TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

JUHO VIRPIRANTA

MÖBIUS-KUVAUKSET AVARUUKSISSA $\mathbb{C}$ JA $\mathbb{R}^3$

Diplomityö

Tarkastaja: Sirkka-Liisa Eriksson
Tarkastaja ja aihe hyväksytty Luonnontieteiden tiedekunnan tiedekuntaneuvoston kokouksessa 9.4.2014

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
VIRPIRANTA, JUHO: Möbius-kuvaukset avaruuksissa $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}^3$
Diplomityö, 118 sivua
Tammikuu 2015
Pääaine: Matematiikka
Tarkastaja: Sirkka-Liisa Eriksson
Avainsanat: Möbius-kuvaus, kvaterni, ortogonaalikuvaus, kierto, peilaus

Möbius-kuvaukset ovat alun perin kompleksitason kuvausten joukko, jolla on mielenkiintoisia geometrisia ominaisuuksia. Myöhemmin niitä koskeva teoria on yleistetty avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Tässä työssä käsitellään avaruuksien $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}^3$ Möbius-kuvauksia. Keskeisenä tavoitteena on selvittää, miten kertoimien laajentaminen kompleksiluvuista kvaterneiksi vaikuttaa kompleksitason Möbius-kuvausten teoriaan.

Osoittautuu, että kompleksikertoimien lisäksi kvaternikertoimet ovat mahdollisia ainoastaan, kun niiden kompleksiosa on nolla. Nämä kuvaukset täydentävät kompleksitason Möbius-kuvausten teoriaa merkittävällä tavalla lisäämällä kuvausten joukkoon myös peilaukset.

Työn käsittely pohjautuu pitkälti P. L. Watermanin artikkeliin *Möbius Transformations in Several Dimensions*.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Master's Degree Programme in Science and Engineering
VIRPIRANTA, JUHO: Möbius Transformation in $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}^3$
Master of Science Thesis, 118 pages
January 2015
Major: Mathematics
Examiner: Sirkka-Liisa Eriksson
Keywords: Möbius transformation, quaternion, orthogonal transformation, rotation, reflection

Möbius transformations are originally a group of complex mappings, which have interesting geometrical properties. Later their theory have been generalized to the space $\mathbb{R}^n$.

This thesis deals with the Möbius transformations of the spaces $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}^3$. The main interest is to solve, how expanding the complex coefficients into quaternions affects the theory of Möbius transformations of the complex plane.

It is found that there is exactly one additional case of quaternionic coefficients – that of the quaternions whose complex part is zero. These new mappings complement the theory of Möbius transformation of the complex plane in a remarkable way by adding the reflections to it.

The treatment of the problem is mostly based on the P. L. Waterman's article *Möbius Transformations in Several Dimensions*.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on kirjoitettu Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitokselle vuosien 2012–2014 aikana.

Haluan kiittää TTY:n matematiikan laitosta työtiloista ja taloudellisesta tuesta sekä Sirkka-Liisa Erikssonia työn ohjaamisesta ja vastaamisesta lukuisiin kysymyksiin. Kiitos myös Niilo Soinnulle oikoluvusta ja kommentoinnista sekä työkavereille Janne Venho, Jukka-Pekka Humaloja, Tuomas Myllykoski ja Aino Ylinen työhön liittyvistä ja sen ulkopuolisista keskusteluista.

En tiennyt työtä aloittaessani työn aiheesta käytännössä mitään. Se osoittautui kuitenkin onnekseni hyvin mielenkiintoiseksi yhdistäen monia kiinnostavia matematiikan aloja, kuten kompleksilukuja, kvaterneja, matriisilaskentaa, algebraa ja geometriaa. Voin siis suositella aihepiiriä myös tuleville diplomityön tekijöille.

Työn kirjoittaminen ei kuitenkaan sujunut ongelmitta, vaan jouduin käyttämään ylettömästi aikaa saadakseni irti paperia säästäen kirjoitetuista lähteistä, mitä niissä oikein tehdään ja miksi. Tästä aiheutuneen turhautumisen seurauksena työn keskeiseksi tavoitteeksi muodostui omalta kohdaltani työn kirjoittaminen mahdollisimman helposti lähestyttäväksi kokonaisuudeksi niin, että vastaavaan aiheeseen perehtyvät opiskelijat pääsisivät jatkossa asiaan helpommin kiinni.

Tampereella 16.11.2014.

Juho Virpiranta

SISÄLLYS

MERKINNÄT

i, j, k	kvaternien kanta-alkioita, $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$
$\mathbb{H}$	kvaternien joukko
$P(q)$	kvaternin q kompleksiosa, $P(q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}) = q_0 + q_1\mathrm{i}$
$Q(q)$	kvaternin q hyperkompleksiosa, $Q(q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}) = q_2 + q_3\mathrm{i}$
q'	pääinvoluutio, $(q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k})' = q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$
q^*	reversio, $(q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k})^* = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} - q_3\mathrm{k}$
$\overline{q}$	konjugaatti, $\overline{(q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k})} = q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} - q_3\mathrm{k}$
$\mathbb{F}_*$	$\mathbb{F} \setminus \{0\}$
$\mathcal{C}\ell_{p,q}$	Cliffordin algebra, jonka generoiville alkioille e_i pätee $\mathrm{e}_i^2 = 1$, jos $i = 1, \ldots, p$, ja $\mathrm{e}_i^2 = -1$, jos $i = p+1, \ldots, p+q$
Γ_n	Cliffordin ryhmä, Cliffordin algebran $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ kääntyvien alkioiden muodostama ryhmä
∞	äärettömyyspiste
$\mathbb{F}_\infty$	$\mathbb{F} \cup \{\infty\}$
$\Delta(T)$	Möbius-kuvauksen T pseudodeterminantti, $\Delta(T) = ad^* - bc^*$
$GM(\mathbb{F})$	avaruuden $\mathbb{F}$ Möbius-kuvausten ryhmä
$GL(n, \mathbb{F})$	asteen n yleinen lineaarinen ryhmä
$PGL(n, \mathbb{F})$	asteen n projektiivinen lineaarinen ryhmä
$SL(n, \mathbb{F})$	asteen n erityinen lineaarinen ryhmä
$PSL(n, \mathbb{F})$	asteen n projektiivinen erityinen lineaarinen ryhmä
$O(n)$	$O(\mathbb{R}^n)$, avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortogonaalikuvausten ryhmä
$SO(n)$	$O^+(n)$, avaruuden $\mathbb{R}^n$ erityisortogonaalikuvausten ryhmä, $A \in SO(n) \iff A \in O(n)$ ja $\det(A) = 1$
$O^-(n)$	$A \in O^-(n) \iff A \in O(n)$ ja $\det(A) = -1$

R_a	peilaus vektoria a vastaan kohtisuoran origon kautta kulkevan hypertason suhteen
ρ	avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ kiertomatriisi
ρ_q	kierto avaruudessa $\mathbb{C}$ tai $\mathbb{R}^3$ kvaternin q avulla esitettynä, $\rho_q(x) = qxq'^{-1}$

1 JOHDANTO

Möbius-kuvaukset ovat alun perin kompleksimuuttujan kuvauksia muotoa

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

joilla on mielenkiintoisia geometrisia ominaisuuksia. Niillä voidaan esimerkiksi esittää kaikki kompleksitason kierrot, siirrot ja venytykset; ne kuvaavat ympyrät ja suorat ympyröiksi ja suoriksi ja ne ovat konformisia eli kulmat säilyttäviä. Lisäksi ne muodostavat ryhmän. Myöhemmin Möbius-kuvausten teoria on laajennettu koskemaan yleistä avaruutta $\mathbb{R}^n$. Korkeampiin avaruuksiin siirryttäessä kertoimien a, b, c ja d kompleksisuus ei kuitenkaan enää riitä, vaan ne tulee laajentaa kompleksilukuja korkeampiasteisiksi *Cliffordin algebrojen* luvuiksi. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ tapauksessa kertoimet ovat *kvaterneja*.

Tässä työssä käsitellään avaruuksien $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}^3$ Möbius-kuvauksia. Keskeisenä kiinnostuksen kohteena on ei-perinteinen kvaternikertoimisten kompleksitason Möbius-kuvausten tapaus. Tutkimusongelmana on selvittää, (1) onko kompleksilukujen lisäksi olemassa myös muunlaisia kvaternikertoimia, joilla kompleksitason Möbius-kuvaukset ovat mahdollisia, ja jos on, (2) miten nämä kuvaukset sopivat Möbius-kuvausten teoriaan. Suurin osa työstä kuluu kuitenkin tarkasteltaessa avaruuksien $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}^3$ perinteisiä Möbius-kuvauksia ja niissä tarvittavaa teoriaa, kuten kvaterneja ja ortogonaalikuvauksia (kierrot ja peilaukset).

Työ pohjautuu pääasiassa P. L. Watermanin julkaisuun *Möbius Transformations in Several Dimensions* eli lähteeseen [18].

Lukijan oletetaan hallitsevan kompleksilukujen ja matriisien perusominaisuudet. Lisäksi algebran käsitteistä ryhmä, homomorfismi, isomorfismi sekä tekijäjoukko, olisivat myös hyvä olla entuudestaan tuttuja.

2 LUKUJOUKOISTA

Möbius-kuvausten kertoimet ovat alkuperäisessä kompleksitason tapauksessa kompleksilukuja. Kompleksiluvut ovat erikoistapaus yleisemmistä Cliffordin algebrojen luvuista, ja korkeampiin avaruuksiin siirryttäessä Möbius-kuvausten kertoimet tulee laajentaa yleisemmiksi Cliffordin algebrojen luvuiksi. Tässä työssä näistä tarvitaan kahta kompleksilukuja seuraavaksi laajempaa lukujoukkoa, jotka käsitellään tässä luvussa. Näiden lisäksi tarkastellaan lyhyesti myös Cliffordin algebroja yleisesti.

2.1 Kvaternit

Motivaatioksi lukujoukkojen laajentamiselle aina luonnollisista luvuista kompleksilukuihin saakka voidaan ajatella se, että tiettyjen laskutoimitusten kautta ajaudutaan käsiteltävän lukujoukon ulkopuolelle. Vaikka kompleksilukujen kohdalla ei enää kohdata vastaavaa ongelmaa, on silti luonnollista kysyä, onko olemassa kompleksilukuja laajempi lukujoukko, joka sisältää kompleksiluvut osajoukkonaan. Asialle on myös käytännön motivaatio: Kuten seuraavassa luvussa nähdään, kompleksilukujen laskutoimituksilla voidaan esittää kätevästi tason geometrisia kuvauksia, kuten siirtoja ja kiertoja. Hypoteettisille kompleksilukuja laajemmille luvuille, joilla voitaisiin toteuttaa näitä kuvauksia myös kolmiulotteisessa avaruudessa, olisi selvästi käyttöä.

