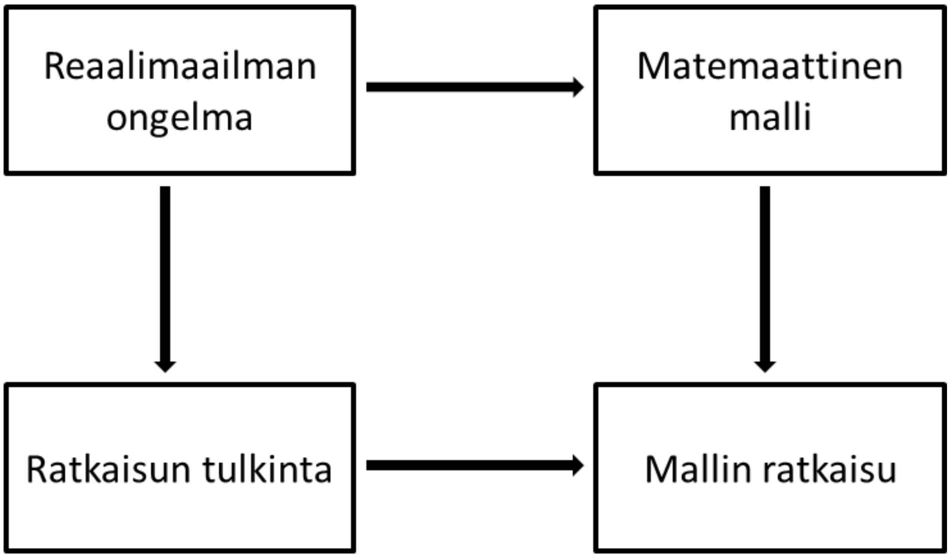
Matemaattinen malli on systeemin kuvaus käyttäen matematiikan kieltä [5]. Reaalimaailman ilmiöille ei yleensä ole yhtä oikeata matemaattista mallia. Ratkaisua voidaan lähestyä monesti monella eri tavalla. Matemaattista mallia rakennettaessa on tärkeänä osana ryhmätyö, koska mallin rakentamisessa tarvitaan yleensä tietoa laajasti ja monesta eri tieteen alasta. Mm. tämän takia Study Group-työpajat toimivat ideaalisena ympäristönä ratkaista teollisuuden ongelmia.

2 MATEMAATTINEN MALLINNUS

Tässä luvussa käsitellään matemaattista mallinnusta ja sen työkaluohjelmistoa. Lisäksi kerrotaan muutamia esimerkkiä matemaattisen mallinnuksen sovelluskohteista ja kuvataan matemaattisen mallinnuksen hyötyjä.

2.1 Mitä on matemaattinen mallinnus

Matemaattinen mallintaminen perustuu matemaattisen mallin käsitteelle. Matemaattinen malli, on malli todellisuuden ongelmasta, joka muunnetaan matematiikan kielelle. Matemaattisen mallin rakentaminen on monivaiheinen prosessi (kts. Kuva 1). [4]



Kuva 1 *Matemaattisen mallinnuksen vaiheet [4].*

Kuten kuvasta 1 nähdään, aluksi yritetään ymmärtää reaalimaailman ongelma. Tämän jälkeen määritellään perusmuuttujat ja suuret. Yleensä matemaattisen mallin löytämiseksi ja ratkaisun helpottamiseksi joudutaan tekemään joitakin taustaoletuksia ja yksinkertaistuksia. [4] Tämän jälkeen formuloidaan matemaattinen malli.

Kun matemaattinen malli on rakennettu, sen avulla voidaan tutkia mallinnettavaa ilmiötä. Matemaattista mallia testataan ja tulosten vastaavuutta reaalimaailman mittauksiin tai havaintoihin tarkastellaan. Monessa mallinnusprosessissa käytetään nykyään tietokoneita. Muuttujat syötetään tietokoneelle ja tuloksia analysoidaan. Lähtöarvoja, muuttujia ja parametreja voidaan muunnella vastaamaan muuttuneita olosuhteita. Tätä vaihetta kutsutaan simuloinniksi. Simuloinnin antamia tuloksia verrataan reaalimaailman mittaustuloksiin tai havaintoihin. Tämän jälkeen voidaan tehdä mallin validointi. Siinä arvioidaan kuinka hyvin matemaattinen malli vastaa alkuperäistä ilmiötä ja että miten simuloinnin testitulokset vastaavat mittaustuloksia. Tässä vaiheessa tarkastellaan laskentamenetelmien aiheuttamia virheitä. Mikäli malli ei ole riittävän tarkka, niin sitä tarkennetaan lisäämällä siihen siitä puuttuvia lainalaisuuksia ja niitä kuvaavia muuttujia iteratiivisella tavalla. [4]

Näiden vaiheiden jälkeen, kun saadaan tulokset vastaamaan mallinnettavaa ilmiötä, siirrytään niiden tulkintaan. Viimeisenä malli ja sen antamat tulokset hyväksytään. [4]

Edellä mainitun perusteella matemaattinen mallinnus prosessi voidaan siis jakaa kuuteen vaiheeseen:

a) Ongelman (kutakuinkin) selkeä muotoilu, joka ohjaa havaittuun ja mallinnettavan todellisuuden ominaisuuksien tutkimiseen

b) Saadusta informaatiosta oikeiden olioiden ja relaatioiden valitseminen ja niiden idealisoiminen (yksinkertaistaminen) mahdollistaen matemaattisen esityksen

c) Olioiden ja relaatioiden alkuperäisen esitystavan muuntaminen matematiikan kielelle

d) Käyttäen matemaattisia metodeja matemaattisten tulosten ja päättelyjen aikaansaaminen

e) Näiden matemaattisten tulosten tulkinta reaalimaailman ilmiönä

f) Mallin oikeellisuuden tarkistaminen verraten tuloksia koetuloksiin tai tiettyyn teoriaan [87]

2.2 Matemaattisen mallinnuksen muotoja

Ennen kuin voidaan esitellä eri matemaattisia malleja, on olennaista määritellä systeemin käsite matemaattisessa mallinnuksessa. Systeemillä tarkoitetaan joukkoa toisiinsa vaikuttavia komponentteja (olioita, alkioita) ja niihin liitettyjä ominaisuuksia (numeerisia arvoja). Systeemit ovat yleensä dynaamisia, eli niiden tila muuttuu ajan suhteen. Systeemin tilalla tarkoitetaan sen arvoa määrättynä hetkenä tai tietyssä kohdassa. Mikäli dynaamisen systeemin tila ei muutu ajan suhteen, niin systeemi on saavuttanut nk. tasapainotilansa. Kun systeemi on tasapainotilassa sen komponenttien arvot säilyvät ajan suhteen vakioina, eli sen derivaatta tasapainopisteessä on nolla. [4]

Matemaattiset mallit voidaan jaotella eri kategorioihin. Eräs näistä on jako lineaarisiin ja epälineaarisiin malleihin. Matemaattinen malli rakennetaan yleensä joukosta muuttujia. Muuttujiin sitten operoidaan joillakin operaattoreilla. Esimerkki näistä operaattoreista ovat algebralliset operaattorit, funktiot tai differentiaalioperaattorit. Mikäli operaattorit matemaattisessa mallissa ovat lineaarisia, niin malli kategorisoidaan lineaariseksi malliksi, muuten mallia pidetään epälineaarisena. [6]

Toinen kategoria on jako deterministisiin ja stokastisiin malleihin. Deterministisessä mallissa jokainen muuttujajoukko on yksikäsitteisesti määritelty mallin parametrien ja muuttujien edellisten arvojen perusteella. Täten deterministinen malli tuottaa aina saman tuloksen samoilla alkuehdoilla. Stokastisessa mallissa sen sijaan on läsnä satunnaisuutta. Siinä muuttujien tilat eivät ole määriteltyjä yksikäsitteisillä arvoilla vaan todennäköisyysjakaumalla. [6]

Staattisiin ja dynaamisiin malleihin jako on kolmas kategoria. Staattinen malli ei ota huomioon ajan kulkua, eli systeemin tila ei muutu ajan suhteen. Dynaaminen malli sen sijaan ottaa huomioon ajan kulun ja systeemin tila muuttuu ajan funktiona. [6]

Neljäs kategoria on diskreetti ja jatkuva malli. Diskreetissä mallissa esineet ja asiat käsitellään diskreetteinä, eli yksittäisenä ja irrallisena. Mallintaessa yleensä käsitellään systeemin tilan muutosta ajan funktiona. Diskreetissä mallissa systeemin tila muuttuu äkillisesti ajan suhteen ja vain määrättyinä aikaväleillä. Toisin sanoen systeemin tila ”hypähtää” toisesta arvosta toiseen tietyin väliajoin. Esimerkiksi pienen populaation lisääntyminen voidaan mallintaa käyttäen diskreettiä mallia, koska siinä populaation tila muuttuu vain tietyin väliajoin (esim. joka kevät). Jatkuvassa mallissa sen sijaan systeemin tila muuttuu ns. jatkuvasti, eli muuttujat saavat eri arvon infinidesimaalisen pieninä ajan väleinä. Esimerkiksi jatkuvaa mallia voidaan hyödyntää mallintamaan sokerin ja etanolin konsentraatioiden muutokset viinin käymisprosessissa. [6]

Viides kategoria on deduktiivinen ja induktiivinen malli. Deduktiivinen malli on looginen järjestelmä, joka perustuu johonkin teoriaan. Induktiivinen malli sen sijan muodostuu empiiristen löytöjen perusteella ja niiden yleistyksellä. Kelluva malli on sellainen joka ei nojaa teoriaan eikä havaintoihin vaan se on ainoastaan toivomus odotetusta rakenteesta. Esimerkkinä tästä on kaaosteoria (aiheeseen voi tutustua linkistä: http://fi.wikipedia.org/wiki/Kaaosteoria). [6]

Edellä mainittujen kategorioiden lisäksi matemaattiset mallinnusongelmat yleensä kategorisoidaan kahteen eri ryhmään. Nämä ovat mustan laatikon ja valkoisen laatikon mallit. Jaon perusteena on saatavilla olevan etukäteistietojen määrä systeemistä. Musta laatikko on systeemi, josta ei ole saatavilla etukäteistietoa. Valkoisessa laatikossa tiedetään kaikki tarvittava tieto systeemin tiloista. Käytännössä systeemit ovat jotakin mustan laatikon ja valkoisen laatikon väliltä. Täten lopullinen päätös mallin valinnasta on mallintajalla. [6]

2.3 Matemaattisen mallinnuksen työkaluohjelmistot

Tässä osiossa käsitellään matemaattisen mallinnuksen työkaluohjelmistoja. Aluksi käsitellään millä ohjelmilla voidaan matemaattinen teksti kirjoittaa. Tämän jälkeen tarkastellaan, minkälaisia ohjelmistoja käytetään matemaattisen mallinnuksen työkaluna suorittamaan symbolista ja numeerista laskentaa.

2.3.1 Matemaattisen dokumentin luominen

Matemaattinen teksti usein sisältää kaavoja. Tästä johtuen tarvitaan sopivia ohjelmia, joilla voidaan tuottaa matemaattinen teksti. Tällaisia ohjelmia käytetään ammattikäytössä, kirjojen, artikkeleiden ja matemaattisten dokumenttien kuten raporttien ja esitysten tuottamisessa. Myös opiskelijat tarvitsevat vastaavia ohjelmia raporttien, harjoituksien ja opinnäytetöiden kirjoittamisessa.

LaTeX

1970-luvulla Donald E. Knuth alkoi tutkia siihen aikaan uusien digitaalisten laitteiden tarjoamia mahdollisuuksia painojäljen parantamiseen. Vuonna 1977 tämä koodasi TEX-ohjelman, joka muutti dramaattisesti matemaattisen tekstin tuottamisen ja levittämisen prosessia. Vuonna 1982 Leslie Lamport kehitti LaTeX (lausutaan ”lateh”) nimisen ohjelman. LaTeX on makropakkaus, joka perustuu TeX-järjestelmään. LaTeX on ladontajärjestelmä, joka soveltuu erityisesti matemaattisen tekstin latomiseen. LaTeXia yllä pitää nykyään LaTeX Project Public. [54] & [55]

Kirjoittaessa matemaattisia julkaisuja perinteisillä tekstinkäsittelyohjelmilla, paljon aikaa ja energiaa menee tekstin muotoiluun ja ulkoasun viimeistelyyn. Lisäksi näin tuotetut dokumentit eroavat ulkoasultaan toisistaan. LaTeXin tarkoituksena on yhtenäistää julkaisujen ulkoasua ja siirtää painopisteen ulkoasun muotoilemisesta sisällön tuottamiseen. Toisin sanoen laadittaessa dokumentteja LaTeXilla, kirjoittaja voi keskittyä sisällön tuottamiseen, koska ohjelma pitää pääosin huolen ulkoasusta. Esimerkiksi LaTeX huolehtii automaattisesti mm. rivin- ja sivunjaosta, kuvien asettelusta, dokumentin sisäisistä viittauksista ja sisällysluettelosta. LaTexiin on saatavilla monia dokumenttityyppejä, joiden avulla voidaan varmistaa haluttu ulkoasu. [54] & [55]

Dokumentin tuottaminen LaTeXilla koostuu kahdesta vaiheesta: kuvauskielisen dokumentin kirjoittamisesta ja sen kääntämisestä. Kääntämisen jälkeen LaTeX tuottaa DVI-tiedoston, jonka voi muuttaa edelleen PDF-, HTML- tai PostScript-tiedostoksi. LaTeX on nykyään laajasti käytössä luonnontieteiden julkaisuissa. Monet luonnontieteelliset julkaisusarjat jopa edellyttävät niissä julkaistavien tieteellisten artikkelien olevan kirjoitettu LaTeXilla. LaTeX on ilmainen ohjelma ja sen uusin versio on LaTeX2e. [54] & [55]

Microsoft Word

Vuonna 1983 julkaistu Microsoft Word (alkuvaiheessa käytettiin nimitystä Multi-Tool) on kenties suosituin tekstinkäsittelyohjelma. [56] Nykyään Wordissa on mahdollisuus käyttää LaTeX-kommentteja, joka helpottaa huomattavasti matemaattisen tekstin tuottamista. Tämän ominaisuuden ansiosta Word on kasvattavammassa suosiotaan myös matemaattisten julkaisujen suhteen. Varsinkin oppilaskäytössä Word on käyttäjäystävällisempi (kuin esim. LaTeX) ja soveltuu erinomaisesti raporttien kirjoittamiseen, joissa ei ole paljon matemaattisia kaavoja. Word on maksullinen ohjelma, jonka uusin versio on Word 2013.

2.3.2 Matemaattiset laskentaohjelmistot

Usein matemaattiset mallit ovat niin monimutkaisia, että niihin joko ei saada algebrallista ratkaisua manuaalisesti (kynällä ja paperilla) tai prosessiin menee paljon aikaa. Tästä johtuen, kuten kappaleessa 2.1 mainittiin, mallinnusprosessissa käytetään yleensä apuna tietokoneita. Tietokoneella tiettyjä ohjelmistoja käyttäen simuloidaan rakennettu malli. Simuloinnin lisäksi tietokoneohjelmia käytetään suorittamaan symbolista ja numeerista laskentaa. Prosessit, jossa käytetään tietokonetta laskemaan tieteellisiä ongelmia, kutsutaan laskennalliseksi tieteeksi [48].

Matemaattisessa mallinnuksessa, joka on osa laskennallista tiedettä, käytetään joko imperatiivisia ohjelmointikieliä tai tiettyjä tarkoituksia varten rakennettuja ohjelmia. Imperatiivisissa ohjelmointikielissä ohjelmoija kertoo käsky kerrallaan mitä hän haluaa ohjelman tekevän. Ensimmäinen ohjelmointikieli, Fortran (50-luku), on imperatiivinen kieli. Muita imperatiivisia ohjelmointikieliä ovat C ja osittain C++. C-kieli kehitettiin Unix-ympäristössä tapahtuvaa ohjelmointia varten. Nykyään C-kieli on eniten eri ympäristöihin levinnyt ohjelmointikieli. C++-kieli on kehitetty versio C-kielestä, jossa on mahdollistettu olio- ja geneerinen ohjelmointi. Olio-ohjelmointikielet perustuvat useimmiten imperatiivisiin kieliin kuten jo esitelty C++ tai Java ja Python. [39]

Edellä mainittuja tai muita ohjelmointikieliä käyttämällä voidaan ohjelmoida matemaattiseen mallinnukseen soveltuvia tietokoneohjelmia. Näistä ohjelmista käytetään englanniksi nimitystä computer algebra system (CAS) ja suomeksi symbolinen tai numeerinen laskentaohjelmisto. CAS-ohjelmat ovat käyttäjäystävällisiä, pystyvät tulkitsemaan matemaattisia lauseita lähes samanlaisena kuin paperille kirjoittaessa ja kykenevät tuottamaan symbolista vastausta. Esimerkiksi CAS-ohjelma ymmärtää binomikaavan

$(x-10)^{100}$ lähes sellaisenaan ja pystyy laskemaan sen auki symbolisesti, jonka laskemiseen manuaalisesti menisi paljon aikaa ja laskenta olisi virheille altis. [40]

Tällä hetkellä matemaattisessa mallinnuksessa yleisessä käytössä olevia CAS-ohjelmia ovat mm. MATLAB, Matematica, Maple, MathCad, R [41]. Edellä mainittuja ohjelmia on vaikea laittaa yleiseen paremmuusjärjestykseen, koska vaikka ne ovat yleistarkoitukseen soveltuvia, niiden tehokkuus saattaa vaihdella käyttötarkoituksen mukaan. Tämä johtuu ohjelmiston rakennusfilosofiasta. Toisin sanoen ohjelmistot ohjelmoidaan tietyn filosofian mukaan ja tiettyjä tarkoituksia silmällä pitäen. Esimerkiksi tilastotieteelliseen laskentaan R-ohjelmisto sopii erinomaisesti, kun taas matriisilaskentaan MATLAB on erinomainen vaihtoehto. Eri CAS-ohjelmien käyttötarkoituksien ja vahvuuksien selkeyttämiseksi alla on lyhyt kuvaus jokaisesta edellä mainitusta CAS-ohjelmasta.

MATLAB

MATLAB, joka tulee sanoista **Mat**rix **Lab**oratory (matriisi kirjasto), on MathWorksin kehittämä tieteelliseen laskentaan soveltuva korkean tason ohjelmointikieli ja interaktiivinen ympäristö. MATLAB sisältää työkalut matriisien käsittelyyn, funktioiden ja datan visualisointiin, algoritmien toteuttamiseen ja käyttöliittymien luomiseen. Lisäksi MATLABin hyvänä ominaisuutena on vuorovaikutuksen sallittavuus muilla ohjelmointikielillä kuten C, C++, Java ja Python. [42]

Historiallisesti MATLAB oli tarkoitettu numeerista laskentaa varten. Vuonna 2008 MathWorks osti MuPADin symbolisen laskentaohjelmiston. Tämän uuden lisäosan ansiosta MATLABilla voi nykyään suorittaa symbolista laskentaa. MATLAB sisältää myös laajennuksen nimeltään Simulink, joka mahdollistaa mallinnuksen, analysoinnin ja dynaamisten järjestelmien simuloinnin. Simulinkissä on graafinen käyttöliittymä, jonka avulla malli voidaan luoda käyttämällä lohkokaavioita, jotka koostuvat lohkoista ja signaaliviivoista. Simulinkin lohkokaaviot voivat sisältää erilaisia matemaattisia operaatioita, MATLAB-koodia ja sisään- ja ulostuloja. [42]

MATLAB sopii sekä ammatti- että opetuskäyttöön. Ammattikäytössä MATLABia hyödynnetään mm. signaalin-, kuvan- ja videonkäsittelyssä, tietoliikennetekniikassa, automaatiotekniikassa, ohjausjärjestelmissä ja laskennallisessa taloudessa. [42] Opetuskäytössä, kuten esimerkiksi Tampereen teknillisessä yliopistossa, MATLABia voidaan käyttää opetuksen tukena. Esimerkiksi matematiikan ja fysiikan tunnilla MATLABilla voidaan laskea vaikeat ja mekaaniset laskut ja visualisoida kuvaajia. Visualisointi auttaa opiskelijoita näkemään konkreettisesti funktioiden ja mallien käyttämisen ja sitä kautta sisäistämään asiaa paremmin.

Tällä hetkellä käytössä oleva MATLABin uusin versio on R2014b, joka mm. sisältää kehitettyjä ja uusia työkaluja Big Datan käsittelyyn. Seuraava versio R2015a tulee keväällä 2015. Ammattikäyttöön MATLAB on kallis, mutta opetukseen, opiskeluun tai kotikäyttöön MATLABin saa suhteellisen edullisesti. Kuitenkin nykyään on tarjolla myös MATLABin tapaisia ilmaisohjelmia (nk. vapaat ohjelmistot), joiden koodi on lähes sellaisenaan yhteensopiva MATLABin kanssa. Yhtenä esimerkkinä niistä on GNU Octave. Toisena esimerkkinä on Scilab, joka on myös avoimen lähdekoodin ohjelma, eli kuka tahansa voi muokata sitä omien tarpeidensa mukaan. [42]

Mathematica ja Wolfram|Alpha

Mathematica on symbolinen ja numeerinen laskentaohjelmisto, joka sopii mm. matriisilaskentaan, 2- ja 3D datan visualisointiin, differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen, kuvankäsittelyyn, datan ja tekstin louhintaan. Mathematica tarjoaa myös työkalut, joilla se voidaan yhdistää DLL, SQL, Java, NET, C++, Fortran, CUDA, OpenCL ja http-pohjaisiin systeemeihin. Mathematica on Stephen Wolframin vuonna 1987 perustaman Wolfram Research yhtiön lippulaivatuote. Mathematica on maksullinen ohjelma, jonka eri versioiden hinnat ovat samoissa kategorioissa kuin MATLABin. Mathematican uusin versio on Mathematica 10. [43]

Mathematicalla pystyy tekemään lähes kaikki asiat mitä MATLABillakin. Mathematican ja MATLABin yksi selvistä eroista on se, että Mathematica on tarkoitettu enemmän symboliseen laskentaan kun taas MATLAB sopii paremmin numeeriseen laskentaan. Toisena erona voi mainita Mathematican pilvipalvelun, eli Mathematica Online. Tämä mahdollistaa ohjelman käytön verkossa asentamatta ohjelmaa käyttäjän koneelle.

Wolfram Research yhtiö kehitti vuonna 2009 Mathematicaan perustuvan Wolfram|Alphan, joka on verkossa oleva haku- ja vastauskonepalvelu. Wolfram|Alpha pystyy suorittamaan symbolista ja numeerista laskentaa sekä piirtämään kuvaajia annetuista funktioista. Ohjelmalle voi esittää yksittäisten hakusanojen lisäksi myös suoria kysymyslauseita, joihin se etsii vastausta tietokannastaan. Wolfram|Alpha antaa vastauksen tekstin lisäksi myös mm. numeroina, taulukkoina ja kuvina. [43]

Edellä mainittu verkkopalvelu mahdollistaa tieteellisen laskennan kaikista koneista, jossa on internet-yhteys ilman, että käyttäjän tarvitsee ladata mitään. Nykyään Wolfram|Alphan saa myös mobiilisovelluksena. Tämä mahdollistaa Wolfram|Alphan helpon käytön mm. opetuskäytössä. Esimerkiksi koulumatematiikan tunnilla kaikki oppilaat voivat laskea, visualisoida tai mallintaa käyttämällä omia puhelimiaan. Wolfram|Alphan perusversio on täysin ilmainen. Lisäominaisuuksia varten tarjolla on maksullinen pro-versio.

Maple

Maple on Maplesoftin kehittämä CAS-ohjelma. Mathematican tavoin se sopii ensisijaisesti symboliseen laskentaan, mutta sillä voi suorittaa myös numeerista laskentaa. Maple ja Mathematica keskittyvät käyttäjäystävällisyyteen. Näin ollen aloittelijoille ja kouluopetukseen Maple ja Mathematica soveltuvat hyvin. Ammattikäyttöön käyttäjä voi valita käyttötarkoituksensa mukaan. [44]

Myös Maple tarjoaa käyttöliittymän, jolla voidaan ymmärtää muilla kielillä, kuten C, C++, Fortran, Java, MATLAB, Visual Basic ja Excel kirjoitettua koodia. Maplen uusin versio on Maple 18. Maple on maksullinen ohjelmisto, jonka eri versioiden hintatasot ovat verrattavissa MATLABiin ja Mathematicaan. [44]

Maplen, Mathematican ja MATLABin tapaisia ilmaisohjelmia on paljon. Yhtenä esimerkkinä voidaan mainita Sage, joka on vapaa ja avoimen lähdekoodin ohjelma. Sage:n ensimmäinen versio julkaistiin 2005 sillä ajatuksella, että se tarjoaisi vaihtoehtoisen avoimen lähdekoodin ohjelman mm. ohjelmille kuten Maple, Mathematica ja MATLAB. Juuri tähän perustuu Sage:n vahvuus, sillä se omaa kaikki ominaisuudet MATLABista, Mathematicasta ja Maplesta. Lisäksi Sage ymmärtää Python kieltä, eli Sage:en voidaan suoraan koodata python kielen syntaksilla. Sage:en uusin versio on Sage 6.4.1. [45]

MathCad

MathCad-laskentaohjelmisto soveltuu mallinnuksen lisäksi myös insinööritieteisiin kuten mm. mekaniikkaan, sähkötekniikkaan, elektroniikkaan ja rakennustekniikkaan. MathCad oli Mathsoftin tuote, jonka alkuperäinen kehittäjä oli MITin palveluksessa oleva Allen Razdow. Tällä hetkellä MathCad on Parametric Technology Corporation (PTC) yhtiön omistama. Vaikka MathCad on ensisijaisesti numeeriseen laskentaan soveltuva, sillä voidaan suorittaa myös symbolista laskentaa. [46]

MathCad on yksi varhaisimmista CAS-ohjelmista. MathCad pyrkii käyttäjäystävällisyyteen ja samanlaiseen matemaattisten lausekkeiden esitystapaan kuin paperillekin kirjoitettaessa, tyyli, jonka myöhemmin Maple ja Mathematica omaksuivat. MathCadin käyttö perustuu laskenta-arkkeihin. Laskenta-arkeissa voidaan yhdistellä matemaattisia lausekkeita, tekstiä, kuvia ja taulukoita. Lopputuloksena saadaan dokumentti, joka on sellaisenaan ymmärrettävissä muiden taholta. MathCadia käytetäänkin, joskus matemaattisten dokumenttien luomiseen, koska se on osoittautunut paljon nopeammaksi helpommaksi kuin esimerkiksi Microsoft Wordilla tai LaTeXilla tehdessä. MathCadilla voidaan tehdä tilastollista datan analyysiä, kuvankäsittelyä ja signaalinmuokkausta. Myös differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen, visualisointi, data tuonti ja vienti muihin ohjelmiin, kuten Microsoft Excel ja MathML-kieleen onnistuu. MathCadin integrointi muiden suunnitteluohjelmistojen kanssa kuten CAD ja FEM-laskenta on myös mahdollista. [46]

MathCadin vahvuus insinöörimallinnuksessa on sen kyky ymmärtää mittayksikköjä. Ohjelma pystyy muuntaman yksiköt kätevästi ja estää väärien ja yhteensopimattomien yksiköiden käytön. Esimerkiksi ohjelma ei anna laskea yhteen metrejä ja sekunteja. [46]

R

R on tilastolliseen laskentaan ja grafiikan tuottamiseen tarkoitettu vapaa ohjelmistoympäristö. Se muistuttaa S-ohjelmointikieltä, joka on kenties tilastollisen tutkimuksen yleisin ohjelmointikieli. Tästä johtuen R on hyvin suosittu ohjelmisto tilastotieteellisessä tutkimuksessa ja tiedonlouhinnassa. Vaikka R-ohjelmisto on tarkoitettu tilastollisiin laskentoihin, niin se sopii (lähes yhtä tehokkaasti kuin MATLAB) matriisilaskentaan. R:n Uusin versio on R 3.2.0. [47]

Magma

Käyttäjäystävällisten ja rutiinilaskentaan soveltuvien CAS-ohjelmien lisäksi on olemassa myös ohjelmia, jotka keskittyvät lähinnä vaikeiden ja puhtaan matematiikan ongelmien ratkaisemiseen. Magma on hyvä esimerkki ohjelmista, jotka soveltuvat puhtaan matematiikan tuottamiseen. Magma on CAS-ohjelma, joka on suunniteltu ratkaisemaan algebran, lukuteorian, geometrian ja kombinatoriikan ongelmia. Magma kehitettiin alun perin Sydneyn yliopistolla ei-kaupallisella periaatteella. Magman uusin versio on Magma V2.20–10 ja sen hintaluokka pyörii samoissa kategorioissa kuin edellä esiteltyjen. [51]

Yleistarkoituksiin soveltuvien ohjelmistojen lisäksi jotkut suuret yritykset tai erikoistuneet akateemiset tutkijat käyttävät hyvin spesifistä ohjelmistoa. Esimerkkinä tästä voidaan mainita GUHA LISp-Miner, jota käytetään erityisesti tiedonlouhintaan (data mining). Tehokkuuden, kilpailukyvyn ja erityistarpeiden takaamiseksi jotkut yritykset saattavat kehittää jopa omija ohjelmistoja, joka on tarkoitettu vain yrityksen sisäiseen käyttöön.

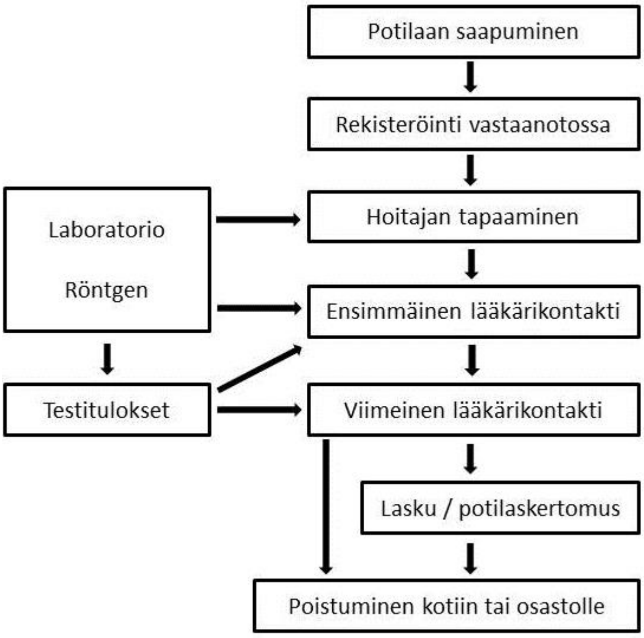
Edellä mainitut CAS-ohjelmat soveltuvat hyvin moninaisiin ongelmien ratkaisuun ja mallinnukseen. Kuitenkin ammattikäytössä välillä törmätään ongelmiin, joihin CAS-ohjelma ei tarjoa valmista ratkaisumetodia tai vastauksen tuottamiseen kuuluu paljon aikaa. Tämä yleensä johtuu siitä, kun yleisiin tarkoituksiin valmiiksi ohjelmoidut CAS-ohjelman funktiot tai algoritmit eivät sovellu sellaisenaan tiettyjen ongelmien ratkaisuun. Muita syitä voi olla datan määrän suuruus tai se, että ohjelman funktioiden algoritmeja ei ole optimoitu. Tällöin yleensä turvaudutaan aikaisemmin mainittuihin imperatiivisiin tai olio-ohjelmointikieliin, kuten C, C++, Fortran ja Python. Kuitenkaan pyörää ei kannata keksiä uudestaan, eli ohjelmoidaan se mitä tarvitaan optimoida jollain ohjelmointikielellä ja muu tehtävä ratkaistaan käyttäen CAS-ohjelmaa. Tästä johtuen kaikki laadukkaat CAS-ohjelmat tukevat, joko suoraan tai käyttöliittymän avulla muita ohjelmointikieliä kuten C, C++, Fortran ja Python.

2.4 Esimerkki matemaattisesta mallinnuksesta

Tässä osiossa käsitellään esimerkin omaisesti neljää eri alaa, joissa voidaan hyödyntää matemaattista mallinnusta. Tarkoituksena on demonstroida miten matematiikan mallinnusta voidaan hyödyntää eri ympäristöissä.

2.4.1 Sairaala

Sairaalaa voidaan ajatella esimerkkinä systeemistä. Siinä potilaat, lääkärit ja hoitajat ovat sen komponentteja. Potilaiden ominaisuutena voi olla saapumissyy ja henkilökunnan ominaisuutena osaamisala. Sairaalassa on myös erilaisia laitteistoja, jotka ovat sairaalan resursseja. Kuvassa 2 on havainnollistettu sairaalan poliklinikan toiminnan prosessikaavio.



Kuva 2 *Sairaalan poliklinikan toiminnan prosessikaavio [4].*

Tässä sairaalaesimerkissä matemaattista mallinnusta voidaan hyödyntää mm. jonotusaikojen optimoimisessa, hoitojen tehokkuusanalyysissä tai sairaalabakteerien leviämisessä. Esimerkiksi analysoimalla muutaman vuoden tietoja potilaiden määrästä eri päivän- tai vuoden aikoina voidaan rakentaa matemaattinen malli, jonka avulla potilaiden jonotusaikoja voidaan optimoida. Tässä tapauksessa optimointi voisi tarkoittaa jonotusaikojen minimointia sairaalakustannustaksia silmällä pitäen. Toisin sanoen, voidaan vastaan ottavien lääkäreiden työvuoroja muuttaa siten, että heitä on enemmän silloin, kuin arvellaan potilaita tulevan enemmän ja toisaalta vähentää silloin, kuin arvellaan potilaita saapuvan vähemmän.

2.4.2 Biologinen vedenpuhdistamo

Biologinen vedenpuhdistus on veden puhdistamista käyttäen biokemiallisia prosesseja ja biologisia organismeja, kuten bakteereita. Tällä menetelmällä vedestä voidaan poistaa tavanomaisten ravinteiden (typpi ja hiili) lisäksi monia erittäin myrkyllisiä kemikaaleja, kuten hiilivetyliuottimia ja isosyanaattia. [71]

Biologinen vedenpuhdistamo on yksi jätevedenpuhdistuksen menetelmä. Se on järjestelmä, jossa tietyn alueen tai itsenäisen yksikön (esim. laivan) jätevedet kootaan yhteen pisteeseen. Biologisessa puhdistusprosessissa ensimmäisenä jätevedestä suodatetaan pois kiinteät yksittäiset kappaleet (esim. viemäriin joutunut metallipala). Sitten liete johdetaan altaaseen, jossa on tarkoitusta varten kasvatettu bakteerikanta.

Bakteerit elävät likaveden ravinteilla. Itse asiassa bioreaktorin koko idea perustuu tähän. Altaassa on sekoitus eri bakteeripopulaatioita, jotka voivat hajottaa aineenvaihdunnassaan (metaboloida) haitallisia aineita jätevedestä [18]. Kun ravinteet on kulutettu, puhdas vesi poistuu altaasta. Tämä tapahtuu sellaisen suodattimen läpi, jonka läpi bakteerit eivät pääse. Lopuksi vesi kulkee vielä erillisen selkeytysprosessin läpi, jonka jälkeen sitä voidaan pumpata joko poistoviemäriin, imeyttää maahan tai (esim. laivassa) laskea mereen. [71]

Prosessiteollisuus, kuten mm. paperiteollisuus tuottaa suuria määriä jätevettä, joka tulisi puhdistaa ennen takaisinpääsyä mereen, järven tai jokeen. Biologinen käsittely on yksi vaihe tästä prosessista. Taloudellisista syistä biologisen käsittelyn tärkeys on koko ajan kasvamassa. [18]

Mikrobipopulaatioilla on monimutkaisia käytösmalleja kasvussaan, kuten ruokinta, tottumukset, elinkaari jne. Mikrobien käytökseen vaikuttaa mm. fosfori, happi ja lämpötila. Tällaisen orgaanisen prosessin kontrollointi on mielenkiintoinen haaste, johon vuosittaisella keskilämpötilalla on osuutensa. [18]

Matemaattista mallinnusta tässä prosessissa voidaan käyttää rakentamaan malli, joka simuloi bioreaktorin toimintaa. Tällöin voidaan bakteeripopulaation suuruus eri aikoina simuloida. Tämä antaa tärkeää tietoa, sillä mikäli populaation määrä laskee tai eri populaatioiden suhde vaihtuu, jätevettä ei saada puhdistettua tarpeeksi. Etukäteistieto auttaa meitä suunnittelemaan olosuhteita tai kasvattamaan populaation määrää, jolloin voidaan varmistaa riittävä populaation suuruus ja oikea suhde läpi vuoden.

2.4.3 Sähköjakelun optimointi

Sähköverkon suunnittelussa ja jakelussa tarvitaan paljon matemaattista mallinnusta ja optimointia. Esimerkiksi ihmisten käyttäytymistä ja sähkönkulutusta eri vuoden ja vuorokauden aikoina joudutaan mallintamaan, jotta voidaan varautua tuottamaan tarpeellinen määrä sähköä. [72]

Nykyään tietty osuus kuluttajista tuottaa itse osan sähköstä käyttäen mm. aurinkopaneelia, tuulivoimaa tai lämpöpumppuja. Tämä poikkeaa perinteisestä tavasta, jolloin sähköä tuotettiin keskitetysti sähkönjakelukeskuksesta. Tässä uudessa ja yhä yleistymässä olevassa järjestelmässä, jossa tuotetaan hajautetusti sähköä, voidaan hyödyntää matemaattista mallinnusta. Esimerkiksi voidaan laskea kuinka monta kutakin (aurinkopaneelia, tuuliturbiinia tai lämpöpumppua) hajautettua sähköntuottolaitetta voidaan kytkeä yleiseen sähköverkkoon ilman, että linjojen ja sähkökomponenttien maksimikuorman kestävyys ylittyy. [72] Ilman matemaattista mallinnusta tehtävä olisi lähes mahdoton.

2.4.4 Junan telin jousitusjärjestelmä

Teli muodostuu yksinkertaisuudessaan kahdesta tai useammasta akselista, jotka ovat liitetty yhteen. Junan teli kiinnitetään jousitusjärjestelmineen vaunujen alle. Jousitusjärjestelmän päätarkoituksena on mm. lisätä junan kuorman kantavuutta, tasoittaa junan liikettä mutkaisella rataosuudella, vähentää tärinää lisäten matkustajamukavuutta ja vaimentaa radan epäsileydestä johtuvia iskuja. [49]

Junan telijärjestelmä muodostuu mm. pyöristä, akselistosta, jarruista, jousituksesta ja rungosta. Koska telijärjestelmässä on monta liikkuvaa osaa ja se koostuu monesta komponentista, niin se hyvä esimerkki ns. monikappaledynamiikasta (multibody dynamics). Monikappaledynamiikka on useiden mekaanisten komponenttien muodostamaa dynaaminen systeemi. Tällaisten systeemien mallinnuksen haasteena on yksittäisten osien yhteen kytkeminen ja näin saadun mutkikkaan kokonaisuuden matemaattinen mallintaminen. [50]

Yksinkertainen perustapaus telijärjestelmän kohdalla on vaimennettu massa-jousi-värähtelijä (mass-spring-damper-system). Fyysikoille ja alan asiantuntijoille tämä on fysikaalisesti tuttu ja sille on olemassa valmis matemaattinen malli. Mutkikkaan multibody-systeemin mallinnus (auton jousitus, junan telijärjestelmä, lentokoneen laskuteline,…) on siten tavallaan tunnetun matemaattisen mallin soveltamista mutkikkaassa tilanteessa.