Kompleksiluvut voidaan ajatella kaksiulotteisiksi luvuiksi. Näin ollen kompleksilukuja laajempaa lukujoukkoa etsiessä on luonnollista lähteä tarkastelemaan kolmiulotteisia lukuja. Näin teki irlantilainen sir William Rowan Hamilton (1805–1865) ja päätyi tutkimuksissaan yllättävään havaintoon vuonna 1843: laajennus kolmiulotteisiin lukuihin ei onnistu, mutta sen sijaan laajennus neliulotteisiin lukuihin onnistuu luopumalla kertolaskun vaihdannaisuudesta [3]. Näitä lukuja kutsutaan *kvaterneiksi*, ja ne ovat muotoa

$$q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k},$$

missä q_0, q_1, q_2 ja q_{12}[1] ovat reaalilukuja ja i, j ja k ovat imaginääriyksiköitä, joille pätevät seuraavat ehdot:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Tässä työssä lähdetään kuitenkin liikkeelle määrittelemällä kvaternit kompleksilu-

[1] Viimeisen kertoimen alaindeksinä on 12 alaindeksin 3 sijaan. Syy tähän selviää seuraavassa alaluvussa.

kupareina, joille pätevät tietyt laskutoimitukset. Tällöin edellä mainittu kvaternien esitystapa voidaan johtaa samalla tapaa kuin kompleksilukujen komponenttiesitys johdetaan reaalilukupareista.

Määritelmä 2.1.1 ([12]). *Kvaternien joukko* $\mathbb{H}$ *muodostuu järjestetyistä kompleksilukupareista* $q = (z, w)$, $z, w \in \mathbb{C}$, *joille yhteenlasku, skalaarilla kertominen ja kertolasku ovat määritelty kaavoilla*

$$(u, v) + (z, w) = (u + z, v + w),$$

$$\lambda(z, w) = (\lambda z, \lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ja

$$(u, v)(z, w) = (uz - v\overline{w}, uw + v\overline{z})$$

jokaiselle $(u, v), (z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Edellisestä määritelmästä havaitaan, että kvaternien joukko on laskutoimitusten suhteen suljettu. Yhteenlasku ja skalaarilla kertominen ovat vektorien laskusäännöistä tuttuja, mutta kertolasku erottaa määritellyn algebrallisen rakenteen vektoriavaruudesta. Kuten reaaliluvuilla, kertolaskun merkki voidaan jättää merkitsemättä ilman sekaantumisen vaaraa. Edellä mainittu kertolaskun ei-vaihdannaisuus nähdään selvästi esimerkiksi seuraavasta tapauksesta:

$$(\mathrm{i}, 0)(0, 1) = (0 - 0, \mathrm{i} \cdot 1 + 0) = (0, \mathrm{i})$$

mutta

$$(0, 1)(\mathrm{i}, 0) = (0 - 0, 0 + 1 \cdot \overline{\mathrm{i}}) = (0, -\mathrm{i}).$$

Liitännäisyydestä ja osittelulaeista ei kuitenkaan tarvitse luopua.

Propositio 2.1.2. *Kvaternien kertolaskulle pätee liitäntälaki.*

Todistus. Olkoot (u, v), (z, w) ja (a, b) kvaterneja. On siis näytettävä, että kvaternien kertolaskulle pätee laskusääntö

$$\big[(u, v)(z, w)\big](a, b) = (u, v)\big[(z, w)(a, b)\big].$$

Soveltamalla kertolaskun määritelmää yhtälön vasempaan puoleen kaksi kertaa saadaan

$$\begin{aligned}\big[(u, v)(z, w)\big](a, b) &= (uz - v\overline{w}, uw + v\overline{z})(a, b) \\ &= \big((uz - v\overline{w})a - (uw + v\overline{z})\overline{b}, (uz - v\overline{w})b + (uw + v\overline{z})\overline{a}\big).\end{aligned}$$

Saatu lauseke voidaan kirjoittaa kompleksilukujen laskusääntöjen nojalla edelleen muotoon

$$\big[(u,v)(z,w)\big](a,b) = (auz - av\overline{w} - \overline{b}uw - \overline{b}v\overline{z}, \overline{a}uw + \overline{a}v\overline{z} + buz - bv\overline{w}).$$

Myös oikea puoli voidaan saattaa vastaavasti samaan muotoon:

$$\begin{aligned}(u,v)\big[(z,w)(a,b)\big] &= (u,v)(za - w\overline{b}, zb + w\overline{a}) \\ &= \big(u(za - w\overline{b}) - v\overline{(zb + w\overline{a})}, u(zb + w\overline{a}) + v\overline{(za - w\overline{b})}\big) \\ &= (auz - av\overline{w} - \overline{b}uw - \overline{b}v\overline{z}, \overline{a}uw + \overline{a}v\overline{z} + buz - bv\overline{w}).\end{aligned}$$

Näin ollen pätee $\big[(u,v)(z,w)\big](a,b) = (u,v)\big[(z,w)(a,b)\big]$. □

Propositio 2.1.3. *Kvaterneille pätevät osittelulait.*

Todistus. Kvaternien kertolaskun ei-vaihdannaisuudesta johtuen on osoitettava erikseen todeksi molemmat osittelulait eli kaavat

$$(u,v)\big[(z,w) + (a,b)\big] = (u,v)(z,w) + (u,v)(a,b)$$

ja

$$\big[(u,v) + (z,w)\big](a,b) = (u,v)(a,b) + (z,w)(a,b).$$

Ensimmäisen yhtälön vasen puoli saadaan yhteen- ja kertolaskun määritelmän nojalla muotoon

$$\begin{aligned}(u,v)\big[(z,w) + (a,b)\big] &= (u,v)(z + a, w + b) \\ &= \big(u(z + a) - v\overline{(w + b)}, u(w + b) + v\overline{(z + a)}\big),\end{aligned}$$

joka voidaan kirjoittaa kompleksilukujen laskusääntöjen perusteella edelleen muotoon

$$(u,v)\big[(z,w) + (a,b)\big] = \big(au + az - \overline{b}v + v\overline{w}, \overline{a}v + bu + uw + v\overline{z}\big).$$

Yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa vastaavasti samaan muotoon

$$\begin{aligned}(u,v)(z,w) + (u,v)(a,b) &= (uz - v\overline{w}, uw + v\overline{z}) + (ua - v\overline{b}, ub + v\overline{a}) \\ &= \big(au - \overline{b}v + uz - v\overline{w}, \overline{a}v + bu + uw + v\overline{z}\big),\end{aligned}$$

joten ensimmäinen yhtälö on tosi.

Toisen yhtälön kanssa menetellään vastaavasti. Vasen puoli kirjoitetaan muotoon

$$\begin{aligned}\big[(u,v)+(z,w)\big](a,b) &= (u+z,v+w)(a,b)\\ &= \big((u+z)a-(v+w)\overline{b},(u+z)b+(v+w)\overline{a}\big)\\ &= \big(au+az-\overline{b}v-\overline{b}w,\overline{a}v+\overline{a}w+bu+bz\big),\end{aligned}$$

ja oikea puoli saadaan samaan muotoon

$$\begin{aligned}(u,v)(a,b)+(z,w)(a,b) &= (ua-v\overline{b},ub+v\overline{a})+(za-w\overline{b},zb+w\overline{a})\\ &= \big(au+az-\overline{b}v-\overline{b}w,\overline{a}v+\overline{a}w+bu+bz\big)\end{aligned}$$

Näin ollen molemmat osittelulait ovat tosia. □

Seuraavaksi siirrytään johtamaan kvaterneille lukupareja havainnollisempi merkintätapa: kompleksilukujen kanssa analoginen *komponenttiesitys*. Tätä varten tarvitaan muutamia merkinnällisiä sopimuksia.

Määritelmä 2.1.4. *Kvaternin (z,w) kompleksiosaksi sanotaan kompleksilukua $P(z,w)=z$ ja hyperkompleksiosaksi kompleksilukua $Q(z,w)=w$.*

Kvaterneille, joiden hyperkompleksiosa on nolla, pätevät laskusäännöt

$$(z,0)+(w,0)=(z+w,0),\quad \lambda(z,0)=(\lambda z,0)\quad \text{ja}\quad (z,0)(w,0)=(zw,0),$$

joten niiden muodostama kvaternien osajoukko $\{(z,0)\in\mathbb{H}\mid z\in\mathbb{C}\}$ on suljettu. Joukko voidaan samaistaa kompleksilukujen kanssa, joten kompleksiluvut muodostavat kvaternien osajoukon yhteen- ja kertolaskun suhteen. Kvaternit muotoa $(\alpha,0)\in\mathbb{C}$ voidaan näin ollen kirjoittaa yksinkertaisemmin kompleksilukuna α, jolloin kvaternit muotoa $(a,0)=a\in\mathbb{R}$ ovat reaalilukuja. Erityisesti kvaterneja $(1,0)$ ja $(0,0)$ vastaavat kompleksiluvut 1 ja 0 ja kvaternia $(\mathrm{i},0)$ vastaa kompleksilukujen imaginääriyksikkö i. Edellisten lisäksi myös kvaternit $(0,1)$ ja $(0,\mathrm{i})$ ovat tärkeässä roolissa, ja niistä käytetään yksinkertaisempia merkintöjä j ja k.

Propositio 2.1.5. *Alkioille* i, j *ja* k *pätevät seuraavat ehdot:*

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1.$$

Todistus. Kertolaskun määritelmästä seuraavat suoraan väitteet

$$\mathrm{i}^2=(\mathrm{i},0)(\mathrm{i},0)=(\mathrm{i}^2-0,0+0)=(-1,0)=-1,$$

$$\mathrm{j}^2=(0,1)(0,1)=(0-1^2,0+0)=(-1,0)=-1$$

ja

$$\mathrm{k}^2 = (0, \mathrm{i})(0, \mathrm{i}) = (0 - \mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.$$

Viimeisen väitteen tulot voidaan laskea kertolaskun liitännäisyyden nojalla missä järjestyksessä tahansa, joten kertolaskun määritelmää soveltamalla saadaan

$$\mathrm{ijk} = (\mathrm{i}, 0)(0, 1)(0, \mathrm{i}) = (0 - 0, \mathrm{i} \cdot 1 + 0)(0, \mathrm{i}) = (0, \mathrm{i}) = \mathrm{kk} = -1.$$

□

Edellisen tuloksen seurauksena saadaan seuraavat, toistuvasti tarvittavat laskusäännöt.

Seuraus 2.1.6. *Alkioille* i, j *ja* k *pätevät seuraavat kertolaskusäännöt:*

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i} \quad \textit{ja} \quad \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}.$$

Näiden tietojen myötä voidaan nyt johtaa kvaternien komponenttiesitys. Aloitetaan kirjoittamalla kvaterni q yhteen- ja kertolaskun määritelmän nojalla muotoon

$$\begin{aligned} q &= (q_0 + q_1\mathrm{i}, q_2 + q_{12}\mathrm{i}) \\ &= (q_0 + q_1\mathrm{i}, 0) + (0, q_2 + q_{12}\mathrm{i}) \\ &= (q_0 + q_1\mathrm{i}, 0)(1, 0) + (q_2 + q_{12}\mathrm{i}, 0)(0, 1). \end{aligned}$$

Tässä muodossa lausekkeen kolme ensimmäistä kvaternia ovat kompleksilukuja, joten ne voidaan kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon. Kun lisäksi kvaterni $(0, 1)$ korvataan merkinnällä j, päädytään muotoon

$$q = (q_0 + q_1\mathrm{i}) \cdot 1 + (q_2 + q_{12}\mathrm{i})\mathrm{j}.$$

Soveltamalla osittelulakia ja alkioiden i, j ja k laskusääntöjä päädytään lopulta muotoon

$$q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{ij} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k}.$$

Edellisen yhtälön viimeinen lauseke on siis kvaternin komponenttiesitys. Koska tässä muodossa kvaternit sisältävät vain reaalilukuja ja alkioita i, j ja k, niillä voidaan laskea käyttäen ainoastaan reaaliluvuille tuttuja laskusääntöjä sekä alkioille i, j ja k edellä johdettuja laskusääntöjä.