Yksittäisen multibody-komponentin mallinnus on raskasta aikaa vievää rutiinilaskentaa. Vastaavanlaisia tilanteita kohdataan teollisuuden ongelmanratkaisussa, jossa haaste ei ole aina kovin kiinnostava akateemisesti tai matematiikan teorian kannalta, mutta sen merkitys teollisuuden tuotekehityksessä on ymmärrettävästi hyvin suuri. [50]

Mikäli jousitusjärjestelmään tuotekehityksessä esille tulisi jokin uusi innovatiivinen ja rakenteellinen idea (voisi olla jokin epälineaarinen jousi/vaimennus ratkaisu, elastinen komponentti, komposiittimateriaali, mikroprosessoriohjaus), niin tällöin voisi olla tarve uudenlaisen mallin rakentamiselle ja tämä voisi olla kiinnostava matemaatikoiden kannalta. [50]

2.5 Matemaattisen mallinnuksen tärkeys

Matemaattista mallinnusta sovelletaan moneen eri alaan, esimerkiksi tuotteiden suunnitteluun, tuotannon ohjaukseen ja kustannusten optimointiin. Myös luonnon- ja insinööritieteissä käytetään matemaattista mallinnusta. Viime aikoina matemaattista mallinnusta on alettu käyttää myös humanistisissa ja sosiaalitieteissä kuten psykologiassa. [4]

Monella eri tieteen alalla tutkimuksen laatu riippuu siitä kuinka hyvin kehitetty teoreettis-matemaattinen malli on sopusoinnussa toistettavien mittaustulosten kanssa. Yleensä ristiriita matemaattisen mallin, ja mittaustulosten välillä johtaa uusiin kehityksiin tieteessä ja matematiikassa. [6] Historiallisesti tärkeä esimerkki mittaustulosten ja teorian ristiriidasta on esimerkiksi mustan kappaleen säteily ja ns. ultravioletti katastrofi. Siinä tutkittiin kappaleen emittoimaa säteilyä, kun sen lämpötilaa nostettiin. Lyhyillä aallonpituuksilla (ultraviolettisäteilyn aallonpituuden luokaa, eli n. 400 nm) klassinen teoria oli suuresti ristiriidassa mittaustulosten kanssa. Myöhemmin mittaustuloksia vastaavan matemaattisen mallin kehittäminen sai tieteessä aikaan uuden teorian ja ymmärryksen syntymiseen, ja niin kvanttiteoria sai alkuunsa. Tämä on hyvä esimerkki siitä miten olemassa olevan mallin ristiriitaisuus mittaustulosten kanssa on antanut hyvän vauhdin tieteen ja matematiikan kehitykselle.

2.6 Matemaattinen mallinnus teollisuudessa

Ennen kuin käsitellään matemaattista mallinnusta teollisuudessa perusteellisesti, lienee tärkeätä määritellä mitä teollisuus ja teollisuusmatematiikka ovat. Taloudellisen yhteistyön ja kehityksen järjestön, eli Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) mukaan, teollisuus on ”mikä tahansa toiminta, jolla on taloudellinen tai sosiaalinen arvo”. Siinä missä sovellettu matematiikka tutkii reaalimaailmaan liittyviä asioita ja on pääosin kiinnostunut tutkimuksensa akateemisesta arvosta, niin teollisuusmatematiikka on enemmänkin kiinnostunut tutkimusten taloudellisista ja sosiaalisista arvoista. Toisin sanoen, teollisuusmatematiikka ei olisi olemassa, mikäli sen ratkaistavat ongelmat eivät olisi teollisuusjohtoisia. Tämä tarkoittaa, että teollisuusmatematiikan ongelmat saavat alkuunsa, kun joku yksittäinen henkilö tai taho haluaa hyötyä tietyn prosessin kvantitatiivisesta analyysistä, eikä ole ensisijaisesti kiinnostunut sen akateemisesta arvosta. Tyypillinen piirre teollisuusmatematiikalle on sen monitieteellisyys. [17]

Matematiikkaa on käytetty teollisuudessa kautta aikojen. Tunnetuimpia varhaisimpia tarinoita on Thaleksesta, jonka mukaan hän käytti matematiikka ennustaakseen hyvää oliivisatoa. Hyvää satovuotta edeltävänä vuotena hän osti halvalla suuren osan oliiviöljyn puristimista, myydäkseen niitä kalliilla myöhemmin. Tarinan mukaan Thales onnistui tässä menestyksekkäästi ja todisti ihmisille, että matematiikalla voi rikastua.

Matemaattista mallinnusta käytettäessä teollisuudessa usein varmistetaan suhteellisen halvalla ja nopeassa ajassa paras mahdollinen tai riittävän hyvä ratkaisu ongelmaan. Teollisuudessa on monia ongelmia, jotka vaativat korkean tason matematiikkaa, mutta yleensä niitä ei voi ratkaista yksin. Teollisuusmatematiikan monitieteellisyyden vuoksi tarvitaan joukko ihmisiä eri tieteenaloilta, jotta ongelmaa voidaan ratkaista. Täten matemaatikoiden, jotka yrittävät ratkaista teollisuuden ongelmia tulee toimia eri asiantuntijoiden kanssa yhteistyössä. [8]

3 MATEMAATTISEN MALLINNUKSEN STUDY GROUP-TYÖPAJAT

Matematiikan Study Group-työpaja on foorumi, jossa etsitään ratkaisua teollisuuden ongelmiin. Siinä toimivat soveltamisesta kiinnostuneet matemaatikot yhdessä paikallisten yritysten edustajien kanssa. Study Group-työpajat ovat kansainvälisesti tunnistettu keino välittää tietoa yliopistomatemaatikkojen ja teollisuuden välillä. [1]

Tässä osiossa käsitellään työpajojen rakennetta ja toimintaa tarkemmin. Study Group-työpajojen toiminnan havainnollistamiseksi kerrotaan edellisten työpajojen ohjelmista ja niissä käsitellyistä ongelmista. Aluksi on kuitenkin syytä puhua hieman työpajojen syntyhistoriasta.

3.1 Historia

Royal Society of London julkaisi 1960-luvulla raportin, jonka mukaan Britannian sovelletun matematiikan tutkijayhteisö ei yllä sen potentiaalia vastaaviin tuloksiin akateemisen ja yhteiskunnallisen tuloksellisuuden suhteen. Raportin mukaan silloinen tutkimus keskittyi liian yksipuolisesti akateemisiin kysymyksiin, erityisesti teoreettisen mekaniikan alalla. Kaksi Oxfordin tutkijaa, matemaatikko Alan Tayler ja numeriikan tutkija Leslie Fox tarttuivat haasteeseen ja ehdottivat toimintamallia, jonka ajatuksena on: *”genuine personal and professional contact between academic mathematicians and scientists from industry”* (vapaasti suomennettuna ”*Aito henkilökohtainen ja ammatillinen yhteistyö akateemisten matemaatikoiden ja teollisuuden tutkijoiden välillä”).* Toteutuksen idea oli viikon mittainen aivoriihi- (brainstorming) työpaja, jonka aiheena olisivat teollisuuden tarpeista suoraan nousevat matemaattiset ongelmat. Ensimmäinen tämän ajatuksen mukainen työpaja ns. Study Group with Industry pidettiin Oxfordissa 1968. [7]

Aluksi kaikki asiantuntijamatemaatikot olivat Oxfordista, mutta pian eri paikkakunnilta olevien asiantuntijamatemaatikkojen erityisosaamisten hyödyt huomattiin. Tällöin toimintaa laajennettiin ja matematiikkojen apua pyydettiin ympäri Isoa Britanniaa. Se mikä eniten vetosi työpajaan osallistuviin matemaatikoihin oli se, että he saivat vapaasti valita minkä ongelman parissa he haluavat työskennellä. [17]

Perusajatus viikon mittaisesta intensiivisestä teollisuusmatematiikan työpajasta on sittemmin omaksuttu kaikkialla maailmassa. Nykyisin toistakymmentä maata järjestää vastaavia työpajoja säännöllisesti ja usea muu maa silloin tällöin. Aluksi toimintaa oli pääasiassa Euroopassa, jossa Oxford Study Group with Industry järjestettiin säännöllisesti vuodesta 1968 alkaen. Myöhemmin European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI) otti vastuun työpajojen järjestämisestä. Eräässä ECMI:n kokouksessa vuonna 1997 päätettiin, että Study Group-työpajoja tulisi myös järjestää Ison Britannian ulkopuolella ja toiminta tulisi nimetä uudelleen. Täten sai alkunsa ESGI, eli European Study Group with Industry. Ensimmäinen Ison Britannian ulkopuolella järjestetty Study Group-työpaja oli ESGI 32, joka järjestettiin vuonna 1998 Lyngby:ssä, Tanskan teknillisellä yliopistolla. [23] Euroopassa vuodesta 1968 alkanut Study Group-työpajojen juokseva numerointi on juuri ylittämässä luvun 108 [7].

Saman ajatuksen sisältäviä, mutta hieman eri nimeä käyttäviä työpajoja on myös järjestetty ympäri maailmaa. Esimerkiksi 80-luvun puolessa välissä muutama Rensselaer Polytechnic Institute (RPI) professori osallistui Oxfordin järjestämään Study Group-työpajaan. Innostuneena työpajasta, he päättivät tuoda samanlaisen työpajan myös Yhdysvaltoihin. Vuonna 1985 Sloan-säätiön avustamana RPI isännöi ensimmäisen työpajan Yhdysvalloissa nimeltään Mathematical Problems in Industry Workshop (MPI). Kesällä 2009 juhlittiin MPI:n (Mathematical Problems in Industry) 25-vuotisjuhlia Delawaren yliopistolla. [13]

3.2 Study Group-työpajojen toiminta maailmalla

Tässä osiossa kuvataan Study Group-työpajojen toimintaa eri puolilla maailmaa. Tarkoituksena on kuvata nykyhetken tilannetta ja kertoa missä maissa tähän mennessä on ollut toimintoja. Tässä osiossa myös käsitellään mitä hyötyä on Study Group-työpajoista ollut kehitysmaissa, jossa niitä on järjestetty.

3.2.1 Toiminta tähän mennessä

Study Group-työpajoja on järjestetty monessa eri maissa ympäri maailmaa. Suurin osa Study Group-työpajoista on pidetty ehkä historiallisista syistäkin Euroopassa. Euroopassa niitä on järjestetty mm. Englannissa, Portugalissa, Venäjällä, Alankomaissa, Suomessa, Tanskassa, Irlannissa, Puolassa ja Espanjassa. [9]

Ympäri maailmaa järjestettyjä Study Group-työpajoja ovat mm. European Study with Industry, American Annual Workshops on Mathematical Problems in Industry, Australia and New Zealand Mathematics in Industry, Mathematics in Industry Study Groups in South Africa, Indo-UK Study Group Meetings on Industrial Problems, Canadian Industrial Problem, Russian Study Group with Industry, Montreal Industrial Problem Solving Workshops, Malaysian Mathematics in Industry Study Group, KAUST Study Groups in Mathematics for Industry ja Chinese Study Groups with Industry. [9]

3.2.2 Toiminta nykypäivänä ja yhteistyökumppanit

Nykyisin toistakymmentä maata järjestää alkuperäistä ideaa vastaavia työpajoja säännöllisesti ja useat muut maat silloin tällöin [7]. Euroopassa ESGI-työpaja pidetään vuosittain Englannissa, Tanskassa, Irlannissa, Hollannissa ja Portugalissa. Myös Espanjassa, Puolassa ja Venäjällä on tavoitteena säännöllinen toiminta. Muualla maailmassa Study Group malli on omaksuttu ainakin Australiassa, Intiassa, Etelä-Afrikassa, USA:ssa ja Kanadassa. [7] Oxford ylläpitää kokoavaa web-sivustoa eri puolilla järjestetyistä työpajoista: www.maths-in-industry.org. [7]

Esimerkiksi vuonna 2014 eri puolilla maailmaa järjestettiin ainakin yhdeksän Study Group-työpajaa yhdeksässä eri maassa ja neljässä maanosassa [9]. Lisää tietoa tähän mennessä pidetyistä Study Group-työpajoista saa internet sivulta: http://miis.maths.ox.ac.uk/past/.

Nykyään Study Group-työpajojen periaate on levinnyt myös muille tieteenaloille. Viime vuosina on tullut tavaksi järjestää myös teemakohtaisia Study Group-työpajoja esimerkiksi lääketieteestä, finanssimaailman haasteista ja jopa sosiaalitieteen kysymyksien ympäriltä. Uutuutena on lisäksi yritykselle räätälöityjä In-house-työpajoja, jossa Study Group-työpajaan osallistuvat asiantuntijat menevät teollisuuden tiloihin. [7]

Eräs viime vuosien innovaatio on ollut järjestää juuri ennen Study Group-työpajaa, opiskelijoille tarkoitettu ns. mallinnusviikko (Modeling Week/Modelling Camp), joka valmentaa opiskelijoita ongelmanratkaisuun matemaattisen mallinnuksen keinoin. Tämän jälkeen he saavat enemmän irti varsinaisesta työpajasta, jossa käsitellään yritysten todellisia ongelmia kokeneempien tutkijoiden rinnalla. [7]

Eri Study Group-työpajojen järjestelyissä ovat mukana mm. SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) ja ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry). SIAM on kansainvälinen teollisuuden ja sovelletun matematiikan yhteisö, jonka tavoitteena on:

- Matematiikan soveltamisen lisääminen numeeriseen laskentaan, insinöörityöhön ja teollisuuteen
- Edistää tutkimusta, joka johtaa uusin ja tehokkaisiin numeerisen matematiikan laskentametodeihin ja tekniikkaan
- Toimia välineenä tiedon ja uusien ideoiden vaihtamiseen matemaatikkojen, insinöörien ja tiedemiesten välillä [13]

ECMI on akateemisten instituutioiden ja teollisuuden kumppaneiden konsortio, jotka toimivat yhteistyössä seuraavien tavoitteiden saavuttamiseksi:

- Lisätä ja tukea matemaattisen mallinnuksen käyttöä missä tahansa sosiaalisessa tai taloudellisessa aktiviteetissa
- Kouluttaa teollisuuden matemaatikoita vastaamaan alati kasvavan kysyntään asiantuntijoista, edellä mainituilla alueilla
- Operoida Euroopan tasolla [14]

ECMI toimii yhteistyössä Euroopassa mm. EMS (The European Mathematical Society), ECCOMAS (European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering), ERCIM (the European Research Consortium for Informatics and Mathematics) ja Euroopan ulkopuolella SIAM ja ICIAM (International Council for Industrial and Applied Mathematics) kanssa. [15] Sekä Siam, että ECMI aktiivisesti esittelevät eri puolilla maailmaa järjestetyistä Study Group-työpajoista omissa tiedotelehdissään. Tiedotelehtiä voi lukea seuraavilta internet sivuilta:

- http://www.siam.org/journals/ (SIAM)
- http://www.mafy.lut.fi/EcmiNL/ (ESMI)

3.2.3 Toiminta kehitysmaissa

Study Group-työpajat kehitysmaissa ovat alku kehitykselle. Nämä toiminnat yleensä parantavat yliopiston matematiikan laitoksen toimintaa kehitysmaissa. Kehitysmaissa mallinnettava ongelma liittyy yleensä paikallisiin kehittämiskohteisiin, kuten maatalouteen, kaivostoimintaa, infrastruktuuriin, terveysoloihin tms. Tällöin mallia soveltamalla saadaan alkuun joku toiminta, joka voi auttaa esimerkiksi maataloutta kyseisessä maassa. Study Group-työpajassa voidaan esimerkiksi pohtia omenapuiden istutusta sillä tavalla. Tällöin tarkoituksena voisi olla mm. saada mahdollisemman pienestä maa-alasta mahdollisemman suuri sato. Eräitä muita matemaattisesti mallinnettuja tyypillisiä ongelmia kehitysmaille ovat mm. kalastus ja tautien leviämiset.

Kehitysmaissa Study Group-työpaja on suhteellisen uusi asia. Study Group-työpajoja on vasta viime vuosista lähtien, suunnilleen vuodesta 2004, alettu pitämään mm. Intiassa, Etelä-Afrikassa, Turkissa, Malesiassa, Saudi Arabiassa, Algeriassa, Meksikossa ja Kiinassa [21].

Edellä mainituissa maissa Study Group-työpajaa on pidetty yliopistoissa, joiden vaikutuspiirissä on ollut teollisuutta ja kehittynyttä elinkeinotoimintaa, niinpä monesti tähän mennessä työpajojen toiminnan tarkoitus ja vaikutus kehitysmaihin on ollut sama kuin kehittyneissäkin maissa.

Joissain tapauksissa voi sanoa, että SGI (Study Group with Industry) on teollisuusmatematiikkaa aloittavalle laitokselle ja sen opiskelijoille hyvä oppimistapahtuma ja keino rakentaa yhteyksiä matematiikkaa tarvitseviin muihin yksiköihin.

Esimerkiksi Etelä-Afrikan Study Group-työpajassa on tutkittu mm. kalliolouhintaa, optimointia kaivoksissa, HIV-viruksen leviämistä työympäristössä, jakelun optimointia ja uusiutuvia energioita [10]. Afrikan kehittyvissä osissa ei ole vielä järjestetty Study Group-työpajaa. Mikäli sellainen tulevaisuudessa järjestetään, niin sen aiheena voisivat olla:

- liikenneruuhkat
- luonnonpuistojen ekologia ja eläinpopulaatiot
- maatalouden logistiset mallit
- kehittyvän pakkitoiminnan finanssi/riskimallit
- kasvitautiepidemiat ja torjunta
- malariatutkimus
- demografiset mallit syntyvyydestä, lapsikuolleisuudesta ja yms.
- bioenergiaan liittyvät kysymykset
- kansalliset sähköverkot, vedenjakelu ja yms.

3.2.3.1 Study Group-työpajojen hyöty kehitysmaille

Kehitysmaissa on paljon lahjakkaita matemaatikkoja. Teollisuusmatematiikan ja Study Group-työpajojen suosion kasvun myötä kehitysmaiden matemaatikot voivat auttaa kehittämään maansa teollisuutta ja sitä kautta hyvinvoinnin tasoa. Esimerkiksi Intiassa ja Kiinassa on paljon lahjakkaita matematiikkoja, joista olisi maansa infrastruktuurin rakentamisessa huomattava apu. Näin varmistetaan, että kaikilta tieteenaloilta, kuten matematiikasta yksilöt pääsevät antamaan oman panoksensa maansa kehittämiseen.

3.2.4 Toiminta Suomessa

Study Group-työpaja on ollut Tampereella ja Helsingissä. Lisäksi Suomessa järjestettiin ESGI 50 vuonna 2004 Otaniemessä. Mukana järjestelyssä olivat CSC, TUT, LUT ja TKK. Lappeenrannan teknillinen yliopisto yhteistyössä Pietarin Teknillisen valtionyliopiston kanssa järjesti ESGI 89 työpajan 10–15.9 2012. Työpajan aiheina olivat neljä probleemaa, kaksi Venäjältä, kaksi Suomesta: http://www.mafy.lut.fi/study/ESGI/. [7]

Vastaava suomalais-venäläinen ESGI 96-työpaja järjestettiin Pietarissa 30.9.–4.10.2013 [18]. Uusin Suomen ja Venäjän välinen työpaja ESGI 105 (http://www.mafy.lut.fi/ESGI/) järjestettiin 29.9.–3.10.2014 Rantasalmella. Harkinnassa on ajatus jatkaa edelleen toimintaa vuorovuosina rajan molemmin puolin [7].

3.3 Study Group-työpajan rakenne ja ohjelma

Tässä osiossa kuvaillaan työpajojen rakennetta, ohjelmaa ja käytäntöjä. Näiden havoinnollistamiseksi käytetään esimerkkejä eri Study Group-työpajoista. Lyhyesti kuitenkin Study Group-työpajoissa edetään seuraavasti:

1. Formuloidaan teollisuuden ongelma, jota ollaan ratkaisemassa
2. Tuodaan esille uusia ja luovia ajatuksia
3. Paneudutaan ja pohditaan ongelman mallintamista ja ratkaisumetodeja
4. Yritetään löytää ratkaisu ongelmaan
5. Esitellään mahdollinen ratkaisu työpajan viimeisenä päivänä [1]

3.3.1 Rakenne

Tyypillisesti Study Group-työpajat kestävät viikon ja yleensä maanantaista perjantaihin. Niissä Study Group-ryhmä, joka voi koostua jopa 50–80 matemaatikosta, yrittävät yhdessä ratkaista teollisuuden ongelman. Yritykset esittävät heidän ongelmansa ja päämääränsä työpajan ensimmäisenä päivänä. Samalla he esittävät tähän mennessä käytettyjä ratkaisuyrityksiä tai lähestymistapoja [13]. Tämän jälkeen matemaatikkoryhmä yrittää keksiä ratkaisun ongelmaan.

Ongelmia esitetään tyypillisesti kolmesta kuuteen, jonka jälkeen työpaja jaetaan pienryhmiin ongelmamäärän mukaan [13]. Matemaatikot voivat valita kiinnostuksensa mukaan mihinkä pienryhmään he osallistuvat. Samaan aikaisesti käynnistetään koulutus halukkaille ongelmaan liittyen, jossa voi saada lisää tietoa ongelman taustasta ja matematiikasta. Ensimmäistä päivää seuraavat 2-3 päivää omistetaan pohdintaan, aivoriihiin, mallintamiseen ja ongelman ratkaisun löytämiseen. Usein tämä kaikki tapahtuu käsi kädessä teollisuuden edustajien kanssa. Osallistuvat matemaatikot ovat vapaita valitsemaan minkä tahansa ongelman ja tarjoamaan tietämystään haluamansa projektiin.

Vaikka ryhmien toimintatavat poikkeavatkin hieman työpajakohtaisesti, niin yleinen kaava on se, että työpaja kokoontuu yhtenä isona ryhmänä työpajan ensimmäisenä ja viimeisenä päivänä. Välissä olevien päivien aikana työpajan osallistujat toimivat pienryhmissä keskittyen vain tiettyyn ongelmaan. Luentoja on minimaalinen määrä, koska suurin osa ajasta halutaan käyttää pienryhmäpohdiskeluun. Pienryhmiä on saman verran kuin esitettyjä ongelmia. Niissä pohditaan aamusta iltaan kutakin ongelmaa. Kuitenkaan ei ole epätavallista, että välillä tietyn pienryhmä osallistujat vierailevat pikaisesti muissa pienryhmissä jakamassa ideoitaan tai hakemassa inspiraatiota. Pienryhmien ilmapiiri vaihtelee sopivan hiljaisista hetkistä, jolloin kaikki keskittyivät ongelman ratkaisuun, ja energisten keskustelujen välillä. [13]

Study Group-työpajoilla mitkään säännöt eivät rajoita osallistujia jakamasta ideoitaan. Osallistujat ovat vapaita ilmaisemaan mielipiteensä taustastaan riippumatta. Tämä luo tasavertaisen ilmapiirin, jolloin vastavalmistuneilla opiskelijoilla on mahdollisuus ideoida huippututkijoiden kanssa. [13]

Yleensä työpajan puolessa välissä pienryhmät valmistelevat väliraportin. Väliraportti on yhteenveto siihen asti tehdyistä pohdinnoista ja edistyksistä. Työpajan loppua kohti, yleensä työpajan viimeisen päivän edellisenä iltana, pienryhmät viimeistelevät raporttinsa esityskuntoon. Työpajan viimeisenä päivänä pienryhmät esittävät ratkaisunsa ongelmaan. Usein ajan puutteen vuoksi pienryhmien loppuraportit eivät ole sellaisenaan julkaisukelpoisia vaan niitä työstetään jälkikäteen. [1].

Edellä kuvattu Study Group-työpajan rakenne ja ohjelma on havainnollistettu taulukossa 1.

Taulukko 1 *Tyypillisen Study Group-työpajan rankenne [23].*

Su	Ma	Ti	Ke	To	Pe
Saapuminen	Ongelmien esittely teollisuus-edustajien taholta	Työpaja-työskentelyä	Työpaja-työskentelyä	Työpaja-työskentelyä	Loppu-seminaari ja Pienryhmä esitykset
	Pienryhmien muodostaminen ja työn aloittaminen	Työpaja-työskentelyä	Työpaja-työskentelyä	Työpaja-työskentelyä	Loppupuhe ja kotiinpaluu
			Väliraportti	Pienryhmä raporttien viimeistely	

Study Group-työpaja tarjoaa taloudellista tukea työpajaan kutsutuille henkilöille, jotka eivät saa rahoitusta muuta kautta [1]. Vasta valmistuneet tai jatko-opiskelijat, jotka haluavat osallistua työpajaan saavat ainutlaatuisen mahdollisuuden oppia jotain uutta ilman pitkäaikaista sitoutumista. Study Group-työpajan kustannukset on pyritty minimoimaan. Yleensä rekisteröimismaksuja ei ole, työpajan järjestävä taho tarjoaa ruuat ja majoitus on suhteellisen halpaa. [13]

Esimerkin vuoksi tähän (taulukko 2) on otettu Espanjassa, Santiago de Compostelassa (11–14.11.2013), pidetyn Study Group-työpajan viikkoaikataulut. Normaalista poikkeavasti tämän työpajan kesto oli maanantaista torstaihin.

Taulukko 2 *Espanjassa pidetyn Study Group-työpajan aikataulu [22].*

	Monday 11 November	Tuesday 12 November	Wednesday 13 November	Thursday 14 November
9:00 9:40	Reception of participants	GTs	GTs	GTs
9:40 10:30				

10:30 11:20	Opening ceremony			Conclusions P1
11:20 11:50	Coffee break	Coffee break	Coffee break	Coffee break
11:50 12:40	Presentation P1	GTs	GTs	Conclusions P2
12:40 13:30	Presentation P2			Conclusions P3
13:30 15:30	Lunch	Lunch	Lunch	Lunch
15:30 15:50	Presentation P3	GTs	GTs	
15:50 16:15	Allocation GTs			
16:15 18:30	GTs			
19:00 21:30		Guided visit to Santiago de Compostela		
21:30		Gala dinner		

P1: Electric Scale up for a carbothermic Al-process | Teknova AS and Alcoa Norway ANS
P2: Process models for the production of Microalumina | Elkem AS Silicon Materials
P3: Designing an optimal network measurement sensors for monitoring geographical renewable resource, Centro Nacional de Energías Renovables (CENER)
GTs: Study group by problem

3.3.2 Ryhmien toimintatavat

3.3.2.1 Ryhmätyön vahvuuksia

Usein teollisuuden ongelmat ovat sen verran haastavia ja vaativat laaja-alaista tietämystä, joten käytännössä tulee mahdottomaksi ratkaista ongelma lyhyessä ajassa yksin. Ryhmässä usein on ihmisiä eri taustoista ja tieteen alasta, joten ratkaisun saaminen ongelmaan huomattavasti helpottuu.

Ryhmässä pääsee esittämään omat ajatuksensa ja kuulemaan muiden mielipiteitä. Tällaisessa ilmapiirissä yleensä mahdollinen ratkaisu ponnahtaa esiin, kun eri ideat ja ajatukset törmäävät yhteen pohdinnoissa.

Vaikea ja kompleksinen tehtävä voidaan purkaa pikkuosiin ja delegoida eri osat ryhmänjäsenille. Näin käytetään kaikkien ryhmänjäsenten osaamista ja varmistetaan optimaalinen ajan käyttö ongelman ratkaisuun.

Study Group-työpajan ryhmätyöskentely auttaa ryhmän jäseniä luomaan ystävyys suhteita keskenään. Tämä auttaa varsinkin jatko-opiskelijoita heidän tulevaisuuden opinnoissa ja työssä.

3.3.2.2 Teollisuusedustajan rooli

Teollisuusedustajan tehtävänä on esittää teollisuuden ongelma Study Group-työpajan ensimmäisenä päivänä. Tämän jälkeen sillä välin, kun muut pohtivat ongelmaa, hän järjestää mahdollisesti lisää koulutusta halukkaille ongelmasta ja sen taustasta.

Lisäksi teollisuusedustaja käy pienryhmissä kiertelemässä ja vastaamassa mahdollisiin kysymyksiin. Joskus teollisuuden edustaja joutuu hankkimaan uutta dataa tai lisäselvitystä liittyen ongelmaan sitä mukaa, kun ryhmä edistyy ongelman ratkaisemisessa ja tarvitsee uusia oletuksia tai selvennyksiä. Study Group-työpajan viimeisenä päivänä teollisuuden edustajat ovat kuuntelemassa mahdollisia ratkaisuja tai ideoita ongelmaan liittyen. [13] Käytännön syistä johtuen, joskus kaikki teollisuuden edustajat eivät pääse paikalle tai eivät voi olla työpajassa täyspäiväisesti. Yleensä tämä johtuu teollisuuden edustajien kiireellisyydestä tai siitä, että he eivät voi olla pois omasta työtehtävästään viikon ajan. Tällöin heihin ollaan yhteydessä teknologiaa hyödyntäen, esim. sähköpostitse tai skypen välityksellä.

Yleensä teollisuuden edustajat ovat matemaatikoita, kuitenkaan heidän ei välttämättä tarvitse olla. Usein riittää, että he ovat erittäin hyvin perehtyneet ongelmaan ja pystyvät omaksumaan työpajan tarjoamaa mahdollista ratkaisua ongelmaan. [13]

3.3.2.3 Loppuseminaari (toteutus)

Loppuseminaari toteutetaan Study Group-työpajan viimeisenä päivänä, yleensä perjantaiaamuna. Tällöin pienryhmät kokoontuvat taas yhteen ja jokainen ryhmä esittää oman loppuraporttinsa. loppuraportti sisältää joko mahdollista ratkaisua tai ideoita mitä voidaan kokeilla. Loppuseminaarissa usein teollisuuden edustajat ovat läsnä kuuntelemassa ja kommentoimassa ryhmien loppuraporttia. Myös muut osallistujat voivat kommentoida esityksiä.

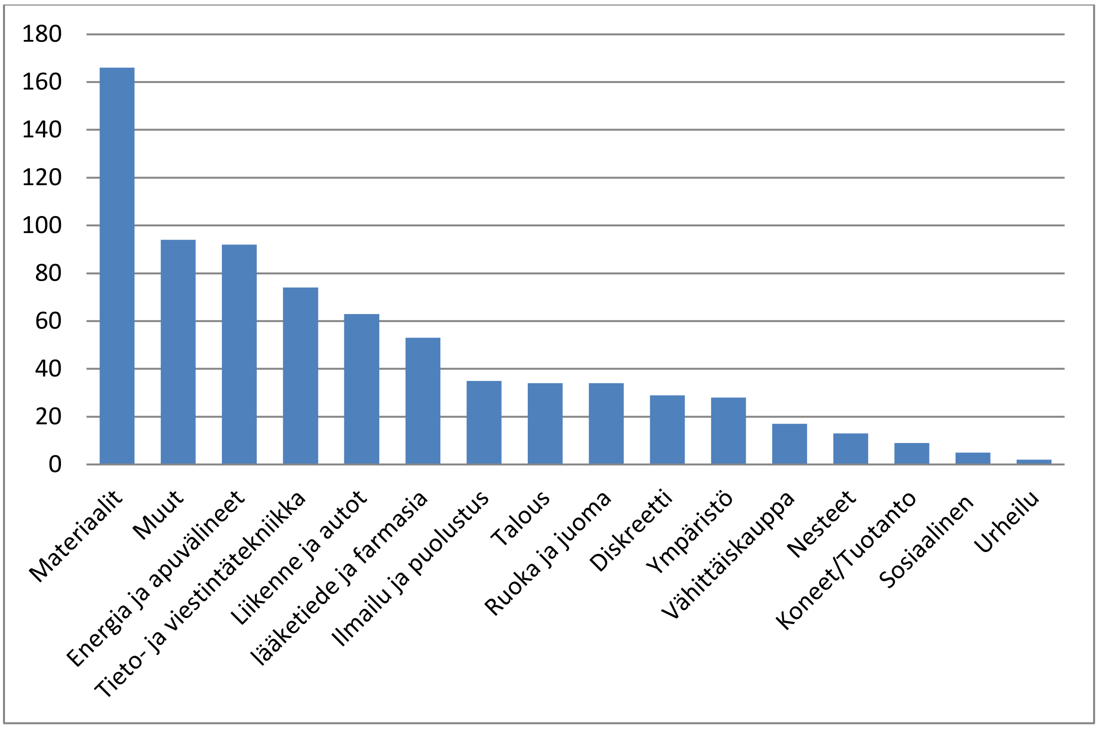
Työpaja usein päätyy heti loppuseminaarin jälkeen, jolloin osallistujat palaavat kotiinsa. Mikäli halutaan jatkaa viimeistellä loppuraportteja, keskustelua lisää tietystä ongelmasta tai jatkokehittää jotain ongelmaa, niin loppuseminaarissa usein tiedotetaan siitä ja sovitaan menettelytavoista.

3.3.2.4 Työn jatkuminen työpajaviikon jälkeen

Yritysmaailmassa on usein tilanne se, että teollisuuden tutkijat eivät jää pohtimaan liikaa yhtä aihetta. Tämä siitä syystä, että monesti yrityksille ajankohtainen ongelma tänään ei ole välttämättä sitä vähän ajan päästä. Tieteen ja matematiikan maailmassa asia ei kuitenkaan ole niin. Niinpä Study Group-työpajan osallistuvilla matemaatikoilla on mahdollisuus olla yhteydessä toisiinsa ja jakaa uusia ideoitaan ongelmasta erilaisissa keskustelufoorumeissa. Ainakin Oxford ylläpitää keskustelufoorumin eri Study Group-tapahtumista: http://www.maths-in-industry.org/Discussions/.

3.4 Study Group-työpajoissa tutkittuja ongelmia

Oxfordin ylläpitämästä sivusta (http://www.maths-in-industry.org/miis/view/subjects/) pääsee näkemään eri Study Group-työpajoissa tutkittuja ongelmia. Oxfordin sivuilta saatua dataa siirrettiin Exceliin. Tämän jälkeen tutkitut ongelmat järjestettiin aiheittain suuruusjärjestyksen mukaan ja Excelillä piirrettiin alla oleva kuva.



Kuva 3 *Eri Study Group-työpajoissa käsiteltyjä ongelmia [11].*

Kuten kuvassa 3 nähdään, suurin osa käsitellyistä ongelmista liittyi materiaalien ominaisuuksiin ja materiaalitekniikkaan. Ongelmia oli käsitelty kaiken kaikkiaan 547 (2013 huhtikuuta asti), joten materiaalitekniikan osuus on lähes kolmasosa kaikista tutkituista ongelmista. Muita suuresti tutkittuja teollisuuden aloja on energia ja apuvälineet, tieto- ja viestintätekniikka ja liikenne ja autot. Yhteensä siis 90 % kaikista tutkituista ongelmista liittyy edellä mainittuihin.

3.5 Esimerkkityöpajat

Tässä osiossa tarkastellaan mm. kahta suomen ja venäjän välisessä työpajassa käsiteltyjä ongelmia. Lopuksi käsitellään Irannin työpajassa käsiteltyä ongelmaa vähän ykistyiskohtaisemmin. Tavoitteena on että, yksityiskohtainen ongelman selitys havainnollistaisi Study Group-ryhmän ongelmanratkaisumenetelmiä ja matematiikan kykyä ratkaista erilaisia reaalimaailman ongelmia. Yksityiskohtaisessa tarkastelussa halutaaan myös havainnollistaa matemaattista mallinnusprosessia: miten lähdetään liikkeelle, miten edetään ja minkälaisia tulkintoja voidaan lopuksi tehdä.

3.5.1 ESGI 96:ssa tutkitut ongelmat

ESGI 96- työpaja järjestettiin Pietarissa 30.9.–4.10.2013 [18]. Tapahtuman järjestäjinä toimivat Pietarin teknillinen valtionyliopisto (SPbSTU), Lappeenrannan teknillinen yliopisto ja laskennallisen teknologian ja integroidun suunnittelun keskus (Centre of Computational Engineering and Integrated Design, CEID). [18] Alla on lyhyt kuvaus Study Group-työpajassa tutkituista ongelmista:

1. *”Development of modeling strategy for simulation of the seismic impact onto underground polyethylene pipeline”*

   Tarkoituksena oli, että työpaja kehittää mallinnusmetodologian, jolla voidaan arvioida seismisten maanjärjestysaaltojen vaikutusta maanalaisille putkilinjoille, joita on tehty polyeteeniputkista. [18]

   Tarkemmin kuvailtuna Study Group-työpajan tulisi:
   - Selvittää tärkeimmät tekijät seismisten aaltojen vaikutuksesta maanalaisiin putkilinjoihin.
   - Kehittää matemaattinen malli, jolla voidaan arvioida seismisten aaltojen aiheuttama rasitus putkilinjoihin.
   - Käyttää kehittämänsä mallia laskemaan maksimirasitus maanalaisiin polyteeniputkilinjoihin, kun niitä rasittaa seisminen aalto, joka vastaa 10-pisteen maanjärjestystä (MSK-64 asteikoilla). Putkilinjan parametrit tunnetaan, ympäröivä maa on savea ja putkilinjan oletetaan olevan homogeeninen ja ilman liitoskohtia. [18]

2. *“Modeling of the electrohydraulic device”*

   Lämmönsiirto ja öljyvirtaus sähköhydraulisessa laitteessa

   Sähköhydraulinen laite tuottaa lämpöä, jota siirretään pois jäähdyttävällä öljyvirtauksella. Aluksi öljy tulee kammioon ylhäältä sinisen nuolen osoittamasta suunnasta ja täyttää kammion. Tämän jälkeen öljy virtaa roottorin ja staattorin välistä, poistuen lopulta punaisen nuolen osoittamasta raosta. Kammio voi olla osittain tai kokonaan täynnä öljyä. [18]

   ***Kuva 4** Sähköhydraulinen laite [18].*

   CFD-mallinnuksen tavoitteet

   Työpajan tehtävänä oli siis kehittää matemaattinen CFD-malli (Computational fluid dynamics) öljyvirtauksille laitteessa. Ensimmäisenä, ongelman helpottamiseksi voitaisiin olettaa, että öljy on vakiolämpötilassa, eli mitään lämmönsiirtoa ei tapahtuisi mallissa. Tämän jälkeen tutkittaisiin sekä osittain, että kokonaan täynnä olevaa kammiota. Tämä johtaisi vastaavasti yksi- tai kaksivaiheeseen virtausongelmaan. Toisekseen, otettaisiin lämmönsiirrot huomioon. Viimeinen haaste olisi sitten löytää kavitaatioraja tulevalle öljysuihkeelle, mikäli syöttöputki on ahdas. Kavitaatio on ilmiö, jossa neste alkaa kiehua paineen laskun johdosta. Lisäksi tulisi mallintaa osittain täynnä olevaa kammiota kavitaatiosisäänvirtauksella. [18]

3. *“Modeling biological waste water treatment reactor”*

Tässä tarkoituksena oli mallintaa biologista jätevedenpuhdistusreaktoria [18]. Biologinen vedenpuhdistus ja siihen liittyvät haasteet käsiteltiin 2.4.2, joten tässä ei mennä siihen tarkemmin.

3.5.2 ESGI 105

Syksyllä 2014 Rantasalmella järjestettiin Venäjän ja Suomen välinen ESGI 105, johon itse pääsin myös osallistumaan. Tapahtuman järjestäjinä olivat Lappeenrannan teknillinen yliopisto ja Pietarin teknillinen valtionyliopisto. Kyseessä on kolmas suomalais-venäläinen (LUT-SPbSTU) Study Group-työpaja. Mukaan oli toivottu tutkijoita ja jatko-opiskelijoita soveltavan matematiikan ja laskennallisen tieteen aloilta.

Osallistujia oli vajaa 30 henkeä. Mukana oli sekä suomalaisia, että venäläisiä professoreita. Vaikka tapahtuma oli Suomen ja Venäjän välinen, mukaan oli saatu myös osallistujia mm. Puolasta ja Bulgariasta. Kuvassa 4 on ryhmäkuva tapahtuman lopusta.