Siirrytään sitten käsittelemään kvaternien perusominaisuuksia. Kompleksilukujen teoriassa konjugaatti $f(z) = \overline{z}$ osoittautui hyödylliseksi, laskutoimituksia yksinkertaistavaksi käsitteeksi. Kvaternien tapauksessa vastaavia kuvauksia voidaan määritellä useita. Tässä työssä hyödynnetään kolmea.

Määritelmä 2.1.7. *Pääinvoluutio on kuvaus*

$$' : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad q' = q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k}.$$

Määritelmä 2.1.8. *Reversio on kuvaus*

$$^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad q^* = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} - q_{12}\mathrm{k}.$$

Määritelmä 2.1.9. *Konjugaatti on kuvaus*

$$^- : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad \overline{q} = q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} - q_{12}\mathrm{k}.$$

Edellä määritellyt kuvaukset ovat involuutioita eli kuvauksia, jotka ovat itsensä käänteisfunktioita. Koska pääinvoluutio, reversio ja konjugaatti ovat lisäksi lineaarisia, ne toteuttavat ehdot

$$f\big[f(x)\big] = x \quad \text{ja} \quad f(ax) = af(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi niiden yhdistetyt kuvaukset ovat vaihdannaisia, eli mielivaltaisille involuutioille $\star_1$ ja $\star_2$ pätee

$$(q^{\star_1})^{\star_2} = (q^{\star_2})^{\star_1}.$$

Määritelmistä nähdään myös, että kullekin involuutiolle $\star$ pätee yhteenlaskun suhteen kaava $(a+b)^\star = a^\star + b^\star$. Kertolaskun suhteen involuutiot sen sijaan jakautuvat kahteen tapaukseen.

Propositio 2.1.10. *Olkoot a ja b kvaterneja. Kvaternien kertolaskun involuutioille pätevät seuraavat kaavat:*

(1) $(ab)' = a'b'$

(2) $(ab)^* = b^*a^*$

(3) $\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}$.

Todistus. Olkoot a ja b kvaterneja. Tulon ab aukikirjoitettu muoto on

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k})(b_0 + b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_{12}\mathrm{k}) \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_{12}b_{12}) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_{12} - a_{12}b_2)\mathrm{i} \\ &\quad + (a_0b_2 - a_1b_{12} + a_2b_0 + a_{12}b_1)\mathrm{j} + (a_0b_{12} + a_1b_2 - a_2b_1 + a_{12}b_0)\mathrm{k}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kohdan (1) osoittamiseksi tulo $a'b'$ kirjoitetaan vastaavaan muotoon:

$$\begin{aligned} a'b' &= (a_0 - a_1\mathrm{i} - a_2\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k})(b_0 - b_1\mathrm{i} - b_2\mathrm{j} + b_{12}\mathrm{k}) \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_{12}b_{12}) + (-a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_{12} + a_{12}b_2)\mathrm{i} \\ &+ (-a_0b_2 + a_1b_{12} - a_2b_0 - a_{12}b_1)\mathrm{j} + (a_0b_{12} + a_1b_2 - a_2b_1 + a_{12}b_0)\mathrm{k} \end{aligned}$$

Vertaamalla saatua lauseketta yhtälöön (2.1) nähdään, että pätee $(ab)' = a'b'$, joten kohta (1) on tosi.

Kohdan (2) osoittamiseksi kirjoitetaan vastaavasti tulo b^*a^* muotoon

$$\begin{aligned} b^*a^* &= (b_0 + b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} - b_{12}\mathrm{k})(a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} - a_{12}\mathrm{k}) \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_{12}b_{12}) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_{12} - a_{12}b_2)\mathrm{i} \\ &+ (a_0b_2 - a_1b_{12} + a_2b_0 + a_{12}b_1)\mathrm{j} + (-a_0b_{12} - a_1b_2 + a_2b_1 - a_{12}b_0)\mathrm{k}, \end{aligned}$$

jolloin vertaamalla saatua lauseketta yhtälöön (2.1) nähdään, että pätee yhtälö $(ab)^* = b^*a^*$, joten myös kohta (2) on tosi.

Tulon $\overline{b}\overline{a}$ aukikirjoitettu muoto on

$$\begin{aligned} \overline{b}\overline{a} &= (b_0 - b_1\mathrm{i} - b_2\mathrm{j} - b_{12}\mathrm{k})(a_0 - a_1\mathrm{i} - a_2\mathrm{j} - a_{12}\mathrm{k}) \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_{12}b_{12}) + (-a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_{12} + a_{12}b_2)\mathrm{i} \\ &+ (-a_0b_2 + a_1b_{12} - a_2b_0 - a_{12}b_1)\mathrm{j} + (-a_0b_{12} - a_1b_2 + a_2b_1 - a_{12}b_0)\mathrm{k}, \end{aligned}$$

jota vertaamalla yhtälöön (2.1) nähdään, että pätee $\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}$. Siis myös kohta (3) on tosi. □

Kvaternien normi määritellään euklidisen normin mukaisesti.

Määritelmä 2.1.11. *Kvaternin* $q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k}$ *normi on reaaliluku*

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_{12}^2}.$$

Normille pätevät selvästi ehdot

$$|q| = |q'| = |q^*| = |\overline{q}|\,,$$

eli involuutiot eivät muuta kvaternin normia. Lisäksi normille pätee vastaavia laskusääntöjä kuin kompleksiluvuilla. Erityisesti kvaternin käänteisluku on vastaavaa muotoa kuin kompleksiluvuilla.

Propositio 2.1.12 ([10])**.** *Olkoot q, a ja b kvaterneja. Kvaterneille pätevät seuraavat laskusäännöt:*

(1) $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$

(2) $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$, *jos* $q \neq 0$

(3) $|ab| = |a|\,|b|$.

Todistus. Olkoon q kvaterni. Kohdan (1) väite $q\overline{q} = |q|^2$ nähdään suoraan laskemalla:

$$\begin{aligned}
q\overline{q} &= (q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k})(q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} - q_{12}\mathrm{k}) \\
&= (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_{12}^2) + (-q_0q_1 + q_1q_0 - q_2q_{12} + q_{12}q_2)\mathrm{i} \\
&\quad + (-q_0q_2 + q_1q_{12} + a_qq_0 - q_{12}q_1)\mathrm{j} + (-q_0q_{12} - q_1q_2 + q_2q_1 + q_{12}q_0)\mathrm{k} \\
&= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_{12}^2 = |q|^2 .
\end{aligned}$$

Väitteen $\overline{q}q = |q|^2$ todistus menee vastaavasti. Näin ollen kohta (1) on tosi.

Olkoon sitten q nollasta poikkeava kvaterni. Tällöin kohdan (1) nojalla pätee

$$q\frac{\overline{q}}{|q|^2} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}q = 1,$$

joten kvaternin $q \neq 0$ käänteisluku on $q^{-1} = \overline{q}/\,|q|^2$, mikä todistaa kohdan (2).

Olkoot lopuksi a ja b kvaterneja. Tällöin soveltamalla kohtaa (1) toistuvasti ja kirjoittamalla tulon ab konjugaatti auki saadaan

$$|ab|^2 = ab\overline{ab} = ab\overline{b}\overline{a} = a\,|b|^2\,\overline{a} = a\overline{a}\,|b|^2 = |a|^2\,|b|^2 ,$$

joten myös (3)-kohta on tosi. □

Huomautus 2.1.13. *Kvaternin $q \neq 0$ käänteisluvusta ei käytetä perinteistä käänteisluvun merkintää $1/q$. Tämä johtuu siitä, että merkintä yhdistetään vaihdannaisen kertolaskun tapauksessa totuttuun käytäntöön*

$$a\frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{1}{b}a,$$

joka ei kvaternien tapauksessa pädekään kertolaskun ei-vaihdannaisuuden vuoksi. Erityisesti yhtälön keskimmäinen merkintä a/b ei kerro mitään kertolaskun järjestyksestä.

Seuraava tulos on määritelty kvaternien sijaan yleisemmille alkioille, sillä sitä tarvitaan seuraavassa alaluvussa tässä muodossa.

Propositio 2.1.14. *Olkoot S epätyhjä joukko, jossa on määritelty liitännäinen kertolasku, ja olkoon a ja b sen alkioita. Tällöin tulo ab on kääntyvä, jos ja vain jos alkiot a ja b ovat kääntyviä.*

Todistus. Olkoot S epätyhjä joukko, jossa on määritelty liitännäinen kertolasku, ja olkoon a ja b sen alkioita. Todistetaan ensin suunta ”$\Longrightarrow$”. Olkoon siis tulo ab kääntyvä. Tällöin on olemassa alkio $c \in A$, jolle pätee

$$(ab)c = 1 = c(ab).$$

Näin ollen kertolaskun liitännäisyyden nojalla pätee $a(bc) = 1$, joten bc on alkion a käänteisalkio oikealta kerrottaessa. Kerrottaessa yhtälöä $a(bc) = 1$, ensin vasemmalta alkiolla bc ja sitten oikealta käänteisalkiolla $(bc)^{-1}$ päädytään yhtälöön $(bc)a = 1$, joten bc on alkion a käänteisalkio myös vasemmalta kerrottaessa. Täten a on kääntyvä. Alkio b todetaan kääntyväksi vastaavalla päättelyllä. Suunta ”$\Longrightarrow$” on siis tosi.

Suunnan ”$\Longleftarrow$” todistamiseksi riittää todeta, että tulolle $b^{-1}a^{-1}$ pätee

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = 1$$

ja

$$(ab)(b^{-1}b^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1,$$

joten se on tulon ab käänteisalkio. $\square$

Kvaternitulon normia koskevan tuloksen nojalla on suoraviivaista näyttää, että kvaterneille pätee tulon nollasääntö.

Propositio 2.1.15. *Olkoot a ja b kvaterneja. Tällöin niille pätee: $ab = 0$, jos ja vain jos $a = 0$ tai $b = 0$.*

Todistus. Olkoot a ja b kvaterneja. Suunta ”$\Longleftarrow$” on selvä. Olkoon siis $ab = 0$. Tällöin edellisen proposition (3)-kohdan nojalla pätee

$$0 = |ab| = |a|\,|b|\,.$$

Koska tekijät $|a|$ ja $|b|$ ovat reaalisia, on oltava $|a| = 0$ tai $|b| = 0$, mistä seuraa edelleen ehto $a = 0$ tai $b = 0$. Näin ollen myös suunta ”$\Longrightarrow$” on tosi. $\square$

Involuution ja käänteisluvun ottaminen on vaihdannainen, mitä käytetään toistuvasti hyödyksi käsiteltäessä kvaternien lausekkeita.

Propositio 2.1.16. *Olkoon $\star$ mielivaltainen involuutio. Tällöin nollasta poikkeavalle kvaternille q pätee $(q^\star)^{-1} = (q^{-1})^\star$.*

Todistus. Olkoon q nollasta poikkeava kvaterni. Tällöin kvaternin käänteisluvun määritelmän, involuutioiden yhdisteiden vaihdannaisuuden ja involuutioiden lineaarisuuden perusteella voidaan kirjoittaa

$$(q^*)^{-1} = \frac{\overline{q^*}}{|q^*|^2} = \frac{\overline{q}^*}{|q|^2} = \left(\frac{\overline{q}}{|q|^2}\right)^* = (q^{-1})^*.$$

□

Kvaternit muodostavat yhteenlaskun suhteen vaihdannaisen ryhmän[2] $(\mathbb{H}, +)$. Edellisiä tuloksia yhdistämällä nähdään, että nollasta poikkeavat kvaternit muodostavat ryhmän myös kertolaskun suhteen. Tässä työssä joukosta $\mathbb{F}$, josta on poistettu nolla-alkio, käytetään merkintää $\mathbb{F}_*$. Täten nollasta poikkeavista kvaterneista käytetään merkintää $\mathbb{H}_*$.

Propositio 2.1.17. *Nollasta poikkeavat kvaternit muodostavat ryhmän kvaternien kertolaskun suhteen.*

Todistus. On siis osoitettava, että joukossa $\mathbb{H}_*$ pätee seuraavat väittämät:

(1) tulo on suljettu

(2) tulo liitännäinen

(3) on olemassa tulon neutraalialkio

(4) jokaisella kvaternilla on käänteisluku.

Kvaternien kertolaskun nähtiin olevan suljettu Määritelmän 2.1.1 perusteella. Lisäksi nollasta poikkeavien kvaternien tulo ei voi olla nolla Proposition 2.1.15 nojalla. Näin ollen kohta (1) on tosi.

Kvaternien kertolasku on todistettu liitännäiseksi Propositiossa 2.1.2, joten kohta (2) on myös tosi.

Kvaternien kertolaskun neutraalialkio 1 kuuluu joukkoon $\mathbb{H}_*$, joten kohta (3) on tosi.

Proposition 2.1.12 kohdan (2) nojalla jokaisella nollasta poikkeavalla kvaternilla on käänteisluku, joten kohta (4) on myös tosi. □

Ryhmä $(\mathbb{H}_*, \cdot)$ ei ole vaihdannainen eli Abelin ryhmä.

Luvun alussa pohdittiin, voisiko kompleksilukuja laajemman lukujoukon avulla esittää kolmiulotteisen avaruuden kuvauksia. Kvaterneilla tämä on mahdollista. Toisin kuin kompleksilukujen tapauksessa, kaikkia kvaterneja ei kuitenkaan voida tulkita kolmiulotteisen avaruuden alkioksi niiden neliulotteisuuden vuoksi. Sen sijaan

[2]Joukko S muodostaa ryhmän laskutoimituksen $\star$ suhteen, jos $\star$ on suljettu joukossa S, $\star$ on liitännäinen, joukossa S on laskutoimituksen $\star$ neutraalialkio ja jokaisella alkiolla on käänteisalkio laskutoimituksen $\star$ suhteen joukossa S.

tämä on mahdollista rajoittumalla kvaterneihin, jotka ovat muotoa $q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j}$. Näitä kvaterneja kutsutaan *redusoiduiksi kvaterneiksi*, ja ne muodostavat geometrisen tulkintansa vuoksi merkittävän kvaternien osajoukon. Kvaternien geometrisia kuvauksia käsitellään kuitenkin vasta alaluvussa 3.4; tässä luvussa keskitytään vain kvaternien laskusääntöihin.

Koska redusoidut kvaternit voidaan tulkita vektoreiksi, niille voidaan määritellä skalaaritulo. Itse asiassa se voidaan määritellä luonnollisella tavalla kaikille kvaterneille:

$$\langle a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k}, b_0 + b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_{12}\mathrm{k}\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_{12}b_{12}.$$

Tässä työssä kvaternien skalaaritulolle tarvitaan vain seuraavaa tulosta.

Propositio 2.1.18. *Redusoitujen kvaternien a ja b skalaaritulolle pätee*

$$2\langle a, b\rangle = a\overline{b} + b\overline{a}.$$

Todistus. Olkoot a ja b redusoituja kvaterneja. Konjugaatin ominaisuuksien perusteella yhtälön oikea puoli voidaan saattaa muotoon

$$a\overline{b} + b\overline{a} = a\overline{b} + \overline{a\overline{b}} = 2\operatorname{Re} a\overline{b}.$$

Koska kvaternitulon reaaliosa muodostuu tulontekijöiden vastaavien komponenttien tuloista, saadaan edelleen

$$a\overline{b} + b\overline{a} = 2(a_0b_0 - a_1b_1\mathrm{i}^2 - a_2b_2\mathrm{j}^2) = 2(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2) = 2\langle a, b\rangle.$$

□

Seuraavaa ilmeistä tulosta hyödynnetään toistuvasti käsiteltäessä redusoituja kvaterneja.

Propositio 2.1.19. *Kvaterni q on redusoitu kvaterni, jos ja vain jos sille pätee ehto $q = q^*$.*

Todistus. Todistuksen suunta "$\Longrightarrow$" on selvä. Olkoon siis $q = q^*$. Tällöin pätee

$$q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} - q_{12}\mathrm{k} \quad \text{eli} \quad 2q_{12}\mathrm{k} = 0.$$

Näin ollen pätee $q_{12} = 0$, joten kvaterni q on redusoitu ja suunta "$\Longleftarrow$" on siis tosi. □

Seuraavaa tulosta hyödynnetään myöhemmin tunnistettaessa kvaternituloja redusoiduiksi kvaterneiksi.

Propositio 2.1.20 ([18]). *Olkoot a ja b nollasta poikkeavia kvaterneja. Tällöin pätevät seuraavat ehdot:*

(1) $ab^{-1} \in \mathbb{R}^3$, *jos ja vain jos* $a^*b \in \mathbb{R}^3$

(2) $a^{-1}b \in \mathbb{R}^3$, *jos ja vain jos* $ab^* \in \mathbb{R}^3$.

Todistus. Sovelletaan lähteen [18] todistusta. Edellisen proposition nojalla kohdassa (1) riittää näyttää, että yhtälöt $ab^{-1} = (ab^{-1})^*$ ja $a^*b = (a^*b)^*$ ovat yhtäpitävät. Tämä nähdään seuraavalla päättelyketjulla:

$$\begin{aligned} ab^{-1} = (ab^{-1})^* \quad &\iff \quad ab^{-1} = (b^{-1})^* a^* \\ &\iff \quad ab^{-1} = (b^*)^{-1} a^* \\ &\iff \quad b^* a = a^* b \\ &\iff \quad (a^*b)^* = a^*b. \end{aligned}$$

Kohdassa (2) tehdään vastaava päättely:

$$\begin{aligned} a^{-1}b = (a^{-1}b)^* \quad &\iff \quad a^{-1}b = b^*(a^{-1})^* \\ &\iff \quad a^{-1}b = b^*(a^*)^{-1} \\ &\iff \quad ba^* = ab^* \\ &\iff \quad (ab^*)^* = ab^*. \end{aligned}$$

□

Koska kompleksiluvut ovat kvaternien osajoukko, myös tason kuvauksia voidaan käsitellä kvaternien avulla. Näiden käsittelyssä voidaan hyödyntää seuraavaa, kolmatta kvaternien esitystapaa: Vastaavasti kuin kompleksiluvut voidaan esittää komponenttimuodossa kahden reaaliluvun ja imaginääriyksikön avulla, kvaternit voidaan ilmoittaa kahden kompleksiluvun ja alkion j avulla muodossa

$$q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{ij} = q_0 + q_1\mathrm{i} + (q_2 + q_3\mathrm{i})\mathrm{j} = z + w\mathrm{j},$$

missä $z = q_0 + q_1\mathrm{i}$ ja $w = q_2 + q_3\mathrm{i}$ ovat kompleksilukuja. Määritelmän 2.1.4 merkintöjä käyttäen voidaan siis kirjoittaa

$$q = P(q) + Q(q)\mathrm{j}.$$

Tästä esitystavasta käytetään tässä työssä nimeä *(kvaternin) kompleksikomponenttiesitys*. Kerrottaessa kvaterneja kompleksikomponenttimuodossa päädytään esimerkiksi termeihin muotoa $Q(a)\mathrm{j}Q(b)\mathrm{j}$, joiden sieventämiseksi tulee selvittää, voidaanko kompleksiluvun ja alkion j tulo kirjoittaa toiseen järjestykseen. Kyllä voidaan, mutta kompleksiluvusta tulee tällöin ottaa konjugaatti:

$$z\mathrm{j} = (x + y\mathrm{i})\mathrm{j} = x\mathrm{j} + y\mathrm{ij} = x\mathrm{j} + y(-\mathrm{ji}) = \mathrm{j}x - \mathrm{j}y\mathrm{i} = \mathrm{j}(x - y\mathrm{i}) = \mathrm{j}\overline{z}.$$

Kompleksikomponenttimuotoisten kvaternien tulo voidaan näin ollen sieventää aina kompleksikomponenttiesitykseen käyttäen edellistä sääntöä ja ehtoa $\mathrm{j}^2 = -1$.

Kompleksikomponenttiesitystä käyttäen kvaternin q voidaan ilmaista olevan kompleksiluku ehdolla $Q(q) = 0$. Erityisesti kvaterneja sisältävän kuvauksen T arvojoukon voidaan ilmaista olevan kompleksinen täsmälleen silloin, kun jokaiselle muuttujan x arvolle pätee $Q\big[T(x)\big] = 0$. Jotta edellistä ehtoa voitaisiin hyödyntää muuhunkin kuin pelkkään kompaktiin merkintään, vasemman puolen lauseketta tulee voida muokata käyttökelpoisempaan muotoon. Tämä tapahtuu operaattoreille Q ja P seuraavaksi johdettavien laskusääntöjen avulla.

Propositio 2.1.21. *Olkoot a ja b kvaterneja ja α ja β kompleksilukuja. Operaattoreille P ja Q pätevät seuraavat laskusäännöt:*

(1) $Q(\alpha a + \beta b) = \alpha Q(a) + \beta Q(b)$

(2) $P(ab) = P(a)P(b) - Q(a)\overline{Q(b)}$

(3) $Q(ab) = P(a)Q(b) + Q(a)\overline{P(b)}$

(4) $P(\overline{a}) = \overline{P(a)}$

(5) $Q(\overline{a}) = -Q(a)$.

Todistus. Olkoot a ja b kvaterneja ja α ja β kompleksilukuja. Kohta (1) nähdään suoraan kirjoittamalla kvaternit kompleksikomponenttimuotoon ja sieventämällä lauseke:

$$\begin{aligned} Q(\alpha a + \beta b) &= Q\Big(\alpha\big[P(a) + Q(a)\mathrm{j}\big] + \beta\big[P(b) + Q(b)\mathrm{j}\big]\Big) \\ &= Q\Big(\big[\alpha P(a) + \beta P(b)\big] + \big[\alpha Q(a) + \beta Q(b)\big]\mathrm{j}\Big) \\ &= \alpha Q(a) + \beta Q(b). \end{aligned}$$

Näin ollen kohta (1) on tosi.