Kuva 5 *Ryhmäkuva ESGI 105 tapahtumasta.*

Osallistujilta ei peritty osallistumismaksua, työpajan järjestäjät kustansivat majoituksen ja ruokailun. Matkakustannukset Lappeenrantaan olivat osallistujien vastuulla. Kuitenkin moni osallistuja sai omalta yliopistoltaan rahoitusta matkamenoihin.
Työpajan kesto oli viisi päivää, eli maanantaista perjantaihin. Kuten tapana on, työpajan ensimmäisenä päivänä pidettiin palaveri teollisuuden edustajien kanssa. Kaikki teolli-

suudenedustajat eivät päässeet paikalle, joten heidän kanssa oltiin yhteydessä skypen avulla. Työpajassa esiteltiin muutamia ongelmia, joista käytännön syistä johtuen päätettiin käsittää vain seuraavat:

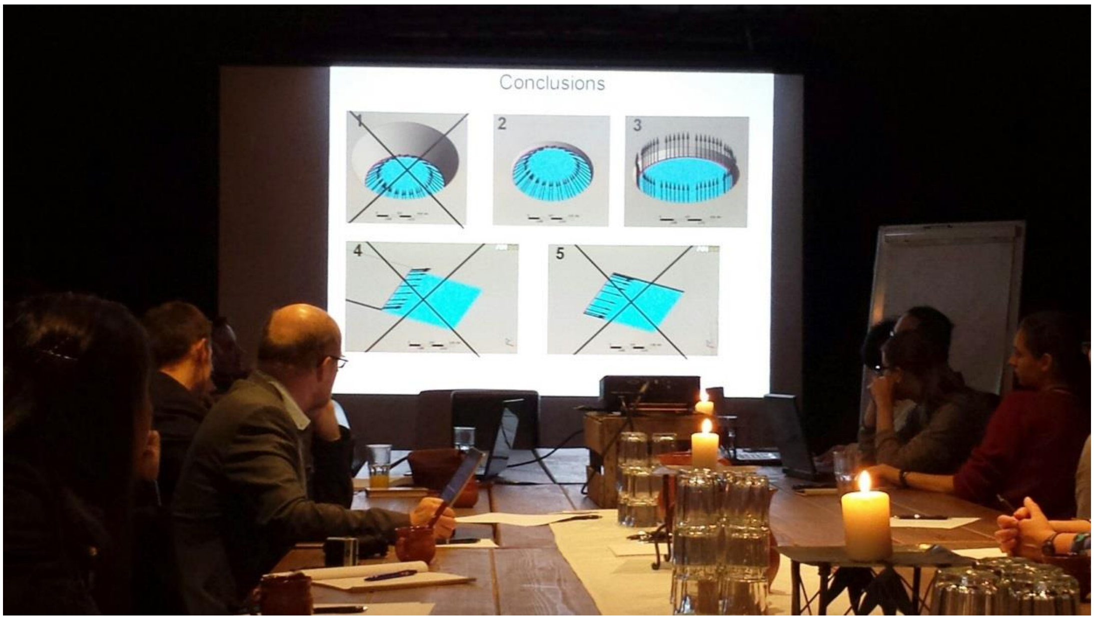
1. *Tarkkailuikkunan puhtaana pitäminen (Honeywell)*
2. *Öljyputkien venymäliuska-anturin lämpötilakompensointi (FMC Technologies)*
3. *Tukin trajektorin estimoiminen muutaman diskreetin havainnon perusteella (Bintec)*

Ongelmien määrän mukaan jakauduttiin kolmeen pienryhmään. Joissain pienryhmissä jakauduttiin edelleen pienempiin tiimeihin, jotta sama ongelma voitaisiin mallintaa eri menetelmiä ja näkökulmia käyttämällä. Alla on kuva (Kuva 6) pienryhmästä, jossa käsiteltiin FMC Technologies yrityksen ongelmaa, joka liittyi öljyputkien venymäliuska-anturin lämpötilakompensointiin.

Kuva 6 *Kuvia ESGI 105 pienryhmätoiminnoista.*

Perjantaiaamuna, työpajan viimeisenä päivänä, esiteltiin pienryhmien ratkaisut yritysten edustajille. Paikalle pääsi vain yksi teollisuuden edustaja. Muihin edustajiin oltiin yhteydessä skypen tai sähköpostin välityksellä. Teollisuuden edustajat olivat tyytyväisiä pienryhmien ratkaisuihin ja ehdotuksiin.

Esimerkiksi Honeywell-yrityksen tarkkailuikkunan puhtaanapitämisongelmassa, yritys halusi tietää millä ikkunan seinämän kulmalla ja puhallustekniikalla saadaan tarkkailuikkuna pysymään mahdollisemman puhtaana. Ongelmaa pohtinut pienryhmä esitti oman ratkaisunsa ongelmaan (kuva 7). Simuloimalla ongelmaa Matlabilla, huomattiin joidenkin kulman arvojen toimivan parhaiten. Täten tarkkailuikkunan seinämän huonot kulman arvot pystyttiin sulkemaan pois. Tämä oli hyvä esimerkki siitä, miten mallintamalla ongelmaa matemaattisesti voidaan välttyä kalliilta ja aikavieviltä kokeiluilta.



Kuva 7*Honeywell ongelman pienryhmä esittelemässä omaa ratkaisuaan***.**

Tapahtuman verkkosivu oli: http://www.mafy.lut.fi/ESGI/.

3.5.3 ESGI 70

Lukuisia Study Group-työpajoja on tähän mennessä pidetty ympäri maailmaa. Tähän on otettu vain eräs esimerkkityöpaja ja siitä eräs ongelma, jota käsitellään yksityiskohtaisesti seuraavassa osiossa. Näin työpajan toteutus ja ongelman käsittely konkretisoituvat. Samalla myös kerrotaan miten alussa kuvattu matemaattisen mallinnuksen eri vaiheet näkyvät tämän esimerkkiongelman eri ratkaisuvaiheissa.

Esimerkkityöpajana on Irlannissa, Limerickissä 28.6.–3.7.07 pidetty työpaja. Tämä ESGI 70 oli jo toinen Irlannissa järjestetty Study Group-työpaja. Työpajan järjestäjänä toimivat MACSI (Mathematics Applications Consortium for Science and Industry) ja tilaisuuden sponsoreina toimivat SFI (Science Foundation Ireland) ja NDP (National Development Plan). Tilaisuus pidettiin matematiikan ja tilastotieteen laitoksella, Limerickin yliopistolla. [19]

Työpajaan oli tullut Euroopan huippututkijoita ja sovelletusta matematiikasta kiinnostuneita. Irlannin työpajassa oli kaiken kaikkiaan 90 osallistujaa ja eri maista kuten Irlannista, Englannista, Skotlannista, Tanskasta, Puolasta, Espanjasta, Ruotsista, Saksasta ja Yhdysvalloista. Osallistujiin kuuluivat kaikki MACSI:n jatko-opiskelijat ja tutkijatohtorit. Perinteisesti maanantaina, joka oli samalla työpajan ensimmäinen päivä, teollisuuden edustajat esittivät ongelmat työpajaan osallistujille. Työpajassa esiteltyjä ongelmia olivat:

1. *Partial Wetting Phenomenon in Superhydrophobic Microchannels (Osittaiskostumisen ilmiö suprahydrofobisissa mikrokanavissa)*

2. *The Effect of Mechanical Loading on the Frequency of an Oscillator Circuit (Mekaanisen kuormituksen vaikutus värähtelypiirin taajuuteen)*
3. *Designing a Green Roof for Ireland (Viherkattojen suunnitelu Irlantiin)*
4. *Uplift Quadratic Program in Irish Electricity Price Setting (Kehittää neliöllistä ohjelmaa Irlannin Sähkön hinnoitteluun)*
5. *Particle Impact Analysis of Bulk Powder During Pneumatic Conveyance (Bulk Powder-yrityksen hiukkastörmäysten analyysi paineilmakuljetuksessa)*
6. *Improvement of energy efficiency for wastewater treatment (Energia hyötysuhteen parantaminen jäteveden käsittelyssä)*
7. *Initiation of Guinness (Guinnessin alkuunpano)*
8. *Solar Reflector Design (Aurinkoheijastimien suunnittelu)* [19]

Ongelmien esittelyn jälkeen osallistujat olivat vapaita valitsemaan minkä ongelman äärellä he haluavat työskennellä. Jokaiselle ongelmalle oli määrätty työhuone viikon ajaksi. Osa osallistujista päätti jäädä vain yhteen huoneeseen ja työskennellä koko viikon saman ongelman parissa ideoimassa ongelman määrittelyssä, mallintamassa, tulosten löytämisessä ja analyysissa, kirjoittamassa raporttia ja tekemässä esitystä loppuseminaaria varten. Toiset osallistujat sen sijaan kävivät huoneesta toiseen antamassa uusia ideoita ongelmien tarkasteluun, kommentoimassa ryhmän lähestymistapoja ja antamassa parannusehdotuksia. [19]

Työpajaan osallistuvien jatko-opiskelijoiden oli välillä vaikeaa antaa omaa panostaan mallinnuksen varhaisiin vaiheisiin. Alussa keskustelut kokeneiden tutkijoiden välillä voivat olla hyvinkin vauhdikkaita ja siten jatko-opiskelijoiden on vaikeaa antaa omia ideoitaan. Joskus aihekin saattoi olla jatko-opiskelijoiden erityistietämyksen ulkopuolella. Kyseisessä työpajassa osallistuminen tasapainottui viikon aikana, kun jatko-opiskelijat pääsivät työskentelemään numeeristen analyysien parissa ja antamaan oman panoksensa loppuesitykseen ja raporttien valmistamiseen. [19]

3.5.3.1 Esimerkkiongelma

Esimerkkiongelmaksi otetaan *”Designing a Green Roof for Ireland”* (vapaasti suomennettuna: ”*Viherkattojen suunnittelu Irlantiin*”). Alle on tiivistetty osia ongelman parissa toimineiden raportista.

1 Johdanto

Viherkatot ovat yleistymässä maailman laajuisesti. Viherkattojen monipuoliseen hyötyyn kuuluu mm. sadeveden hallinnointi, saasteiden kontrollointi, rakennuseristeenä toimiminen, hiilidioksidin kierrätys ja lisäksi esteettinen miellyttävyys. Viherkattoon kohdistuu monia sään aiheuttamia rasituksia mm. tuulen paine, jonka jätämme tässä raportissa huomiotta, ja sadevesi. Tässä raportissa mallinnamme nimenomaan sadeveden virtausta, ojitusta ja talteenottoa. Tämän takia ymmärrys veden kulusta on olennaista, jotta voimme suunnitella katon, joka pystyy tuottamaan elinvoimaisia kasveja ja kestämään kuormia, jotka ovat turvallisen rakennustekniikan standardien mukaisia. Alla on kuva (kuva 8) on perinteisistä virhekatoista.

Kuva 8*Kuva perinteisistä viherkatoista [20].*

Tämän raportin pääfokuksena on veden kulku ja kuljetus viherkaton rakenteen läpi. Puutteellinen ojitus johtaa ei-haluttuun mullan saturaation (tässä mullan saturaatiolla tarkoitetaan mullan kyllästymistä), mikä estää kasveja hengittämästä. Sitä vastoin liika ojitus johtaa alhaiseen mullan saturaatiotasoon, joka puolestaan johtaa kasvien kuivumiseen. Ideaalitapauksessa korkea, mutta alle 80 %:n saturaatiotaso on pidettävä kokoajan yllä. Tehtävänä oli siis mallintaa saturaatioasteen jakaumaa mullan eri syvyyksissä ja tarkistaa miten se muuttuu sateen ja kasvien vedenoton vaikutuksessa. [19]

Viherkaton perusrakenne on näytetty kuvassa 9. Siinä vedenpitävä kerros suojelee sen alla olevan kattorakenteen. Vedenpitävän kerroksen päällä on rakennettu ojitus. Riippuen kattorakenteesta ojitustason tyypillinen paksuus on 8, 15 tai 20 mm. Multa- ja ojituskerros on erotettu toisistaan ohuen rei'itetyn muovikerroksen avulla. Muovikerroksessa on kahden senttimetrin välein reikiä, joiden halkaisija on noin 2 mm. Rakennelman päällä on kaksi kerrosta multaa, jotka ovat erotettu toisistaan huopaan avulla. Ohuissa katoissa, alle kahden senttimetrin multakerros toimii kasvien kasvualustana, johon istutetaan yleensä maksaruohoa. Paksujen kattojen tapauksessa voidaan istuttaa nurmikkoa, kevätesikkoa ja/tai keltamataraa. Kasvialusta multakerroksen alapuolella on kevytsorarae. Tämän kerroksen paksuus on 5-10 cm. Raekoko on alle 2 mm kasvialustalle ja 4-8 mm kevytsorarakeille. [19]

Kappaleessa 2.1 (Mikä on matemaattinen mallinnus) kuvattiin kuinka matemaattisen mallin rakentamiseksi tulisi ensin ymmärtää reaalimaailman ongelma. Tässä kohtaa viherkattomallia, havainnollistuu miten käytännössä yritetään ymmärtää reaalimaailman ongelma ja siihen liittyvät ilmiöt.

2 Malli

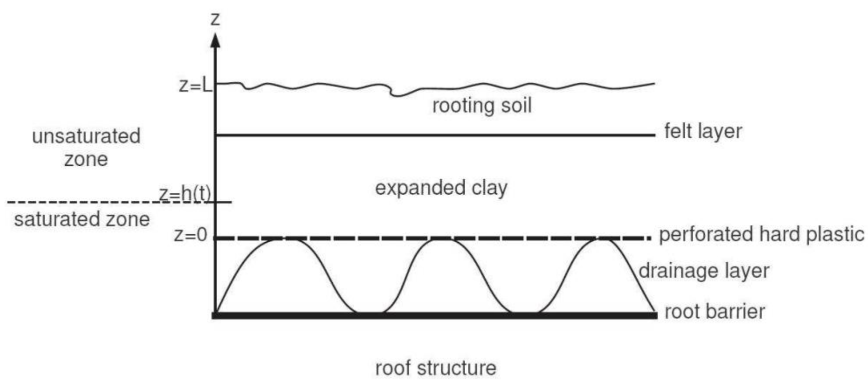
Kuten kappaleessa 2.1 (Matemaattinen malli), kun ongelma on ymmärretty, määritellään perusmuuttujat ja suureet. Tässä osiossa havainnollistetaan miten se käytännössä tapahtuu. Samalla määritellään tehdyt oletukset ja yksinkertaistukset.

Aluksi veden virtauksen dynamiikkaa multakerroksen läpi mallinnettiin. Multakerroksen paksuudeksi oletettiin $L \approx 10^{-1}\ m$ ja lannoitekerroksen vaikutusta oletettiin mitättömäksi. Oletettiin, että multa- ja ojituskerroksen rajapinta on kohdassa $z = 0$ ja multakerroksen pinta on kohdassa $z = L$. Tämän jälkeen mallinnuksessa oli otettu huomioon kaksi eri mahdollista tapausta: (i) ja (ii).

(i) Koko alue $0 \leq z \leq L$ on saturoitumatonta aluetta, niin että mullan saturaatio S on aina vähemmän kuin 1.

(ii) Multa kerroksen pohjalle $0 \leq z \leq h$, missä $h < L$, muodostuu saturoitunut alue.

Tässä esitetty ja kuvassa 9 havainnollistettu malli on yksiulotteisesta tapauksesta, joka esittää vaakasuoraa olevaa kattoa. Kuitenkin malli voidaan helposti yleistää 2- tai 3-ulotteiselle tapaukselle. [19]



Kuva 9 *Viherkaton rakenne [19].*

Kuvasta 9 nähdään, että viherkaton rakenne koostuu alhaalta lähtien, juurten estoseinämästä (estää juurien etenemistä kattoon), ojituskerroksesta (kanavoi ylimääräisen veden), rei'itetystä kovamuovista, paisutetuista kevytsorakerroksesta, lannoite ja multakerroksesta.

Reaalimaailman ongelman mallintamiseksi joudutaan monesti tekemään paljon oletuksia ja yksinkertaistuksia. Tämä pätee myös tähän ongelmaan. Kokeilu- tai simulointivaiheessa tarkastellaan miten hyvin malli vastaa käytännön tuloksia. Mikäli malli ei ole validi joudutaan muuttaman lähtöarvoja ja oletuksia.

2.1 Saturoitumaton alue

Aluksi oletettiin koko alueen $0 \leq z \leq L$ olevan saturoitumatonta, eli $S < 1$. Yksiulotteinen Richardin yhtälö veden virtaukselle saturoitumattomassa mullassa on

$$\Phi \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_0 D(S) \frac{\partial S}{\partial z} + K_0 K(S)\right) - R \tag{2.1}$$

missä $S = S(z, t), R$ kuvaa juurten vedenottokykyä ja Φ on mullan huokoisuusvakio, jonka tässä on oletettu olevan 0,25. Termit $D_0 D(s)$ ja $K_0 K(S)$ ovat vastaavasti veden diffuusiokerroin ja johtavuuskerroin, kerrottuna funktioilla $D(s)$ ja $K(S)$.

Saturoitumatonta aluetta mallinnettaessa ei tiedetty muutamia paranmetrejä. Kuten mm. laajennetun mullan arvoa (m) eikä vakioiden D_0 ja K_0 suuruutta. Tämä on joskus tilanne study group-työpajoissa ja yleensä mallinnukessa, koska erinäisistä syistä mittauksia arvojen laskemiseksi ei voida tehdä. Tällöin joudutaan olettamaan joku lukuarvo parametrien tilalle. Tässä asetettiin $m = \frac{1}{2}$ ja vakioiden D_0 ja K_0 arvoksi asetettiin samat arvot kuin vastaaville kasveille ja mullalle. Vastaavat arvot löytyivät kirjallisuudesta.

Yhtälöitä käsiteltäessä käytetty ajanjakso (time scale) kuvaa veden virtausta multakerroksen läpi gravitaatiovoiman alaisena. Laaduton Richardin yhtälö (2.1) saa lopulta muodon

$$\Phi \frac{\partial S}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\delta D(S) \frac{\partial S}{\partial \hat{z}} + K(S)\right) - \eta(\theta - \epsilon f(s) - \hat{p}_r) \tag{2.2}$$

2.2 Saturoitunut alue

Kun mullasta tulee saturoitunutta, niin oletetaan, että liikkuva raja muodostuu, kun $z = h(t)$ ja multasaturaatio on identtisesti 1 kaikilla $z \in [0, h]$. Nyt pääyhtälöt voidaan kirjoittaa dimensiottomasti (ilman fysikaalista yksikköä) muodossa

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}}\right) - \eta(\theta - \epsilon \hat{p} - \hat{p}_r) = 0 \tag{2.3}$$

Virtaus kalvon läpi kohdassa $z = 0$ on verrannollinen suhteessa paine-eroon kalvon läpi: $Q_{mem} = \kappa(p - p_a)$, missä p_a on ilmakehän paine ojituskerroksen pohjalla. P on paine kohdassa $z = 0$ ja $\kappa \approx 10^{-5}\ m\ s^{-1}\ Pa^{-1}$ (on määritetty kokeellisesti seuraavassa osassa). Ottamalla huomioon virtaus kohdassa $z = 0$ ja ilmakehän paine ojituskerroksen pohjalla saadaan lopulta dimensioton ehto

$$1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} = \alpha \hat{p}, \ \ pisteess\ddot{a} \ \ \hat{z} = 0 \tag{2.4}$$

Muokkaamalla edellistä yhtälöä ja ottamalla huomioon virtauksen jatkuvuus saadaan

$$K(S) + \delta D(S)\frac{\partial S}{\partial \hat{z}} = \frac{\alpha\gamma\hat{h}}{1+\alpha\gamma\hat{h}}, \quad pisteess\ddot{a} \quad \hat{z} = \hat{h}. \tag{2.5}$$

Periaatteessa yhtälö (2.5) ja rajaehto $S = 1$ kohdassa $\hat{z} = \hat{h}(t)$ määrittävät $\hat{h}$:n virtauksena saturoitumattomasta alueesta. Voidaan kuitenkin yksinkertaistaa asioita, jos huomataan dimensiottoman virtauksen olevan hyvin pieni. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa, että hyvin ohuenkin vesikerroksen hydraulisen pään paine riittää saamaan melkein koko veden kalvon läpi. Näin ollen saturoitunut alue voi matemaattisesti romahtaa viivaksi ($\hat{z} = 0$), eli vesikerros valuu multakerroksen läpi. Numeerista ratkaisua varten saturoitumattoman alueen rajaehdoksi saadaan

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left[K(S) + \delta D(S)\frac{\partial S}{\partial \hat{z}}\right] = 0, \quad pisteess\ddot{a} \quad \hat{z} = 0, \tag{2.6}$$

jonka mukaan koko vesimäärä saa mennä kalvon läpi. Koska veden kulku kalvon läpi on nopeampaa kuin juurten vedenottokyky, niin tässä yhtälössä ei oteta huomioon juuriin imeytynyttä veden määrää.

2.3 Kapan (κ) kokeelliset arvot

Kapan arvo johdettiin yksinkertaisen kokeen avulla. Kokeessa muovisäiliöön oli tehty halkaisijaltaan 2 mm suuruinen reikä. Muovisäiliön materiaalin uskottiin olevan hyvin samanlainen ojituskalvon kanssa. Hydraulisen pään aiheuttamaa veden valumisnopeutta reiän läpi mitattiin.

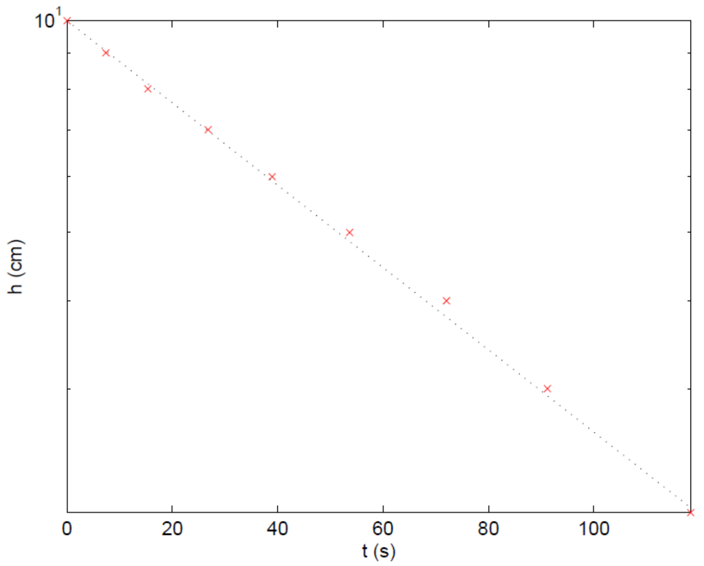
Veden syvyys h ajanfunktiona saatiin yhtälöstä

$$\log h = -\frac{k\rho g}{A_{bottle}}t \tag{2.7}$$

Kokeen aikana tehtiin mittauksia h:sta t:n funktiona, mikä on nähtävillä kuvassa 10. Parhaiten kuvaan soveltuva aikavakio $t_c = \frac{A_{bottle}}{k\rho g}$ oli 74 sekuntia. Yhden reiän läpi oleva virtaus voidaan muuntaa kalvoa läpäisevän veden nopeuden keskiarvoksi, käyttäen kalvon pinta-alaa, joka on ojitettu jokaisella vastaavanlaisella reiällä. Täten

$$\bar{u} = \kappa\Delta p, \qquad \kappa = \frac{A_{bottle}}{A_{membrane}\rho g t_c} \tag{2.8}$$

Käyttäen säiliön poikkileikkauksen pinta-ala saadaan kappaan arvoksi $\kappa \approx 10^{-5}\, m\, s^{-1}\, Pa^{-1}$.



Kuva 10 *Kokeellinen h:n mittaus t:n funktiona [19].*

2.4 Kattoon kohdistuva paine

Jotta yhtälössä (2.2) ollut juuri paine p_r voitaisiin määritellä, niin oletetaan juurten ulottuvan koko multakerroksen leveydelle syvyyteen L. Veden säilyminen juuren sisällä johtaa seuraavaan yhtälöön

$$k_z \frac{d^2 p_r}{dz^2} + 2\pi a k_r (p_a - p_c f(s) - p_r) = 0 \qquad (2.9)$$

missä $k_z = 10^{-14}\, m^6\, s^{-1}\, N^{-1}$ on juuren aksiaalinen virtaus. Käyttäen juuren aksiaalisen virtauksen reunaehtoja dimensiottomassa muodossa juuripaineelle saadaan ehto

$$\frac{d^2 \widehat{p_r}}{d\widehat{z^2}} + \tau(\theta - \epsilon f(s) - p_r) = 0 \qquad (2.10)$$

Tekemällä muutaman oletuksen ja sitä kautta yksinkertaistuksen juuren paineeksi saadaan

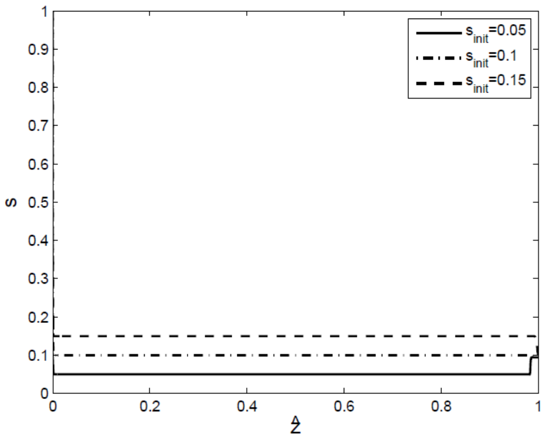
$$\widehat{p_r} = \theta - 1 \qquad (2.11)$$

Mallin valmistamiseksi hyödynnetään yhtälöä (2.2) ja muutamaa määritelmää ja reunaehtoja. Diffuusiotermi yhtälössä (2.2) on mitättömän pieni, joten yhtälö on olennaisesti ensimmäisen kertaluvun epälineaarinen aaltoyhtälö. Sademäärän rajaehtoa välitetään alaspäin aaltona. Mikäli sade alkaa äkillisesti, syntyy shokkirintama, joka etenee nopeasti multakerroksen pohjaan, jos se yhtäkkiä pysähtyy, niin syntyy laajennus viuhka (expansion fan).

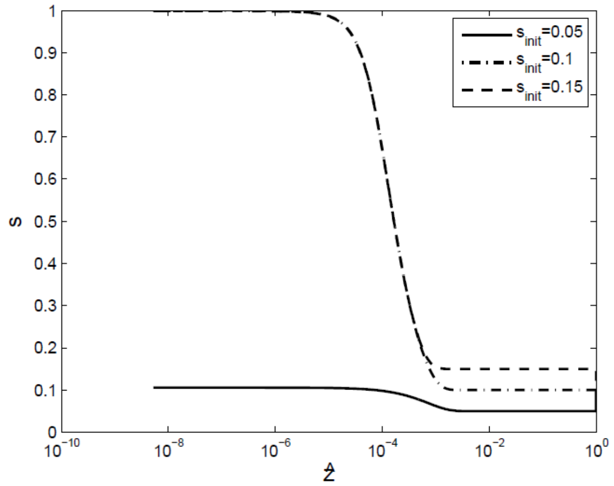
2.5 Numeerinen ratkaisu

Saturoitumatonta aluetta hallitsevaa yhtälöä (2.2) ratkaistiin rajaehtojen avulla. Aluksi ratkaisua lähestyttiin siten, että η termin vaikutus yhtälössä (2.2) jätettiin huomiotta, joten tarkasteltavaksi jäi vain painovoiman vaikutuksesta johtuva veden poispääsy multakerroksen ojituksesta. Lähtökohdan saturaation ajateltiin olevan koko multakerroksen läpi yhdenmukainen. Multakerroksen saturaatiolle mietittiin kolmea eri lähtöarvoa: $S_{init} = 0{,}05;\ 0{,}1$ tai $0{,}15$. Kuvassa 11 on eri saturaation lähtöarvoista muodostunut käyrä ajan funktiona. Vastaava logaritminen kuvaaja on nähtävillä kuvassa 12. Kuvassa 12 demonstroidaan rajakerroksen paksuutta ($\delta^{\frac{1}{2}}$) S:ssä pisteessä $\hat{z} = 0$, mikä oli ennustettu asymptoottisissa analyyseissa ja mitä oli saatu numeerisessa ratkaisussa, mutta ei ollut näkyvillä kuvassa 11. Kun $S_{init} = 0{,}05$, niin S_{bottom} on vielä kaukana ykkösestä, jopa dimensiottomalle ajan arvolle 100 kuvassa 11. Kuvassa 13 nähdään S_{bottom} kehitystä ajan suhteen. Kun S pisteessä $\hat{z} = 1$, niin S_{top} on nähtävillä kuvassa 14.

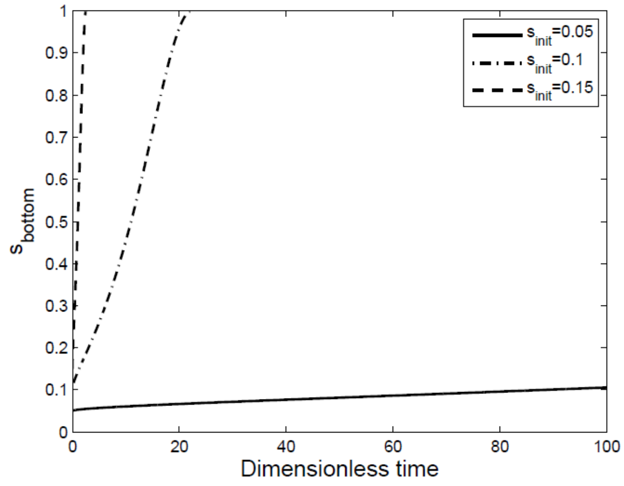
Näin ollen tulosten mukaan on huomattava aikaero täyden saturaation saavuttamisessa multakerroksen pohjalla, kun S_{init} kasvatetaan 0,05:stä 0,1:een. Huomataan, että sademäärän rajaehdon (2.11) vaikutus (simulaation lopussa) on ollut vain pieneen alueeseen. Tämä on nähtävillä kuvan 11 oikeassa alareunassa, jossa on on shokkirintaman etenemisen alku alaspäin kohdasta $\hat{z} = 1$. Koska δ on pieni, niin shokkirintama kuvassa 11 näyttää hyvin terävältä, ja arvot sen molemmin puolin (alas tai vasen shokkirintamasta) ovat sen alkuehtoja.Yhtälön $K(S) = \nu\hat{Q}$ antama arvo on (näkyvillä kuvassa 11 ylös tai oikea shokkirintamasta) ja odotetusti riippumaton alkuehdoista, kuten on nähtävillä kuvassa 14.



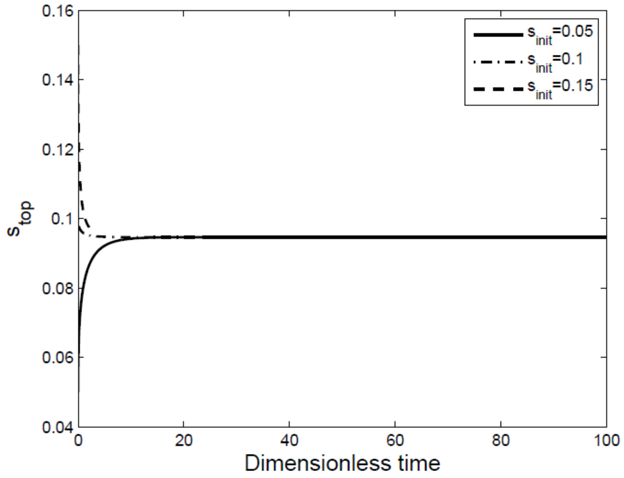
Kuva 11 *$\boldsymbol{S}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$:n funktiona kolmelle eri alkuehdolle ($\boldsymbol{S_{init} = 0,05;\ 0,1;\ 0,15}$), joko dimensiottomassa ajassa 100 ($\boldsymbol{S_{init} = 0,05}$) tai kun $\boldsymbol{S}$ saavuttaa 1:n kohdassa $\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{S_{init} = 0,1;\ 0,15}$) [19].*



Kuva 12 *Logaritminen käyrä* $\boldsymbol{S}$*:stä* $\hat{\boldsymbol{z}}$*:n funktiona kolmelle eri alkuehdolle (*$\boldsymbol{S_{init}} = \mathbf{0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}15}$*), joko dimensiottomassa ajassa 100 (*$\boldsymbol{S_{init}} = \mathbf{0{,}05}$*) tai kun* $\boldsymbol{S}$ *saavuttaa 1:n kohdassa* $\hat{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$ *(*$\boldsymbol{S_{init}} = \mathbf{0{,}1;\ 0{,}15}$*). [19].*



Kuva 13 $\boldsymbol{S_{bottom}}$ *dimensioton ajan funktiona kolmelle eri alkuehdolle (*$\boldsymbol{S_{init}} = \mathbf{0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}15}$*) [19].*



Kuva 14 $\boldsymbol{S_{top}}$ *dimensiottoman ajan funktiona kolmelle eri alkuehdolle (*$\boldsymbol{S_{\mathbf{init}}} = \mathbf{0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}15}$*) [19].*

Diffuusiokerroin on ääretön, kun $S = 1$, mutta tämä ei aiheuta mitään ongelmaa numeerisessa ratkaisussa. Tämä näyttäisi sallivan tasapainotilan (steady state), kun sademäärä on vakio. Mikäli sademäärä on korkeampi kuin juurten vedenottokyky, niin pohjakerroksen saturaatio on yksi ja siinä olevan rajakerroksen paksuus on $\delta^{\frac{1}{2}}$, jossa se hakeutuu arvoon, joka oli määrätty yhtälössä $K(S) \approx \nu\hat{Q} - \eta \int_0^L R$, kuten kuvassa 15. Sademäärän ollessa pienempi kuin juurten vedenottokyky, niin pohjan saturaatio laskee miltei nollaan.

Kuva 15 demonstroi sademäärän äkillisen kasvun $\hat{Q} = 0{,}1$:stä $\hat{Q} = 10$. Tämä kielii lähtöshokkirintaman etenemisestä alaspäin multakerroksessa ja lopulta tasapainotilan (steady state) muodostumista. Pohjan saturaatio ei kasva ykköseen niin kauan kuin shokkirintama saapuu sinne. Kuva 16 demonstroi sademäärän $\hat{Q}$ yhtäkkisen laskun 0,1:een. Täyttyy huomioida sen, että aikavälit ovat pitempiä; aikayksikössä on lähtölaajennuksen viuhka (initial expansion fan) painovoiman aiheuttama ojitusvuoto, joka pienentää saturaation, yhtälön $K(S) = \nu\hat{Q}$ antamaan arvoon, jota seuraa aikayksikön $O\left(\frac{1}{\eta}\right)$ pienempi lasku, kun juuret ottavat jäljelle jäävän veden.

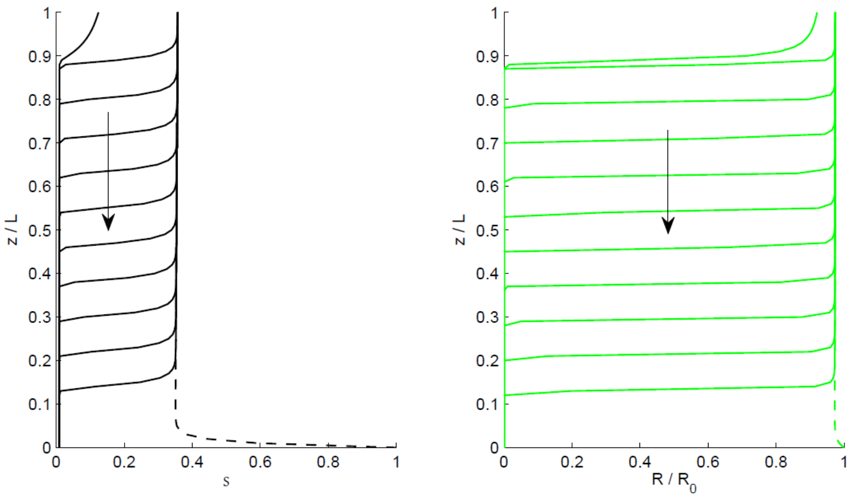
Tähän mennessä viherkattomallia on siis määritelty suureet, tehty yksinkertaistukset ja kerrottu taustaoletuksista. Lisäksi ongelma on pilkottu pienempiin osiin ja eri lähtöarvoilla ongelmaa on simuloitu tietokoneen avulla käyttäen MATLABia. Jotta voidaan lopullinen matemaattinen malli rakentaa, kaikki saatu tieto tulee formalisoida matematiikan kielelle. Tämä on tehty tässä ja seuraavassa kappaleessa.

Viherkattomallin raportin jokaisessa vaiheessa on yritetty kertoa käytetyistä menetelmistä ja on perusteltu niiden käyttöä. Tämä on tärkeää, koska olosuhteiden muuttuessa ja mallia kehittäessä voidaan palata perusteluihin ja katsoa pätevätkö perustelut uudessa ympäristössä tai olosuhteissa.

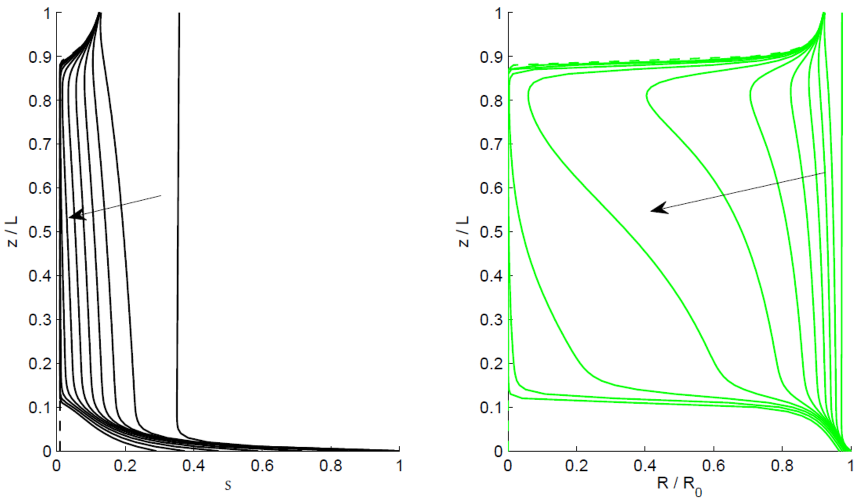
3 Kaksihuokoinen malli

Viherkatossa käytetyt paisutetut kevytsorarakeet (expanded clay pellets) ovat suurikokoisia, mutta sisältävät paljon huokosia. Huokosten koon välinen ero kevytsorarakeiden ja sisärakeiden välillä on tärkeää, sillä tämä ero sallii veden tulevan rakeisiin ja säilyvän niissä pitempään kuin, mitä se olisi muuten säilynyt mullassa. Täten kaksoishuokoinen (two-porosity) malli näyttäisi olevan toimiva ratkaisu.

Tämä on luonnos ”laatikko-” tai ”keskittyneelle mallille” (box or lumped model) veden varastoimiselle makrohuokoisissa multapartikkeleiden välissä. Multapartikkeleilla on saturaatio S ja mikrohuokoisilla osilla, jotka sijatsevat multapartikkeleiden sisällä saturaatio S_P. Veden kulku sisään tai ulos partikkeleista on parametrisoitu esiintyvän suoran verrannollisessa suhteessa saturaatioeroon $S - S_p$. Juuret eivät pääse käsiksi jokaiseen yksittäiseen partikkeliin, joten ainoastaan makrohuokosista muodostuu vedenpoistotermi (sink term) R. Juurten vedenotto $R(S)$ on suurelta osin juurissa valitsevasta negatiivisesta paineesta johtuva. Kuitenkin, kun saturaatio pienenee, niin suuri kapillaaripaine yrittää pienentää sitä. Näin saadaan, että $R(S)$ on kutakuinkin vakio, kun S on lähellä 1, mutta laskee, kun S on pieni (kuten ylläolevassa mallissa).