Kohtien (2) ja (3) todistamiseksi tulo ab kirjoitetaan ensin auki kompleksikomponenttimuodossa:

$$\begin{aligned} ab &= \big[P(a) + Q(a)\mathrm{j}\big]\big[P(b) + Q(b)\mathrm{j}\big] \\ &= P(a)P(b) + P(a)Q(b)\mathrm{j} + Q(a)\mathrm{j}P(b) + Q(a)\mathrm{j}Q(b)\mathrm{j}. \end{aligned}$$

Yhtälö sievenee laskusääntöjen $z\mathrm{j} = \mathrm{j}\overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$, ja $\mathrm{j}^2 = -1$ nojalla muotoon

$$\begin{aligned} ab &= P(a)P(b) + P(a)Q(b)\mathrm{j} + Q(a)\overline{P(b)}\mathrm{j} + Q(a)\overline{Q(b)}\mathrm{j}^2 \\ &= P(a)P(b) - Q(a)\overline{Q(b)} + \big[P(a)Q(b) + Q(a)\overline{P(b)}\big]\mathrm{j}, \end{aligned}$$

josta voidaan lukea, että operaattoreille P ja Q pätevät ehdot

$$P(ab) = P(a)P(b) - Q(a)\overline{Q(b)}$$

ja

$$Q(ab) = P(a)Q(b) + Q(a)\overline{P(b)}.$$

Väitteet (2) ja (3) ovat siis tosia.

Kohdat (4) ja (5) todistetaan myös samalla kertaa. Kvaternin $\overline{a}$ kompleksikonjugaattimuoto on

$$\overline{a} = a_0 - a_1\mathrm{i} - a_2\mathrm{j} - a_3\mathrm{k} = \overline{P(a)} - Q(a)\mathrm{j}.$$

Tästä nähdään selvästi ominaisuudet

$$P(\overline{a}) = \overline{P(a)} \quad \text{ja} \quad Q(\overline{a}) = -Q(a),$$

joten myös kohdat (4) ja (5) ovat tosia. □

Kvaterneihin tutustuminen herättää luonnollisesti kysymysten sarjan: Onko olemassa myös kvaterneja laajempi lukujoukko, jolla on hyviä matemaattisia ominaisuuksia? Jos on, niin muodostuuko se vastaavasti 8-ulotteisista luvuista? Ja erityisesti: voidaanko nämä lukujoukot yleistää? Vastaus kaikkiin kysymyksiin on ”kyllä”, ja yleistä tapausta tarkastellaan lyhyesti seuraavassa alaluvussa.

2.2 Cliffordin algebrat

Cliffordin algebrat ovat englantilaisen William Kingdon Clifford (1845–1879) mukaan nimettyjä reaaliluvut, kompleksiluvut ja kvaternit yleistäviä algebroja, joita kutsutaan myös geometrisiksi algebroiksi. Niiden täsmällisempää määrittelyä varten käydään seuraavaksi läpi neljä algebran käsitettä. Aloitetaan vektoriavaruudella.

Määritelmä 2.2.1. *Olkoot $\mathbb{F}$ kunta ja V epätyhjä joukko, jossa on määritelty yhteenlasku*

$$+ : V \times V \to V, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

ja skalaarilla kertominen

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x = \lambda x.$$

Tällöin V on $\mathbb{F}$-vektoriavaruus, jos laskutoimituksille $+$ ja $\cdot$ pätevät seuraavat ehdot jokaiselle $x, y, z \in V$ ja $a, b, c \in \mathbb{F}$:

(1) *yhteenlaskun liitännäisyys:* $x + (y + z) = (x + y) + z$

(2) *yhteenlaskun vaihdannaisuus:* $x + y = y + x$

(3) *yhteenlaskun neutraalialkion* $0 \in V$ *olemassaolo:* $x + 0 = x$

(4) *yhteenlaskun käänteisalkion* $-x \in V$ *olemassaolo:* $x + (-x) = 0$

(5) *skalaarilla kertomisen liitännäisyys:* $a(bx) = (ab)x$

(6) *skalaarilla kertomisen osittelulaki joukon* V *yhteenlaskun suhteen:* $a(x + y) = ax + ay$

(7) *skalaarilla kertomisen osittelulaki kunnan* $\mathbb{F}$ *yhteenlaskun suhteen:* $(a + b)x = ax + bx$

(8) *skalaarilla kertomisen neutraalialkion* $1 \in \mathbb{F}$ *olemassaolo:* $1x = x$.

Vektoriavaruuden alkioiden ei tarvitse olla vektoreita, vaan ne voivat olla esimerkiksi myös matriiseja. Erityisesti reaaliluvut, kompleksiluvut ja kvaternit ovat vektoriavaruuksia. Koska tässä työssä keskitytään vektorien sijaan edellä mainittuihin lukuihin, vektoriavaruuden alkioista x ei käytetä perinteistä vektorimerkintää $\boldsymbol{x}$.

Seuraavaksi vektoriavaruutta laajennetaan toisella laskutoimituksella.

Määritelmä 2.2.2. *Joukko A on $\mathbb{F}$-algebra, jos A on $\mathbb{F}$-vektoriavaruus ja joukossa A on määritelty binäärilaskutoimitus*

$$\odot : A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto x \odot y,$$

joka toteuttaa osittelulait

$$x \odot (y + z) = x \odot y + x \odot z \quad \text{ja} \quad (x + y) \odot z = x \odot z + y \odot z$$

ja on yhteensopiva skalaarilla kertomisen suhteen

$$a(x \odot y) = (ax) \odot y = x \odot (ay)$$

jokaiselle $x, y, z \in A$ ja $a \in \mathbb{F}$.

$\mathbb{R}$-algebraa sanotaan myös reaaliseksi algebraksi.

Laskutoimitus $\odot$ on siis joukon A alkioiden välinen kertolasku, esimerkiksi kvaternien kertolasku. Myös siitä käytetään jatkossa merkintää $\cdot$, sillä Cliffordin algebroissa kunnan $\mathbb{F}$ alkiot muodostavat joukon A osajoukon, jolloin skalaarilla kertominen $\cdot$ voidaan tulkita erikoistapaukseksi kertolaskusta $\odot$. Kertolasku $\cdot$ taas jätetään yleensä merkitsemättä.

Esimerkki 2.2.3. *Joukko $\mathbb{H}$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, jonka kanta on $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$. Koska joukossa $\mathbb{H}$ on lisäksi määritelty kvaternien kertolasku, joka toteuttaa osittelulait ja joka on yhteensopiva skalaarilla kertomisen suhteen, joukko $\mathbb{H}$ on $\mathbb{R}$-algebra. Se ei ole $\mathbb{C}$-algebra, sillä tällöin kertolasku ei ole yhteensopiva skalaarilla kertomisen kanssa.*

Algebran A kertolaskulle voidaan vaatia myös muita ominaisuuksia. Näistä tarvitaan kahta seuraavaa.

Määritelmä 2.2.4. *$\mathbb{F}$-algebra A on liitännäinen, jos laskutoimitukselle $\cdot$ pätee liitäntälaki*

$$x(yz) = (xy)z$$

jokaiselle $x, y, z \in A$.

Määritelmä 2.2.5. *$\mathbb{F}$-algebra A on ykkösellinen, jos joukossa A on olemassa kertolaskun neutraalialkio eli alkio 1, joka toteuttaa ominaisuuden*

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

jokaiselle $x \in A$.

Ykköselllinen ja liitännäinen algebra on rengas. Se ei kuitenkaan ole kunta, sillä kertolasku ei ole välttämättä kommutatiivinen ja jokaisella nollasta poikkeavalla alkiolla ei välttämättä ole käänteislukua.

Korostettakoon tässä välissä, että algebraan A kuuluvat myös vektoritulot xy, jotka ovat "perinteisiin" vektoriavaruuksiin verrattuna uudentyyppisiä alkioita. Voidaan ajatella, että algebra A, joka on samalla myös vektoriavaruus, on muodostettu laajentamalla yksinkertaisempaa vektoriavaruutta V alkioidensa välisellä kertolaskulla sekä näin muodostuvilla tuloalkioilla. Jos vektoriavaruuden V kanta on $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$, algebraan A kantaan kuuluvat alkiot e_1, e_2 ja $\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2$ mutta myös alkiot $\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1$, $\mathrm{e}_1(\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2)$ ja $\mathrm{e}_1\big[\mathrm{e}_1(\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2)\big]$ sekä vielä monimutkaisemmat alkiot. Jos algebralle A halutaan äärellinen kanta, vektoriavaruuden V kanta-alkioilta on vaadittava lisäominaisuuksia, joiden avulla niiden tuloja voidaan sieventää. Esimerkiksi ominaisuuksien $\mathrm{e}_1^2 = \mathrm{e}_2^2 = -1$ ja $\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 = -\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1$ myötä vektoriavaruuden V kanta $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$ generoi liitännäiselle algebralle A äärellisen kannan[3] $\{1, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\}$.

[3] Kanta-alkio 1 saadaan esimerkiksi muodossa $\mathrm{e}_1^4 = 1$.

Edellisten määritelmien myötä voidaan nyt asettaa määritelmä Cliffordin algebroille.

Määritelmä 2.2.6 ([10]). *Olkoon V vektoriavaruus ja $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_{p+q}\}$ sen kanta, ja olkoon $p, q \in \mathbb{N}_0$. Universaali Cliffordin algebra $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ on ykkösellinen ja liitännäinen reaalinen algebra, jonka generoivat vektorit $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_{p+q}$, jotka toteuttavat ominaisuudet*

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_i\mathrm{e}_j &= -\mathrm{e}_j\mathrm{e}_i, && \text{jos } i \neq j \\ \mathrm{e}_i^2 &= 1, && \text{jos } i = 1, \ldots, p \\ \mathrm{e}_i^2 &= -1, && \text{jos } i = p+1, \ldots, p+q = n, \end{aligned}$$

ja jonka kanta on

$$\{\, \mathrm{e}_{\nu_1}\mathrm{e}_{\nu_2} \cdots \mathrm{e}_{\nu_k} \mid 1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k \leq n \,\} \cup \{1\}.$$

Kanta-alkioista käytetään yksinkertaistettua merkintää $\mathrm{e}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_k} = \mathrm{e}_{\nu_1}\mathrm{e}_{\nu_2}\cdots\mathrm{e}_{\nu_k}$ ja kertolaskun neutraalialkiolle 1 voidaan käyttää myös merkintää e_0.