Kuva 15 *Saturaation ja juurten vedenoton profiili aikaväleillä 1. Kuvassa aika kasvaa nuolen osoittamaan suuntaan. Tämä tulos on yhtäkkisen sadeveden kasvu tasapainotilan muutos* $\widehat{\boldsymbol{Q}} = \mathbf{0.1} \rightarrow \ \widehat{\boldsymbol{Q}} = \mathbf{10}$. *Katkoviiva kuvaa tasapainotilaa [19].*



Kuva 16 *Saturaation ja juurten vedenoton profiili aikavälillä 10 (dimensioton). Kuvassa aika kasvaa nuolen osoittamaan suuntaan. Tämä tulos on yhtäkkisen sadeveden kasvu tasapainotilan muutos* $\widehat{\boldsymbol{Q}} = \mathbf{0.1} \rightarrow \ \widehat{\boldsymbol{Q}} = \mathbf{10}$. *Katkoviiva kuvaa tasapainotilaa [19].*

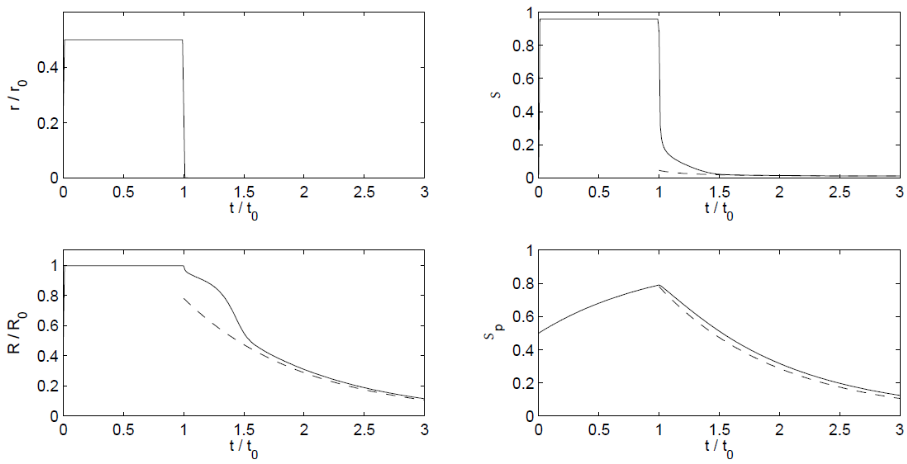
Seuraavat yhtälöt ovat dimensiottomia ja aikaväli on valittu juurten vedenotto vauhdin mukaan. Painovoiman odotetaan aiheuttavan virtausta multakerroksen ojitusten läpi vauhdilla $\mathrm{K}(S)$ ja aikavälillä η. Sademäärä aiheuttaa virtauslähteen, jonka odotetaan olevan yhtäsuuri kuin painovoimasta johtuva veden poisvirtaus multakerroksen läpi.

$$\Phi\frac{dS}{d\hat{t}} = \frac{1}{\eta}K(S) - \lambda\big(S - S_p\big) - R(S) \tag{3.1}$$

$$(1-\Phi)\Phi_p\frac{dS_p}{d\hat{t}} = \lambda(S - S_p), \tag{3.2}$$

missä Φ_p on kevytsorarakeiden huokoisuus. Yhtälössä (3.1) η on hyvin pieni ja yhtälössä (3.4) ϵ on myös hyvin pieni, niinpä keskitytään tarkastamaan erityistapauksta $\epsilon \sim \eta^{\frac{2}{7}}$.

Ratkaisujen käyttäytymiset tässä mallissa on hyvin suoraviivaisia. Kuvassa 16 nähdään esimerkki, jossa suurta sademyrskyä seuraa kuiva ilma. Sataessa r:n arvo on luokkaa 1 ja nopeassa ajanjaksossa ($\hat{t} \sim O(\eta)$) saturaatio S palautuu kohti tasapainotilaa, yhtälön $K(S) = r(\hat{t})$ mukaisesti. Tämä puolestaan saa aikaan veden muuttumisen partikkeleihin aikavälillä $O(1)$ ja yhtälön (3.2) mukaan. Yhtälön (3.1) termien tasapainottamisen jälkeen etsitään yhtäläistä ratkaisua pienille S:n arvoille, joille $K(S) \approx \frac{1}{4}S^{\frac{9}{2}}$. Sateen lakatessa $r = 0$ ja saturaatio S laskee nopeasti painovoiman alaiseen veden poistoon seurauksena aikavälissä $O(\eta)$. Termin $O\left(\eta^{\frac{2}{7}}\right)$ huomiotta jättäminen johtaa siihen, että S menee kohti nollaa.



Kuva 17 *Makro- ja hiukkastason ratkaisut saturaatioille* $\boldsymbol{S}$ *ja* $\boldsymbol{S_p}$*, ja juuren vedenotolle, sadeveden* $\boldsymbol{r(t)}$ *tuloksena, joka esittää kovan sateen. Katkoviivat näyttävät rajakäyttäytymisen [19].*

Ajanjakson olleessa luokkaa $O(1)$, niin $S \sim \eta^{\frac{2}{7}}$ ja yhtälöistä tulee

$$O\left(\eta^{\frac{2}{7}}\right) = O\left(\eta^{\frac{2}{7}}\right) - \lambda(O\left(\eta^{\frac{2}{7}} - S_p\right) - (1 - \frac{\epsilon}{S}) \tag{3.3}$$

$$(1-\Phi)\Phi_p\frac{dS_p}{d\hat{t}} = \lambda(O(\eta^{\frac{2}{7}}) - S_p) \tag{3.4}$$

Täten termin $O\left(\eta^{\frac{2}{7}}\right)$ huomiotta jättäminen saa aikaan S_p:n eksponentiaalisen pienenemisen ja makrohuokosiin tullut vesi joutuu heti juurten otettavaksi, kuten kuvassa 17. Juurten vedenotto säilyy pidempään sen jälkeen kun sade lakkaa, verrattuna tapaukseen, jossa ei olisi mikrohuokosia kevytsorarakeita, jolloin S laskee nopeasti kohti nollaa.

3.1 Nopean saturaation malli

Mikäli puolestaan oletetaan kevytsorarakeiden nopeaa saturaatiota, niin

$$S_p = S_O \mathrm{H(S)}, \tag{3.5}$$

missä H on Heavisiden funktio, S_p on yksittäisen rakeen saturaatio, S_o on yksittäisen rakeen huokoisuus ja S on sisärakeen (inter-pellet) huokoisuus. Tarvittava ajanjakso voidaan saavuttaa korkealla kapillaaripaineella, joka johtuu rakeiden pienhuokoisuudesta.

Käyttäen pohjana yhtälöä 2.2 ja ottamalla huomioon tehdyt oletukset pienille S:n arvoille ja jättämällä huomiotta aikaderivaatta, niin saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\tilde{S}^{\frac{9}{2}} + \tilde{\delta}\tilde{S}^{\frac{5}{2}}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \hat{z}}\right) = \tilde{\eta}\hat{R}. \tag{3.6}$$

Johtuen fysikaalisten parametrien arvojen epävarmuudesta, jotka liittyvät veden kuljetukseen multakerroksen läpi, niin $\tilde{\delta}$:n arvo on pieni tässä. Kuitenkin $\tilde{\delta}$:arvot voivat olla luokkaa 1, joten se on tällä hetkellä toistaiseksi säilytetty yhtälössä (3.6).

Differentiaaliyhtälö on rajoitettu ylärajaehdolla

$$\frac{1}{4}\left(\tilde{S}^{\frac{9}{2}} + \tilde{\delta}\tilde{S}^{\frac{5}{2}}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \hat{z}}\right) = \hat{Q}_{in}, \quad kohdassa \quad \hat{z} = 1 \tag{3.7}$$

Olettamalla, että diffuusiotermi $\tilde{\delta}$ on säilytettävä, niin seuraa alarajaehto

$$\tilde{S} = 0, \quad kohdassa \quad \hat{z} = \widehat{W}(\tilde{t}) \tag{3.8}$$

Lopuksi halutaan määrittää tarkka paikka vapaalle pinnalle (free boundary) $\hat{z} = \widehat{W}(\hat{t})$, märän ja kuivan maan välillä. Veden massan säilyminen vakiona pisteessä, missä S_p hyppää nollasta S_O:aan, johtaa

$$\frac{d\widehat{W}}{d\tilde{t}} = -\frac{4}{3}\left(\tilde{S}^{\frac{9}{2}} + \tilde{\delta}\tilde{S}^{\frac{5}{2}}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \hat{z}}\right), \quad kohdassa \quad \hat{z} = \widehat{W}(\tilde{t}) \tag{3.9}$$

Tietysti, mikäli rakeet olisivat osittain saturoituneita, niin yhtälöä (3.9) tulisi hieman muokata, mikä johtaisi nopeammin liikkuvaan vapaaseen pintaan. Mikäli diffuusiokin voitaisiin jättää huomiotta, niin hyödyntämällä yhtälöt (3.6) ja (3.7) yhtälö (3.9) saisi muodon

$$-\frac{d\widehat{W}}{d\tilde{t}} = -\frac{16}{3}(\hat{Q}_{in} + \widehat{W} - 1) \tag{3.10}$$

Vapaan pinnan ehto (free boundary condition) (3.9) pätee ainoastaan etenevällä märälle alueelle. Kuitenkin tarvitaan vaihtoehtoista muotoa, kun tämä alue kutistuu, mikä voi tapahtua kun sademäärä laskee riittävästi. Multakerroksen kaikissa paikoissa, eli vapaan pinnan alimmassa kohdassa ja sen nykyhetkisessä kohdassa, juuret voivat jatkaa veden poistamista rakeista pienentäen siten S_p termiä.

Kuten raportissa on kerrottu, niin multakerroksessa on vähintään 4 eri aluetta:

1. Kuiva-alue, jossa $S = S_P = 0$.
2. Kostea saturoitumaton alue I, jossa $S = 0, 0 < S_P < S_O$.
3. Kostea saturoitumaton alue II, jossa $0 < S < 1, S_P = S_O$.
4. Märkä saturoitunut alue, jossa $S = 1$ ja $S_P = S_O$.

4 Yhteenveto

Tässä mallissa selostettiin yksiulotteinen aikariippuvainen matemaattinen malli multakerroksen saturaation muodostumisesta tasaisessa viherkatossa. Mallin mukaan täyssaturoitunut $S = 1$ alue muodostuu multakerroksen pohjalle ja voi olla hyvin kapea alue suhteessa multakerroksen paksuuteen.

Lähtötilan kuivasta multakerroksesta ja suuren sademäärän puhkeamisesta laskettiin saturaatiorintaman etenevän alaspäin multakerroksessa. Mallissa myös selostettiin sademäärän laskun aiheuttama yhtenäisen saturaation väheneminen. Lopputuloksena havaitaan, että suurin osa multakerrokseen tulleesta sadevedestä, pääsee pois pohjalla olevista tukikalvoon tehdyistä reiästä.

Pienessä mittakaavassa voidaan katsoa mikrohuokosia sisältävien kevytsorarakeiden ja multapartikkelien olevan tarpeeksi huokoisia. Veden virtausta tyypillisen partikkelin läpi oli mallinnettu käyttäen virtausta seuraavien systeemien välillä:

(a) makrohuokoiset systeemit (joiden saturaatio on kuin yllä mallinnettu)
(b) Juuriverkosto

Näiden kahden huokoisen mallin perusteella nähdään, että sadejaksojen välillä mikrohuokoiset voivat varastoida (pitkäksi aikaa) vettä, joka on myös juurten saatavilla.

Jatkokehityksenä voisi olla multakerroksen paksuuden L huomioiminen sademäärään viherkattorakenteessa. Tarkoituksena olisi tällöin L:n minimoiminen, ilman että saturaatiotaso nousee tai laskee liikaa. Korkea saturaatiotasohan esti kasveja hengittämästä ja matala saturaatiotaso johti kasvien kuivumiseen. Ensimmäiset askeleet L:n minimoimiseksi olisi tehdä tarkempia mittauksia ja kokeita, joilla voitaisiin vakioiden arvot määrittää tarkemmin. Tämän jälkeen voitaisiin uudestaan simuloida mallia käyttäen laajempaa sademäärän dataa optimaalisen multakerroksen saavuttamiseksi. Myös katon kaltevuuden vaikutus voitaisiin ottaa jatkossa huomioon.

Viherkattomalli oli siis dynaaminen malli, koska systeemin tila muuttui ajan funktiona. Mallia voidaan pitää myös deterministisenä. Tässä huomattiin, miten mallin avulla pystytään simuloimaan ongelmaa nopeasti ja vähin kustannuksin. Vastaavat kokeet todellisuudessa kestäisivät pitkään ja olisivat kalliita. Simulaatioiden tuloksena pystyttiin antamaan juurten vedenottoa parantavia ratkaisuja. Kuten tämän viherkattomallin yhteenveto-osuudesta kävi ilmi, mallia joudutaan edelleen jatkokehittämään. Tämä on tyypillistä matemaattiselle mallinnusprosessille, kuten tämän työn alussa kuvattiin.

4 STUDY GROUP-TYÖPAJAN TOIMINNAN HYÖTY TEOLLISUUDELLE

Aikaisemmat teollisuuden osallistujat ovat havainneet, että Study Group-työpaja on useimmiten löytänyt ratkaisuja ja oivalluksia olemassa oleviin teollisuuden ongelmiin [1]. Mikäli Study Group-työpajoissa ei ollakaan saatu lopullista ratkaisua, niin siellä on kuitenkin syntynyt hyviä ja uusia ajatuksia, joita teollisuuden edustajat ovat voineet lähteä jatkokehittämään. Study Group-työpajojen tärkein anti teollisuudelle lienee keskitetyn huomion ja nopean edistyksen tarjoaminen teollisuuden ongelmiin minimikustannuksella. Tämä hyöty korostuu eniten niiden yritysten kohdalla, joilla ei ole mallintajia tai tutkimus- ja kehitysryhmiä [13]. Study Group-työpaja tarjoaa teollisuudelle tuoreimmat ja kehittyneimmät tieteelliset tulokset ja parhaat mahdolliset tietotekniset laskentavälineet, joilla voidaan teollisuuden ongelmalle hakea paras mahdollinen ratkaisu [24].

On vaikeaa arvioida miten Study Group-toiminta on hyödyntänyt tiettyä yritystä taloudellisesti, koska yritykset eivät yleensä halua paljastaa liikesalaisuuksiaan. Kuitenkin historian aikana on paljon tapauksia, jolloin Study Group-työpajat ovat hyvin suuresti auttaneet yrityksiä. Vuosien mittaan on saatu myös kvantitatiivista tietoa työpajojen hyödystä teollisuuteen. Esimerkiksi tiedetään, että Study Group-työpaja on saanut mm. tekstiilitehdasta säästämään muutamia satoja tuhansia euroja ja auttanut pientä teräsvalmistaja yritystä kasvamaan isoksi yritykseksi myymällä Study Group-työpajassa kehitettyä masuunikoodiaan. [17]

Study Group-työpaja on myös pystynyt perustamaan kestäviä ja hedelmällisiä kontakteja tutkimuksen ja sovelletun matematiikan matemaatikkojen välillä [1]. Tämä on tärkeää teollisuudelle, koska he etsivät jatkuvasti uusia kykyjä pysymään kilpailukykyisenä parantamalla toimintaansa. [17] Pitemmän päälle ja isommassa skaalassa voidaan hyvällä mielin todeta, että Study Group-työpajat auttavat kehittämään isäntä maan taloutta.

Study Group-työpaja edistää teollisuuden yhtiön profiilia jatko-opiskelijoiden keskuudessa. Tämä puolestaan helpottaa yrityksiä houkuttelemaan työtä hakevia opiskelijoita. [1] Ainoita kustannuksia tästä kaikista hyödystä teollisuudelle ja yrityksille on vaatimaton osallistumismaksu, jota yritykset joutuvat maksamaan ja se fakta, että yrityksen edustajat joutuvat olemaan viikon pois omasta työstään. Kuitenkin jälkimmäiseltä hankaluudeltakin on joskus vältytty aikaisimmissa osioissa mainitulla In-house-menetelmällä, jolloin yritykset ovat pyytäneet asiantuntijamatemaatikot tulemaan paikan päälle yrityksen tiloihin sen sijaan, että he lähettäisivät yhden edustajan Study Group-työpajaan. [16]

4.1 Joitakin tutkittuja teollisuuden ongelmia

Study Group-työpajoissa on tähän asti tutkittu lukuisia ongelmia. Tässä kerrotaan muutamasta esimerkkiongelmasta tarkoituksena luoda jonkinlainen käsitys Study Group-työpajan kyvystä käsitellä monipuolisia teollisuuden ongelmia. Lisäksi joidenkin ongelmien kohdalla kerrotaan miten teollisuus on hyötynyt Study Group-työpajan ratkaisusta.

1. Lego-palikat

Tanskan Study Group-työpajassa pohdittavana oli kysymys: voidaanko mikä tahansa lego-rakennelman rakennusohje generoida täysin automaattisesti? Lego-yhtiö, joka on alun perin tanskalainen, halusi tietää mikä on optimaalisen rakennusohjealgoritmin kompleksisuus kolmiulotteiselle rakennelmalle. Vaatimuksena oli se, että rakennelman piti olla mahdollisemman kevyt ja kestävä.

Työpaja pystyi tarjoamaan optimaalisen rakennusalgoritmin vain hyvin yksinkertaisille 3D-kappaleille. Tarkempien analyysien jälkeen huomattiin, että yleisen tapauksen ratkaiseminen on hyvin vaativa tehtävä ja kompleksisuudeltaan jopa NP-luokkaa (NP tulee sanoista ”nondeterministic polynomial” eli epädeterministinen polynominen. Tietojenkäsittelytieteessä NP-luokka on eräs aikavaativuusluokka, joka tarkoittaa niiden päätöksenteko-ongelmien joukkoa, joille voidaan polynomisessa ajassa löytää ratkaisu epädeterministisellä Turingin koneella [25]).

Kuva 18 *Lego-palikka [23]*.

Työpaja huomasi, että kokeneet Lego-rakentajat pystyvät rakentamaan lähes optimaalisen rakennelman muutamassa minuutissa. [23] Tästä syystä olemassa olevat algoritmit ja tietokoneiden kapasiteetit eivät ole riittävän tehokkaita verrattuna kokeneisiin Lego-rakentajiin.

2. S-tog-kuljettajien työvuorolistat

S-tog on Kööpenhaminan seudun paikallisjunajärjestelmä. S-togin veturikuljettajien työvuorolistoja järjestävä taho halusi tietää miten työvuorolistoja voidaan optimoida. Työvuorolistan tulisi olla joustava (muutaman minuutin viivästys sallitaan) ja tehokas, eli maksimoidaan työajan ja veturin kuljettamiseen käytetyn ajan suhdetta.

Study Group-työpajaan tuotiin käytössä oleva työvuorolista, jota piti kehittää. Työpajan päätyttyä ratkaisuna työpaja esitti uuden ”Standardin työvuorolistan”, joka sopii suurelle osalle junaraiteille. Työpajan esittämää työvuorolistaa käyttäen, yhtiö pystyi lisäämään tehokkuuttaan ja työaikasuhdettaan, joka nousi 80 %:iin (suhde oli alun perin 60 %). Lisäksi työaikajoustavuus lisääntyi 9 minuuttiin (ennen oli keskimäärin 2 min). Huomattuaan matematiikan kyvyn lisätä yhtiön tehokkuutta, S-tog-junayhtiö viipymättä palkkasi logistiikkaosastoonsa erään työpajassa ongelman parissa toimineen jatko-opiskelijan.

Kuva 19 *Raitiovaunujenreittikartta [23].*

5 STUDY GROUP-TOIMINNAN MERKITYS TUTKIMUKSELLE

Usein Study Group-työpaja edistää yliopistojen ja teollisuuden välistä suhdetta ja auttaa joskus osallistujia saamaan työsopimuksen teollisuuden tai tutkimusalan kanssa. Study Group-työpajassa tutkitut ongelmat usein johtavat haastaviin uusiin tutkimusalueisiin, joista on suoraa hyötyä fysiikalle tai teollisuudelle. [1] Kun yliopistot tutustuvat teollisuuden ongelmiin, niin opetusta ja tutkimusta voidaan päivittää siten, että ne ovat relevantteja tekniikan ongelmien kanssa ja palvelevat yhteiskunnan välittömiä tarpeita. [27]

Työpajat luovat uusia tutkimusaiheita uusille valmistuneille oppilaille ja siten mahdollisesti lisäävät jatko-opiskelijahakijoiden määrää kyseiseen yliopistoon. Työpajat auttavat yrityksiä tutustumaan nuoriin opiskelijoihin ja arvioimaan heitä tulevaisuuden työllistymistä varten. Study Group-työpaja luo myös mahdollisuuden työskennellä mukavien ja eri paikoista olevien ihmisten kanssa. [1]

Lisäksi Study Group-työpajat tarjoavat tasavertaisen ympäristön, jossa vastavalmistuneet opiskelijat tai jatko-opintojaan suorittavat opiskelijat pääsevät yhdessä samanarvoisesti jakamaan ideansa huippututkijoiden tai professoreiden kanssa. Yleensä tämä tasavertainen panoksen antaminen ei ole mahdollista normaaleissa konferensseissa. Työpajojen tarjoama tasavertainen ympäristö kannustaa ja motivoi vasta valmistuneita opiskelijoita heidän urallaan. [12] Lisäksi edellä mainitussa ympäristössä jatko-opiskelijat pääsevät käytännössä kehittämään suullisen kommunikaatiotaidon, joka on hyvin olennaista heidän tulevaisuuden työurilla [27]. Joskus tutkitut ongelmat johtavat erilaisiin julkaisuihin [13].

Julkaisut inspiroivat tutkijoita tutkimaan uusia aihealueita ja mahdollisesti laajentamaan jotain matematiikan osa-aluetta tai jopa kehittämään uutta matematiikkaa. Edellisen seikan havainnollistamiseksi seuraaviin kappaleisiin (6.1 ja 6.2) on otettu kaksi esimerkkiä, joissa teollisuuden ongelman tutkiminen on edistänyt aiheeseen liittyvän matematiikan kehitystä tai uudelleen esiinnousua. Nämä kaksi esimerkkiä ovat pantograph-yhtälö ja vapaan reunan ongelma. Näihin esimerkkeihin syvennytään seuraavissa osioissa tarkemmin, mutta niiden lisäksi tässä kohtaan voidaan mainita kaksi muuta matematiikan osa-aluetta, jotka lähtivät kehittymään Study Group-työpajoissa esille nousseiden ongelmien myötä.

Ensimmäisenä esimerkkinä voidaan mainita, että tutkittujen ongelmien myötä pystyttiin kehittämään yleistetty parabolinen osittaisdifferentiaaliyhtälö ohutkalvojen kuten lasin, pinnoitteen tai voitelun indusoimalle virtaukselle. Toisena esimerkkinä voidaan mainita stokastiset differentiaaliyhtälöt, jotka edellisen vuosisadan loppupuoleen asti olivat vain hyvin suppean piirin tiedossa ja käytössä. [17]

Study Group-työpaja on toiminnoillaan lisännyt laajemman yhteisön tietoisuutta ja ymmärryksen kasvua matematiikan kyvystä tarjota ratkaisuja reaalimaailman ongelmiin [1]. Toisin sanoen, Study Group-työpaja auttaa ihmisiä ymmärtämään matematiikan tärkeyttä ja lisäämään tietoisuutta sen kyvystä auttaa heitä arjen ongelmissa. Tämä puolestaan toimii motivaationa saamaan yhä enenevässä määrin ihmisiä opiskelemaan matematiikka ja toimimaan sen parissa. Mitä enemmän ihmisiä on alalla, niin se automaattisesti lisää tutkimuksen kirjoa ja sen kehitystä.

5.1 Pantograph-yhtälö

Junaliikenteessä virroitin (pantograph) (kuva 20) on teline, joka on kiinnitetty sähköjunan tai raitiovaunun päälle siirtämään sähkövirtaa ajojohtimista veturiin tai junan apulaitteille. [17]

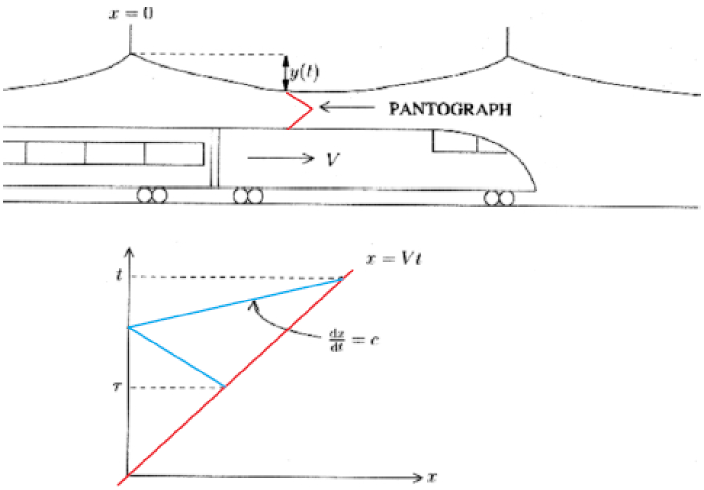
Oxfordissa järjestetyssä Study Group-työpajassa Britannian junaliikenteen toimesta esitettiin Kuvan 20 mukainen ongelma. Ongelmana oli uudelleen mallintaa virroitinta, niin että varmistetaan jatkuva kontakti telineen ja yläpuolella olevien johtimien välillä. Study Group-työpajan toiminnan seurauksena pantograph-yhtälö, josta aikaisemmin oli mitättömän pieni määrä tekstiä tai kirjallisuutta nousi nyt tutkimuksen kohteeksi ja lukuisien kirjojen teemaksi. [17]

Kuva 20 *Junan virroitin [17].*

Itse pantograph-yhtälö on muotoa

$$\frac{dy}{dt}(t) = ay(\lambda t) + by(t), \quad t > 0 \tag{6.1}$$

Yhtälön johtamista on havainnollistettu Kuvan 21 avulla. Asymptoottisena haasteena yhtälö tarjoaa lukuisia analyyttisiä ja numeerisia mahdollisuuksia. Tässä oli keskitytty tapaukseen $\lambda = 1 - \epsilon$, jossa ϵ on pieni.



Kuva 21 *Pantograph-yhtälön johto [17].*

Eli, kuten Kuvasta 21 nähdään $y(t)$ riippuu $y(\tau)$, missä

$$t - \tau = \frac{V}{c}(t + \tau) \tag{6.2}$$

Niinpä $dy(t)/dt$ riippuu $y(\lambda t)$:stä, missä

$$\lambda = \frac{c-V}{c+V} < 1 \tag{6.3}$$

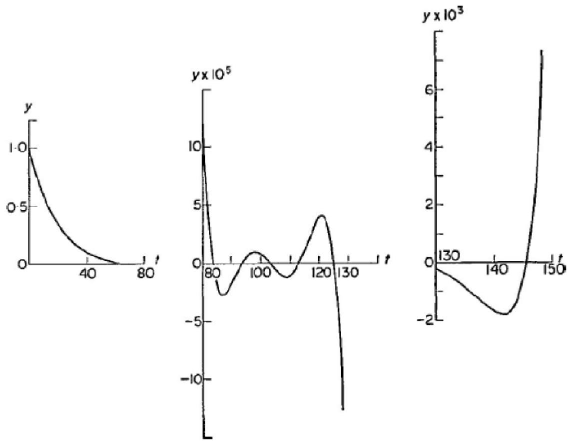
Siis

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(\lambda t) + by(t) \tag{6.4}$$

on pantograph-yhtälö (Ambartsumian, 1944). Moniskaalausmenetelmää käyttämällä saadaan yhtälö

$$\frac{dy}{dt}(t) = 0{,}95y(0{,}99t) - y(t), y(0) = 1, \tag{6.5}$$

jonka ratkaisut ovat kuvan 22 mukaiset.



Kuva 22 *Yhtälön (6.5) ratkaisut [17].*

Study Group-työpaja nosti siis pantograph-yhtälön uudestaan esille tutkimusten kohteeksi. Kiitos monien tutkimusten, tänä päivänä on löydetty monia sovelluskohteita pantograph-yhtälölle. Lisäksi yhtälö on auttanut matematiikan eri osa-alueita yhdistymään.

Esimerkiksi kuvitellaan tilannetta, jossa uhkapeluri kohtaa vedonvälittäjän. Uhkapeluri asettaa panoksensa ja vedonvälittäjä (dealer) heittää täysin symmetristä kolikkoa. Mikäli heiton tuloksena on klaava vedonvälittäjä antaa kaksinkertaisen määrän uhkapelurin panoksesta ja mikäli tuloksena on kruunu uhkapeluri saa vain puolet panoksestaan. Pantograph-yhtälöä käyttämällä voidaan arvioida voiton odotusarvoa. Tätä oli tutkittu ja oli huomattu, että vastoin odotuksia uhkapeluri jää tappiolle pidemmän päälle. Mielenkiintoisinta on se, että voidaan jopa arvioida pelaamiskertojen määrä, joiden jälkeen uhkapeluri jää todennäköisesti tappiolle. [17]

5.2 Vapaan reunan ongelma

Vapaan reunan ongelma (free boundary problem) on osittaisdifferentiaaliyhtälö, jota yritetään ratkaista tuntemattoman funktion ja alueen suhteen. Normaalisti ratkaistessa osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tiedetään reunaehdot ja systeemin alku tai lopputila. Vapaan reunan ongelmassa reunaehdot yhtälölle eivät ole alkuhetkellä tiedossa. Vapaan reunan probleema nousi tutkimuksen kohteeksi, kun Oxfordin Study Group-työpajassa haluttiin tutkia nesteen kiinteäksi muuttumisen rajanpinnankulkua aineen sisällä. Rajapinnan ratkaisu piti löytää ilman reunaehtoja.

Vapaan reunan ongelma sai matematiikan kehittymään siten, että kehitettiin menetelmiä, jolla ratkaisut saadaan ongelmaan ilman alussa määriteltyjä reunaehtoja. Vapaan reunan teorialle on löytynyt monia sovelluskohteita. Esimerkkejä, joissa voidaan vapaan reunan teoriaa soveltaa, on mm. metallin jähmettyminen tarkastelemalla sulan ja kiinteän pinnan rajaa, maakerroksen sisällä jäätyneen veden ja sulan maan rajaa (routailmiö) tai autonrenkaan ja tien kosketuskohdan muotoa.

6 MATEMATIIKAN OPETUKSEN JA OSAAMISEN KEHITTÄMINEN

Osiossa 7 puhutaan matemaattisen mallinnuksen tärkeydestä matematiikan opetuksessa ja sen vaikutuksesta matemaattiseen osaamiseen. Kuitenkin ennen sitä, on syytä kertoa hieman hyvän matematiikan opetuksen perusedellytyksistä, määritellä matemaattinen osaaminen ja kertoa joistain matematiikan opiskelijoiden keskuudessa kohdatuista ongelmista.

6.1 Hyvän matematiikan opetuksen perusedellytykset (erityisesti tekniikan näkökulmasta)

Hyvää matematiikan opetusta on vaikea määritellä tyhjentävästi. Tässä mainitaan joitain piirteitä mitä olisi hyvä ilmentyä hyvässä opetuksessa. Piirteet mainitaan alkuun perustelematta ja listanomaisesti. Kappaleiden 6.2 ja 6.3 tarkoituksena on toimia perusteluna tässä osiossa mainittuihin piirteisiin. Tärkeä huomata, että asiaa tarkastellaan erityisesti tekniikan ja sitä kautta soveltamiskyvyn näkökulmasta. Toisin sanoen tässä ei keskitytä siihen, että mikä olisi paras tapa opettaa puhdasta matematiikkaa.

Hyvä matematiikan opetus on innostava ja motivoiva. Hyvässä opetustavassa edetään loogisessa järjestyksessä ja uusi asia rakennetaan aina vanhan päälle. Näin varmistetaan yhtenäisen kuvan syntymistä matematiikasta. Hyvä matematiikan opetus on oppilaita integroiva ja mahdollisemman oppilaslähtöinen. [58] & [59]

Vastamaan työelämää ja modernin yhteiskunnan haasteita, opetuksen tulisi olla poikkitieteellistä ja korostaa ryhmätyön ja yhdessä tekemisen tärkeyttä. Hyvä matematiikan opetus sisältää avoimia tehtäviä (kts. osion 6.5.1 esimerkki) kannustaa luovuuteen, opettaa ratkaisemaan ongelmat monella eri tavalla. Hyvä opetus luo turvallisen, kannustavan, ei-tuomitsevan, ei-uhkaavan ja virheitä sallivan ilmapiirin. [58] & [59]

Lisäksi hyvän ja nykyaikaisen opetukseen kuuluu mahdollisemman paljon nykyteknologian (mm. verkkomateriaalit, ipad/kannettava, tietokone ja CAS-ohjelmat) hyödyntäminen. Opetuksessa tulisi ottaa huomioon erilaiset oppijat, eli opetuksen ja kurssimateriaalin tulisi vastata mahdollisemman monien oppilaiden tarpeita. Opetukseen olisi hyvää sisällyttää hands-on-oppiminen, eli opetella asioita (käsillä) tekemällä. [59]

Erityisesti tekniikan näkökulmasta katsottuna, oppilaiden on opittava soveltamiskykyä, heidän on huomattava matematiikan tärkeys ja vahvuus toimia työkaluna muissa tieteenaloissa ja omaksua matemaattista päättelykykyä. [61] Hyvään opetukseen kuuluu matematiikan liittäminen arkeen, matemaattinen mallinnus ja sen voiman demonstroiminen. Opetuksessa tulisi tuoda ilmi, että matematisoimalla idealisoidaan ja yksinkertaistetaan reaalimaailman objekteja ja ilmiöitä, jonka avulla voidaan löytää yhteyksiä näennäisesti kahden erillisen asian välillä.

Lyhyesti sanottuna hyvä matematiikan opetus edistää tulevaisuuden taitoja ja nyky-yhteiskunnan tarvitsevaa matemaattista osaamista. Matemaattisesta osaamisesta puhutaan enemmän kappaleessa 6.1.2. Seuraavassa kappaleessa käsitellään tärkeitä tulevaisuuden taitoja, jotka olisivat hyvää sisällyttää hyvään matematiikan opetukseen.

6.1.1 Tulevaisuuden taidot

Hyvään opetukseen kuuluu myös tulevaisuuden yhteiskunnan ja yksilöiden tarpeen huomioon ottaminen. Tulevaisuuden tärkeimpiä taitoja on laaja-alainen osaaminen. Laaja-alaisen osaamisen tarve nousee lukuisista samaan aikaan vaikuttavista tiedon, oppimisen, oppimisympäristöjen, työn ja yhteiskunnan muutoksista. Itse olemme osa näitä muutoksia ja näin ollen tarvitsemme välineitä, muutosten keskellä elämiseen ja muutosten hallintaan. [61]

Tulevaisuuden taitojen arviointi perustuu nyky-yhteiskunnan toimintamalleihin. Nyky-yhteiskunnassa kasvaminen, opiskelu, työnteko sekä kansalaisena toimiminen edellyttävät tiedon- ja taidonalat ylittävää ja yhdistävää osaamista. Kaikilta vaaditaan elämänhallintataitoja, hyviä tiedon hallinnan, kriittistä arviointia, tiedon tuottamista ja soveltamisen taitoja, itsensä johtamista, monipuolisia ajatteluntaitoja sekä media- ja tietoteknologiataitoja. Työ tapahtuu yhä enemmän verkostoissa, joissa erilaiset osaajat yhdessä etsivät uusia ratkaisuja.

Tästä johtuen tulevaisuuden tärkeimpiä taitoja ovat mm. yhteistyö- ja vuorovaikutustaito, ajattelu ja oppimaan oppiminen, kulttuurinen osaaminen, yhteistyö, ilmaisun ja arjen taidot, tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen, monilukutaito, työelämätaidot ja yrittäjyys. Myös tarvitaan osallistumis- ja vaikuttamishalua kestävän tulevaisuuden rakentamiseen. [61]

Myös muut taidot painottuvat kuten, verkosto-osaaminen, projektiosaaminen, sosiaaliset taidot ja luovuus. Tarvitaan ongelmanratkaisukykyä, tietotekniset taidot, tiedonhankinta ja hallinta. Lisäksi tarvitaan sekä oppimisen motivaatiota että edellytyksiä kansalaisvaikuttamiseen ja yhteiskunnalliseen toimintaan, eettiseen ajattelu- ja toimintakykyyn. [61] Tulevaisuudessa tarvitaan myös monikielisyyttä, tai ainakin englannin kielen vahvaa hallintaa, koska nykyään vuorovaikutukset tapahtuvat ei pelkästään kotimaassa vaan myös kansainvälisesti.

6.1.2 Matemaattinen osaaminen

Matemaattinen osaaminen tai ns. matemaattinen kompetenssi ”on kyky ymmärtää, päätellä, toimia ja soveltaa matematiikkaa moninaisissa matematiikan sisäisissä ja ulkoisissa konteksteissa (intra- and extra-mathematical contexts) ja tilanteissa, joissa matematiikalla on, tai voisi olla roolia” [60].

Tähän liittyen on tärkeää huomata, että pelkästään faktojen ja rutiinien osaaminen, vaikka on olennainen osa matematiikan opiskelua, ei ole riittävä yksistään lisäämään matemaattista kompetenssia. [60] Toisin sanoen matemaattinen osaaminen liittyy tapaan ajatella matemaattisesti, joka puolestaan on paljon enemmän kuin pelkästään faktojen, teorioiden, tekniikoiden ja yms. tietäminen. Matemaattinen tapa ajatella ja matemaattinen ymmärrys on pikemminkin sitä, mitä yksilö pystyy tekemään jo osaamallaan matematiikalla, eikä hänen ”tietovarastonsa” suuruus. [58]

Matemaattinen kompetenssi jaotellaan 8 eri matemaattiseen osaamiseen, jotka voivat olla osittain päällekkäisiä. Nämä ovat matemaattinen ajattelu, matemaattinen päättely, ongelmien esittäminen ja ratkaiseminen, matemaattinen mallinnus, matemaattisten olioiden kuvaus, matematiikan symbolien ja formalismin käyttö, kommunikaatio sekä matematiikasta että matematiikan avulla ja matematiikan työkalujen (esim. CAS-ohjelmistojen) hyödyntäminen. [58] Alla on kuvattu yksityiskohtaisemmin kutakin matemaattisen kompetenssin osa-aluetta.

<u>Matemaattinen ajattelu</u>
Tämä kompetenssi muodostuu kahdesta osa-alueesta. Toisaalta tietoisuutta siitä millaisia kysymyksiä voidaan käsitellä matemaattisesti ja millaisia vastauksia matematiikka voi tai ei voi antaa. Toisaalta kyky esittää vastaavia kysymyksiä. Se sisältää matemaattisten konseptien tunnistamista, ymmärrystä niiden kattavuusalueesta, rajoituksista ja kykyä kattavuusalueen laajentamisesta abstraktisoinnilla ja yleistämällä tuloksia. Tämä kompetenssi sisältää myös jonkinlaista käsitystä matemaattisen mallin luottamuksellisuudesta.

<u>Matemaattinen päättely</u>
Tämä kompetenssi sisältää toisaalta kykyä ymmärtää ja arvioida jo olemassa olevaa matemaattista argumentaatiota (päättelyketjua) ja toisaalta kykyä huomata erilaisten matemaattisten lausuntojen (kuten mm. määritelmän, väitteen, lemman, lauseen, jos-lauseen, jos ja vain jos-lauseen) välisiä eroja. Se sisältää myös kyvyn konstruoida päättelyketju loogisilla argumenteilla ja sitä kautta muuntaa heuristinen päättely (kokemusperäinen, usein ei optimaalinen, yrityksen ja erehdyksen perustuva päättelyketju [85]) omaksi todistukseksi, eli ns. loogiseksi päättelyksi.

<u>Matemaattisten ongelmien esittäminen ja ratkaiseminen</u>

Tämä kompetenssi sisältää toisaalta kyvyn tunnistaa ja määritellä matemaattisia ongelmia; olivatpa ne puhtaita, sovellettuja, avoimia tai suljettuja matemaattisia ongelmia. Toisaalta se sisältää kyvyn ratkaista matemaattisia ongelmia, sisältäen tietoisuuden matemaattisista algoritmeista ja ratkaisumenetelmistä. Se mistä matemaattinen ongelma muodostuu, ei ole aina hyvin määritelty. Yleensä se on riippuvainen henkilökohtaisista kyvyistä tulkita, että onko tietty kysymys matemaattinen ongelma vai ei. Tämä seikka on pidettävä mielessä, kun esitellään tietty ongelma opiskelija ryhmälle.

<u>Matemaattinen mallinnus</u>
Myös tämä kompetenssi muodostuu kahdesta osa-alueesta. Toisaalta se sisältää analysointi- ja työskentelykyvyn jo olemassa olevien mallien kanssa. Eli kyvyn löytää mallinnettavasta ongelmasta ominaispiirteitä, tutkia vaikutusaluetta, rajoituksia, pätevyyttä ja tulkita matemaattista tulosta reaalimaailmassa. Toisaalta se sisältää mallinnuskyvyn, eli yksilö pystyy formalisoimaan reaalimaailman ongelmasta matemaattisen ongelman ja ratkaisemaan, tulkitsemaan ja tarkastelemaan mallin pätevyyttä.

<u>Matemaattisten olioiden representaatiot</u>
Tämä kompetenssi sisältää kyvyn ymmärtää ja sekä käyttää matemaattisia esityksiä (olivatpa ne symbolisia, numeerisia, graafisia, visuaalisia, suullisia tai esineitä) tunnistamaan niiden keskinäiset relaatiot, edut ja rajoitukset. Tämä kompetenssi myös sisältää kyvyn vaihdella eri esitystapojen välillä (esimerkiksi muuttamaan symbolinen esitys graafiseksi).

<u>Matemaattisten symbolien ja formalismien käsittely</u>
Tämä kompetenssi sisältää toisaalta kyvyn ymmärtää symbolista ja formaalia matemaattista kieltä ja toisaalta sen suhdetta luontoon ja tulkkauskyvyn luonnon ja matematiikan välillä. Se sisältää myös formaalin matemaattisen systeemin säännöt ja kyvyn käyttää ja manipuloida symbolista lauseketta ja kuvausta sääntöjen puitteissa.

<u>Kommunikaatio matematiikan sisällä, matematiikan avulla ja matematiikasta</u>
Tämä kompetenssi sisältää toisaalta kyvyn ymmärtää toisten esittämiä matemaattisia lausekkeita (suullisia, kirjoitettuja jne.) ja toisaalta kyvyn ilmaista itseään matemaattisesti eri tavoin.

<u>Matemaattisten apuvälineiden ja työkalujen hyödyntäminen</u>
Tämä kompetenssi sisältää tietoisuuden sekä käytettävistä olevista apuvälineistä ja työkaluista että niiden potentiaaleista ja rajoituksista. Se myös sisältää kyvyn käyttää työkaluja ajatuksella ja tehokkaasti. [58]

PISA:n mukaan edellä mainitut matemaattiset kompetenssit voidaan mitata kolmella eri kompetenssiluokassa: reproduktio (tai uudelleen tuottaminen), yhdistäminen ja pohdiskelu (reproduction, connections and reflection). [57]

Reproduktioluokka
Tähän luokkaan kuuluvat matemaattiset kompetenssit liittyvät harjoitellun tiedon uudelleen tuottamiseen (reproduktio). Tämä pitää sisällään matemaattiset prosessit, tiedot ja taidot, joita tarvitaan yleisissä sekä valtakunnallisissa (standardoiduissa) että luokkahuoneen teisteissä. Toisin sanoen, tämä kompetenssiluokka pitää sisällään tietoisuuden faktoista ja kanonisista esitysmuodoista, ekvivalenssien ja tuttujen matemaattisten olioiden ominaisuuksien tunnistamista, rutiinitehtävien suorittamista, yleisien algoritmien soveltamista, teknisiä taitoja, yhtälöiden muokkaamista ja peruslaskennan hallintaa.

Yhdistämisluokka
Tämä kompetenssiluokka rakentaa reproduktioluokan päälle sisältämällä soveltamiskyvyn ongelmanratkaisutilanteisiin, jotka eivät ole rutinoituneita, mutta kuitenkin sisältävät melkein tuttuja lähtökohtia.

Pohdiskeluluokka
Tähän luokkaan liittyvä matemaattinen prosessi sisältää pohdiskelutaidon oppijan taholta liittyen ongelman ratkaisemiseen tarvittavista tai käytetyistä prosesseista. Tämä liittyy oppijan kykyyn ratkaisustrategioiden suunnitteluun ja käyttöön, jotka ovat kompleksisempia tai alkuperäisempiä kuin esim. yhdistämisluokassa. [57]

Sen sijaan, että jaetaan kompetenssit luokkiin kuten reproduktio-, yhdistämis- tai pohdiskeluluokkaa, joskus nähdään jakoa myös kolmeen eri dimensioon: kattavuusaste (degree of coverage), toimintasäde (radius of action) ja tekninen taso (technical level). Nämä ovat dimensiot, joissa matemaattinen kompetenssin kehitys voidaan mitata. Kattavuusaste kertoo missä määrin henkilö hallitsee tietyn matemaattisen kompetenssin osa-alueita. Toimintasäde puolestaan pitää sisällään kontekstit ja tilanteet, joissa henkilö pystyy soveltamaan tietyn matemaattisen kompetenssin. Tekninen taso, indikoi kuinka käsitteellisesti ja teknisesti kehittyneitä henkilön käytetyt matemaattiset oliot ja apuvälineet ovat, joilla hän soveltaa tiettyä kompetenssia. [58]

6.2 Joitakin kohdattuja ongelmia oppilaiden matematiikkaosaamisessa ja matematiikan opetuksessa

Tässä osiossa esitellään eräitä ongelmia, joita on havaittu matematiikan opiskelussa ja opetuksessa. Tämä ei ole kattava lista, eikä se päde kaikkiin kouluihin tai maihin. Kuitenkin tässä esitetyt ongelmat näyttävät maailman laajuisesti esiintyvän yhä enenevässä määrin.

6.2.1 Vajavainen käsitys matematiikasta

Oman kokemukseni perusteella monelle oppilaalle matematiikka tarkoittaa laskuoppia, eli numeroiden kanssa operointia ja numeroiden tuottamista. Tällöin on luonnollista, että matematiikan todellinen luonne logiikan kielenä jää hahmottamatta. Matematiikka tulisi kuitenkin hahmottaa loogisen päättelyn taitona. Siinä lähdetään liikkeelle testattavista asioista (aksioomista), joista loogisin askelin voidaan tehdä johtopäätöksiä. Aksiomien puitteissa päätelmiä voidaan soveltaa myös reaalimaailman tarpeisiin.

Kehitys vääränlaiseen käsitykseen matematiikasta alkaa jo varhain peruskoulussa, kun matematiikka tulkitaan laskusääntöjen muistipelinä.

6.2.2 Motivaation puute ja asenne matematiikka kohtaan

Koulu ja yliopisto-opintojen perusteella monelle syntyy käsitys, että matematiikka on jollain epämääräisellä tavalla tarpeellista, mutta käytännön työelämässä sitä ei paljon tarvita. Tästä johtuen monelle oppijalle syntyy ei-motivoitunut ja negatiivinen asenne matematiikka kohtaan.

Korkeakouluissa ja yliopistoissa ympäri maailmaa on havaittua, että monella opiskelijalla (esim. insinööritieteitä lukevalla) on motivaation puute matematiikan opiskelussa. Insinööritieteiden kohdalla syynä on erityisesti se, että tämän alan opiskelijat ovat tulleet yliopistoon opiskelemaan käytännönläheisiä insinööritieteitä, ei matematiikkaa. Usein heitä kiinnosta käytännön läheinen ongelman ratkaisutehtävä eivätkä matematiikan abstraktiot. Tästä johtuen moni insinööritieteitä opiskeleva uskoo opiskeltavan matematiikan olevan liian abstraktia eikä jaksa innostua aiheesta. Tarvitaan siis uudenlaista pedagogiikkaa, joka motivoi ja innostaa opintonsa yliopistolla aloittavia insinööritieteen opiskelijoita. [58]

Motivaation puute ei ole yleinen vain opiskelijoiden keskuudessa. Joskus yliopisto-opettajat syyllistyvät samaan asiaan. Tämä voi johtua yliopistotutkijoiden pakollisesta opetusvastuusta. Joskus tutkijat ovat enemmän kiinnostuneita omasta tutkimusalastaan kuin opiskelijoiden oppimisesta ja kehityksestä. Kurssimateriaalin valmistaminen on usein työlästä. Opiskelijoiden epähomogeenisuus (tasoerot ja taustat) aiheuttaa päänvaivaa opettajille, sillä on vaikeaa suunnitella kaikille sopivaa materiaalia. Ei-motivoitunut opettaja saa aikaan passiivisen ja ei-kiinnostuneen ilmapiiriin opiskelijoiden keskuudessa. Ei-motivoitunut luokka vaikuttaa puolestaan opettajan motivaatioon. Pahimmillaan tämä johtaa kierteeseen, jossa ei-motivoitunut opettaja opettaa ei-motivoituneita opiskelijoita, kun ideaali tapauksessa sen tulisi olla päinvastoin.

Nykyään tilannetta huonontaa myös työllistyminen. Aikaisemmin koulutus oli takeena työllistymiselle ja toimeentulolle. Nykyään yliopistotutkinto ei ole enää vastaava tae työllistymiselle. Tietoisuus tästä aiheuttaa passiivisuutta ja flegmaattisuutta opiskelijoiden keskuudessa.

6.2.3 PISA ja TIMSS tulokset

Suomalaista koulutusjärjestelmää arvostetaan maailmanlaajuisesti, ja Suomessa kouluopetus lukioon asti on maailman huippuluokkaa. Matematiikan ja fysiikan kouluopetusta tulee edelleen kehittää ja nykyaikaistaa, jotta varmistetaan laadukas opetus tuleville sukupolvillekin.

Suomalaiset opiskelijat ovat pärjänneet hyvin PISA-testeissä, minkä takia suomalainen koulutusjärjestelmä on saanut maailmanlaajuista huomiota. PISA (Programme for International Student Assessment) on OECD-maiden toteuttama ohjelma, jossa arvioidaan kolmen vuoden välein 15–16-vuotiaiden nuorten osaamista matematiikassa, luonnontieteissä, lukutaidossa ja ongelmanratkaisussa. Siinä ohjelmassa ovat tällä hetkellä mukana 70 maata. [88] Suomi on osallistunut myös TIMSS- (International Mathematics and Science Study) testiin. TIMSS mittaa neljäs- ja kahdeksan luokkalaisten matematiikan ja luonnontieteiden osaamista. TIMSS-testi järjestetään maailmanlaajuisesti joka neljäs vuosi. [89] TIMSS-testit keskittyvät mittaamaan matemaattista osaamista. [64]

Monella maalla PISA- ja TIMSS-testien tulokset korreloivat. Suomalaisten 8. luokkalaisten PISA- ja TIMSS-tuloksia verratessa huomataan kuitenkin suuri suhteellinen ero. Tämä herättää kysymyksen, miksi suomalaiset pärjäävät hyvin PISA-testeissä, mutta eivät TIMSS-testeissä? Johtuuko suomalaisten oppilaiden hyvä menestys PISA-testeissä vain lukutaidon ja yleissivistyksen hyvästä tasosta, kun taas syvällisen matemaattisen ymmärryksen puute aiheuttaa huonon menestyksen TIMSS-testeissä? [64]

6.2.4 Lukio- ja yliopistokoulutuksen välinen kuilu

Monissa yliopistoissa ja korkeakouluissa ympäri Eurooppaan opettajat ovat huomanneet, että aloittavilla opiskelijoilla on vaikeuksia matematiikan perusasioiden hallinnassa. Lukion ja yliopiston välinen kuilu on kasvanut viime vuosina. Esimerkiksi Tampereen teknillisellä yliopistolla aloittaville opiskelijoille järjestetään matematiikan lähtötasotesti. Lähtötasotestissä kysytään peruslaskutoimituksia ja murtoluvuilla operoimista. Vuosittain 10–20 % opiskelijoista ei läpäise lähtötasotestiä ja joutuvat ohjatuksi preppauskurssille. [63]

Tämä ei ole pelkästään Suomessa kohdattu ongelma vaan Euroopan laajuisesti ollaan huomattu vastaava ilmiö. Esimerkiksi neljännessätoista SEFI-työpajaseminaarissa (European Society for Engineering Education) kokoonnuttiin pohtimaan “Mitkä ovat Euroopassa suuremmat haasteet insinöörimatematiikan opetuksessa?” (What are the major problems facing engineering maths education in Europe?). Ryhmän delegaatit päättyivät tulokseen, että ”Euroopan laajuisesti” suuremmat haasteet ovat ”ensimmäisen yliopistovuoden perusmatematiikan taitojen puutteellisuus” (the lack of basic skills of university freshmen is well-known and seems to be Europe-wide). [58]

Osasyynä kuilun syntymiseen on luonnollisesti kasvanut sisäänotto yliopistoihin ja korkeakouluihin [63]. Tällöin kynnys sisäänpääsyyn on laskenut. Samanaikaisesti opiskelijoiden motivaatio-ongelmat ovat yleistyneet. Tämä johtaa siihen, että tarvitaan rakenteellisia ja filosofisia muutoksia koulutuksessa, opetusmenetelmissä ja materiaaleissa. Mikäli tällaisiin ongelmiaan ei reagoida ja muutoksia ei tapahdu, niin pian edellä mainittu kuilu johtaa mm. monen oppilaan opintojen keskeyttämiseen. Suomen kaltaisessa maassa, jossa valtio kustantaa koulutusta tämä suuri taloudellinen menetys.

6.2.5 Opintojen keskeyttäminen

Edellisessä osiossa käytiin osittain syitä opintojen keskeyttämiseen. Yleisesti kuitenkin erinäisistä syistä osa opiskelijoista jättää opintonsa kesken. Syynä voi olla edellisessä osiossa mainitut, sairaus, pitkäaikainen matka, perhesyyt, työt ja yms.

Maailmalla on tutkittu tätä asiaa. Mielenkiintoista on kuitenkin huomata, että eniten opintojensa keskeyttäneiden joukossa on ollut opiskelijoita matemaattisilta aloilta. Englannissa eräässä kaikkien alojen kandidaattivaiheen opiskelijoiden kesken tehdyssä tutkimuksessa, huomattiin opintojen suurin jatkamisaste (continuation rates, kertoo kuinka joko prosenteissa tai desimaalilukuna kuinka moni jatkaa opintonsa) olevan lääketieteellisillä ja luovan taiteen aloilla (n. 98 %), kun taas matemaattisilla ja tieteenkäsittely aloilla oli pienin jatkamisaste (88 %). Toisin sanoen verrattuna muihin aloihin matemaattisiloilla aloilla oli melkein eniten ihmisiä (12 %), jotka olivat keskeyttäneet opintonsa ensimmäisen tai toisen yliopistovuoden aikana. [65] Tämä kielii siitä, että jotain on pielessä joko matematiikan opetuksessa tai opiskelijoiden asenteessa.

6.2.6 Laitosten välisen kommunikaation vähyys

Euroopan laajuisesti monesti yliopistokoulutuksissa on huomattu matematiikan opettajien vähäinen tietämys matematiikan soveltamisessa työelämässä ja myöhemmissä insinöörikursseissa. Myös insinöörikursseilla on huomattu opettajien vähäinen tietämys matematiikkakurssien sisällöistä. [58] Tietysti on olemassa poikkeuksia ja jatkuvasti eri laitosten välillä yhteistyötä tekeviä yliopistoja.

6.2.7 Internet, opiskelijoiden kriittisyys ja viihdemaailma

Internet on mahdollistanut tiedon nopean leviämisen ympäri maailmaa. Kuka tahansa pystyy lisäämään informaatiota tekstin, kuvan tai videon muodossa kaikkien nähtäväksi. Tästä johtuen internetissä esiintyy paljon epäaitoa ja väärää tietoa. Tämä puolestaan vaikuttaa mm. nuorten kriittisyyden lisääntymiseen, jonka myötä he eivät ryhdy toimiin, jos tarkoitus ei ole heille ihan selvä. Toisin sanoen osalla oppilailla on motivaatio-ongelmia matematiikan opiskelussa, koska he eivät hahmota miten matematiikkaa voitaisiin hyödyntää arjessa.

Oppilaiden kriittisyyden lisääntymisestä johtuen, enää välttämättä ei riitä, että vain puhutaan matematiikan hyödyllisyydestä, vaan tarvitaan aitoja arjen esimerkkejä ja demonstraatioita. Toisin sanoen oppilaat ei usko enää vain puhetta vaan heidät pitää saada vakuuttumaan asioista.

Informaatioiden lisäksi internetiä voi käyttää viihdetyökaluna. Älypuhelinten myötä internetin viihdemaailma on jokaisen taskussa, nopeassa ja helpossa käytössä. Viihdemaailma tarjoaa ajanvietettä ja sitä kautta pikaista ja vaivatonta iloa. Tämä vaikuttaa osan oppilaiden kohdalla heidän kärsivällisyyden ja keskittymiskyvyn laskemiseen. Viihdemaailmassa he ovat tottuneet saamaan kaikki asiat nopeasti ja vaivatta.

Matematiikan opiskelu usein on pitkäveteistä ja pitkän ajan keskittymistä vaativaa. Ongelmien ratkaisemiseksi usein joudutaan miettimään ja kokeilemaan eri lähestymistapoja. Joskus ensimmäinen lähestymistapa ei tuota vastausta ja joudutaan palamaan takaisin lähtöpisteeseen ja miettimään uutta lähestymistapaa. Joidenkin oppilaiden kohdalla viihdemaailma on osittain vaikuttanut siihen, että he eivät jaksa keskittyä pitkiä jaksoja ja lannistuvat, jos eivät heti saa tyydytystä, eli tässä tapauksessa oikeaa vastausta.

6.2.8 Tekniikan tarpeet, erityisosaaminen ja globalisaatio

Peruskoulu, lukio ja DI-yliopistokoulutus eivät tuota riittävästi tekniikan työkalujen ymmärrys- ja soveltamistaitoja, joita tarvitaan nyky-yhteiskunnassa. Esimerkiksi, usealle DI:lle matematiikan ja tekniikan välinen suhde jää epämääräiseksi, minkä tähden valmiudet nykymaailman edellyttämään teknillisen osaamiseen jäävät puutteelliseksi. Lopputuloksena nykyopetus voi tuottaa kapeaan alaan erikoistuneita ja rutiinitehtäviin soveltuvia henkilöitä.

Ihmiskunnan kehitys ja tässä prosessissa hyödynnettävä tekniikkaa on läheisessä yhteydessä toimeentuloon. Aikaisemmin erityisosaaminen riitti takamaan toimentulon. Esimerkiksi puusepän pojan ei tarvinnut käydä yliopistolla, osata hyödyntää kaikkia puulajia tai hallita kaikkia eri puuesinemalleja. Hänelle riitti hallita muutama paikallinen malli eri esineille ja osata käyttää paikallisia puulajeja oikeisiin tarkoituksiin. Tämä riitti takaamaan elannon.

Edellisen esimerkin puuseppä ei kohdannut päivittäin laadultaan uusia ongelmia. Yleensä kerran opeteltu rutiini riitti ratkaisemaan suuren osan ongelmista. Mikäli uusia ja vaikeita ongelmia kohdattiinkin, yleensä ne vaan sivuttiin. Tämä ei huonontanut puusepän kilpailukykyä, koska kylässä ei välttämättä ollut toista puuseppää. Ihmisten oli joka tapauksessa käytävä hänen luonaan. Puusepän kehitys yleensä tapahtui niin, että hän osasi käyttää jo olemassa olevia työkaluja taitavammin ja kokemuksen myötä teki työtään jouheammin ja vähemmillä virheillä.

Nykyisessä globaalissa maailmassa, suurin osa erityisosaamisesta on kenen tahansa helpossa ja nopeassa käytettävissä. Tästä johtuen vanhanaikainen koulutustapa ei aina riitä takamaan kilpailukykyä. Globaalissa ja nopeasti muuttuvassa maailmassa kilpailukyky luodaan tieto-taitojen kehittämisellä, jotka eivät ole erityistä tietylle alalle vaan ovat tarpeellisia kaikilla aloilla, kuten ongelmanratkaisukyky, luovuus, moni- ja poikkitietoisuus, kokonaisuuksien hahmottamiskyky, yhteyksien näkeminen näennäisesti erilaisten asioiden välillä, ryhmätyöskentelytaitoja ja soveltamiskykyä.

Globaalisti tekniikan ja teollisuuden edistymisestä johtuen päivittäin kohdataan ongelmia, joihin ei ole olemassa ratkaisua tai johon ei rutiinimenetelmillä saada vastausta. Tarvitaan uusia lähestymistapoja ja ajatuksia. Se joka pystyy ratkaiseman ongelman, yleensä varmistaa menestyksen markkinoilla vähäksi aikaa, kunnes kohdataan uusi haaste. Tästä johtuen nykyhetkisen tekniikan luonteen ja globalisaation myötä, tarvitaan uusia taitoja ja menetelmiä. Enää ei riitä koulutus, joka tarjoaa koulutusta pelkästään rutiinitehtävien ratkaisemiseen ja erityisosaamiseen.

Kouluopetus valmentaa usein jatko-opintoja varten. Jatko-opinnot valmentavat usein tekniikan välittömiin tarpeisiin. Mitä tapahtuu, kun nämä tarpeet muuttuvat? Tästä syystä koulussa varhaisista vaiheista olisi hyvää ottaa nyky-yhteiskunnan ja tekniikan vaatimukset huomioon ja valmentaa opiskelijoita siihen. Muutoin huonoimmillaan erityisosaamiseen tähtäävä koulutus johtaa siihen, että ajankohtaisten haasteiden vaihtuessa tekijät tulevat korvatuksi viimeisimpiin kysymyksiin erikoituneilla henkilöillä.

Erityisosaaminen on tärkeää, mutta sen rinnalle tarvitaan täydentäviä taitoja. Tällä tarkoitetaan, että tarvitaan sekä lyhytaikaisia että pitkäaikaisia ratkaisuja koulu- ja yliopisto-opintoihin. Mikäli sovelletaan vanhaa kiinalaista sanontaa tähän, paras tulos saavutetaan, kun annetaan ihmisille kalaa, jolloin saadaan katettua heidän välitön tarpeensa. Mutta samalla myös opetetaan heitä kalastamaan, jolloin varmistetaan heidän toimeentulo pitemmällä tähtäimellä.

Erityisosaamiseen tähtäävällä koulutuksella on omat vahvuutensa, mutta se voi johtaa matemaattisten abstraktioiden (yleistyksien ja yhteyksien, jotka ovat reaalimaailmasta riippumattomia) sietokyvyn vähenemiseen. Tällöin matematiikka ymmärretään epäkäytännöllisenä ja luullaan, että matematiikkaa ei tarvita ”käytännössä”. Tämä osittain maailmanlaajuinen trendi on johtanut tekniikan ja matematiikan valiteltavaan eriytymiseen.

Nyky-yhteiskunnan infrastruktuuri perustuu vahvasti tekniikan varaan. Ilman asianmukaista opetusta emme edes hahmota nyky-yhteiskunnan struktuuria. Kokonaisvaltaista näkökulmaa ei ole tuotu järjestelmällisesti kaikkiin kouluihin. Koulun tuottama ymmärrys teknillisistä aineista painottuu laskutaitoihin ja rutiinitehtäviin. Näin ollen se ei tuota kykyä analysoimaan ja hahmottamaan asioiden välisiä loogisia yhteyksiä.

6.3 Joitakin ratkaisuja matemaattisen osaamisen parantamiseen

Tässä kappaleessa esitellään joitakin käytännön menetelmiä, joiden soveltamisella voidaan osittain välttää tai parantaa edellisessä osiossa käsiteltyjä ongelmia matematiikan opetuksessa. Eli keskustellaan mm. opetusmenetelmistä ja -materiaalista, arviointimenetelmistä ja teknologian hyödyntämisestä. Tarkoituksena on auttaa parantamaan oppijoiden matemaattista osaamista.

6.3.1 Opetusmenetelmät

Tässä kappaleessa esitellään erilaisia opetusmenetelmiä ja ns. pedagogisia malleja, joita soveltamalla voidaan varmistaa oppilaiden innostus ja syvällinen ymmärrys matematiikasta. Koska hyvää opetusta on tärkeätä aloittaa jo koulussa, tässä käsitellään erikseen opetusmenetelmät, jotka soveltuvat erityisesti kouluun ja myöhemmin menetelmät, jotka soveltuvat erityisesti yliopistokoulutukseen. Tällainen eri koulutusvaiheisin kohdistuva jako ei tarkoita sitä, että joku opetusmetodi soveltuisi vain kouluun tai yliopistoon. Suurin osan metodeista voi soveltaa missä tahansa matematiikan opetuksen vaiheessa.

Kouluun ja yliopistokoulutukseen sopivista opetusmenetelmistä voidaan sanoa lyhyesti, että niiden pitää:

- Kasvattaa opiskelijoiden omistustunnetta matematiikkaa kohtaa ja saada heidän mielenkiintonsa heräämään asiasta
- Kannustaa vuorovaikutusta sekä opettajan että oppilaiden kesken
- Parantaa tuntien hyötysuhdetta, eli opetusajan ja siitä saadun hyödyn suhdetta
- Kannustaa opiskelijoiden toveruutta ja vuorovaikutusta keskenään sekä luokkahuoneessa että sen ulkopuolella
- Opettaa, että on olemassa erilaisia tapoja ratkaista ongelma ja demonstroida sitä [67]

6.3.1.1 Koulu- ja lukiopetus

Koulujen opetusmenetelmien suunnittelussa tulisi ottaa nyky-yhteiskunnan toimintamallit ja tarpeet huomioon. Laaja-alaista osaamista tulisi kehittää systemaattisesti osana kaikkea opetusta. Myös opetushenkilöstöä tulisi kouluttaa, jotta heidän valmiutensa integroida tulevaisuuden taidot osaksi kaikkea opetusta kehittyisi. Uusien opetussuunnitelmien ja tutkintojen perusteiden käyttöönoton tueksi tulisi kehittää tukimateriaaleja ja ohjausta. Faktojen antamisen ja tietojen päähän kaatamisen sijaan oppilaille pitäisi opettaa tekemällä oppiminen ja tiedon etsiminen. Arviointia tulisi uudistaa huomioimaan myös laaja-alaiset tulevaisuuden taidot. Näin luodaan moninaisista oppilaista, moniosaisia ja oppimaan oppivia oppilaita. [61]

Ennen kaikkea oppilaat pitäisi saada innostumaan matematiikasta. Tämän saavuttamiseksi opettajan on tärkeä varata aikaa yleiselle keskustelulle matematiikasta. Esim. mihin tarvitaan matematiikka? Mitä on matematiikka? Miten voidaan matematiikka hyödyntää arjessa? Nämä ovat kysymyksiä, joihin ei välttämättä ole tyhjentävää tai lopullista vastausta, mutta luokassa tapahtuvien keskustelujen avulla saadaan ajatteluprosessi käyntiin. Keskusteluilla on tarkoitus hälventää oppilaiden ennakkoluuloja matematiikasta ja vastata heidän mieliään askarruttaviin kysymyksiin. Täten oppilaat saadaan innostumaan matematiikasta ja välttämään ennakkoasenteesta johtuvia motivaatio-ongelmia.

Kuitenkin kuten kappaleessa 6.2.7 puhuttiin, oppilaiden kriittisyydestä johtuen ainoastaan puhuminen ei riitä. Matematiikan hyödyllisyys voidaan demonstroida ainoastaan näyttämällä konkreettisesti miten ihmiset käyttävät matematiikkaa eri ammateissa. Tämän tueksi voidaan kutsua eri alojen ihmisiä puhumaan oppilaille matematiikan hyödyistä heidän ammatissa. Tästä on kerrottu tarkemmin kappaleessa 6.3.8.

Tällä hetkellä edelleenkin joidenkin koulujen matematiikan opetus on hyvin opettajakeskeistä. Näin ollen oppilaille ei synny omistustunnetta ja sen luomaa innostusta matematiikasta. Omistustunteella tarkoitetaan tunnetilaa, jossa oppilas pitää matematiikka tärkeänä ja haluaa ottaa vastuun sen omaksumisesta. Oppilaiden omistustunne saadaan esille integroimalla ja aktivoimalla heitä. Niin kutsuttu aktivoiva opetusmalli on eräs avain omistustunteen ja innostuksen syntymiseen.

Aktivoivan opetuksen perusajatuksena on siirtää vastuuta oppimisesta oppijalle. Siinä aktivoivien menetelmien kautta opetuksesta tehdään oppijaa aktivoiva ja motivaatiota herättävä kokonaisuus. Aktivoivassa opetusmallissa keskeisenä ajatuksena on sekä tukea oppijan asiantuntijuuden kehittymistä että auttaa häntä kehittämään toiminnallisia ja mentaalisia malleja oppimisen kohteena olevista asioista ja ilmiöistä. [69] Moderniin aktivoivaan opetukseen kuuluu myös teknologian hyödyntäminen. Tästä puhutaan myöhemmin kappaleessa 6.3.7.

Omistustunteen ja oppilaskeskeisyyden lisäämiseksi opettajan on toimittava ikään kuin ohjaajana. Toimiessaan ohjaajana opettaja ei ole autoritäärinen totuuden lähde, eikä anna valmiita vastauksia, vaan vastauksiin päästään yhdessä pohtimalla ja keskustelemalla. Oppilaiden mietintätavan saattaminen tilaan, jossa he eivät vaan etsi ratkaisua johonkin kysymykseen vaan ymmärtävät laajemmin minkälaista matematiikkaa tarvitaan ongelman ratkaisemiseksi, mihin kysymyksiin matematiikka voi vastata ja miten. Tämä ajatusmaailma voidaan saavuttamalla mm. luokkahuoneessa tapahtuvilla keskusteluilla ja uuden tyyppisillä arviointimenetelmillä (kts. 6.3.4). [68]

Seuraava esimerkki havainnollistaa asian. Kuvitellaan tilanne, jossa opettajan on opetettava miten kartalla paikasta A päästään paikkaan B. Mikäli opettaja kertoo reittivalinnan itse luentomaisesti, niin tämä on opettajakeskeistä. Toisaalta kuvitellaan sellainen tilanne, jossa opettaja antaa kartan oppilaille ja kertoo, että meidän tarkoituksenamme on selvittää reitti, miten päästään paikasta A paikkaan B. Mahdollisia reittejä on monia: jotkut ovat lyhyempiä kuin toiset, jotkut nopeampia jne. Tämän jälkeen opettaja pyytää oppilaita selvittämään sopiva reitti paikasta A paikkaan B ja perustelemaan valintaansa. Näin toimiessaan opettaja toimii ohjaajana ja opetus on opiskelijakeskeistä.

Alle on kerätty muutamia ajatuksia edellä kuvatun opetusmenetelmän hyödyistä, jossa opettaja toimii ohjaajana.

a) Oppilaat pääsevät nopeasti itse tekemään ja pohtimaan. Tämä auttaa varsinkin sellaisia oppilaita, jotka ovat vilkkaita, ei-pitkäjänteisiä, luovia tai joilla on keskittymishäiriö.

b) Suurempi todennäköisyys, että oppilaat tekevät virheitä. Esimerkiksi edellä kuvatun esimerkin tapauksessa valitsevat väärän reitin. Virheiden kautta ja tekemällä oppiminen on ihmiselle luonnollinen tapa oppia uusia asioita. Näin opittuna, oppilaat oppivat asian tavalla mikä on luonnollista heille ja asia jää heille paremmin mieleen.

c) Oppilaat voivat harjoitella käyttämään omaa luovuuttaan. Luovuus ei ole ainoastaan synnynnäistä, vaan sitä voidaan harjoittelemalla saavuttaa [70].

d) Oppilaiden ongelmaratkaisukyky paranee ja harjaantuu. Ongelmaratkaisukyky ei myöskään ole synnynnäistä, vaan sitäkin tulee harjoitella.

e) Oppilaat huomaavat, että ei ole yhtä oikeata ratkaisua ongelmaan. Ongelmiin on olemassa monia ratkaisuja. Kuitenkin tiettyjä tarkoituksia varten voidaan yrittää etsiä optimaalisin ratkaisu. Edellä kuvatun esimerkin tapauksessa voidaan etsiä mm. nopein reitti, lyhin reitti, helpoin reitti, turvallisin reitti tai maisemaltaan kaunein reitti.

f) Oppilaat huomaavat, että he itse voivat valita reitin oman tarpeittensa mukaan. Toisin sanottuna he eivät tarvitse opettajaa tai esimerkin tapauksessa navigaattoria, joka kertoisi heille ”oikean” reitin.

Edellisen esimerkin tapaan ja luokkahuonekeskustelujen avulla oppiminen mahdollistaa paremman ja syvällisemmän ymmärryksen syntymistä. Lopputuloksena asiat jäävät paremmin mieleen.

6.3.1.2 Korkeakouluopetus

Uudet ja modernit opetusmenetelmät siirtyvät nopeammin kouluihin kuin yliopistoihin. Varsinkin teknillisten yliopistojen opetusmenetelmät päivittyvät hyvin hitaasti. Tämä johtuu osittain siitä, että suurin osa teknillisten yliopistojen opettajista on tutkijoita, joilla ei välttämättä ole pedagogista taustaa. Mikäli teknologian käyttöä nyky-yliopistolla ei lasketa, niin opetusmenetelmät ovat lähes samat kuin esim. 100 vuotta sitten.

Edelleenkin maailmanlaajuisesti vallalla oleva yliopistojen opetusmetodi on luennointi. Digitalisaation myötä, luentoja tuetaan verkossa olevilla lisämateriaaleilla. Perinteisesti yliopistoluennot ovat olleet luennoitsijakeskeisiä ja opiskelijoiden toiminta luennolla on rajoittunut muistiinpanojen ottamiselle, vaikkakin välillä opiskelija on voinut esittää kysymyksen luennoitsijalle.

Nyky-yhteiskunnassa tämä ei välttämättä riitä. Eräänä syynä on yliopisto-opiskelijoiden sisäänoton kasvu ja heidän vaihteleva osaamisensa. Tämä usein aiheuttaakin paljon haasteita opettajille. Sillä heidän on opetettava paljon asioita lyhyellä ajalla suurelle määrälle osaamiseltaan ja taustaltaan heterogeeniselle opiskelijaryhmälle. [58] Luennointi vaikuttaa monesti ainoalta ratkaisulta. Kuitenkin luennointimetodit ja luentojen ympärillä olevat elementit tulisi muuttaa vastaamaan nykyajan tarpeita.

Aktivoivaa opetusmenetelmää voidaan hyödyntää myös yliopistolla. Englannissa tehdyn tutkimuksen perusteella on huomattu luentokoolla olevan merkitystä tässä. Pienemmissä (alle 50 opiskelijan) ryhmissä on huomattu olevan huomattavasti helpompi saada opiskelijoita mukaan, kuin isommissa (enemmän kuin 100) opiskelijan ryhmissä. Pienemmissä ryhmissä voidaan järjestää väittelyjä ja pari tai ryhmäkeskustelua, kun taas suuren ryhmän kanssa tämä on hankalaa. [58]

Aktivoivan opetusmenetelmän tarkoituksena on pitää yllä ja lisätä oppilaiden motivaatiota oppimiseen, lisätä oppilaiden itseluottamusta ja kunnianhimoa. Aktivoivaa opetusta voidaan rakentaa mm. seuraaviin periaatteisiin:

- Opiskelijoita tulisi kannustaa osallistumaan aktiivisesti aktivoiviin toimintoihin; kurssin suorittamiseksi ei riitä luentomateriaalien ja siihen liittyvien kirjojen opetteleminen.
- Laskuharjoitusten aikana jokaisella on mahdollisuus käyttää CAS-ohjelmaa, tällöin vaikeat matemaattiset laskut suoritetaan käyttäen CAS-ohjelmia. Jokaisella laskuharjoituskerralla tulisi tehdä selvää eroa vaikeiden ja mekaanisten laskujen ja ymmärrystä vaatien laskujen välillä. Tällöin rutiinilaskutaitoja vaativat vaikeat laskut suoritetaan tietokoneella, kun taas ymmärrystä vaativat laskut joko käsi tai tietokoneella käyttäen paljon aikaa laskun yksityiskohtien ymmärtämiseen.
- Yliopisto-opettajien tulisi etsijä aktiivisesti uusia aktivoivia menetelmiä, joita voidaan hyödyntää luennoilla tai laskuharjoitusten aikana.

- Opiskelijoita koulutetaan ratkaisemaan reaalimaailman ongelmia ja ymmärtämään matematiikan hyödyllisyys sekä arjessa yleisesti että heidän tulevaisuudelle.
- Luennoitsijoiden tulisi kannustaa opiskelijoita antamaan kurssipalautetta (esim. laittamalla sitä kurssisuoritusvaatimuksiin).
- Aktivoivien menetelmien kehittämiseksi, tulisi perustaa keskusteluryhmiä opiskelijoiden kesken. Keskustelut sekä kehittävät oppilaiden kommunikaatiotaitoja että toimivat hyvänä palautteena ja uusien ideoiden lähteenä opettajille. [73]

Yliopistolla opetusmenetelmänä voi olla luennointi, mutta niitä voidaan piristää lisäämällä erilaisia elementtejä. Kenties ns. sulautuvalla lähestymistavalla (blended approach) voidaan varmistaa optimaalisin tulos. Sulautuva lähestymistapa käyttää eri lähestymistapojen ja opetusmenetelmien parhaat puolet kuhunkin tarkoitukseen, eli sulauttaa yhteen eri pedagogiset menetelmät. Hyvä luento motivoi opiskelijoita ja saa heidät innostumaan aihealueesta, liittää uuden asian aikaisempaan ja tarjoaa kokonaiskuvan asiasta. [66]

Irlannissa on kokeiltu hyvin omaperäistä mutta tehokasta ideaa, jossa opintojensa loppuvaiheessa olevia DI-opiskelijoita on pyydetty tenttimään kandivaiheen perusmatematiikan kurssit uudestaan. Heillä on ollut mahdollisuus tehdä tenttiä monta kertaa, mutta heidän on pitänyt onnistua 90-prosenttisesti. Näin tarkoituksena on ollut varmistaa perus matemaattisten taitojen toistuminen ja hallintaa. [67] Monesti toisto on kaikkien varmin tapa varmistaa peruslaskennan rutinoituminen ja pitkäaikainen muistaminen.