Universaalin Cliffordin algebran kanta muodostuu siis alkiosta 1 sekä kaikista mahdollisista alkioiden e_1, …, e_n tuloista, joissa oikean puoleisen tekijän indeksi i on aina vasemmanpuoleista suurempi. Esimerkiksi Cliffordin algebran $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ kanta-alkiot ovat 1, e_1, e_2 ja $\mathrm{e}_{12} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2$. Näin ollen sen alkiot ovat muotoa

$$a = a_0 + a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + a_{12}\mathrm{e}_{12}, \quad a_0, a_1, a_2, a_{12} \in \mathbb{R},$$

ja voidaan samaistaa kvaternien kanssa valitsemalla $\mathrm{e}_1 = \mathrm{i}$, $\mathrm{e}_2 = \mathrm{j}$ ja $\mathrm{e}_{12} = \mathrm{k}$. Vastaavasti Cliffordin algebran $\mathcal{C}\ell_{0,0}$ luvut voidaan tulkita reaaliluvuiksi ja Cliffordin algebran $\mathcal{C}\ell_{0,1}$ luvut kompleksiluvuiksi.

Termi *universaali* tarkoittaa käytännössä sitä, että Cliffordin algebran kantaan kuuluvat kaikki vektorien $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_{p+q}$ tulojen generoimat alkiot, eikä vain osa niistä. Esimerkiksi kvaternien kanta-alkiot i, j ja k voitaisiin samaistaa myös vektorien e_1, e_2 ja e_3 kanssa, jolloin ne toteuttaisivat määritelmän ehdot $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j = -\mathrm{e}_j\mathrm{e}_i$ ja $\mathrm{e}_i^2 = -1$. Tällöin kvaternien kantaan ei kuitenkaan kuuluisi esimerkiksi tulo $\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2$, joten niitä vastaava Cliffordin algebra ei olisi universaali. Koska tässä työssä käsiteltävät Cliffordin algebrat ovat kaikki universaaleja, termi universaali jätetään jatkossa mainitsematta.

Cliffordin algebran alkioita sanotaan Cliffordin luvuiksi. Cliffordin lukuja, jotka ovat muotoa $x = x_0 + x_1\mathrm{e}_1 + \cdots + x_n\mathrm{e}_n$, kutsutaan *paravektoreiksi*. Ne muodostavat vektori-avaruuden $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ $(n+1)$-ulotteisen aliavaruuden, joka voidaan samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ kanssa. Tällöin avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollista kantavektoria e_i vastaa Cliffordin algebran kanta-alkio e_{i-1}. Tämä samaistus on keskeisessä roolissa tässä työssä, sillä avaruuksien $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^3$ ja $\mathbb{R}^4$ alkioita käsitellään Möbius-kuvausten yhteydessä juuri paravektorien avulla, joskin niitä nimitetään tilanteesta riippuen myös kompleksiluvuiksi, redusoiduiksi kvaterneiksi, vektoreiksi tai pisteiksi.

Cliffordin luvut eivät ole yleisesti kääntyviä, mutta jokaisella nollasta poikkeavalla paravektorilla on käänteisalkio, joka on muotoa $x^{-1} = \overline{x}/\left|x\right|^2$, missä normi on euklidinen, sillä paravektorit voidaan tulkita avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreiksi. Kääntyvien lukujen tulot ovat myös kääntyviä, joten nollasta poikkeavat paravektorit muodostavat tulon suhteen ryhmän Γ_n, jota kutsutaan *Cliffordin ryhmäksi.* Tapauksissa $n = 0$, $n = 1$ ja $n = 2$ pätee $\Gamma_0 = \mathbb{R}_*$, $\Gamma_1 = \mathbb{C}_*$ ja $\Gamma_2 = \mathbb{H}_*$, sillä kunkin lukujoukon nollasta poikkeavat alkiot ovat kääntyviä. Tapauksissa $n > 2$ näin ei kuitenkaan enää ole, kuten seuraavassa alaluvussa huomataan.

Cliffordin lukujen yleisistä ominaisuuksista tarkastellaan ainoastaan edellisessä luvussa käsiteltyjen involuutioiden yleiset määritelmät.

Määritelmä 2.2.7. *Lineaarista kuvausta* $' : \mathcal{C}\ell_{0,n} \to \mathcal{C}\ell_{0,n}$, *joka toteuttaa ehdon*

$$(\mathrm{e}_{\nu_1}\mathrm{e}_{\nu_2}\cdots\mathrm{e}_{\nu_k})' = \mathrm{e}'_{\nu_1}\mathrm{e}'_{\nu_2}\cdots\mathrm{e}'_{\nu_k}, \quad \mathrm{e}'_i = -\mathrm{e}_i,$$

sanotaan pääinvoluutioksi.

Määritelmä 2.2.8. *Lineaarista kuvausta* $^* : \mathcal{C}\ell_{0,n} \to \mathcal{C}\ell_{0,n}$, *joka toteuttaa ehdon*

$$(\mathrm{e}_{\nu_1}\mathrm{e}_{\nu_2}\cdots\mathrm{e}_{\nu_k})^* = \mathrm{e}^*_{\nu_k}\cdots\mathrm{e}^*_{\nu_2}\mathrm{e}^*_{\nu_1}, \quad \mathrm{e}^*_i = \mathrm{e}_i,$$

sanotaan reversioksi.

Määritelmä 2.2.9. *Lineaarista kuvausta* $^- : \mathcal{C}\ell_{0,n} \to \mathcal{C}\ell_{0,n}$, *joka toteuttaa ehdon*

$$\overline{\mathrm{e}_{\nu_1}\mathrm{e}_{\nu_2}\cdots\mathrm{e}_{\nu_k}} = \overline{\mathrm{e}_{\nu_k}}\cdots\overline{\mathrm{e}_{\nu_2}}\,\overline{\mathrm{e}_{\nu_1}}, \quad \overline{\mathrm{e}_i} = -\mathrm{e}_i,$$

sanotaan konjugaatiksi.

Huomattakoon, että reversion ehdot yhdistyvät kompaktimpaa merkintätapaa käyttäen ehdoksi

$$\mathrm{e}^*_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_k} = \mathrm{e}_{\nu_k\cdots\nu_2\nu_1}.$$

Tässä työssä tarkastellaan kvaternikertoimisia Möbius-kuvauksia muuttujan $x \in \mathbb{R}^3$ lisäksi myös muuttujan $x \in \mathbb{R}^4$ suhteen. Kun avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorit ilmaistaan paravektoreina $x = x_0 + x_1\mathrm{e}_1 + x_2\mathrm{e}_2$, ne voidaan samaistaa redusoitujen kvaternien kanssa. Avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreita ei sen sijaan voida muodossa $x = x_0 + x_1\mathrm{e}_1 + x_2\mathrm{e}_2 + x_3\mathrm{e}_3$ samaistaa kvaternien kanssa[4], sillä kvaternien kanta-alkio k samaistetaan

[4]Kvaternit on kyllä mahdollista samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^4$ alkioiden kanssa toisenlaisessa käsittelyssä.

kanta-alkion e_{12} kanssa vektorin e_3 sijaan. Tästä syystä avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektorien huomioimiseksi joudutaan tarkastelemaan sellaista algebraa, joka sisältää kvaternien kanta-alkioiden 1, e_1, e_2 ja e_{12} lisäksi myös vektorin e_3. Yksinkertaisin tällainen kanta-alkioiden joukko, joka generoi kertolaskun suhteen suljetun algebran, saadaan ottamalla kanta-alkioksi myös alkiot e_{13}, e_{23} ja e_{123}. Näin muodostuva algebra on Cliffordin algebra $\mathcal{C}\ell_{0,3}$.

2.3 Algebra $\mathcal{C}\ell_{0,3}$

Luvussa 6 joudutaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ Möbius-kuvausten teoriaa johdettaessa tarkastelemaan kvaternikertoimisia Möbius-kuvauksia myös muuttujan $x \in \mathbb{R}^4$ suhteen. Tällöin muuttujan ja kertoimien väliset laskutoimitukset tapahtuvat algebrassa $\mathcal{C}\ell_{0,3}$. Koska muuttujan $x \in \mathbb{R}^4$ huomioinen on kuitenkin merkittävää lähinnä teorian kannalta ja varsinaisessa muuttujan $x \in \mathbb{R}^3$ tapauksessa Möbius-kuvausten laskutoimitukset pysyvät kvaternien algebrassa, algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ ei katsota olevan keskeisessä roolissa tässä työssä. Tästä johtuen sitä ei käsitellä kattavasti, vaan esitetään siitä ainoastaan lyhyesti työssä tarvittavat tiedot.

Cliffordin algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ alkiot ovat kanta-alkioiden 1, e_1, e_2, ja e_3 generoimia kahdeksanulotteisia lukuja, joiden kertolasku on liitännäinen ja jotka toteuttavat osittelulait. Ne voidaan kirjoittaa muodossa

$$h = h_0 + h_1\mathrm{e}_1 + h_2\mathrm{e}_2 + h_{12}\mathrm{e}_{12} + h_3\mathrm{e}_3 + h_{13}\mathrm{e}_{13} + h_{23}\mathrm{e}_{23} + h_{123}\mathrm{e}_{123},$$

missä kertoimet h_i, $i \in \{1, 2, 12, 3, 13, 23, 123\}$, ovat reaalilukuja ja kanta-alkioille e_i, $i \in \{1, 2, 12, 3, 13, 23\}$, pätevät ehdot

$$\mathrm{e}_1^2 = \mathrm{e}_2^2 = \mathrm{e}_3^2 = -1, \quad \mathrm{e}_{12} = -\mathrm{e}_{21}, \quad \mathrm{e}_{13} = -\mathrm{e}_{31} \quad \text{ja} \quad \mathrm{e}_{23} = -\mathrm{e}_{32}. \tag{2.2}$$

Kanta-alkiolle $\mathrm{e}_{123} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3$ tarvittavat laskusäännöt voidaan johtaa edellisistä ehdoista.

Propositio 2.3.1. *Kanta-alkiolle* e_{123} *pätevät seuraavat kaavat:*

(1) $\mathrm{e}_{321} = -\mathrm{e}_{123}$

(2) $\mathrm{e}_{123}^2 = 1$

(3) $\overline{\mathrm{e}_{123}} = -\mathrm{e}_{321} = \mathrm{e}_{123}$.