Matematiikan opetuksessa tulisi laskentamenetelmien lisäksi painottaa, loogista päättelyn taitoa, abstraktisointia, yleistyksiä ja formaalia todistusta. Oppilaille pitää painottaa, että on luonnollista tehdä virheitä. Oppilaiden tulisi ymmärtää, että ratkaisut ovat yleensä monivaiheisia ja siten vaativat paljon luovuutta, aikaa ja kärsivällisyyttä. [67]

Matemaattisia aineita tarjoavien yliopistojen tulisi varmistaa, että oppilaat omaksuvat seuraavat taidot ja mielentilat kahden ensimmäisen yliopistokoulutuksen aikana:

- Peruslaskennan hallitseminen
- Visualisointi ja geometriset taidot, varsinkin 3D-visualisointi ja avaruusgeometria
- Kyky kääntää matematiikka sanoiksi ja sanat matematiikaksi
- Kyky tunnistaa väärät argumentit
- Kyky päätellä vastauksen järkevyys ja mahdollisesti jopa tarkistaa vastauksen oikeellisuus
- Kokeilla monia lähestymistapoja ongelman ratkaisemiseksi ja olla luovuttamatta, jos ensimmäinen lähestymistapa ei tuota oikeaa vastausta

- Ymmärryksen omaaminen matematiikan roolista nyky-yhteiskunnassa, sen sovelluskohteista ja sen historiasta
- Opiskelijoiden ei tulisi vain opetella ulkoa luentoaiheita ja uudelleen tuottaa niitä, vaan heidän tulisi oppia ajattelemaan, analysoimaan ja kommunikoimaan
- Hyödyntää nykyteknologiaa
- Kannustaa opiskelijoita opiskelemaan matematiikka pääaineenaan tai enemmän kuin tutkinto-ohjelman vaativa minimimäärä [67]

Puolestaan yliopiston on

- Tarjottava Aktivoivia opetusmenetelmiä
- Pidettävä matematiikkaa pääaineena tai sivuaineena lukevia oppilaita ajan tasalla uramahdollisuuksista ja avoimista työpaikoista
- Tarjottava tukiopetusta sitä tarvitseville
- Nimettävä koordinaattori erilaitoksille vastamaan opetuksen laadusta
- Tarjottava rento ja lämminhenkinen tila, jossa matematiikkaa opiskelevat voivat kokoontua [66]

6.3.1.3 Ilmiöpohjainen opetus

Ilmiöpohjaisella opetuksella ja oppimisella tarkoitetaan oppiainerajoja rikkovaa, tutkivaa otetta oppimiseen. Lähtökohtana ovat kokonaisvaltaiset todellisen maailman ilmiöt. [61]

Ilmiöitä tarkastellaan kokonaisina, aidossa kontekstissa, ja niihin liittyviä tietoja ja taitoja opetellaan oppiainerajat ylittäen. Lähtökohta poikkeaa perinteisestä oppiainejakoisesta koulukulttuurista, jossa opeteltavat asiat on usein hajotettu suhteellisen pieniksi ja ehkä irrallisiksikin palasiksi (dekontekstualisointi). Ilmiöpohjaisuus avaa isomman ikkunan maailmaan ja sen ymmärtämiseen. [61] Ilmiöpohjaisuus on vuonna 2008 uudelleen esille noussut termi, jota on käytetty jo 1980-luvulta alkaen. [69]

Ilmiöpohjaisessa oppimisessa edetään tyypillisesti ongelmalähtöisen oppimisen menetelmien mukaan. Yleensä nämä askeleet ovat:

- käsitteiden selventäminen
- ongelman määrittäminen
- aivoriihi
- ongelman analysointi
- oppimistavoitteiden muodostaminen
- itseopiskelu
- purku ja arviointi [62]

Ilmiöpohjaista ja tutkivaa oppimista on sovellettu mm. Helsingissä. Siellä, jossain kouluissa, oppiminen nähdään kokonaisvaltaisena, yhteisöllisenä ja vuorovaikutuksellisena prosessina. Oppiminen nähdään tavoitteellisena. Koulu on kirjavan oppijoiden yhteisö, jossa arvostetaan jokaisen jäsenen rakentavaa osallisuutta. Yhdessä oppiminen edistää oppilaiden luovan ja kriittisen ajattelun ja ongelmanratkaisun taitoja sekä kykyä ymmärtää erilaisia näkökulmia. [61]

Helsingissä on tarkoituksena, että kaikilla asteilla opiskeltaisiin oppiainerajat ylittäviä laajoja opintokokonaisuuksia. Ammatillisessa koulutuksessa integroidaan yhteisten tutkintojen osat ammatillisiin tutkinnon osiin. Siellä halutaan kehittää digitaalisia oppimisympäristöjä ilmiöpohjaisen ja tutkivan oppimisen prosesseihin sopiviksi. Tällöin Helsingissä, lapsen aloittaessa esiopetuksensa syksyllä 2015, hän päättää toisen asteen arviolta vuonna 2028. Aitoihin, autenttisiin ilmiöihin, yhteiskuntaan ja työelämään joustavasti liittyvä koulutus pysyy mukana muutoksissa ja auttaa lapsia ja nuoria kasvussa yhteisön vaikuttaviksi jäseniksi. [61]

Helsingissä halutaan myös luoda ja laajentaa yhteistyöverkostoja Helsingin kaupungin sisällä, yliopistojen ja korkeakoulujen, työelämän ja kolmannen sektorin kanssa tukemaan oppimisen ja opiskelun laajentamista koulu- ja oppilaitostilojen ulkopuolelle autenttisiin työ- ja toimintaympäristöihin. [61]

6.3.2 Kurssien luonne ja opetusmateriaalit

Opetuksen on lisättävä tietoisuutta matematiikan hyödyllisyydestä, sillä se on avain oppilaiden motivaatioon. Tarvitaan kursseja, joissa opitaan miksi tiettyjä asioita opetellaan ja missä niitä voidaan käyttää. Materiaalin pitäisi olla myös kiinnostusta herättävä, mukaansa tempaava ja älyllisesti haastava mutta helposti lähestyttävää [67]. Kurssin pitää olla sen luonteinen, että se ei vain anna faktatietoa, vaan se herättää myös ajatuksia ja keskusteluja. Eri koulutusasteilla on huomattu matematiikan soveltamiskyvyn heikkous monien oppilaiden kohdalla. Yleinen vaikeus soveltaa matemaattista osaamista käytäntöön selittyy kokemuksen puutteella ja sillä, että kirjojen laatijoillakaan ei ole kokemusta matematiikan ammattimaisesta käyttämisestä tekniikassa. Jotta oppilaat huomaisivat miten matematiikkaa käytetään ja miten se liittyy heidän tulevaan arkeen, materiaaliin on hyvä sisällyttää tehtäviä eri koulutusaloilta ja ammateista. Toisin sanoen materiaalissa esitetään, minkälaista matematiikkaa eri ammateissa käytetään. Materiaaliin voidaan sisällyttää esimerkkejä yleisammateista: mm. matemaatikon, fyysikon, kemistin, biologin, insinöörin, sairaanhoitajan, lääkärin, opettajan, mekaanikon, lentäjän, kirjanpitäjän, pankkiirin, yrittäjän ja yritysjohtajan ammateista. Koulu- ja yliopistokurssien tueksi tarvitaan siis tukimateriaaleja, jotka tuottavat tekniikan ja konkreettisten ammattien näkökulman opetettavaan ja opiskeltavaan asiaan.

Kurssimateriaalien tulisi olla yhtenäistä, järjestelmällisistä ja tekniikan näkökulmaa tuottavaa. Esiteltäessä uutta aihetta materiaalin on kerrottava vähintään yhden konkreettisen esimerkin missä sitä käytetään [67]. Suunnitellessaan uusia kursseja kurssin järjestäjien on syytä kysyä itseltään seuraavat kysymykset:

- Tarjoaako kurssi ainakin yhden sovelluskohteen matemaattisten aineiden ulkopuolelta
- Sisältääkö kurssin aihealueen tai sovelluskohteen, joka on korkeintaan 50 vuotta vanha [66]

Jokaisen kurssin on sisällytettävä toimintoja, jotka edesauttavat opiskelijoita kehittämään analyyttisia ja kriittistä päättelyntaitoa, ongelman ratkaisukykyä, kommunikaatio taitoa ja matemaattisen mielen omaamista. Lisäksi opetuksen on lisättävä tietoisuutta matematiikan aihealueen yhteydestä muihin aineisiin ja vahvistettava opiskelijoiden kykyjä soveltaa osaamistaan muihin aineisiin. Lukujärjestyksen jokaisessa vaiheessa kurssien pitäisi sisällyttää toimintoja, jotka auttavat opiskelijoita hyödyntämään teknologiaa. [58]

Materiaalin tulisi sisältää myös riittävästi avoimia tehtäviä, jotka antavat tilaa opiskelijoiden luovuudelle ja mahdollistavat myös keskustelut, mm. käydessä läpi tehtävien ratkaisuja. Materiaalia tehdessä on otettava huomioon myös erilaiset oppijat ja erityisesti myös lahjakkaat oppilaat. Suomen kaltaisessa pienessä maassa, kilpailukyky varmistetaan sillä, että tuetaan lahjakkaita opiskelijoita alusta asti. He ovat tärkeä voimavara, joita tulee vaalia ja ”ruokkia” sopivilla tehtävillä, jotta heidän todellinen potentiaali tulisi esille.

Luonnontieteiden opetus- ja kurssimateriaalien tulisi sisältää hyvin varhaisista vaiheista sanastoa myös muilla kielillä tai vähintään englanniksi. Näin oppilaat voivat omaksua kontekstiin liittyvää sanastoa. Tämä auttaa heitä jatko-opinnoissaan ja tiedonhaussa. Sillä nykyään suurin osa tieteellisistä teksteistä on englannin kielellä.

Myös tieteellisten terminologioiden alkuperän, eli etymologian tulisi näkyä materiaalissa. Joidenkin oppilaiden kannalla tämä auttaa heitä muistamaan ja omaksumaan asian paremmin. Käytettyjen symbolien alkuperää tulisi myös selvitä materiaalista. Esimerkiksi voidaan mainita, että kokonaislukuja kuvaava symboli ”$\mathbb{Z}$” tulee saksan kielen sanasta ”Zahlen”, joka tarkoittaa lukuja.

Osa matematiikan kirjoista sisältää myös jonkun tarinan tai selittää hieman aihealueen historiasta. Tämä on tärkeää kaikkien materiaalinlaatijoiden omaksua, sillä aina kun kerrotaan hieman symbolien, termien ja aihealueiden taustoista ja tarinoita niihin liittyen, niin se auttaa opiskelijoita assosioimaan uusi asia mielekkääseen tarinaan tai taustatietoon. Tunnetusti assosioidessa uutta asia muihin asioihin auttaa meitä muistamaan asian paremmin.

Yhdysvallan matemaattisen yhdistyksen (The Mathematical Association of America) kandivaiheen matematiikan ohjelman komitea (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (CUPM)) vastaa yliopistojen matemaattisten tutkinto-ohjelmien suunnittelusta. 2003 tapaamisessaan he esittelivät ehdotukset, joiden mukaan matematiikan laitoksen tulisi:

- Ymmärtää oppilaiden vahvuudet, heikkoudet, urasuunnitelmat, taustat ja toiveet
- Päätellä miten hyvin kurssi- ja opinto-ohjelmien tavoitteet vastaavat opiskelijoiden tarpeisiin ja miten hyvin nämä tavoitteet on saavutetut
- Jatkuvasti kehittää kursseja ja opinto-ohjelmia vastaamaan paremmin opiskelijoiden tarpeita ja arvioida tällaisen toimintamallin tehokkuutta [66]

Edellä mainitun CUMP-komitean mukaan myös jokaisen kurssin tulisi:

- Esittää pääideat ja konseptit eri näkökulmista
- Käyttää monipuolisesti esimerkkejä ja sovelluskohteita motivoimaan opiskelijoita ja lisäämään heidän ymmärrystä materiaalista
- Edistää tietoisuutta yhteyksistä sekä matemaattisiin että muihin aineisiin ja vahvistaa opiskelijoiden kykyä soveltaa kurssimateriaalia muihin aineisiin
- Esittää nykyaikaisia (nykytutkimuksen alla olevia) matematiikan aihealueita ja niiden sovelluskohteita, demonstroimaan matematiikan elintärkeyttä modernissa maailmassa [66]

Lisäksi yliopistokoulutuksessa opintojensa alkuvaiheessa oleville insinööreille tai matemaattisia aineita lukeville olisi hyvää järjestää ainakin yksi ohjelmointikurssi, Bigdataan (kts. 6.5.3) orientoituneen tilastotieteen johdantokurssi, omaan alaan liittyvä harjoitustehtävä koulutusalan ulkopuolelta, nykyaikaista matematiikan sovelluskohdetta sisältävä projekti ja omaan alaan liittyvä työharjoittelu. [66]

Opetusmateriaalin on jatkuvasti esitettävä matematiikan ja aihealueen historiaa. Materiaalin on kerrottava miten historiallisesti aihealue sai alkuunsa ja miten sitä käytetään nykyään. Kurssien luonteeseen tulisi kuulua matemaattinen mallintaminen ja erilaisten teknologioiden hyödyntämien. [66]

6.3.2.1 Luovuuteen kannustaminen

Luovuus on tärkeä asia. Kaikki ovat jollain tavalla luovia, mutta harvat tiedostavat sitä. Tämä olisi hyvää ottaa huomioon opetusmenetelmiä ja materiaaleja laatiessa. Nykykoulutuksen eräs tärkeimpiä tehtäviä on kouluttaa kaikkia oppilaita tiedostamaan oman luovuuteensa. Materiaalin monipuolisuus mahdollistaa oppilaiden erilaisten luovien kykyjen esiinnousemisen matematiikan opiskelussa. Luovuuteen liittyen ei tulisi kysyä, että ovatko oppilaat luovia, vaan miten he ovat luovia [70]. Materiaalin ja opetusmenetelmien on pohjauduttava tähän. Toisin sanoen materiaaleilla ja opetusmenetelmillä pyritään löytämään erilaiset tavat miten kukin on luovaa ja auttaa häntä hyödyntämään sitä.

Koulussa, ja miksei yliopistolla, eräs tapa tuoda oppilaiden luovuus esille on käyttämällä taidetta. Niinpä tulevaisuuden kannalta olisi mielenkiintoista pohtia miten taidetta voidaan hyödyntää matematiikan opiskelussa. Tämä auttaisi myös hälventämään ainekohtaisia rajoja, jolloin taidetta käyttämällä matematiikka yhdistetään mm. musiikkiin, kuvataiteeseen ja käsityöhön.

6.3.3 Tukiopetusten järjestäminen

Kuten aikaisemmin mainittiin, matemaattisia aineita opetettavien yliopistojen on järjestettävä tukiopetusta. Siinä tutoreina voisivat toimia matematiikkaa pääaineenaan lukevat ja opintojensa loppupuolella (DI- tai maisterivaiheen) olevat opiskelijat. [66] Tutoreina toimimisesta voisi saada opintopisteitä tai se voisi olla vaihtoehtoinen tapa suorittaa kurssi. Oppilaiden käyttäminen tutoreina, taloudellisesti madaltaisi kynnystä yliopistolle järjestää tukiopetusta.

Tukiopetustilan tulisi olla kaikille avoin ja ilmapiiriltään lämminhenkinen, jotta opiskelijat tuntisivat olonsa tervetulleeksi ja voisivat käyttää sitä opintojensa missä tahansa vaiheessa. [68] Ajoittain opettajienkin olisi hyvä käydä tukiopetuskeskuksessa antamassa tukiopetusta. Näin he saisivat konkreettisen näkemyksen oppilaiden ongelmatilanteista ja osaisivat paremmin selittää asian seuraavilla kursseilla.

Tukiopetuksen tärkeys ja tarve on huomattu monessa eri kouluissa ja yliopistoissa. Tästä johtuen eri tahojen toimesta on kehitetty paljon laadukkaita verkkomateriaaleja. Niiden on tarkoitus toimia tuki- ja opetusmateriaalina sitä tarvitseville opiskelijoille. Tähän liittyen alla on lyhyesti esitetty muutama verkkosivu.

Math Centre

Verkkosivua perustettiin 2003 ja siinä käytettiin paljon rinnakkaisprojektin MathTutorin materiaalia. MathCenter-verkkosivu päivitettiin 2010 kutakuinkin nykyiseen malliin. Sivu sisältää erilaisia oppimista tukevia materiaaleja, kuten mm. prujuja, opinto-ohjelmia, video-ohjausta, interaktiivisia harjoituksia, Case-(pohjaista) oppimista, testaa itsesi harjoituksia ja oppimista tukevia älypuhelin sovelluksia. Sivulla olevat (englanninkieliset) materiaalit ovat laatuvarmistetut ja ilmaiseksi kaikkien käytettävissä. Materiaalit ovat tarkoitetut lukio- ja yliopisto-opiskelijoille. Sivua ylläpitää matematiikan opettajien joukkue, joilla on vuosien kokemus matematiikan opettamisesta. MathCenterin sivuhin pääse linkistä: http://www.mathcentre.ac.uk/. [74]

Khan Academy

Khan Academyn perusti vuonna 2006 bengalilais-amerikkalainen kouluttaja Salman Khan. Khan Academy on yhdysvaltalainen yleishyödyllinen koulutusjärjestö, jonka tavoitteena on tarjota ”maksutonta maailmanluokan koulutusta kaikille kaikkialla”. Järjestö tuottaa pienoisluentoja YouTube-videoiden muodossa. Pienoisluentojen lisäksi järjestön verkkosivuilla on harjoitustehtäviä ja opettajille tarkoitettuja työkaluja. [75]

Sivulla olevat luennot eivät liity mihinkään yksittäiseen kurssiin vain ne käsittelevät aina tietyn aihealueen. Matematiikan lisäksi verkkosivulla on tarjolla mm. luonnontieteitä, tietokone- ja ohjelmistotekniikkaa. Verkkosivulla olevat resurssit ovat vapaasti kaikkien käytössä. Khan Academyn yhteystyökumppaneina toimivat NASA, The Museum of Modern Art (kannustaa taiteiden käyttöä opiskelussa), The California Academy of Sciences ja MIT (Tarjoaa räätälöityä ja erityistarpeita tukevia materiaalia). [76] Khan Academyn tarjoamat materiaalit soveltuvat erityisesti kouluille, lukioille ja yliopisto-opintojensa alkuvaiheessa oleville.

Sigma Network

Sigma verkosto perustettiin vuonna 2005 yhteistyössä CETL:in (Centre for Excellence in Teaching and Learning) kanssa tarkoituksenaan tarjota tukimateriaalia matematiikan ja tilastotieteen opiskeluun. Sigma-CETL-projekti loppui 2010, ja verkkosivua http://www.sigma-cetl.ac.uk/ ei ole päivitetty sen jälkeen. Nykyään sigma toimii englannin korkeakoulutuksen rahoitusneuvoston rahoittamana ja uudella nimellä Sigma Network (http://www.sigma-network.ac.uk/).

Sigma Network sekä tukee uusia tukiverkostoja että kannustaa jo olemassa olevia, kehittää yliopistojen välistä yhteistyötä, järjestää työpajoja ja konferenssia. Sigma Networkin fokuksena on parantaa opetuksen laatua ja tehokkuutta. Lisäksi se tuottaa paljon tukimateriaaleja matematiikan ja tilastotieteen opiskelijoille. [77]

Sigam Network toimii ikään kuin laajana verkostona, joka linkittää tukea tarvitsevat opiskelijat tukea antaville tahoille ja verkkosivuille.

MOOC

MOOC (Massive Open Online Course (massiivinen avoin verkkokurssi)) tarkoittaa verkossa pidettävää kurssia, johon pääsääntöisesti kaikilla on vapaa pääsy. Suomessa MOOC:eja järjestää mm. Helsingin yliopiston tietojenkäsittelytieteen laitos ja Aalto-yliopisto. [80]

Ensimmäiset MOOC:it syntyivät 1990-luvun loppupuolella. Ne mahdollistavat ilmaisen koulutuksen kaikille ja tuovat modernia tapaa opettaa: opiskelijalla on täysi vapaus ja vastuu ja opettajasta tulee ohjaaja, joka edesauttaa opiskelijoita saavuttamaan päämääränsä. MOOC:it eivät ole sidottuja mihinkään olemassa olevaan koulutusjärjestelmään tai rakenteeseen. [80]

6.3.4 Arviointi

Maailmanlaajuisesti yleisin ja vanhin tapa arvioida osaamista on akateeminen tentti, eli kirjallinen tentti, jossa ei saa käyttää kirjoja tai internetiä (closed book). Akateeminen tentti on esimerkki keinotekoisista tenteistä, jotka eivät rakenteellisesti vastaa todellista elämää. Tällainen ulkoa opettelua mittaava tentti on vanhin arviointitapa. Aikaisemmin oli hyvinkin tarpeen opetella asioita ulkoa, sillä tietoa ei voinut helposti säilyttää ja siirrellä muualle kuin ihmisten muistissa. Ulkoa oppimista mittaava keinotekoinen tentti ei välttämättä ole nykyisessä tietoyhteiskunnassa enää kaikkein soveltuvin tenttimismuoto. [86]

Vähemmän yleinen tenttimismuoto on ns. open book (tenttiin saa tuoda luentomateriaalia ja kirjoja) tai sähköinen tentti (voi käyttää mm. CAS-ohjelmia tai internetiä). Eräs argumentti open book- ja sähköisen tenttiin järjestämiselle on sen vastaavuus tosielämään ja tulevaisuuden työtehtävään. Open book- ja sähköinen tentti ovat vastaavasti esimerkkejä luonnollisesta (aito ja alalle ominainen ongelma) ja mallintavasta (käytetään simulaatiota aidolle ja alalle ominaiseen ongelmaan) tentistä. [86]

Käytettäessä tietokoneita ja elektronisia laitteita, on varmistettava että oppilaat eivät pysty langattomasti kommunikoimaan keskenään tenttitilanteessa. Mikäli tämä ei ole mahdollista, voidaan sähköistä tenttiä tehostaa muilla arviointimenetelmillä kuten suullisella tentillä. Tällöin sähköinen tentti nähdään enemmänkin osana oppimisprosessia. Luonnollisessa tenttimistavassakin voidaan vaatia, että tentti suoritetaan määrätyn aikarajoituksen puitteissa, sillä se on myös ominainen piirre myös tulevaisuuden työtehtävissä. [58]

Myös tentin pituutta tulee harkita. Yleinen käytäntö on pitää 2-5 tunnin mittaisia kirjallisia tenttejä. Mitä lyhyempi tenttiaika sen vähemmän voidaan tarkistaa kurssin opetusmateriaalin kokonaishallintaa. Myös ns. ”tärppeihin” lukeminen todennäköisesti toimii lyhyillä tenttitaikarajoilla paremmin kuin pitkillä.

Mikäli tenttiaika on lyhyt, niin olisi hyvä täydentää suoritusta kurssista muilla arviointimenetelmillä; esimerkiksi suullisella kokeella, ryhmätyöllä tai projekteilla. Suulliset kokeet ovat tehokkaimpia menetelmiä varmistamaan oppilaiden syvällinen ymmärrys asiasta. Samalla ne toimivat hyvänä oppimisprosessina, koska ne mahdollistavat keskustelun opettajan kanssa. [58]

Perinteisiä kirjallisia tenttimistapoja on kritisoitu viimeaikoina. Perinteisesti tietty määrä asia pitäisi osata tiettyyn ajan, eli yhteisen tenttimispäivän mennessä. Tämä vain tiettynä päivänä tapahtuva tentti ei ole kovin tehokas tapa mitata kaikkia matemaattisen osaamisen puolia. Viikkokokeet, yksin tai ryhmässä tehtävät projektit, vie-kotiin-tehtävät (take-home tests), verkossa olevat tietovisat ja suulliset esitykset lopputentin ohella varmistavat tehokkaan, pitkän aikajänteen ja monipuolisen arviointitavan. Näin saadaan parempi kokonaiskuva oppilaiden osaamisesta. Lisäksi kukin arviointimenetelmä toimisi omalta osaltaan oppimista edistävänä elementtinä. [67] Toisaalta, akateemiseen vapauteen vedoten, oppilaat haluavat tenttiä haluamallaan ajalla. Tietokoneet ja sähköiset tenttijärjestelmät mahdollistavat tämän. Osissa yliopistoissa tätä menetelmää ollaan käyttämässä. Tällöin kurssin jälkeen opiskelijat voivat itse verkossa varata tenttipäivän ja kellonajan annetusta aikajänteestä. Tällainen järjestelmä olisi suotavaa, koska se mm. helpottaisi työssä käyvien, sairaiden ja matkalla olevien tenttimistä.

Eräs haaste tenttiä järjestettäessä on miten varmistaa samalla sekä oppilaiden rutiinilaskujen hallintaa että syvällinen ymmärrys aihealueesta. Eräs ratkaisu tähän on kaksivaiheinen tentti. Tentit voivat olla eri päivinä. Ensimmäisessä kysyttäisiin luennoilla opittujen metodien ja proseduurien hallintaa. Tässä tentissä kysymykset voivat olla hyvinkin vaikeita ja teoreettisia, mutta eivät vaadi syvällistä ymmärrystä. Toisin sanoen riittää, että opiskelija pystyy toistamaan konemaisesti oppimaansa. Toisessa osiossa keskityttäisiin ongelmaratkaisuihin ja aihealueen soveltamiseen. Tämä osio vaatisi syvällistä ymmärrystä asiasta ja vastaisi työelämän ongelmia, eli opiskelijoiden on sekä sovellettava oppimaansa että käytätettävä ymmärrystään ja luovuuttaan. Päästäkseen läpi kurssista opiskelijoiden tulisi menestyä hyvin ensimmäisessä osiossa. Toista osiota tekisivät vain ne jotka ovat menestyneet hyvin ensimmäisessä osiossa. Tällöin toinen (ymmärrystä vaativa) osio voidaan arvioida pelkästään jopa hyväksytty-hylätty periaatteella. [58]

Maailmanlaajuisesti yliopistot käyttävät erilaisia pisteytysjärjestelmiä; jopa Euroopassa pisteytysjärjestelmät eivät ole samat. [58] Erilaisissa pisteytysjärjestelmissä annetaan arvosanat joko käyttämällä aakkosia A-F tai numeroita mm. 0-4, 0-5, 0-10 tai 0-20. Maailmanlaajuisesti olisi hyvä sopia tietty pisteytys-standardi, jolloin arvosanat annettaisiin sekä yliopiston omassa pisteytysjärjestelmässä että sovitun standardin mukaan. Tämä helpottaisi eri yliopistojen käyttämiä opetus- ja arviointimenetelmien vertaamista.

Monivalinta- ja oikea-väärin-tehtäviäkin voidaan hyödyntää arvioinnissa. Tähän perustuvat tentit ovat nopeasti korjattavissa. Oppilaiden kannalta tällaiset tentit voivat olla turhauttavia: esimerkiksi, jos oikea-väärin tehtävässä kysymys on aseteltu huonosti tai vaatii hyvin yksityiskohtaista (jopa ei niin olennaista) tietoa. Kyseistä tenttimistapaa voidaan kehittää lisäämällä siihen toisia arviointimenetelmiä. Esimerkiksi oppilasryhmä saa monivalintakysymyksiä. Yhdessä keskustellen he valitsevat omasta mielestään oikeat vastaukset. Tämän jälkeen he esittävät koko ryhmälle valinta perusteensa. Tämä toteutetaan kuitenkin siten, että opettaja määrää hetki ennen esitystä kuka kertoo mitäkin kohtaa. Näin varmistetaan, että jokaisen on pakko sisäistää kaikki kohdat. Tällainen monivalintatehtäviä ja suullista esitystä sisältävä arviointimenetelmä on ns. ticking-menetelmä (rastitusmenetelmä). Ticking-menetelmä soveltuu erityisesti kirjallisen tentin tueksi. [58]

Arviointiin liittyen kurssin järjestäjien on hyvä kysyä itseltään jokaisen kurssin kohdalta:

- Mitä opiskelijat tulevat oppimaan?
- Mitä opiskelijat tulevat tekemään oppiakseen?
- Miten opiskelijoiden osaaminen voidaan arvioida? [58]

Tämän lisäksi kurssin järjestäjien on syytä pohtia, että vaaditaanko kurssilla opiskelijaa

- selittämään päättelyketjunsa?
- ratkaisemaan monivaiheisia ongelmia?
- yleistämään (abstraktioimaan) annetusta esimerkistä?
- ratkaisemaan ongelmaa kahdella eri tavalla?
- opiskelemaan uutta materiaalia ja hyödyntämään opittunsa jollain tavalla?
- käyttämään CAS-ohjelmia ja niitä hyödyntäen ratkaisemaan muiden alojen ongelmia [66]

Sen lisäksi, että arvioidaan opiskelijoita pisteytystä varten, olisi tärkeä arvioida heidän matemaattista osaamista pitkin kurssia paremman ymmärryksen saamiseksi heidän ymmärryksen tasosta ja oppimisesta. Tällöin voidaan kehittää ja muuttaa opetusmenetelmiä vastamaan opiskelijoiden tarpeita ja edesauttamaan heidän ymmärrystä asiasta. Opiskelijoiden osaamisen arviointiin voidaan käyttää tässä osiossa aikaisemmin mainittuja arviointimenetelmiä. [67] Lopuksi voidaan todeta, että ei ole olemassa yhtä hyvää ja tehokasta arviointimenetelmää, vaan tehokkain tapa arvioida oppilaita on käyttää realistisia, työelämää vastaavia ja mahdollisemman monta arviointimenetelmää eri vaiheissa kurssia.

6.3.5 Asenne matematiikkaa kohtaan

Opiskelijoiden asenne matematiikkaan vaikuttaa paljon heidän motivaatioonsa ja sitä kautta syvällisen ymmärrykseen. Tarkastellaan kolmea eri väitettä. Oletetaan, että opiskelijoiden mielipide matematiikasta jakaantuu vain näihin kolmeen tapaukseen:

a) Matematiikka on osa tutkinto-ohjelmaa
b) Matematiikka toimii pohjana muille tieteenaloille
c) Matematiikka tarjoaa työkalut maailmassa tapahtumien ongelmien ja ilmiöiden analysoimiseksi [58]

Ensimmäisessä näkökulmassa matematiikasta tulee vain erillinen aine, missä toisessa näkökulmassa matematiikka on integroitu tutkinto-ohjelmaan. Kolmas näkökulma integroi matematiikan maailmaan, jota se kuvaa. Nämä eri näkökulmat vaikuttavat oppilaiden asenteisiin ja ponnisteluihin matematiikan opiskelussa. Viime kädessä asenne vaikuttaa tapaan miten matematiikka lähestytään ja opitaan. Lähestymistapoja on ainakin kahdenlaista: pintasuuntautunut (surface approch) ja syväsuuntautunut (deeper approch) lähestymistapa. [58]

Pintasuuntautunut oppiminen tähtää pikkutarkkaan asioiden opetteluun; asioita opetellaan ulkoa eikä eri asioiden välistä ymmärrystä synny. Oppiminen on tiedon ulkoa opettelua, luonteelta määrällistä ja kykyä eritellä asioita. Motivaatio tulee ulkoapäin ja tärkeintä on selviytyä esimerkiksi tentistä hyvin. Huomio on esityksessä ja yksilö yrittää painaa mieleensä yksityiskohtia. Pintasuuntautuneen opetuksen myötä oppijan ajattelutapa ei välttämättä muutu. [69]

Syväsuuntautunut oppiminen tähtää puolestaan kokonaisuuksien hallintaan. Asioita käsitellään perusteellisemmin ja tavoitteena on ymmärryksen saavuttaminen. Opetuksella pyritään sisällön ymmärtämiseen ja kokonaisuuksien hahmottamiseen. Oppijaa ohjataan suhteuttamaan asioita keskenään ja kytkemään niitä sekä aikaisempiin kokemuksiinsa että laajempaan yhteyteen. Oppiminen perustuu tietojen soveltamiseen, vertailuun ja analysointiin. Tällöin asiasta muodostuu laajempi käsitys. Syväsuuntautuneessa opetuksessa aiempien sisäisten mallien avulla uusi tieto assosioidaan aikaisempaan ja sovitetaan sopivalle paikalleen. [69]

Pintasuuntautuneessa lähestymistavassa opiskelijan fokuksena on arvosana ja kurssin suorittaminen. Tällöin tämä pyrkii opettelemaan vain kurssivaatimukset ja yrittää konemaisesti jälleen tuottaa kurssimateriaalin. Puolestaan syväsuuntautuneessa lähestymistavassa, opiskelijan fokuksena on merkityksen hakeminen opetetulle asialle. Tällöin opiskelija yhdistää matematiikan insinööritieteisiin ja reaalimaailmaan. Tutkimusten mukaan, mikäli opiskelija näkee matematiikan erillisenä asiana, niin hän todennäköisesti lähestyy sitä pintasuuntautuneella tasolla, kun taas matematiikan liittäminen muihin opintoihin ja maailmaan johtaa syväsuuntautuneen lähestymistapaan. Tästä johtuen opiskelijoiden mukaan ottaminen realistisiin tehtäviin tai projekteihin heti varhaisista opiskeluvaiheista lähtien on tärkeä takamaan syväsuuntautuneen lähestymistavan matematiikkaa kohtaan. [58]

Monissa yliopistoissa on huomattu, että matematiikan pakollisiin johdantokursseihin osallistuu huomattavasti enemmän opiskelijoita kuin kaikkiin muihin matematiikan jatkokursseihin yhteensä. Pakolliset johdantokurssit ovat muutenkin haastavia opettaa, koska niihin tulevat opiskelijat omaavat hyvin erilaisia taustoja. Osalla heillä on alemman asteenkoulutuksista kehittynyt negatiivin asenne matematiikka kohtaan. Tällaiset opiskelijat vievät negatiivisen asenteensa myös työelämään ja yhteiskuntaan. Tästä syystä johdantokurssit tulisi nähdä ainutlaatuisena tilaisuutena muuttaa opiskelijoiden asennetta. [66]

Kun matematiikkaa sovellettiin erilaisiin reaalimaailman ongelmiin ja aineisiin, niin matemaattinen tieto, itseluottamus, asenne, motivaatio ja halua luoda matemaattista uraa kasvoivat. [66]

6.3.6 Oppimisympäristön ilmapiiri

Opiskelijoiden integroimiseksi opetustoimintaan ja menetelmiin on varmistettava, että oppimisympäristön ilmapiiri on turvallinen, ei-uhkaava, ei-tuomitseva, lämminhenkinen ja mukaansa kutsuva. Näin opiskelijat voivat helpottuneemmin ilmaista heidän matemaattisessa taidossa olevia puitteita ja esittää selventäviä kysymyksiä. [58]

6.3.7 Teknologian hyödyntäminen

Moderni teknologia on siirtymässä vauhdikkaasti nykyopetukseen. Opetuksen kehittämiseksi teknologia voidaan hyödyntää monella eri tavalla. Usein erilaisille tavoille hyödyntää teknologiaa on annettu oma nimi: mm. e-oppiminen, sulautuva oppiminen, verkko-oppiminen, etäopiskelu/oppiminen. Teknologian käytössä etäopiskeluun, verkossa olevat luentokalvot ja multimediat ovat opiskelijoiden vapaassa käytössä. He voivat katsoa niitä haluamansa ajalla ja palata niihin aina tarvittaessa. Opettajat voivat halutessaan myös kuvata luentoja käyttämällä videokameraa tai tablettia ja laittaa myös niittä verkkoon. Lisäksi luentojen tueksi voidaan CAS-ohjelmien koodi ja animaatiota laittaa verkkoon. Myös verkkoon voidaan laittaa luentoon liittyviä, Youtube-videoita ja tukimateriaaleja (kts. 6.3.3). [58]

Kuitenkin teknologian näkeminen pelkästään etäopiskelua mahdollistavana tekijänä on hyvin kapeakatseinen tapa ymmärtää ja soveltaa sitä. Teknologia voidaan myös hyödyntää parantamaan perinteistä kasvokaista oppimiskokemusta.

Moderni teknologia tarjoaa monipuolisia ja oppimista helpottavia mahdollisuuksia. Ensisijaisesti se avaa uusia mahdollisuuksia lähestyä matematiikan opetusta ja oppimista. Tämä pätee myös ei matemaattisiin aineisiin. Sen lisäksi uusi teknologia ei vaikuta vain siihen, että miten matematiikka opetetaan vaan myös mitä matematiikka opetetaan.
Tässä matematiikka on ainutlaatuisessa asemassa verrattuna muihin aineisiin. [68]

Eritapojen havainnollistamiseksi käyttää teknologiaa, tähän on otettu muutama esimerkki. Esimerkiksi tableteilla voi ottaa muistiinpanoja ja liittää luentotaulusta otettuja kuvia. Muistiinpanojen helpottamiseksi voidaan käyttää digitaalisia kyniä kuten Livescribeä. Kynän kärkeen kiinnitetty kamera lähettää kuvan tekstistä langattomasti (Bluetoothin tai Wi-Fi:n) avulla älypuhelimeen tai tablettiin. Tabletissa Livescribe-sovelluksen avulla teksti voidaan myös digitalisoida. Kynän mikrofonin avulla voidaan tallentaa myös äänitiedostoja. Tämä mahdollista opettajan äänen tallentamisen muistinpanojen tueksi. Digitaalikynään voi tutustua osoitteessa: http://www.livescribe.com/en-us/. [58]

Opettajat voivat puolestaan hyödyntää Camtasia tapaisia videon kaappaus ja editointiohjelmia. Camatasialla voi elävöittää verkkoon tulevia video-ohjauksia. Opetuksen tueksi Camtasialla voidaan luoda animaatioita, ääniohjattua ruudunkaappausta, interaktiivisia harjoitteita ja tietovisoja. [58] Camtasiaan opetuskäyttöön voi tutustua paremmin osoitteessa: https://www.techsmith.com/camtasia-education.html.

Yliopistoluennoilla on huomattu vaikeus toteuttaa aktiivista opetustapaa; ainakin siten, että se aktivoisi kaikkia opiskelijoita. Esimerkiksi on vaikea saada kaikkien opiskelijoiden mielipidettä tai vastausta johonkin kysymykseen. Nykyteknologia tuo helpotusta tähänkin ongelmaan. Luennoilla voidaan käyttää ns. sähköistä äänestysjärjestelmää (Electronic Voting Systems (EVS)). Siinä opettaja esittää projektorilla monivalintatehtävän. Opiskelijoilla on käytössää langaton ohjain, joissa on esimerkiksi napit A-D. Pohtiessaan kysymystä opiskelijoita vastaavat kysymykseen napin painalluksella. Ohjelma kerää reaaliaikaista tietoa, kuinka paljon kukin vaihtoehto on saanut kannatusta. Lopuksi opettaja paljastaa oikean vastauksen ja kertoo perustelut. [81]

Sähköiset äänestysjärjestelmät mahdollistavat kaikkia kattavaa interaktiivista opetusta ja oppimista – suurillakin luennoilla. EVS myös mahdollistavat sen, että opettaja on koko ajan perillä opiskelijoiden osaamisesta. Esimerkiksi kuvitellaan tilanne, jossa suurin osa opiskelijoista valitsee saman väärän vaihtoehdon monivalintatehtävässä. Tällöin se voi tarkoittaa, että mahdollisesti opetus on antanut ymmärtää tietyn asian väärin tai tiettyä osa-aluetta ei ole käsitelty tarpeeksi, jolloin opiskelijoille on jäänyt jokin epäselväksi. Huomatessaan tämän, opettaja voi palata aikaisemmin opetettuun asiaan ja selittää sitä syvällisemmin; käyttäen mahdollisesti uusia lähestymistapoja.

Opettajan työn helpottamiseksi eri kursseille ja aihe-alueille löytyy elektronisen äänestysjärjestelmään soveltuvia PowerPoint-esityksiä. Esityksiä voi ladata osoitteesta: http://www.lboro.ac.uk/departments/mec/activities/curriculumdevelopment/evs/helmevsquestions/. Esityksissä on kysymyksiä matematiikan eri aihealueesta, kuten algebrasta, vektorialgebrasta, kompleksimuuttujista, differentiaali- ja integraalilaskennasta. [82]

EVS:n käyttöä voidaan monipuolistaa laittamalla monivalintatehtäviä, jotka vaativat ryhmä tai parikeskustelua. Opettaja voi tällöin varata hieman aikaa kuhunkin kysymyksen kohdalla keskustelulle. [58] Tähän liittyen alle on koottu hyvien EVS-kysymysten joitakin ominaisuuksia. Eli kysymysten pitäisi:

- Stimuloida opiskelijoiden mielenkiintoa matematiikka kohtaan
- Auttaa opiskelijoita seuraamaan ja kehittämään ymmärrystään

- Antaa tilaisuuden opiskelijoille miettiä otaksumia ja puolustaa niiden oikeellisuutta keskusteluissa
- Perustua opiskelijoiden aikaisempaan tietoon, ymmärrykseen ja/tai väärinkäsityksen
- Tarjota opettajalle mahdollisuuden arvioida jatkuvasti opiskelijoiden oppimista [83]

Kouluissa opetetaan matematiikkaa edelleen perinnelähtöisesti. Tietokoneiden ja symbolisten laskimien myötä, matematiikka tulisi uudistaa vastaamaan nykyaikaisia mahdollisuuksia. Esimerkiksi kouluissa sen lisäksi, että murtolukuja lasketaan yhteen, olisi hyödyllistä myös opetella ohjelmoimaan ohjelma, joka suorittaa vastaavat toiminnot. Tämä varmistaa sen, että oppilaat ymmärtävät rakenteellisesti murtolukujen merkityksen.

Uusi opetussuunnitelma yrittää ottaa enemmän huomioon oppilaiden nykytarpeet. Siihen on sisällytetty ohjelmointitaitojen harjaannuttaminen hyvin varhaisista vaiheista lähtien. Syksyllä 2016 voimaan tulevan opetussuunnitelman mukaan koko Suomessa pitää opettaa tieto- ja viestintäteknologiaa. Ylioppilaskirjoituksetkin ovat sähköistymässä (matematiikan osalta 2019), mikä mahdollistaa uusia lähestymistapoja, mutta samalla luo myös uusia haasteita perinteiseen kouluopetukseen. Tarvitaan siis uusia materiaaleja ja opetusmenetelmiä tukemaan uutta opetussuunnitelmaa ja jatko-opintotarpeita. [78]

Yliopistokoulutuksessa insinööri- ja matemaattisissa tieteissä CAS-ohjelmat ja insinööriohjelmat kuten CAD FEM mechanism design, multi-body dynamics, CFD tulisi hyödyntää hyvin varhaisista vaiheista. Opiskelijoille pitää opettaa visualisointi-, demonstraatio- ja simulaatiotaitoja. Nämä ovat myös opettajille tärkeitä taitoja omata. Monesti visualisointi, demonstrointi ja simulointi auttavat opiskelijoita saamaan paremman näkemyksen asiasta, tekee opetuksesta mielenkiintoisemman ja motivoivan. Lyhyesti sanottuna kaiken tyyppinen visualisointi ja teknologian käyttö tekee opetuksesta paljon tehokkaamman.

CAS-ohjelmat tarjoavat uusia lähestymistapoja, jotka muuten olisivat vaikeata hahmotella. Niiden avulla voidaan mm. parametrimuutoksilla tarkistaa miten kukin parametri vaikuttaa lopputulokseen. Näin voidaan paremmin huomata olioiden välisiä yhteyksiä. Lisäksi joidenkin ohjelmien avulla voidaan käydä ratkaisua läpi vaihevaiheelta. Näin opiskelijat näkevät miten ohjelma on ratkaisut ongelman ja saavat paremman ymmärryksen ongelman ratkaisumenetelmästä.