Todistus. Edellistä määritelmää sekä konjugaatin yleistä määritelmää käyttäen voidaan kirjoittaa

$$\mathrm{e}_{321} = \mathrm{e}_3\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1 = -\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1 = \mathrm{e}_2\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3 = -\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3 = -\mathrm{e}_{123},$$

$$\mathrm{e}_{123}^2 = \mathrm{e}_{123}\mathrm{e}_{123} = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3 = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_3\mathrm{e}_2\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3 = -\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3 = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_3\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1 = 1$$

ja

$$\overline{\mathrm{e}_{123}} = \overline{\mathrm{e}_3\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1} = -\mathrm{e}_3(-\mathrm{e}_2)(-\mathrm{e}_1) = -\mathrm{e}_{321} = \mathrm{e}_{123}.$$

□

Cliffordin algebran $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ alkiot voidaan tulkita kvaterneiksi. Algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ lukuja[5] ei kuitenkaan voida samaistaa oktonien kanssa, sillä oktonien kertolasku ei ole liitännäinen. Ne voidaan kuitenkin kirjoittaa kahden kvaternin a ja b sekä kanta-alkion e_3 avulla vastaavasti kuin kvaternit voitiin esittää kahta kompleksilukua ja kanta-alkiota $\mathrm{j} = \mathrm{e}_2$ käyttäen:

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1\mathrm{e}_1 + h_2\mathrm{e}_2 + h_{12}\mathrm{e}_{12} + h_3\mathrm{e}_3 + h_{13}\mathrm{e}_{13} + h_{23}\mathrm{e}_{23} + h_{123}\mathrm{e}_{123} && (2.3)\\ &= h_0 + h_1\mathrm{e}_1 + h_2\mathrm{e}_2 + h_{12}\mathrm{e}_{12} + (h_3 + h_{13}\mathrm{e}_1 + h_{23}\mathrm{e}_2 + h_{123}\mathrm{e}_{12})\mathrm{e}_3 \\ &= a + b\mathrm{e}_3, \quad a, b \in \mathbb{H}. && (2.4) \end{aligned}$$

Yhtälön (2.3) mukaisesta esitystavasta käytetään tässä työssä ilmaisua *(algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ luvun) komponenttiesitys* ja yhtälön (2.4) mukaisesta esitystavasta ilmaisua *(algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ luvun) kvaternikomponenttiesitys*. Jatkossa algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ luvuista käytetään jälkimmäistä esitystapaa, sillä komponenttimuodossa laskeminen on yksinkertaisesti liian työlästä. Jotta kertolaskut voitaisiin sieventää kvaternikomponenttiesityksen mukaiseen muotoon, tulee kuitenkin vielä selvittää, voidaanko tulo $\mathrm{e}_3 q$ kirjoittaa toiseen järjestykseen. Yhtälöstä

$$\mathrm{e}_3 q = \mathrm{e}_3(q_0 + q_1\mathrm{e}_1 + q_2\mathrm{e}_2 + q_{12}\mathrm{e}_{12}) = (q_0 - q_1\mathrm{e}_1 - q_2\mathrm{e}_2 + q_{12}\mathrm{e}_{12})\mathrm{e}_3 = q'\mathrm{e}_3 \qquad (2.5)$$

eli $\mathrm{e}_3 q = q'\mathrm{e}_3$ nähdään, että tämä on mahdollista pääinvoluutiota käyttäen.

Cliffordin algebrojen kertolasku on määritelmän nojalla liitännäinen ja osittelulain toteuttava, mutta se ei ole vaihdannainen algebroissa $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, $n \geq 2$, mikä nähdään esimerkiksi ehdosta $\mathrm{e}_{12} = -\mathrm{e}_{21}$.

Algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ lukujen involuutioista tarvitaan lähinnä reversiota koskevia laskusääntöjä. Määritelmistä 2.2.8 ja 2.2.9 nähdään selvästi, että algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ lukujen h ja g yhteenlaskulle pätevät kaavat

$$(h+g)^* = h^* + g^* \quad \text{ja} \quad \overline{(h+g)} = \overline{h} + \overline{g}.$$

Kertolaskun reversiota koskevan kaavan todistaminen ei sen sijaan mene yhtä suo-

[5] Kyseisille luvuille ei ole vakiintunutta nimeä, mistä johtuen niistä puhutaan tässä työssä algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ lukuina.

raviivaisesti, vaan se tehdään seuraavaa aputulosta hyödyntäen.

Lemma 2.3.2. *Algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ luvun $h = a + b\mathrm{e}_3$ reversiolle pätee*

$$(a + b\mathrm{e}_3)^* = a^* + \overline{b}\mathrm{e}_3.$$

Todistus. Kirjoitetaan algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ luku $h = a + b\mathrm{e}_3$ komponenttimuotoon, jolloin voidaan käyttää reversion yleistä määritelmää:

$$\begin{aligned}(a + b\mathrm{e}_3)^* &= (h_0 + h_1\mathrm{e}_1 + h_2\mathrm{e}_2 + h_{12}\mathrm{e}_{12} + h_3\mathrm{e}_3 + h_{13}\mathrm{e}_{13} + h_{23}\mathrm{e}_{23} + h_{123}\mathrm{e}_{123})^* \\ &= h_0 + h_1\mathrm{e}_1 + h_2\mathrm{e}_2 + h_{12}\mathrm{e}_{21} + h_3\mathrm{e}_3 + h_{13}\mathrm{e}_{31} + h_{23}\mathrm{e}_{32} + h_{123}\mathrm{e}_{321}.\end{aligned}$$

Jotta saatu lauseke voitaisiin kirjoittaa kvaterneja a ja b käyttäen, kanta-alkiot e_{21}, e_{31}, e_{32} ja e_{321} on kirjoitettava takaisin komponenttiesityksen mukaiseen muotoon ehtoja (2.2) ja Proposition 2.3.1 kohtaa (1) käyttäen:

$$\begin{aligned}(a + b\mathrm{e}_3)^* &= h_0 + h_1\mathrm{e}_1 + h_2\mathrm{e}_2 - h_{12}\mathrm{e}_{12} + h_3\mathrm{e}_3 - h_{13}\mathrm{e}_{13} - h_{23}\mathrm{e}_{23} - h_{123}\mathrm{e}_{123} \\ &= h_0 + h_1\mathrm{e}_1 + h_2\mathrm{e}_2 - h_{12}\mathrm{e}_{12} + (h_3 - h_{13}\mathrm{e}_1 - h_{23}\mathrm{e}_2 - h_{123}\mathrm{e}_{12})\mathrm{e}_3 \\ &= a^* + \overline{b}\mathrm{e}_3.\end{aligned}$$

□

Propositio 2.3.3. *Algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ lukujen h ja g tulon reversiolle pätee*

$$(hg)^* = g^* h^*.$$

Todistus. Olkoot $h = a + b\mathrm{e}_3$ ja $g = c + d\mathrm{e}_3$ algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ lukuja. Niiden tulon reversio voidaan sieventää edellistä tulosta ja kvaternien involuutioita koskevien laskusääntöjen nojalla muotoon

$$\begin{aligned}(hg)^* &= \big[(a + b\mathrm{e}_3)(c + d\mathrm{e}_3)\big]^* \\ &= (ac + ad\mathrm{e}_3 + b\mathrm{e}_3 c + b\mathrm{e}_3 d\mathrm{e}_3)^* \\ &= \big[(ac - bd') + (ad + bc')\mathrm{e}_3\big]^* \\ &= (ac - bd')^* + \overline{ad + bc'}\mathrm{e}_3 \\ &= c^* a^* - (d')^* b^* + (\overline{d}\overline{a} + \overline{c'}\overline{b})\mathrm{e}_3 \\ &= c^* a^* - \overline{d} b^* + (\overline{d}\,\overline{a} + c^*\overline{b})\mathrm{e}_3.\end{aligned}$$

Tulo g^*h^* sievenee vastaavasti muotoon

$$\begin{aligned} g^*h^* &= (c + d\mathrm{e}_3)^*(a + b\mathrm{e}_3)^* \\ &= (c^* + \overline{d}\mathrm{e}_3)(a^* + \overline{b}\mathrm{e}_3) \\ &= c^*a^* + c^*\overline{b}\mathrm{e}_3 + \overline{d}\mathrm{e}_3 a^* + \overline{d}\mathrm{e}_3\overline{b}\mathrm{e}_3 \\ &= c^*a^* - \overline{d}\overline{b}' + \left[c^*\overline{b} + \overline{d}(a^*)'\right]\mathrm{e}_3 \\ &= c^*a^* - \overline{d}b^* + (c^*\overline{b} + \overline{d}\,\overline{a})\mathrm{e}_3, \end{aligned}$$

joten pätee $(hg)^* = g^*h^*$. □

Kuten edellisessä luvussa huomautettiin, kvaternit ovat korkeimman asteen Cliffordin algebra, jossa jokainen nollasta poikkeava alkio on kääntyvä. Algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ lukujen tapauksessa näin ei siis enää ole. Esimerkkinä käytettäköön alkiota $1 + \mathrm{e}_{123} \neq 0$. Sen käänteisalkioita ei voida määritellä samoin kuin kvaterneilla ja paravektoreilla, sillä alkioiden $\overline{1 + \mathrm{e}_{123}}/\left|1 + \mathrm{e}_{123}\right|^2 = (1 + \mathrm{e}_{123})/2$ ja $1 + \mathrm{e}_{123}$ tulo ei ole 1:

$$(1 + \mathrm{e}_{123})\frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}_{123}) = \frac{1}{2}(1 + 2\mathrm{e}_{123} + \mathrm{e}_{123}^2) = \frac{1}{2}(1 + 2\mathrm{e}_{123} + 1) = 1 + \mathrm{e}_{123}.$$

Edellisestä yhtälöstä nähdään myös, ettei käänteisalkioita voida määritellä millään muullakaan tavalla, sillä kertomalla yhtälöä käänteisluvulla $(1 + \mathrm{e}_{123})^{-1}$ ja järjestelemällä termejä päädytään ristiriitaan $\mathrm{e}_{123} = 1$.

Edellisen huomion seurauksena luvussa 6 esiintyvien algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ lukujen käänteislukujen kohdalla tulee perustella niiden olemassaolo. Tämä tapahtuu osoittamalla, että kyseinen luku on paravektorien tai kvaternien tulo, jolloin se on Proposition 2.1.14 nojalla kääntyvien tekijöiden tulona itsekin kääntyvä.

Viimeisenä tuloksena todetaan, että algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ luvun käänteisluku ja reversio ovat vaihdannaiset.

Propositio 2.3.4. *Kääntyvälle algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ luvulle h pätee $(h^*)^{-1} = (h^{-1})^*$.*

Todistus. Olkoot h kääntyvä algebran $\mathcal{C}\ell_{0,3}$ luku. Tällöin ovat voimassa yhtälöt

$$(h^{-1})^*h^* = (hh^{-1})^* = 1 \quad \text{ja} \quad h^*(h^{-1})^* = (h^{-1}h)^* = 1,$$

joten luvun h reversion käänteisluku on $(h^{-1})^*$, eli pätee $(h^*)^{-1} = (h^{-1})^*$. □

Edellisen tuloksen myötä työssä tarvittavat lukujoukkoja koskevat tulokset on käsitelty ja voidaan siirtyä käsittelemään itse Möbius-kuvauksia.

3 KOMPLEKSIMUUTTUJAN MÖBIUS-KUVAUKSET

Tässä luvussa tutustutaan alkuperäisiin Möbius-kuvauksiin eli kompleksimuuttujan kompleksikertoimisiin Möbius-kuvauksiin. Jotta Möbius-kuvausten perimmäinen luonne geometristen kuvausten yhdisteinä tulisi paremmin ilmi, asiaa lähestytään kompleksitason geometristen kuvausten kautta.

3.1 Kompleksitason peruskuvauksia

Reaalimuuttujan funktioiden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaajat voidaan esittää käyrinä kaksiulotteisessa koordinaatistossa. Kompleksimuuttujan funktioiden $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kohdalla tämä ei ole mahdollista, sillä sekä määrittelyjoukon että maalijoukon ollessa kaksiulotteisia vastaava graafinen esitys vaatisi neljä ulottuvuutta. Kompleksimuuttujan funktioita voidaan kuitenkin esittää havainnollisesti sopivan pienille joukoille (kuten piste, viiva tai rajattu alue) piirtämällä kuvattava joukko ja sen kuvajoukko samaan kompleksitason kuvaajaan. Tällöin kompleksimuuttujan funktioiden geometrinen luonne tulee selvästi ilmi.