Perinteisellä kynä ja paperi-menetelmällä on paljon rajoituksia. Esimerkiksi, mikäli opiskelija ei tiedä seuraava vaihetta, niin tehtävän ratkaisu pysähtyy siihen. CAS-ohjelmat mahdollistavat uusia lähestymistapoja. Kun joku lähestymistapa tuottaa hankaluuksia, voidaan vaivatta kokeilla toista. Esimerkiksi, mikäli ei osata ratkaista jonkun funktion nollakohtia tai muita ominaisuuksia, CAS-ohjelmalla voidaan piirtää sen kuvaaja ja katsoa funktion käyttäytyminen graafista, josta voidaan funktion nollakohdat helposti nähdä. [58]

Teknologian käyttö mahdollistaa myös reaaliaikaista todellisuuden mallinnusta. Tämä voidaan toteuttaa myös opintojen alkuvaiheessa, sillä rutiinilaskenta ja vaikeat laskut voidaan delegoida tietokoneelle. Tämä muuttaa myös opetusta; opettajan ei tarvitse käyttää aikaa vaikeiden ja rutiinilaskujen opettamiseen, esim. kuten differentiaaliyhtälöt ja vaikeat integraalit. Perinteisesti vaikeiden tehtävien laskennan opettamiseen on mennyt paljon aikaa. Teknologian myötä voidaan vaikeat tehtävät ratkaista hetkessä ja näin säästetty aika voidaan omistaa syvällistä ymmärrystä vaativiin kohtiin, kuten matemaattisen tuloksen tulkitseminen reaalimaailmassa. [58]

Monesti koulussa ja yliopistolla kynällä ja paperilla ratkaistavat ongelmat ovat yksinkertaistettuja tapauksia todellisuudesta. Kuitenkin insinöörityössä kohdataan päivittäin ongelmia, joita ei voi tarkista käyttäen kynää ja paperia. Toisin sanoen klassiset ja analyyttiset metodit eivät sovellu ongelman ratkaisemiseen; tarvitaan CAS-ohjelmia ja numeerisia menetelmiä. Teknologian käyttö varhaisista yliopistovuosista valmentaa tulevat matemaatikot ja insinöörit työelämän todellisia käytäntöjä varten.

CAS-ohjelmien käyttö mahdollista myös roolien vaihdon opetusympäristössä, perinteinen opettaja keskeinen opetus muuttuu oppijakeskeiseksi. CAS-ohjelmia voidaan käyttää myös oppijaryhmän kesken, jolloin ne mahdollistavat vuorovaikutusta ja kommunikaatiota oppijoiden kesken. Näin ollen opettajan rooli vaihtuu ohjaajan rooliin, joka on hyvin toivottua nykyopetuksessa. [58]

Moni oppija on tottunut päivittäin käyttämään uutta teknologia kuten älypuhelintaan tai tablettia. Tästä johtuen, CAS-ohjelmien käyttö älypuhelinten tai tablettien avulla toisi oppijoiden arjessa käyttämiä työkaluja opetukseen ja lisäisi heidän motivaatiota. Samalla oppijat pystyvät paremmin hyödyntämään arjessa käyttämiään laitteita. [58]

Hyödyntäessä teknologiaa ja varsinkin CAS-ohjelmia on varottava, että oppijoiden peruslaskentataidot eivät heikentyisi. Toisin sanoen, että he eivät olisi riippuvaisia työkaluista ihan peruslaskennassakin ja että laskuja suoritettaisiin yrityksen ja erheen avulla ymmärtämättä niiden sisältöä. [58]

Opetussuunnitelman ja tutkinto-ohjelman jokaiseen vaiheeseen tulisi sisällyttää aktiviteetteja, jotka edesauttavat oppijoiden teknologian käyttöä. Teknologia tulisi oppia käyttämään ongelman ratkaisun laskennan tehostamisessa ja matemaattisten ideoiden ymmärtämisessä (esim. visualisoimalla, simuloimalla, …). [58]

Monessa yliopistoissa ja kouluissa on huomattu, että teknologian käytöstä on ollut apua.

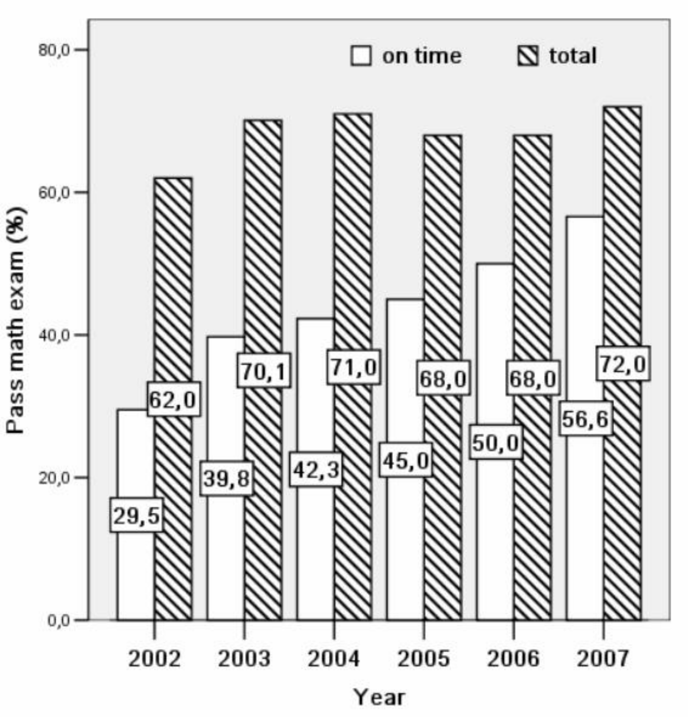
Teknologian käyttö mahdollistaa:

- Monipuolisen lähestymis- ja esittämistavan ongelmaan ja sen ratkaisuun
- Toimii tukena heikommille oppilaille
- Kehittää ja tehostaa ongelmanratkaisukykyä
- Auttaa ajan hallinnassa: aikaa voidaan käyttää enemmän ymmärrystä vaativiin kohtiin
- Mahdollistaa erilaisia opetusmenetelmiä
- Mahdollistaa uusien matematiikan osa-alueiden opettamista
- Mahdollistaa työelämää vastaavan matematiikan opetusta
- Mahdollistaa hyvin vaikeiden ja monivaiheisten tehtävien analysoinnin
- Vähentää tarvetta opetella ulkoa erikoisia tapauksien laskenta menetelmiä

Kursseja järjestettäessä on mietittävä

- Onko opiskelijoilla mahdollisuus hyödyntää teknologiaa
- Kuuluko teknologian käyttö kurssin vaatimuksiin
- Onko opiskelijoilla omat laitteet vai onko pääsyä opiskelijalaboratorioon
- Miten hyvin opiskelijat osaavat käyttää teknologiaa ja miten heitä voidaan tukea siinä kurssin aikana
- Otetaanko arvioinnissa huomioon teknologian osaaminen? Eli kuuluuko se kurssisuoritukseen?
- Miten ja milloin kurssinvetäjät ja opiskelijat vuorovaikuttavat teknologian avulla. Esimerkiksi käytetäänkö teknologia vain laskentavälineenä vai käytetäänkö sitä myös lisäämään ymmärrystä
- Onko kurssin opetussuunnitelmaa muutettu hyödyntämään teknologia?
- Osaavatko kurssivastaavat hyödyntää teknologiaa? Ovat he tietoisia sen matemaattisista ja pedagogisista hyödyistä ja käyttömahdollisuuksista? [58]

Liettuassa, Kaunasin teknillisellä yliopistolla (KUT) päätettiin kokeilla teknologian hyödyntämistä. KUT:ssä hyödynnettiin mm. CAS-ohjelmia, virtuaalisia oppimisympäristöjä ja teknologia hyödyntäviä aktivoivia metodeja. Samalla tutkittiin miten teknologian hyödyntäminen vaikuttaa mm. opiskelijoiden tenttimenestykseen. Dataa kerättiin viiden vuoden ajan (2002–2007). [73] Alla on pylväsdiagrammi tuloksista.



Kuva 23 *Pylväsdiagrammi onnistuneesti matematiikan tentin ajallaan ensimmäisellä kerralla läpäisseiden vs uusinta tenttien jälkeen ja ajallaan läpäisseet yhteensä. [73]*

Kuvassa 23 valkoiset pylväät kuvaavat eri vuosilta opiskelijoiden määrän (prosenteissa), jotka ovat pääset läpi matematiikan tentistä ajallaan ja ensimmäisellä yrityksellä. Raidalliset pylväät kuvaavat kaikkien opiskelijoiden määrän, jotka ovat päässeet tentistä läpi joko ensimmäisellä tai monen yrityksen jälkeen. Kuten kuvasta nähdään, teknologian soveltaminen on selvästi kasvattanut niiden opiskelijoiden määrän, jotka pääsevät tentistä läpi ajallaan ja ensimmäisellä yrityksellä. Mikäli verrataan vuotta 2002 vuoteen 2007, huomataan 27,1 prosenttiyksikön kasvu ajallaan läpipäässeiden määrässä.

6.3.8 Vierailut ja näkemyksen antaminen

Suomessa on äskettäin kehitetty etävierailuverkosto, jossa asiantuntija esiintyy internetin välityksellä koululuokalle esittäen omaa ammattiaan. Taloudellinen tiedotustoimisto (TAT) on tämän hankkeen takana. Kaikille ilmaisen verkkopalvelun tarkoituksena on yläaste ja lukiolaisten työelämäntietouden rikastaminen, oppimisympäristön laajentaminen ja opiskelijoiden aktiivisen vuorovaikutuksen lisääminen ympäristön kanssa. [38]

Esimerkiksi matematiikan opettaja voi sopia Neste Oil:n asiantuntijatyöntekijän kanssa ajan. Sovittuna aikana asiantuntija tulee luokkaan vierailulle etäyhteydellä. Etäyhteys muodostetaan käyttäen esim. Adobe Connect-verkkokokousjärjestelmää. Etävierailun aikana asiantuntija kuvaa omaa työtään oppilaille ja kertoo miten tunnin aihe liittyy hänen työhönsä ja miten ylipäätään matematiikka näkyy heidän työssään. Lopuksi yleensä asiantuntija vastaa opiskelijoiden kysymyksiin. Vierailu kesää usein 20–60 minuuttia. Etävierailun avulla luodaan konkreettinen yhteys oppitunnin aiheen ja työelämän välille. [38]

Asiantuntijoihin voi tutustua ja heidän kanssa voi sopia etävierailuajasta seuraavasta linkistä: http://www.opetin.fi/asiantuntijaverkosto/.

Vierailujen ja työelämän näkökulmaa kouluille ja yliopistoille tuottaminen on niin tärkeä, että siihen pitää myös valtion reagoida. Kansallisten vastuuhenkilöiden pitää nimetä henkilöitä jokaiseen kouluun ja yliopistoon, jotka varmistavat että opiskelijat saavat riittävästi neuvoa heidän tulevista ammateista ja niiden vaatimuksista. Varsinkin teknologian, luonnon- ja insinööritieteiden (Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM)) alalla opiskelijoita tulisi pitää ajan tasalla mahdollisista työpaikoista. Toisin sanoen, nimetyt henkilöt kertovat opiskelijoille minkälaista koulutusta ja matematiikkaa tarvitaan tietyissä ammateissa tai minkälaista hyötyä on lisää matematiikan kurssien opiskelusta heidän tulevalle uralle. Mainostamalla jatkuvasti ns. STEM-aineita saadaan enemmän ja motivoituneita opiskelijoita näille aloille. [79] Aloille, jotka ovat elintärkeässä roolissa nyky-yhteiskunnamme infrastruktuurissa.

6.3.9 Laitosten välinen yhteistyö

Insinööritieteitä ja matematiikan opetusta tulisi integroida. Tämä tapahtuu parhaiten insinööritieteiden laitosten ja matematiikan laitoksen tiiviillä yhteistyöllä. Matematiikan kursseihin tulee lisätä projekteja, jotka sisältävät sovelluskohteita insinööritieteistä. [58]

Yhteistyön myötä matematiikan kursseilla voidaan opettaa matemaattisia ja teknologisia taitoja, joita tarvitaan insinööritieteissä. Vastaavasti insinööritieteissä voidaan mainostaa tiettyä matematiikan kurssia, joka tukee kyseistä alaa. Tähän liittyen, matematiikan laitoksen pitäisi:

- Päätellä minkälaisia laskennallisia menetelmiä pitää sisällyttää kurssiin, jotta se tukisi muita koulutusaineita
- Kehittää uusia kursseja tukemaan opiskelijoiden ymmärrystä viimeaikaisista kehityksistä STEM-aineissa
- Päätellä minkälaista teknologiaa tarvitaan muilla koulutusaloilla
- Kehittää sovelluskohteita ja tutkimusprojekteja matematiikan kursseihin edesauttamaan opiskelijoita siirtämään heidän matemaattiset taidot omaan koulutusalaan
- Kehittää laaja-alaista osaamista, luomalla uusia tutkinto-ohjelmia, jotka rikkovat koulutusalojen välisiä rajoja [66]

Tieteiden väliset samalle asialle erilaiset matemaattiset notaatiot ja symbolit voivat olla isona päänvaivana visuaalisille ihmisille, jotka eivät välttämättä ole matemaattisesti niin lahjakkaita. [66] Tästä syystä olisi toivottua standardi notaatio-järjestelmä kaikissa koulutusaloissa. Käytännön syistä tämä ei ole aina mahdollista. Kuitenkin laitosten välisellä yhteistyöllä voidaan pyrkiä käyttämään samoja notaatioita aina kun mahdollista [58].

Laitosten toimintaa valvovien tahojen tulisi kannustaa ja palkita laitosten ponnisteluja kehittää toimintaansa ja laitosten välistä yhteistyötä. [67]

Lisäksi lukion ja korkeakoulujen välistä yhteistyötä tulee kehittää. Näin vältetään aikaisemmin mainittua kuilua lukio- ja yliopisto-opintojen välillä.

6.3.10 Opettajien ja oppilaiden haastattelu

Monesti tietyn vaiheen opettajilla ei ole käsitystä mitä seuraavassa koulutusvaiheessa tarvintaan. Ongelmaa pahentaa se, että joskus he jopa luulevat tietävänsä, vaikka heidän tietoonsa perustuu omaan koulutusaikaan. Toisin sanoen omaavat vanhan käsityksen mitä seuraavalla koulutusvaiheessa oikeasti tarvitaan.

Opetusten kehittämiseksi tarvitaan laajamittaista opiskelijoiden ja opettajien haastattelua. Tutkimukseen tulisi ottaa mukaan opiskelijoita ja opettajia ala-asteelta, yläasteelta, lukiosta ja korkeakouluista. Ainoastaan näin voidaan varmista yhtenäinen ja kaikkien vaatimuksia tukevaa koulutusohjelma.

7 MATEMAATTINEN MALLINNUS OPETUKSESSA JA SEN VAIKUTUS MATEMAATTISEEN OSAAMISEEN

Tässä luvussa kerrotaan matemaattisen mallinnuksen mahdollisuudesta edesauttaa välttämään aikaisemmin mainittuja ongelmia matematiikan opetuksessa. Myös keskustellaan siitä, miten Study Group-työpajoista opittuja käytäntöjä voidaan hyödyntää matematiikan opetuksessa. Lisäksi esitellään Suomen matemaattisen mallinnuksen verkostohanketta ja ehdotetaan joitain ajatuksia sen kurssisisältöjen kehittämiseen.

7.1 Matemaattisen mallinnuksen tärkeys opetuksessa

Globalisaation ja ongelmien monitieteisyyden vuoksi yhä enenevässä määrin toimitaan ryhmissä. Historian aikana on ollut paljon yksin puurtaja matemaatikoita, jotka matematiikan lisäksi hallitsivat myös suurimman osan oman ajan tieteistä. Nykyään kukaan ei pysty hallitsemaan yksin kaikkia tieteenaloja. Tarvitaan työryhmiä. Kuten aikaisemmin mainittua matematiikan opetuksessa tarvitaan poikkitieteellisyyttä ja ryhmätyötä. Muutoin koulumatematiikkaopetus jää irralliseksi reaalimaailman tarpeista. Poikkitieteellisyyttä ja ryhmätöitä luokassa voidaan tukea mm. seuraavassa osiossa esitetyn CIMS:n luokkahuoneeseen tarkoitettujen projektien avulla.

Matematiikan kurssitarjonnassa tarvitaan kursseja, joissa oppijoiden analysointikyky ja asioiden loogisten yhteyksien hahmottamiskyky kehittyvät. Matemaattisen mallinnuksen kurssit (Mathematical Modeling, eli MM), niin kouluihin kuin yliopistoon vastaavat edellä mainittuihin tarpeisiin. Mallinnuskursseissa oppilaat voivat harjaannuttaa ongelmanratkaisukykyään ja luovuuttaan. Mallinnuskurssit myös auttavat oppilaita soveltamaan tietonsa käytäntöön, yhdistämään eri tieteenaloja ja toimimaan ryhmässä. Suomessa yliopistotasolla on vuodesta 2001 lähtien reagoitu tähän tarpeeseen, josta puhutaan tarkemmin kappaleessa 6.4.2.

Simulaatio- ja mallinnustehtävien integrointi oppimisprosessiin täyttää teorian ja reaalimaailman välistä aukkoa. Tämän sivuvaikutuksena saadaan myös entistä enemmän ihmisiä, jotka haluavat lukea matematiikka pääaineena, sillä he ovat saaneet vahvan todistuksen sen voimasta ratkaista reaalimaailman ongelmia [67]. Mallinnusprosessi auttaa kehittämään loogista päättelykykyä ja ongelman ratkaisukykyä. Sisällyttämällä mallinnusta matematiikan kursseihin ja arviointiin, varmistetaan että ei arvioida pelkästään oppijoiden tietoa matematiikasta vaan sitä, että miten he käyttävät tietonsa. [73]

Kappaleessa 2.1 mainittiin mallinnus prosessiin kuutta eri vaihetta. Tämä auttavat meitä määrittelemään matemaattisen mallinnuksen kompetenssi, jolla tarkoitetaan itsenäistä matemaattisen mallinnuksen erivaiheiden läpi viemistä. [87]

7.1.1 Teollisuusmatematiikkaa opettajille

Teollisuusmatematiikan ja tilastotieteen keskus CIMS (Center for Industrial Mathematics and Statistics) järjestää Worcesterin korkeakoulussa (WIP, Worcester Polytechnic Institute) työpajan yläaste ja lukio-opettajille. CIMS perustettiin vuonna 1997 matemaattisena resurssina teollisuudelle. CIMS järjestää erilaisia Study Group-toimintaan pohjautuvia työpajoja. Kuitenkin osa CIMS:n järjestämistä työpajoista keskittyy yläaste ja lukio-opettajien koulutukseen. Näiden ohjelmien tarkoituksena on kouluttaa opettajia teollisuusmatematiikassa, jotta he voisivat puolestaan tuoda teollisuusmatematiikan kiinnostavat ja jännittävät ongelmat luokkaympäristöön. Tarkoituksena on, että opettajat itse tutustuvat WIP:ssä teollisuuden ongelmiin ja tuovat samoja ongelmia omille oppilailleen heidän ratkaistavaksi. [26]

Työpaja on hyvin monipuolinen. Ohjelmaan sisältyy mm. kutsuvieraiden puheenvuoro, jossa esitetään mihin suuntaan opetussuunnitelmat ovat menossa ja miten reaalimaailmaan ongelmat herättävät oppilaiden kiinnostusta. Puheenvuorojen aikana myös mainitaan teollisuusmatematiikasta kiinnostuneiden työllistymismahdollisuuksista. [26]

Ohjelman keskeisenä asiana on työpaja, jossa opettajat yhdessä lahjakkaiden korkeakouluopiskelijoiden kanssa kehittävät miniprojekteja, joissa matematiikan ja statistiikan käyttö teollisuudessa havainnollistetaan. Myöhemmin opettajat käyttävät sitten näitä projekteja omassa opetuksessaan. Lisäksi CIMS ylläpitää sivustoa, johon kaikki kehitetyt miniprojektit päivitetään. [26] Seuraavasta linkistä pääsee tutustumaan tähän asti kehitettyihin miniprojekteihin: http://www.wpi.edu/academics/math/CIMS/IMPHSS/.

Projektien aiheina ovat mm. talous, vakuutus, kasvatus, tuotanto ja lainvalvonta. Tarkoituksena on, että opettajat sisällyttäisivät näitä avoimia teollisuuden ongelmia omiin kurssisuunnitelmiinsa. Opettajien työtä on helpotettu siten, että web-sivulta ladattavat projektit ovat sellaisenaan esityskelpoisia opiskelijoille. Projektit ovat suunniteltu yhdistämään tavallisen luokkahuoneen reaalimaailman ongelmiin ja auttamaan oppilaita muodostamaan kuvan siitä, miten he tulevat käyttämään matematiikka työelämässään valmistumisensa jälkeen. Tämän tavoitteen saavuttamiseksi projekteissa fokuksena on matemaattinen tapa ajatella ongelmia. Ohjelman ja projektien tarkoituksena on opettaa opiskelijoita formalisoimaan ongelmat matematiikan kielelle ja ratkaisemaan niitä. [26]

WIP:ssä opettajien työtä seurataan ja opettajien on tarkoitus palata muutaman kuukauden päästä ensimmäisestä koulutuksesta WIP:iin keskustelemaan ohjelman toteutuksesta omassa luokassaan. [26]

Edellä mainittu tapaa opettaa matematiikkaa, tuo luokkahuoneeseen sen mitä matemaatikot oikeasti tekevät. Näin kynnys lukion ja työelämän tai yliopiston välillä madaltuu.

7.1.2 Matemaattisen mallinnuksen verkostohanke

Kuten edellä kuvattiin, matemaattisen mallinnuksen osaaminen ja tietokonesimulointitaidot ovat tärkeää tieteelle ja teknologialle. Nyky-yhteiskunnassa on kova tarve matemaattisen mallinnuksen taidoille, jotta saataisiin osaavia ja kilpailukykyisiä ihmisiä teollisuuden ja tutkimuslaitosten tarpeisiin. Kuitenkin, MM-kurssien järjestämisessä kohdataan muutamia käytännön ongelmia. Matemaattinen mallinnus on laaja alue, josta johtuen kukaan yksittäinen opettaja ei voi hallita kaikkia sen osa-alueita ja menetelmiä. Lisäksi MM:n jatkokurssit voivat alussa kiinnostaa vain pientä määrää oppilaita tietyltä yliopistolta, mikä tekee kurssista taloudellisesti epäkannattavan. Tarvitaan siis ratkaisu, jolla pystytään vastaamaan toisaalta tieteen ja teknologian vaatimuksiin ja toisaalta käytännönongelmien haasteisiin. Ratkaisuna tähän ongelmaan on päätetty järjestää matemaattisen mallinnuksen verkostohanke. [28]

Matemaattisen mallinnuksen verkostohanke on Suomen virtuaaliyliopiston pilottihanke. Se on eri yliopistojen ja tutkimuslaitosten yhteishanke, jonka tavoitteena on opettaa yliopistotasoista matemaattisen mallinnuksen perus- ja jatkokursseja. Opetusministeriön rahoittama hanke käynnistyi 2002. Hankeen tavoitteena on tuottaa verkkoon mallintamisen kursseja, luoda mallinnuksen opintokokonaisuus (25 op) ja perustaa verkosto mallinnuksen opetusta varten. Hakkeessa mukana olevat yliopistot ovat:

- Aalto-Yliopisto
- Itä-Suomen yliopisto, Joensuu
- Itä-Suomen yliopisto, Kuopio
- Jyväskylän yliopisto
- Lappeenrannan teknillinen yliopisto
- Oulun yliopisto
- Tampereen teknillinen yliopisto, matematiikka [28] & [29]

Kiitos erinäisten osallistujatahojen tarjoaman panostuksen ja asiantuntemuksen matemaattisen mallinnuksen kansallinen kurssi on saatu aikaiseksi, joka olisi ollut lähes mahdoton järjestää yksittäisten yliopistojen taholta. Reilun 20 opettajan järjestämään kurssiin osallistuu vuosittain tällä hetkellä noin 100 opiskelijaa seitsemästä eri yliopistosta [28].

Mallinnuksen verkkokursseja järjestetään osallistujapaikkakunnilla. Kursseilla käytetään Moodle-oppimisympäristöä, johon pääsee oman yliopiston intranet-tunnuksilla. [29]

Kurssiopetuksen sisältyvät nauhoitetut videoluennot, joita voi seurata joko yhteisesti luentosalilla sovittuna aikana tai omalla ajalla kotikoneelta. Kurssisuoritukseen kuuluu ryhmissä tehtävät viikkoharjoitukset, muiden ryhmien ratkaisujen vertaisarviointi sekä kurssin lopussa tehtävä pieni mallinnusprojekti (harjoitustyö) ja sen esittäminen videoneuvotteluyhteydessä kurssin osallistujille. Mallinnuksen peruskurssin esitietosuosituksena ovat matematiikan perusopinnot ja jatkokurssien esitietosuosituksena on mallinnuksen peruskurssi. [29]

7.1.2.1 Matemaattisen mallinnuksen kurssisisältö

Matemaattisen mallinnuksen verkostohankeen eräänä tärkeänä ominaisuutena on mahdollisuus suorittaa mallinnuksen opintokokonaisuus. Tällöin matemaattisen mallinnuksen kurssit eivät jää irralliseksi ja yksittäiseksi kurssiksi vaan ne muodostavat opintokokonaisuuden, jota voi suorittaa osana omaa tutkintoaan. Verkostohankeen kurssien monipuolisuuden ja laajuuden esille tuomiseksi alla on kuvattu matemaattisen mallinnuksen kurssisisältö. Kurssisisällöistä voi huomata, joitakin aikaisemmin mainittuja mallintamismenetelmiä ja mallinnustehtävissä monesti esille tulevia ongelmia, kuten esimerkiksi syventäviin kursseihin kuuluva vapaan reunan ongelma.

- **Peruskurssi**
  - **Matemaattisen mallinnuksen peruskurssi, 5 op**
    Kurssi soveltuu matematiikan opintoihin suuntautuville ja käytännön elämän laskennallisista tehtävistä kiinnostuneille. Kurssi valottaa matemaattisten mallien vaihtelevia muotoja ja käyttötarkoituksia, ja niiden rakentamisessa tarvittavia matemaattisia menetelmiä. Luennoidaan vuosittain.

- **Syventävät kurssit**
  - **Osittaisdifferentiaaliyhtälöt matemaattisessa mallinnuksessa, 4 op**
    Johdatus osittaisdifferentiaaliyhtälöihin, elementtimenetelmän perusteita, multifysiikka mallinnuksessa, osittaisdifferentiaaliyhtälöihin perustuvia mallinnusesimerkkejä: akustiikka, jähmettymisen mallintaminen sisältäen vapaan reunan ongelman, piikiteen kasvatus, parametrien estimointi esimerkkinä impedanssitomografia.

  - **Jatkuvat mallit, 4 op**
    Kurssilla tutustutaan jatkuvien (differentiaali- ja osittaisdifferentiaaliyhtälöpohjaisten) mallien käsittelytekniikoihin. Tekniikat voidaan jakaa kahteen luokkaan, ”vaikeiden” mallien yksinkertaistamiseen tarkoitettuihin (erikoistilanteet, lineaarisointi, asymptoottinen analyysi, säännöllistä-

minen) sekä erilaisia kysymyksenasetteluja mahdollistaviin (mallipohjainen optimointi ja säätö, mallien sovitus ja käännetyt tehtävät).

- **Satunnaisuus mallintamisessa, 4 op**
  Kurssilla tutustutaan satunnaisilmiöihin mallintamisen yhteydessä. Satunnaisuuden lähde vaihtelee: itse tutkittava ilmiö voi olla stokastinen, malli voi olla deterministinen mutta mittausdata kohinaista, tai pyrkimys voi olla tilastollisesti kvantifioida mallintamisen epävarmuutta. Tilanteita valotetaan esimerkein ja itse ohjelmoiden MATLAB-ympäristössä.

- **Datan analyysimenetelmät mallinnuksessa, 4 op**
  Uusilla diskreeteillä menetelmillä mallinnuksessa tarkoitetaan soveltavan matematiikan piirissä viime vuosikymmeninä syntyneitä tekniikoita ja lähestymistapoja, joilla voidaan luontevasti kuvata sellaisia ilmiöitä, joiden mallintaminen differentiaaliyhtälö-, tilasto- tai yms. perinteisillä mallinnusmenetelmillä on hankalaa. Menetelmät kulkevat myös nimikkeen Soft Computing alla, ja niihin luetaan yleensä sumea logiikka, neuroverkot, geneettiset algoritmit, tiedonlouhinta ja kaaosteoria.

- **Mallinnus ja optimointi, 4 op**
  Kurssilla tutustutaan lineaarisen ja epälineaarisen optimoinnin teorian alkeisiin, variaatiolaskentaan, epälineaariseen monitavoiteoptimointiin ja kokonaislukuoptimointiin.

- **Tilastolliset mallit, 4 op**
  Kurssilla opiskellaan tilastomatematiikkaan perustuvaa mallinnusta. Kurssi muodostuu case-tyyppisistä esimerkeistä, joita alan asiantuntijat luennoillaan esittelevät: MCMC, parametrien estimointi, hahmontunnistus, regressio ja sekamalli.

- **Mathematics of Visual Motion, 4 op, (Englannin kielinen)**
  This short course will address the problem of reconstructing two and three dimensional motion and shape from a video sequence. We start with a brief survey of feature extraction for tracking purposes. Notions, such as optical flow and visual velocity field are introduced. This is followed by an analytical decomposition of the mapping properties of projected three dimensional rigid body motion onto a temporal image sequence. An equally brief survey of statistical calibration techniques to produce a model of motion and shape rounds up this short course. [29]

7.1.2.2 Opiskelijoiden palaute MM-kurssista

Jokaisen kurssin päätteeksi oppilaita on pyydetty vastamaan kyselylomakkeeseen, joka toimii palautteena kurssista. Tässä tarkastellaan erityisesti 2004 vuonna kerättyjä palautteitta. Vastauslomakkeista on selvinnyt, että suurin osa opiskelijoista pitää luentoja tärkeänä. Suurin osa opiskelijoista oli katsonut luentoja omalla ajallaan ja vain minimaalinen osa oli katsonut luentoja yhteisesti ennalta määrättyyn aikaan. Viikkoharjoitukset ja mallinnusprojekti olivat saaneet positiivisen palautteen. Suurin osa opiskelijoista kertoi käyttäneensä kurssin suorittamiseen enemmän aikaa, kuin kurssilta saatavien opintopisteiden perusteella oli arvioitu käytettäväksi. Tästä voi tehdä päätelmän, että opiskelijat olivat kiinnostuneita kurssista ja laittoivat siihen vaadittua enemmän aikaa. Toisaalta sen voi tulkita niin, että kurssi on kuviteltua työläämpi ja kurssista kuuluisi antaa enemmän opintopisteitä, jotta se vastaisi todellista työmäärää. [28]

Osa opiskelijoista arvosti sitä, että verkkokurssin seurauksena he pääsivät tutustumaan eri opettajiin ja asiantuntijoihin eri yliopistoilta. Yli puolet opiskelijoista piti verkkokurssista enemmän kuin perinteisestä kurssitoteutuksesta. [28]

Opiskelijoiden palautteet eivät olleet vain positiivisia. Joitakin asioita oli myös kritisoitu. Kaikki verkkokurssissa mukana olleet opettajat eivät olleet aktiivisia keskusteluryhmissä. Oppilaat toivoivat enemmän vuorovaikutusta opettajien ja heidän välillä. Osaa opiskelijoista ei pitänyt kurssien fysiikkapainottuneisuudesta. Osalle opiskelijoista olisi ollut helpompi laatia ratkaisut paperille, kun taas kurssilla oli ollut pakko käyttää tietokonetta. Jossain luennoissa oli oletettu myös liikaa etukäteistietoa. [28]

7.1.2.3 Pedagogiset arvioinnit

Matemaattisen mallinnuksen verkkokursseja on analysoitu ja arvioitu myös pedagogisesti asiantuntijoiden johdolla. Tässä osiossa mainitaan muutamia piirteitä, jotka nousivat positiivisesti esille, kun MM-verkkokurssia tarkasteltiin pedagogisesti. [28]

Arvioinnissa verkkokurssi todettiin optimaaliseksi MM-opetukselle. Kurssien tärkeimpiä piirteitä olivat käytännön ja reaalimaailman läheisyys. Kurssissa mallinnettiin sellaisia ongelmia, jotka liittyivät jokaiseen arkeen. Näin saatiin teoriaa vastamaan uuttaa reaalimaailman tilannetta. Tästä johtuen kurssi kehitti myös opiskelijoiden soveltamiskykyä, joka muuten yliopistoaikana jää usein puutteelliseksi. Kurssi oli interaktiivinen, eli ongelmien mallintamiseksi opiskelijoiden piti käydä keskustelua ryhmässä ja tutkia mallinnettavaa ongelmaa. [28]

Kurssin lopussa opiskelijat esittelivät omaa projektiaan ja arvioivat muiden. Pedagogisesti tämä on oiva oppimisympäristö, joissa suulliset ja interaktiiviset taidot kehittyvät. [28]

Joka vuosi verkostohanke lähettää muutamia opiskelijoita ECMI:n järjestämään mallinnusviikkoon. Myös kurssien osallistujat ovat olleet mukana järjestämässä, Suomessa pidettyjä Study Group-työpajoja. [28] Mallinnusviikot ja Study Group-työpajat auttavat MM-kurssin suorittaneita opiskelijoita syventämään tietojansa, soveltamaan oppimaansa ja toimimaan huippututkijoiden kanssa. Monelle opiskelijoille tapahtumat ovat ainutlaatuisia kokemuksia, jolloin he pääsevät luomaan ystävyyssuhteita ja luomaan kontakteja opiskelijoiden tai asiantuntijoiden kanssa.

Opiskelija ja pedagogisten asiantuntijoiden palautteiden perusteella hanketta pidetään menestyksekkäänä ja tarkoituksena on jatkaa verkkokursseja. Tällä hetkellä hanke on saatu kansallisella tasolla menestymään, luonnollinen tulevaisuuden etappi olisi miettiä hankkeen kehittämistä kansainvälisellä tasolla. [28]

7.2 Study Group-työpajaoppimisten hyödyntäminen opetuksessa

Tässä osiossa tarkoituksena on mainita Study Group-työpajojen tutkimisesta opittuja asioita, joita voidaan hyödyntää pedagogisesti matematiikan opetuksessa. Lisäksi tarkoituksena on selvittää, Study Group-työpajoista opitun perusteella, mitä kaikkea matemaattisen mallinnuksen kurssin tulisi pitää sisällään ja miten MM-kurssia tulisi rakentaa. Vastataksemme edellä mainittuihin kysymyksiin, tarkastellaan erikseen koulu- ja yliopistomatematiikkaa. Aluksi tarkastellaan mitä tulisi sisällyttää koulumatematiikkaan, jotta se vastaisi yliopiston ja teollisuuden tarpeita. Tämän jälkeen pohditaan, minkälaisia mallinnuskursseja yliopistolla pitäisi olla ja missä vaiheissa.

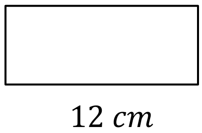
7.2.1 Kouluopetuksessa hyödynnettävät asiat

Eräs asia, joka nousee esille tutkiessa Study Group-työpajoissa käsiteltyjä ongelmia, on niiden moninaisuus ja poikkitieteellisyys. Koska ongelmat ovat uusia ja erilaisia, aina erityisosaaminenkaan ei riitä. Usein tarvitaan luovuutta ja ongelmanratkaisukykyä. Tästä johtuen, varhaisista vaiheista lähtien oppijoille on tarjottava ilmapiiri, jossa he pääsevät kehittämään ongelmanratkaisukykyään ja luovuuttaan. Ongelmanratkaisukyky ja luovuus kehittyvät parhaiten avoimissa tehtävissä, jota matemaattisen mallinnuksen opetus tarjoaa runsaasti.

Opetuksessa käytettävät tehtävät voidaan jakaa avoimiin ja suljettuihin tehtäviin. Suljetussa tehtävässä on alku- ja lopputilanne yksikäsitteisesti määritelty, kun taas avoimessa tehtävässä alku- ja lopputilanne eivät ole tarkasti määriteltyjä [30]. Avoimen tehtävän piirre on se, että sillä ei ole vain yhtä oikeata vastausta. Oppikirjojen tehtävistä suurin osa on suljettuja tehtäviä. Avoimen ja suljetun tehtävätyypin havainnollistamiseksi tarkastellaan seuraava tehtävänantoa:

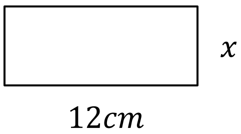
Suorakulmion pinta-ala on 60 cm^2.

a) Laske suorakulmion piiri, kun sen pituus on 12 cm.



b) Mitä kaikkia arvoja sellaisen suorakulmion piiri voi saada, jonka ala on 60 cm^2. [30]

Havainnollistamiseksi ratkaistaan a-kohta. Merkitään suorakulmion leveyttä x:llä, tällöin



$$12 \cdot x = 60 \quad ||:12$$

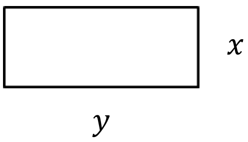
$$\Rightarrow \quad x = \frac{60}{12} = 5\ (cm).$$

Tästä voidaan ratkaista kysytty suorakulmion piirin p. Piirin arvoksi saadaan

$$p = 2(5 + 12) = 34\ (cm).$$

Kuten edellisestä ratkaisusta nähdään, a-kohta on selvästi suljettu tehtävä. Kyseessä on rutiini yhtälön ratkaisu tehtävä, jossa kaikki tarvittavat tiedot ongelman ratkaisemiseksi ovat annetut tehtävänannossa. [30]

Sen sijan esimerkin b-kohta on avoin. Siinä on ensin mietittävä alku-arvoja ja suunniteltava etenemisprosessia, sillä ratkaisuja on monia. [30] Tämän havainnollistamiseksi yritetään vuorostaan ratkaista b-kohta. Merkitään suorakulmion pituutta y:llä, leveyttä x:llä ja piiriä p:llä, tällöin



$$x \cdot y = 60$$

Koska kyseessä on sivunpituus x:n ja y:n on oltava positiivisia. Lisäksi niiden tulon on oltava 60, mutta tämä ei sinänsä tuo mitään lisäehtoa, siihen että mihin väliin x ja y voivat kuulua. Joten x ja y kuuluvat avoimeen väliin $(0, \infty)$. Ratkaisemalla y edellisestä yhtälöstä saadaan

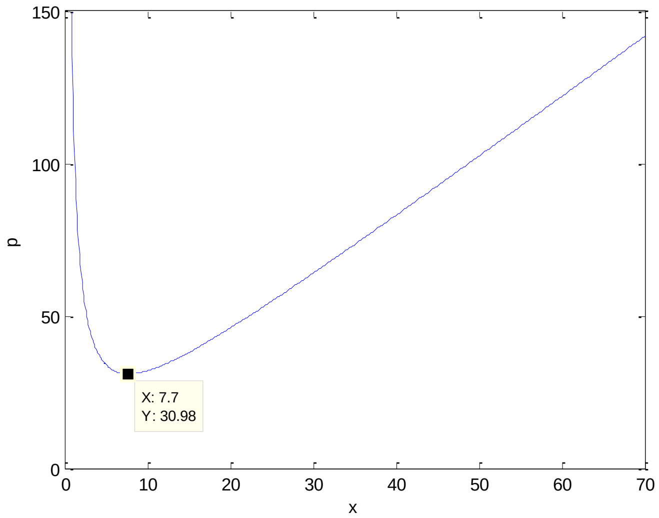
$$y = \frac{60}{x}$$

Suorakulmion piirille saadaan lauseke

$$p = 2\left(x + \frac{60}{x}\right)$$

$$p = \frac{2x^2 + 120}{x}$$

Kuvassa 33 on piirretty suorakulmion piiri sen leveyden (x:n) funktiona. Kuvasta nähdään, että piirillä on minimi arvo (n. 31) kohdassa $x \approx 7{,}7$, mutta sillä ei ole maksimi arvoa, eli likimain $p \in [31, \infty)$.



Kuva 24 *suorakulmion piiri x:n funktiona.*

Kuten aikaisemmin todettiin ja kuten kuvasta 24 nähdään, mahdollisia ratkaisuja on monia tai täsmällisemmin ääretön määrä. Tietysti kouluopetuksessa ei oleteta oppilaiden ratkaisevan yhtälöä näin perusteellisesti. Edellä olevan esityksen tarkoitus oli havainnollista ratkaisujen laajuutta ja näyttää erinäisiä seikkoja, joita oppilaat joutuvat miettimään tällaisessa tehtävässä.

Yksinomaan tavanomaisten koulutehtävien käyttäminen usein rajaa oppilaiden käsityksen matematiikasta hyvin kapea-alaiseksi, kun taas avoimien tehtävien avulla tätä kuvaa voidaan pyrkiä laajentamaan. Avoimet tehtävät tarjoavat oppilaille enemmän harkintavapautta ratkaisemisvaiheessa ja pakottavat heitä käyttämään hallitsemaansa tietoa monipuolisemmin. [30]

Avointen tehtävien lisäksi koulussa on tärkeää linkittää eri tieteenaloja opettamalla varhaisista vaiheista lähtien poikkitieteellisyyttä. Esimerkiksi matematiikassa voidaan opiskella suoran kulmakerrointa määrittämällä jousen jousivakiota. Tällöin yhdistetään matematiikka ja fysiikka. Tämä opettaa koululaisia, että eri tieteenalat eivät ole toisistaan irrallisia.

Suoran kulmakerrointa voidaan viedä entistä lähemmäksi arkielämää. Esimerkiksi voidaan laittaa jousi läpinäkyvän muoviputken sisään. Tämän jälkeen, kun jousen jousivakio on määritelty, voidaan eri jousen venymille tehdä tussilla mitta-asteikko putken ulkopuolelle. Kiinnitetään lopuksi jousen päähän koukku, ja meillä on valmis vaaka. Näin rakennetulla vaa'alla avulla voidaan mm. punnita matkalaukkujen painoa ja varmistaa, että emme joudu maksamaan matkalaukun ylipainosta lentokentällä. Tällä tavalla opetettuna oppilaat oppivat, että matematiikka ei ole irrallinen aine, jota on pakko opiskella, vaan sitä voidaan käyttää mallintamaan reaalimaailman ilmiötä ja helpottamaan arkielämää.

Yliopisto opetuksessa yleensä käytetään yksinkertaistettuja oppikirjaesimerkkejä, joita voidaan ratkaista eksplisiittisesti kynällä ja paperilla. Reaalimaailman ongelmia mallinnettaessa kuitenkin yleensä joudutaan käyttämään numeerisia ratkaisumenetelmiä. Harva teollisuuden ongelma ratkeaa kynällä ja paperilla. Jopa akateemisessa mallinnus prosesseissa, joudutaan simuloimaan ongelma tietokoneella. Tästä voidaan päätellä, että perustason ohjelmointitaidot ovat lähes välttämättömät nykymatemaatikolle ja varsinkin matemaattisen mallinnuksen parissa työskentelevälle.

Jotta pystyttäisiin vastamaan nykyteknologian tarpeisiin, ohjelmointitaitoja tulisi harjoitella jo kouluopetuksen aikana. Sisällyttämällä ohjelmointitaitoja matematiikan opetukseen varhaisista vaiheista lähtien voidaan tukea oppilaiden jatko-opintotarpeita ja kilpailukykyä työmarkkinoilla.

Osiossa 7.1.1 puhuttiin miten CIMS hyödyntää Study Group-työpajaideologiaa koulutasolla. CIMS:n mallia voidaan soveltaa myös täällä Suomessa. Tehtävän helpottamiseksi CIMS:n sivuilta voi ladata valmiita mini-projekteja ja tuoda todellisia teollisuuden ongelmia kouluympäristöön. Tämä syventää oppilaiden ymmärrystä matematiikasta, kehittää heidän soveltamiskykyä ja auttaa heitä kehittämää myöhemmin työelämässä ja jatko-opinnoissa tarvittavia taitoja.

7.2.2 Yliopisto-opetuksessa hyödynnettävät asiat

Tutkiessa Study Group-työpajojen toimintaa huomaamme, että matemaattisen mallinnuksen verkostohankkeen seurauksena syntyneiden verkkokurssien sisältö ja rakenne on hyvin perusteltua. Mallinnuskursseissa opitaan poikkitieteellisyyttä ja ryhmässä toimimista. Myös opitaan käyttämään tietokonetta raporttien kirjoittamisessa ja ongelmien simuloinnissa. Simulointitaito on hyvin tärkeä osa mallinnusta. Tämän takia yliopisto-opinnoissa ohjelmointitaitoja tulisi sisällyttää matematiikan ja varsinkin matemaattisen mallinnuksen opetukseen. Tampereen teknillisellä yliopistolla ollaan enenevässä määrin sisällyttämässä ohjelmointitaitoja matematiikan opetukseen. Tämä on toteutettu siten, että MATLAB-ohjelmaa käytetään peruskursseista lähtien osana matematiikan viikoittaisia harjoituksia.

Kuten Study Group-työpajoissa, myös muissa mallinnustehtävissä joudutaan kirjoittamaan loppuraportti mallinnuksesta tietokoneella. Näin ollen on tärkeää opetella alusta asti kirjoittamaan kaikki tietokoneella, vaikka tätä seikkaa oli mallinnuskursseilla opiskelijoiden taholta osittain kritisoitu. Study Group-työpajoissa tietokoneella tehty malli ja raportti joudutaan esittämään muille. Tämän takia on olennaista, että opiskelijat esittävät oman ratkaisunsa mallinnuskursseilla muiden edessä. Siinä he pääsevät kehittämään esitystaitojaan ja oppivat selittämään asioita yleistajuisesti.

Osa opiskelijoista oli kritisoinut myös matemaattisen mallinnuksen verkkokursseja niiden fysiikkapainottuneisuudesta. Kuitenkin tarkastellessa Study Group-työpajoissa mallinnettuja ongelmia (kuva 7) huomataan, että suurin osa ongelmista on liittynyt jollain tavalla fysiikkaan. Tämän takia on ihan perusteltua, että matemaattisen mallinnuksen verkkokurssit ovat fysiikkapainotteisia.

Study Group-työpajojen toteutuksessa eräs mieluisa asia osallistujille oli se, että he saivat vapaasti valita minkä ongelman parissa he haluavat työskennellä. Tämän takia on olennaista, että MM-kursseissa mallinnusprojektin voi valita monesta eri vaihtoehdosta. Myös ryhmässä toimimistaito nousee vahvasti esille Study Group-työpajoissa. Tästä johtuen on suotavaa, että mallinnuskursseilla joudutaan tekemään harjoitukset ja mallinnusprojekti ryhmässä.

Matemaattisen mallinnuksen verkostohankkeen seurauksena on laadittu hyviä mallinnuskursseja. Valitettavasti kuitenkin kurssit jäävät vähälle suosiolle opiskelijoiden joukossa. Tärkein syy siihen lienee opiskelijoiden vähäinen tieto matemaattisen mallinnuksen tärkeydestä ja hyödyistä. Toisena syynä voi olla pelko kurssin vaativuudesta. Ratkaisuna voisi olla yhden mallinnuskurssin lisääminen matematiikan pakollisiin opintoihin. Kurssi olisi luonteeltaan johdannonomainen, jonka tarkoituksena olisi madaltaa opiskelijoiden kynnystä osallistua matemaattisen mallinnuksen perus- ja jatkokursseille. Johdantokurssi voi olla yhden opintopisteen kurssi, johon kuuluu esimerkiksi osallistuminen seminaarin. Seminaariin voidaan kutsua asiantuntijavieraita kertomaan, miten matematiikka näkyy heidän omassa työssään ja miten he hyödyntävät matematiikka mallintamaan eri ilmiöitä. Vieraat voivat olla hyvinkin erilaisista ammateista. Innostavinta opiskelijoille olisi sellaiset ammatit, jotka ovat heille mielenkiintoisia, mutta joita myös luullaan olevan matematiikasta riippumattomia. Vieraat voivat olla ammateista kuten mm. verkkokaupan myyjä, mobiilisovelluksen tekijä, pelivalmistaja, jalkapallon valmistaja, sääennustaja, teräsvalmistaja, paperivalmistaja, lentoyhtiö, öljy-yhtiö ja yms.

7.2.3 Ehdotuksia verkostohankkeen mallinnuskurssien kurssisisältöön

Osiossa 7.1.2.1 on esitelty tällä hetkellä käytetty kurssisisältö. Tarkasteltaessa kurssisisältöä huomaamme sen olevan hyvin kattava. Tässä osiossa ehdotetaan joitakin aiheita, joita voisi harkita lisättävän kurssisisältöihin.

Perinteiset digitaaliset tietokoneet ovat saavuttamassa maksimirajansa muutaman vuoden sisällä. Tämä johtuu lähinnä siitä, että informaation kulkunopeudessa tulevat fysikaaliset rajat vastaan ja perinteiset tietokoneet tekevät vain yhden laskutoimituksen kerralla. Kvanttitietokoneet sen sijaan pystyvät tekemään monia laskutoimituksia kerrallaan. Näin teoriassa on mahdollista moninkertaistaa tietokoneiden nopeuksia. Tästä johtuen tällä hetkellä tutkitaan monessa paikassa mahdollisuutta kehittää kvanttitietokoneita. Ilman syvällistä tietämystä kvanttiteoriasta ja kvanttialgebrasta kyseisiä tietokoneita ei voida kehittää. Tästä näkökulmasta katsottuna on perusteltua sisällyttää mallinnuksen kursseihin hieman johdantoa kvanttiteoriasta ja kvanttialgebrasta.

Mallinnuskursseihin oli sisällytetty satunnaisuutta ja stokastisia prosesseja. Se oli vain kuitenkin yhdessä kurssissa. Tietoja todennäköisyyksistä ja satunnaisuudesta voidaan hyödyntää monessa alassa. Satunnaisuudella voidaan mallintaa esimerkiksi sairaalan tulevien uusien potilaiden määrää, matkustajien saapumista ja lippujen myyntiä tai urheiluottelun lopputulosta. Myös edellisessä kappaleessa mainittu kvanttiteoria perustuu osittain todennäköisyyksiin. Näin ollen jatkossa kurssisisältöihin voitaisiin lisätä entistä enemmän satunnaisuutta ja stokastisia prosesseja käsitteleviä osioita.

Globalisaation, verkostoitumisen, yritysten kasvun ja teknologian kehityksen myötä usein joudutaan tilanteisiin, joissa joudutaan käsittelemään suurta määrää dataa. Asiantuntijat ovat kehittäneet ilmiölle nimen: Big data. Karkeasti määriteltynä Big data on erittäin suuri datan määrä, joka on kompleksinen ja järjestelemätön. Tästä johtuen perinteiset analysointimenetelmät eivät riitä tai pysty järkevässä ajassa keräämään haluttuja tietoja datasta. Joudutaan miettimään uusia metodeja ja algoritmeja. Termi Big data pitää myös sisällään suuren datan käsittelyn liittyvät prosessit. [32]

Suuren dataan liittyen, monessa verkkokaupassa hyödynnetään niin kutsuttua suositusjärjestelmää (Recommender system). Suositusjärjestelmä on ohjelma tai menetelmä, joka ehdottaa tuotteita käyttäjälle hänen ja muiden käyttäjien aikaisemman käytöksen perusteella [33]. Esimerkiksi, mikäli käyttäjä ostaa Amazon-verkkokaupasta tuotteen, Amazonin suositusjärjestelmä ilmoittaa käyttäjälle muita vastaavia tuotteita. Toisena esimerkkinä voisi olla Netflixin suositusjärjestelmä, joka osaa mm. ehdottaa samanlaisia elokuvia kuin käyttäjän suosikkielokuvat. Sitä mukaan kuin yritykset sähköistyvät ja myynti tapahtuu internetin välityksellä kysyntä suositusjärjestelmistä kasvaa. Suositusjärjestelmien takana on yleensä matemaattisia menetelmiä, joita joudutaan aina kehittämän ja optimoimaan. Mallinnuskursseilla olisi hyvä käydä perustietoja tilastotieteestä, Big datasta, ja suositusalgoritmeista.

Eräs matemaattisen mallinnuksen menetelmä on peliteoriamalli. Peliteoria on järkevien päätösten tekijöiden välillä olevien konfliktien ja yhteistyön matemaattista mallintamista. Peliteoria tarjoaa yleisiä matemaattisia työkaluja, joilla voidaan (kahden tai useamman osapuolen välillä) tutkia toisten hyvinvointiin vaikuttavia päätöksiä. Peliteoria tarjoaa tärkeitä oivalluksia yhteiskuntatieteisiin ja päätöksentekoon. [34]

Matemaatikko John Nash kehitti teorian, jonka mukaan jokaisessa strategisessa pelissä, joissa osapuolet toimivat järkevästi ja tavoittelevat maksimivoittoa on olemassa ns. Nashin tasapaino, jolloin pelaajien päätöksen vaihtaminen ei hyödytä heitä. Toisin sanoen, jos osapuolet ovat Nashin tasapainossa, tietäen mitä toisten vaihtoehdot ovat, osapuolet eivät halua vaihtaa omia päätöksiään, koska päätöksen vaihtaminen vain tuottaisi heille tappiota. Näin ollen Nashin tasapainon avulla voidaan selvittää optimaalisin ratkaisu, olettaen että muut osapuolet toimivat loogisesti ja tavoittelevat vain oman voiton maksimointia. [34] Peliteoria ja Nashin tasapainon tärkeys nousivat esille, kun niitä sovellettiin menestyksekkäästi taloustieteissä, josta johtuen John Nash sai teoriastaan vuonna 1994 taloustieteiden Nobelin palkinnon [35]. Myös tänä vuonna (2014) taloustieteiden Nobelin palkinto meni peliteoreetikolle Jean Tirolelle, joka oli samalla yhdestoista taloustieteiden Nobelin palkinnon voittanut peliteoreetikko [36].

Peliteoriaa voidaan periaatteessa soveltaa kaikkiin konflikti- ja päätöksen tekotilanteisiin. Esimerkiksi, sen avulla voidaan analysoida sotatilanteita, teollisuuden hankintoja, yritysten hinnoittelua tai yms. Peliteorian monipuolisen soveltamismahdollisuuksien havainnollistamiksi mainittakoon, että sitä on sovellettu menestyksekkäästi myös biologiaan. Esimerkiksi John Maynard Smith sai Crafoord-palkinnon peliteorian soveltamisesta biologiaan [37]. Peliteoriaa voidaan myös soveltaa urheiluun. Esimerkiksi sen avulla voidaan selvittää mihin (alas, ylös, vasen, oikea) rangaistuspotku vetäjän kannattaisi ampua.

Edellisten perusteella on hyödyllistä sisällyttää peliteorian alkeita mallinnus kursseihin. Matemaattisen mallinnuksen verkostohankkeen tavoitteena oli hankeen vieminen ulkomaille ja sen kansainvälistäminen. Mikäli näin tapahtuu, on helppo pyytää ulkomaalaisia asiantuntijoita järjestämään yhden mallinnuskurssin peliteoriasta.

8 YHTEENVETO

Tässä työssä on esitetty Study Group-työpajojen toimintaa ja niiden hyötyä sekä teollisuudelle että akateemiselle tutkimukselle. Study Group-työpajoissa ovat mukana teollisuuden edustajat ja sovelletusta matematiikasta kiinnostuneet matemaatikot. Työpajoissa teollisuuden edustajat esittävät ongelmia, joita matemaatikot yrittävät ratkaista mallintamalla niitä matemaattisesti.

Study Group-työpajat parantavat teollisuuden ja akatemian välistä suhdetta. Niistä on ollut hyötyä sekä teollisuudelle, että tutkimukselle. Teollisuus on saanut ongelmansa ratkaistua lyhyessä ajassa minikustannuksin. Akateeminen tutkimus on päässyt puolestaan soveltamaan tietoonsa käytännössä ja jossain tapauksessa joutunut jopa kehittämään uusia matematiikan haaroja. Teollisuusmatematiikan työpajojen menestys on saanut muutkin teollisuuden alat, kuten kokeellinen lääketiede, kiinnostumaan ja perustamaan omia työpajoja.

Study Group-työpajojen tulevaisuus näyttää valoisalta. Vaikuttaa siltä, että teollisuutta ja akateemista tutkimusta hyödynnettävät työpajat tulevat leviämään uusin maihin ja muihin tiedealoihin. Tulevaisuudessa varsinkin kehitysmaissa Study Group-työpajoilla tule olemaan tärkeä rooli. Erityisesti maat kuten Intia ja Kiina, joissa on paljon matemaattisesti lahjakkaita ihmisiä, koska he pääsevät Study Group-työpajojen välityksellä kehittämään maansa teollisuutta ja auttamaan sen taloutta. Se, että on olemassa tasokkaita ongelmanratkaisijoita, ei riitä. Tarvitaan myös ympäristö, joka tarjoaa tasokkaita ongelmia. Study Group-työpajat toimivat tällaisena ympäristönä – erityisesti kehitysmaissa.

Modernin yhteiskunnan tarpeiden tukemiseksi, on tärkeää yrittää soveltaa entistä enemmän Study Group-tapaista mallia koulu- ja yliopisto-opetukseen. Study Group-työpajoissa vierailevat professorit voivat auttaa kehittämään matematiikan opetusta yliopistoissaan. Vieraillessaan työpajoissa he saavat ideoita siitä, että mitä tällä hetkellä teollisuudessa käsitellään ja voivat muokata kurssiopetusta vastamaan todellisia teollisuuden tarpeita.

Tässä työssä käsiteltiin myös matematiikan opetusta ja siinä kohdattuja ongelmia. Suurempia kohdattuja ongelmia on ollut varhaisissa koulutusvaiheissa syntynyt vääränlainen käsitys matematiikasta ja sen suhteesta arkeen. Tämä vääränlainen käsitys matematiikasta on usein aiheuttanut negatiivisen asenteen matematiikkaa kohtaa, joka puolestaan on aiheuttanut opiskelijoiden pintasuuntautuneen lähestymiseen matematiikan opiskeluun. Tämä on jossain määrin aiheuttanut myös kuilua lukion ja jatkokoulutuksen välillä. Oppilaiden motivoimiseksi ja vääränlaisten käsitysten välttämiseksi, ehdotettiin matemaattisen mallinnuksen ja sen mukana tulevien metodien ja teknologisten työkalujen soveltamista jo varhaisessa vaiheessa.

Työssä mainittujen matematiikan opetuksen liittyvien ongelmien välttämiseksi, ehdotettiin opetusmenetelmiä ja materiaaleja, jotka ottavat nyky-yhteiskunnan ja tulevaisuuden tarpeet huomioon. Matematiikan opetukseen kaikkiin vaiheisiin ehdotettiin seuraavien taitojen harjoittamista ja soveltamista: looginen päättelykyky, ryhmätyöt, poikkitieteellisuus, laaja-alainen osaaminen, ilmaisutaito, luovuus, oppimaan oppiminen, tiedonhankinta, media- ja tietoteknologiset taidot, ohjelmointitaito, englannin kielen hallinta, ongelmanratkaisukyky, vuorovaikutustaito ja osallistumis- ja vaikuttamishalua kestävän tulevaisuuden rakentamiseen.

Työssä käsiteltiin ja analysoitiin myös Suomen matemaattisen mallinnuksen verkostohanketta. Analysoinnin myötä huomattiin, että Suomessa kansallisella tasolla toimiva verkostohanke valmentaa hyvin Study Group-työpajoihin ja teollisuudessa tarvittaviin matemaattisiin taitoihin. Verkkokurssien kurssisisällöt todettiin hyvin monipuoliseksi ja kattavaksi. Jatkoa varten kurssisisältöihin ehdotettiin, kvanttiteoria, kvanttialgebra, satunnaisuutta, Big data ja peliteoriaa.

Tulevaisuuden kannalta olisi hyvä pohtia:

- Miten Study Group-työpajaa voidaan mainostaa Suomessa toimiviin teollisuuksiin?
- Miten voidaan Study Group-työpajojen toimintamallia esitellä kaikille kouluille?
- Miten voidaan mahdollistaa laajamittainen opettajien ja opiskelijoiden haastattelu?
- Minkälaisia tukimateriaaleja voidaan tuottaa koulujen käyttöön?
- Miten teknologian käyttö voidaan varmistaa kouluissa? Minkälaisilla uusilla tavoilla voidaan nykyteknologia hyödyntää matematiikan opetuksessa?
- Miten taidetta voidaan hyödyntää matematiikan opetuksessa?

LÄHTEET

[1] Matt Hennessy, Mathematics in Industry Study Groups, Oxford Centre for Industrial and Applied Mathematics (OCIAM), University of Oxford, 2012. Saatavissa: http://miis.maths.ox.ac.uk/, Luettu 4.10.2012

[2] European Institute for Statistics, Probability, Stochastic Operations Research and their Applications (EURANDOM), Eindhoven University of Technology (TU/e), 2012. Saatavissa: http://www.eurandom.nl/events/workshops/2012/SWI_2012/index.html, Luettu 8.10.2012

[3] Heather Tewkesbury, Smith Institute, 2004. Saatavissa: http://www.mafy.lut.fi/EcmiNL/older/ecmi36/node33.html, Luettu 8.10.2012

[4] Seppo Pohjolainen (toim.), Matemaattinen mallinnus, WSOUpro Oy, 1. P. 2010

[5] Kalu A. Ugwa, Mathematical Modeling As A Tool For Sustainable Development In Nigeria, International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development, Vol. 1, No. 2, huhti. 2012. Saatavissa: http://www.hrmars.com/admin/pics/867.pdf, Luettu 14.12.12

[6] Wikipedia, Mathematical Modelling, 2012. Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_model, Luettu 20.11.12

[7] Matti Heiliö, Hilary Ockendon, Arkhimedes lehti artikkeli, Teollisuusmatematiikan työpaja, European Study Group with Industry, 2012.

[8] Douglas N. Arnold, Mathematics in Industry and Government, Institute for Mathematics and its Applications, 2002. Saatavissa: http://www.ima.umn.edu/~arnold/talks/industry.pdf, Luettu 13.8.13

[9] Matt Hennessy, Past Study Groups, Oxford Centre for Industrial and Applied Mathematics (OCIAM), University of Oxford, 2012. Saatavissa: http://miis.maths.ox.ac.uk/past/, Luettu 19.8.13

[10] University of the Witwatersrand, African Institute for Mathematical Sciences, 2013. Saatavissa: http://www.wits.ac.za/conferences/misgsa2013, Luettu 20.8.13

[11] Mathematics in Industry website, Past problems, 2012. Saatavissa: http://www.maths-in-industry.org/miis/view/subjects/, Luettu 1.2.2013

[12] Saudi Gazette, Applying Mathematics to Industry, Dr. Chris Brewardin haastattelu, Jeddah Hilton, 2011. Saatavissa: http://www.saudigazette.com.sa/index.cfm?method=home.regcon&contentID=2011020192653, Luettu 19.9.13

[13] Louis F. Rossi, Mathematical Problems in Industry Workshop Celebrates 25 Years, SIAM News, 2010. Saatavissa: http://www.siam.org/news/news.php?id=1732, Luettu 20.9.13

[14] European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI), website. Saatavissa: http://www.ecmi-indmath.org/, Luettu 14.10.13

[15] Wil Schilders, ECMI President, Mathematics & Industry, ECMI Newsletter, Number 49, maalis. 2011. Saatavissa: http://www.mafy.lut.fi/EcmiNL/issues.php?action=viewiss&ID=49, Luettu 14.10.13

[16] A.B. Taylor, Oxford Study Groups with Industry 1968-1971, Progress Report on Applications of Differential Equations, Mathematical Institute, Oxford, 1971. Saatavissa: http://www.maths-in-industry.org/miis/566/1/Oxford_Study_Groups_1968-1988.pdf, Luettu 15.10.13

[17] John R. Ockendon (Oxford), Stimulating Mathematics-in-Industry, 2008. Saatavissa: http://www.matstos.pjwstk.edu.pl/no12/no12_ockendon.pdf, Luettu 16.10.13

[18] Sergey Lupuleac, SPbSPU, Matti Heiliö, LUT/MaFy, European Study Group with Industry ESGI 96, website, 2013. Saatavissa: http://amd.stu.neva.ru/esgi96, Luettu 17.10.13

[19] Ian Hewitt, Andrew Lacey, Niklas Mellgren , Michael Vynnycky, Marguerite Robinson and Mark Cooker, Designing a Green Roof for Ireland, Proceedings of the Seventieth European Study Group with Industry, Limerick, Ireland, 2009. Saatavissa: http://ww.macsi.ul.ie/2/esgi70/ESGI70_proceedings.pdf, Luettu 19.10.13

[20] Erik Christensen, kuva, Traditionnal buildings with green roofs at Norðragøta on Eysturoy, Faroe Islands, 2002. Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nor%C3%B0rag%C3%B8ta,_Faroe_Islands_(2).JPG, Luettu 12.12.13

[21] M. Hennessy, Mathematics in Industry, website, Past Study Groups, 2013. Saatavissa:
http://www.maths-in-industry.org/past/, Luettu 16.12.13

[22] Math-in net, website, 97 European Study Group with Industry, Santiago de Compostela, 2013. Saatavissa:
http://math-in.net/97ESGI/english/Horario.html, Luettu 17.12.13

[23] Poul G. Hjorth, Study groups in Denmark: A tale of three cities, Department of Mathematics, B-303, Matematiktorvet, Technical University of Denmark, 2007. Saatavissa: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/pamm.200700723/pdf, Luettu 31.12.13

[24] Department of Mathematical Sciences - Worcester Polytechnic Institute, Benefits, Center for Industrial Mathematics and Statistics (CIMS), website, 2010. Saatavissa:
http://www.wpi.edu/academics/math/CIMS/About/benefits.html, Luettu 1.1.14

[25] Wikipedia, NP (Complexity), Website, 2015. Saatavissa:
http://en.wikipedia.org/wiki/NP_%28complexity%29, Luettu 1.1.15

[26] Department of Mathematical Sciences - Worcester Polytechnic Institute, Benefits, Center for Industrial Mathematics and Statistics (CIMS), website, Mathematics in Industry Institute for Teachers, About, 2012. Saatavissa: http://www.wpi.edu/academics/math/CIMS/Teachers/about.html, Luettu 30.1.14

[27] Department of Mathematical Sciences - Worcester Polytechnic Institute, Center for Industrial Mathematics and Statistics (CIMS), website, 2010. Saatavissa:
http://www.wpi.edu/academics/math/CIMS/About/benefits.html, Luettu 4.2.14

[28] Haines, Galbraith, Blum ja Khan, Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics, Horwood Publishing Chichester, UK, 2007, Artikkelista: The Finnish Network for Mathematical Modelling, Robert Piché, Seppo Pohjolainen, Kari Suomela, Kirsi Silius, Anne-Maritta Tervakari, TUT, Finland

[29] Matemaattisen mallinnuksen verkostohanke, Hanke, koordinaattorina prof. Seppo Pohjolainen, internet-sivu, 2014. Saatavissa: https://hlab.ee.tut.fi/mallinnus/, Luettu 20.11.2014

[30] Teija Laine, Matematiikan sanalliset tehtävät, Tehtävän ymmärrys, Turun Matikkamaa, 2014. Saatavissa:

http://www.edu.fi/download/150520_matematiikan_sanalliset_tehtavat_tehtavan_ymmarrys.pdf, Luettu 27.11.2014

[31] Oph:n opetusneuvos Leo Pahkin, Aamu lehti, 20.2.14, Luettu 26.6.2014

[32] Chris Snijders, Uwe Matzat, Ulf-Dietrich Reips, “Big Data”: Big Gaps of Knowledge in the Field of Internet Science, International Journal of Internet Science, heinä. 2012. Saatavissa: http://www.ijis.net/ijis7_1/ijis7_1_editorial.pdf, Luettu 3.12.14

[33] Francesco Ricci, Lior Rokach and Bracha Shapira, Introduction to Recommender Systems Handbook, 2011. Saatavissa: http://www.inf.unibz.it/~ricci/papers/intro-rec-sys-handbook.pdf, Luettu 3.12.14

[34] Roger B. Myerson, Game Theory Analysis of Conflict, Harvard University Press, 1991.

[35] Editor Tore Frängsmyr, John F. Nash Jr.–Biographical, Les Prix Nobel, The Nobel Prizes 1994. Saatavissa: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1994/nash-bio.html, Luettu 4.12.14

[36] Nobelprize.org, Jean Tirole–Facts, Nobel Media AB, Website, 2014. Saatavissa: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2014/tirole-facts.html, Luettu 4.12.14

[37] The Crafoord Prize, Website, Press, The Crafoord Prize 1999, helmi. 1999, http://www.crafoordprize.se/press/arkivpressreleases/thecrafoordprize1999.5.32d4db7210df50fec2d800018201.html, Luettu 4.12.14

[38] Taloudellinen tiedotustoimisto (TAT), Opetin, internet-sivu, Mikä Asiantuntijaverkosto?, 2014. Saatavissa: http://www.opetin.fi/asiantuntijaverkosto/mika-asiantuntijaverkosto/, Luettu 4.12.14

[39] Helsingin yliopiston tietotekniikan laitos, Website, 2002. Saatavissa: http://www.ling.helsinki.fi/kit/kurssit/verkkokurssit/korpuskurssi/ohjelmointikieli.shtml, Luettu 4.2.15

[40] Worcester Polytechnic Institute (WPI), Math department, The History of the Calculus and the Development of Computer Algebra Systems, Computer Algebra System, Website, 2005. Saatavissa:

http://www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calc5.html, Luettu 10.2.15

[41] Andrei D. Polyanin, EqWorld, The World of Mathematical Equations, Software, Website, 2014. Saatavissa: http://eqworld.ipmnet.ru/en/software.htm, Luettu 12.2.2015

[42] Wikipedia, MATLAB, 2015, Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/MATLAB, Luettu 11.2.15

[43] Wolfram, Company, Company Background, Website, 2015. Saatavissa: http://www.wolfram.com/company/background.html?source=nav, Luettu 16.2.15

[44] Maplesoft, products, Maple, Website, 2014. Saatavissa: http://www.maplesoft.com/products/Maple/, Luettu 16.2.15

[45] Sage, Home, Website, 2014. Saatavissa: http://www.sagemath.org/index.html, Luettu 16.2.15

[46] Wikipedia, MathCad, 2015. Saatavissa: http://fi.wikipedia.org/wiki/Mathcad, Luettu 18.2.15

[47] Wikipedia, R, 2015. Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/R_(programming_language), Luettu 18.2.15

[48] The Shodor Education Foundation Inc., Overview of Computational Science, Website, 2000. Saatavissa: http://www.shodor.org/chemviz/overview/compsci.html, Luettu 23.2.15

[49] Wikipedia, Bogie, Website, 2015. Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/Bogie, Luettu 26.2.15

[50] H. Grundmann, G.I. Schuëller, Structural Dynamics, Eurodyn 2002, Mathematical Models, Vehicle, 2002. Saatavissa: https://books.google.fi/books?id=VteQVl0L9XwC&printsec=frontcover&dq=isbn:9058095118&hl=en&sa=X&ei=aPXuVOzcJInMyAO6-YDoBg&ved=0CCAQ6AEwAA#v=onepage&q=bogie&f=false, Luettu 26.2.2015

[51] University of Sydney, School of Mathematics and Statistics, Magma Computer Algebra, Overview, Introduction, The Magma Philosophy, Website, 2015. Saa-

tavissa:
http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/overview/2/19/1/#subsection_1_1, Luettu 2.3.2015

[52] Kirsi Silius, Seppo Pohjolainen, Jussi Kangas, Thumas Miilumäki ja Jarmo Joutsenlahti, What can be done to bridge the competency gap between upper – secondary school and university mathematics?, 4.-6. huhtikuuta 2010, Saatavissa: http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=5773172, Luettu 12.3.2015

[53] Sir Ken Robinsonin RSA:ssa pidetystä puheesta, https://www.youtube.com/watch?v=zDZFcDGpL4U, Katsottu 12.3.2015

[54] Wikipedia, LaTeX, Website, 2015.Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/LaTeX, Luettu 18.3.2015

[55] Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna and Elisabeth Schlegl, The Not So Short Introduction to LaTeX, 2014. Saatavissa: https://tobi.oetiker.ch/lshort/lshort.pdf, Luettu 18.3.2015

[56] Wikipedia, Microsoft Word, Website, 2015.Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Word, Luettu 18.3.2015

[57] Jan de Lange, Secretary- General of the OECD, PISA 2009 Assessment Framework, Key competencies in reading, mathematics and science, Mathematics Framework, 2009. Saatavissa: http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/44455820.pdf

[58] European Society for Engineering Education (SEFI), Burkhard Alpers, A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education, A Report of the Mathematics Working Group, 2013. Saatavissa: http://www.sefi.be/wp-content/uploads/Competency%20based%20curriculum%20incl%20ads.pdf

[59] Glenda Anthony and Margaret Walshaw, Characteristics of Effective Teaching of Mathematics: A View from the West, Journal of Mathematics Education, December 2009. Saatavissa: http://educationforatoz.org/images/_9734_12_Glenda_Anthony.pdf

[60] Niss, M. (2003a). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis, S. Papastravidis (Eds.), 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education, Athens, Greece: Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, 115-124Mathematics: A

View from the West, 2003.

[61] Helsingin kaupingin opetusvirasto, Ilmiömäinen Helsinki, Tulevaisuuden koulun suuntaviivat 2015–2020, 2015. Saatavissa: http://www.hel.fi/static/opev/virasto/opevsivut/tk-2015.pdf, Luettu 13.4.15

[62] Wikipedia, Ilmiöpohjainen oppiminen, website, 2010. Saatavissa: http://fi.wikipedia.org/wiki/Ilmi%C3%B6pohjainen_oppiminen, Luettu 13.4.15

[63] Kirsi Silius, Seppo Pohjolainen, Jussi Kangas ja Thumas Miilumäki, What can be done to bridge the competency gap between upper-secondary school and university mathematics?, Tampere University of Technology, Tampere, Finland, 2011. Saatavissa: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5773172&tag=1

[64] Paul Andrews, Andreas Ryve, Kirsti Hemmi ja Judy Sayers, PISA, TIMSS and Finnish mathematics teaching: an enigma in search of an explanation, 2014. Saatavissa: http://download-v2.springer.com/static/pdf/127/art%253A10.1007%252Fs10649-014-9545-3.pdf?token2=exp=1429084550~acl=%2Fstatic%2Fpdf%2F127%2Fart%25253A10.1007%25252Fs10649-014-9545-3.pdf*~hmac=b1a073d5b0e3e237d3a8ad10225b9ab156197ed34a3365f5308c0b7e6d26572f, Luettu 15.4.2015

[65] National Audit Office study team, Staying the course: The retention of students in higher education 2007. Saatavissa: http://www.nao.org.uk/wp-content/uploads/2007/07/0607616.pdf, Luettu 15.4.2015

[66] The Mathematical Association of America, A report by the Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of The Mathematical Association of America, Undergraduate Programs and Courses in the Mathematical Sciences: CUPM Curriculum Guide 2004, 2004. Saatavissa: http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/CUPM/cupm2004.pdf

[67] Herbert Kasube and William McCallum, CRAFTY Curriculum Foundations Project Mathematical Sciences Research Institute, Mathematics, 2001. Saatavissa: http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/CUPM/crafty/Chapt12.pdf

[68] National HE STEM Programme, University of Birmingham, Duncan Lawson, Setting up a Maths Support Centre, 2011. Saatavissa: http://www.hestem.ac.uk/sites/default/files/6068_he-stem_maths_aw_web.pdf

[69] Jyväskylän yliopisto, Opetusmenetelmistä ja lähestymistavoista, Pedagogiset mallit, Website, 2015. Saatavissa: https://koppa.jyu.fi/avoimet/mit/tietotekniikan-opetuksen-perusteet/Opetusmenetelmista-ja-lahestymistavoista/pedagoginen-malli, Luettu 16.4.15

[70] Sir Ken Robinson, Out of Our Minds: Learning to be Creative, 2011 painos. Saatavissa: http://www.fredkemp.com/5365su12/robinsonchpt123.pdf

[71] Wikipedia, Biologinen vedenpuhdistus, Website, 2104. Saatavissa: http://fi.wikipedia.org/wiki/Biologinen_vedenpuhdistus, Luettu 19.4.15

[72] Van den Akker, M and Bloemhof, G and Bosman, Optimal Distributed Power Generation Under Network-Load Constraints, Study Group Report, 2010. Saatavissa: http://www.maths-in-industry.org/miis/582/1/Amst102.pdf, Luettu 19.4.15

[73] Vytautas Janilions and Jonas Valantinas, Kaunas Univesity of Techonolgy, Lithuania, An active learning approach to teaching mathematics at Kaunas University of Technology, 2008. Saatavissa: http://sefi.htw-aa-len.de/Seminars/Loughborough2008/mee2008/proceedings/mee2008F_Janilionis.pdf

[74] Math Center, About us, Website, 2015. Saatavissa: http://www.mathcentre.ac.uk/about/, Luettu 21.4.2015

[75] Wikipedia, Khan Academy, Website, 2015. Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/Khan_Academy, Luettu 21.4.15

[76] Khan Academy, About, Website, 2015. Saatavissa: https://www.khanacademy.org/about, Luettu 21.4.2015

[77] Sigma, Network for excellence in mathematics and statistics support, About, Website, 2015. Saatavissa: http://www.sigma-network.ac.uk/about/the-sigma-network/, Luettu 21.4.15

[78] Oph:n opetusneuvos Leo Pahkin, Aamu lehti, 20.2.14, Luettu 26.6.2014

[79] House of Lords, Select Committee on Science and Technology, Higher Education in Science, Technology Engineering and Mathematics (STEM) subjects,

2nd Report of Session 2012–13, 2013. Saatavissa: http://www.publications.parliament.uk/pa/ld201213/ldselect/ldsctech/37/37.pdf

[80] Wikipedia, Massiivinen avoin verkkokurssi, Website, 2015. Saatavissa: http://fi.wikipedia.org/wiki/Massiivinen_avoin_verkkokurssi, Luettu 27.4.15

[81] Carol L. Robinson, Mathematics Education Centre, Loughborough University, UK, Using Electronic Voting Systems for Active Learning, 2011. Saatavissa: http://sefi.htw-aalen.de/Seminars/Wismar2010/SEFI/papers_pdfs/MWG2010_Robinson_C.pdf

[82] Loughborough University, Leicestershire, UK, Mathematics Education Centre, Website, 2015. Saatavissa: http://www.lboro.ac.uk/departments/mec/activities/curriculumdevelopment/evs/helmevsquestions/, Luettu 27.4.15

[83] Cornell University, Department of Mathematics, Robyn L. Miller, Everilis Santana-Vega, Maria S. Terrell, Can Good Questions and Peer Discussion Improve Calculus Instruction?, 2005. Saatavissa: http://www.math.cornell.edu/~maria/mathfest_eduction/preprint.pdf

[84] Greg Oates, Integrated Technology in the Undergraduate Mathematics Curriculum: A Case Study of Computer Algebra Systems, 2009. Saatavissa: https://researchspace.auckland.ac.nz/bitstream/handle/2292/4533/02whole.pdf?sequence=4

[85] Wikipedia, Heuristic, Website, 2015. Saatavissa: http://en.wikipedia.org/wiki/Heuristic, Luettu 6.5.2015

[86] Wikipedia, Tentti, Website, 2015. Saatavissa: http://fi.wikipedia.org/wiki/Tentti#keinotekoinen_tentti, Luettu 6.5.2015

[87] Morten Blomhoj and Tomas Hojgaard Jensen, Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning, 2003. Saatavissa: http://pure.au.dk/ws/files/232/thj03-mb-tmaia-on-ed-planning.pdf

[88] OECD, PISA, About PISA, Website, 2015. Saatavissa: http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/, Luettu 12.5.15

[89] TIMSS & PIRLS, International Study Center, About TIMSS and PIRLS, 2015. Saatavissa: http://timssandpirls.bc.edu/home/pdf/TP_About.pdf, Luettu 12.5.15