Tässä alaluvussa käydään läpi kuusi kuvausta[1], joilla on yksinkertainen geometrinen tulkinta: siirto, kierto, venytys, inversio, peilaus pisteen suhteen sekä peilaus suoran suhteen. Näiden kuvauksien ominaisuuksia hyödynnetään seuraavassa alaluvussa Möbius-kuvauksia käsiteltäessä.

Esimerkki 3.1.1. *Kompleksimuuttujan kuvaukselle* $f(z) = z + 1 + \mathrm{i}$ *pätee*

$$f(0) = 1 + \mathrm{i} \quad \textit{ja} \quad f(1 + \mathrm{i}) = 2 + 2\mathrm{i}.$$

Kuvaus f *kuvaa siis origon kompleksitason pisteeksi* $(1, 1)$ *ja pisteen* $(1, 1)$ *pisteeksi* $(2, 2)$, *eli yleisesti ottaen kuvaus* f *siirtää kuvattavaa pistettä* z *pisteen* $1+\mathrm{i}$ *verran.*

Edellisen esimerkin havaintoa vastaten kompleksimuuttujan kuvausta $f(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$, kutsutaan *siirroksi.*

[1] Sanat funktio ja kuvaus ovat synonyymejä. Yhdenmukaisen ilmeen vuoksi tässä työssä keskeisistä funktioista käytetään termiä kuvaus.

Myös kompleksilukujen kertolaskulla on geometrinen tulkinta, mikä nähdään eksponenttiesityksestä. Nollasta poikkeavien kompleksilukujen[2] $a = |a|\,\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}$ ja $z = |z|\,\mathrm{e}^{\phi\,\mathrm{i}}$ tulo on muotoa

$$az = |a|\,\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}\,|z|\,\mathrm{e}^{\phi\,\mathrm{i}} = |a|\,|z|\,\mathrm{e}^{(\theta+\phi)\mathrm{i}}.$$

Edellisestä yhtälöstä nähdään, että kompleksiluvun z kertominen kompleksiluvulla a vaikuttaa kahdella tavalla. Ensinnäkin a kiertää alkuperäistä lukua z origon suhteen kulman θ verran vastapäivään. Toiseksi se skaalaa alkuperäisen luvun etäisyyttä origosta omalla pituudellaan $|a|$. Näin ollen kompleksimuutujan kuvausta $f(z) = \mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}z$, $\theta \in \mathbb{R}$, kutsutaan *kierroksi* ja kuvausta $f(z) = rz$, $r \in \mathbb{R}_+$, kutsutaan *venytykseksi*[3]

Kuvaukset siirto, kierto ja venytys ovat bijektioita koko kompleksitasossa.

Propositio 3.1.2. *Seuraavat kuvaukset ovat bijektioita:*

(1) *siirto:* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$

(2) *kierto:* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}z$, $\theta \in \mathbb{R}$

(3) *venytys:* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = rz$, $r \in \mathbb{R}_+$.

Todistus. Riittää osoittaa, että jokaista kompleksilukua w kohden yhtälöllä $f(z) = w$ on yksikäsitteinen ratkaisu muuttujan z suhteen. Tällöin jokaista määrittelyjoukon alkiota vastaa täsmälleen yksi maalijoukon alkio ja päinvastoin. Tämä on yhtäpitävää sekä kuvauksen bijektiivisyyden että käänteiskuvauksen olemassaolon kanssa. Kohtia (1), (2) ja (3) vastaavat ratkaisut ovat

$$z = w - b, \quad z = \mathrm{e}^{-\theta\,\mathrm{i}}w \quad \text{ja} \quad z = \frac{1}{r}w.$$

Kussakin tapauksessa ratkaisu on yksikäsitteinen kompleksiluku. □

Edellä esitellyt kuvaukset voidaan yhdistää yleisemmäksi kuvaukseksi

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b, \quad a \in \mathbb{C}_*, \quad b \in \mathbb{C},$$

jolla on hyödyllisiä kuvausominaisuuksia. Kyseisillä kuvauksilla ei ole varsinaista nimeä[4], mistä johtuen niihin viitataan tässä työssä joukon L kuvauksina, eli toisin sanoen pätee

$$L = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = az + b, \quad a \in \mathbb{C}_*, \quad b \in \mathbb{C}\}.$$

[2] Kompleksiluvun argumentin määritelmästä, $\cos(\theta) = x/r$ ja $\sin(\theta) = y/r$, johtuen kompleksilukua 0 ei voida määritellä napakoordinaatti- ja eksponenttiesityksessä, sillä argumentin määritelmässä nimittäjään tulisi nolla.

[3] Venytyksellä tarkoitetaan tässä työssä myös kutistusta eli tapausta $0 < r < 1$.

[4] Kyseiset kuvaukset kuuluvat affiinikuvauksiin, mutta affiinikuvauksiin kuuluu myös sellaisia kuvauksia, joita ei voi esittää kyseisessä muodossa, kuten konjugaatti $f(z) = \overline{z}$.

Propositio 3.1.3 ([5]). *Joukon L kuvaukset ovat yhdistettyjä kuvauksia kierrosta, venytyksestä ja siirrosta. Lisäksi ne ovat bijektioita.*

Todistus. Seurataan lähteen [5] todistusta. Olkoon $f(z) = az + b$ joukon L kuvaus. Kirjoitetaan kerroin a muodossa $a = r\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Tällöin kuvaus f voidaan kirjoittaa yhdistetyksi kuvaukseksi $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ kierrosta $f_1(z) = \mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}} z$, venytyksestä $f_2(z) = rz$ ja siirrosta $f_3(z) = z + b$.

Edellisen kohdan ja Proposition 3.1.2 nojalla joukon L kuvaus on yhdistetty kuvaus bijektioista. Näin ollen se on itsekin bijektio. □

Propositio 3.1.4 ([5]). *Joukon L kuvausten yhdistetty kuvaus on myös joukon L kuvaus.*

Todistus. Seurataan lähteen [5] todistusta. Olkoot $f_1(z) = a_1 z + b_1$ ja $f_2(z) = a_2 z + b_2$ joukon L kuvauksia. Niiden yhdistetty kuvaus on muotoa

$$(f_2 \circ f_1)(z) = f_2\big[f_1(z)\big] = a_2(a_1 z + b_1) + b_2 = a_1 a_2 z + (a_2 b_1 + b_2).$$

Koska oletuksen nojalla pätee $a_1, a_2 \in \mathbb{C}_*$ ja $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$, niin on oltava myös $a_1 a_2 \in \mathbb{C}_*$ ja $a_2 b_1 + b_2 \in \mathbb{C}$, joten kuvaus $f_2 \circ f_1$ on joukon L kuvaus. □

joukon L kuvauksista siirrytään seuraavaksi käsittelemään kuvausta nimeltä *inversio*,

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

jolla nähdään myös olevan havainnollinen geometrinen tulkinta. Inversio tarkoittaa siis kompleksiluvun "käänteisluvun ottamista", ja koska kompleksiluvun käänteisluvulle pätee

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|\,\mathrm{e}^{-\theta\,\mathrm{i}}}{|z|^2} = \frac{\mathrm{e}^{-\theta\,\mathrm{i}}}{|z|},$$

inversio koostuu geometrisesti tulkiten alkuperäisen luvun z peilauksesta reaaliakselin suhteen ja tätä seuraavasta venytyksestä pituuteen $1/|z|$. Näin ollen inversio kuvaa yksikköympyrän kehäpisteet kehäpisteiksi, sisäpuolen ulkopuoleksi ja ulkopuolen sisäpuoleksi.

Inversio ei ole määritelty origossa, mutta se voidaan laajentaa käsittämään myös origo ottamalla käyttöön *äärettömyyspiste*, jota merkitään symbolilla ∞. Äärettömyyspiste on kompleksitason piste, jonka ajatellaan sijaitsevan äärettömän kaukana missä suunnassa tahansa. Näin ollen se kuuluu jokaiselle kompleksitason suoralle.

Äärettömyyksiä on laajennetusta reaalilukujoukosta poiketen vain yksi, koska järjestysrelaation puuttumisen vuoksi kompleksitason äärettömyyksiä $\pm\infty$ ei voida erottaa toisistaan. Äärettömyyspisteen sisältävästä kompleksitasosta käytetään nimitystä laajennettu kompleksitaso.

Määritelmä 3.1.5. *Laajennettu kompleksitaso on joukko* $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$*, missä* ∞ *on äärettömyyspiste.*

Äärettömyyspisteen ja äärellisten kompleksilukujen välille määritellään yhteenlasku kaavalla

$$z + \infty = \infty + z = \infty, \quad z \in \mathbb{C},$$

ja kertolasku kaavalla

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \quad z \in \mathbb{C}_*.$$

Erityisesti sovitaan, että nollalla ja äärettömyyspisteellä jakamiselle pätee

$$\frac{z}{0} = \infty, \quad z \neq 0, \tag{3.1}$$

ja

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad z \neq \infty. \tag{3.2}$$

Lisäksi äärettömyyspisteiden tulolle pätee $\infty \cdot \infty = \infty$. Sen sijaan laskutoimitusta $0 \cdot \infty$ ei voida määritellä järkevästi.

Äärettömyyspisteen käyttöönoton myötä inversion ja myöhemmin Möbius-kuvausten teoria saadaan laajennettua myös origoa koskevaksi: yhtälöiden (3.1) ja (3.2) nojalla inversiolle pätee

$$f(0) = \infty \quad \text{ja} \quad f(\infty) = 0,$$

joten se on bijektio laajennetussa kompleksitasossa.

Propositio 3.1.6. *Inversio* $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = 1/z$ *on bijektio.*

Todistus. Yhtälön $f(z) = w$ ratkaisu muuttujan z suhteen on $z = 1/w$, joten jokaista $z \in \mathbb{C}_*$ vastaa yksikäsitteinen kompleksiluku $1/w \in \mathbb{C}_*$ ja päinvastoin. Koska lisäksi pätee $f(0) = \infty$ ja $f(\infty) = 0$, inversiolla on kaikissa laajennetun kompleksitason pisteissä kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus. □

Seuraava tulos käsittelee inversion mielenkiintoisen kuvausominaisuuden.

Propositio 3.1.7 ([5]). *Inversio kuvaa*

(1) *origon kautta kulkevan suoran origon kautta kulkevaksi suoraksi*

(2) *suoran, joka ei kulje origon kautta, origon kautta kulkevaksi ympyräksi*

(3) *origon kautta kulkevan ympyrän suoraksi, joka ei kulje origon kautta*

(4) *ympyrän, joka ei kulje origon kautta, ympyräksi, joka ei kulje origon kautta.*

Todistus. Täydennetään lähteen [5] todistusta.

Mielivaltainen origon kautta kulkeva suora voidaan esittää pisteinä $z = re^{\theta\,\mathrm{i}}$, missä $\theta \in \mathbb{R}$ on vakio ja r saa kaikki reaalilukuarvot. Inversio kuvaa suoran pisteet pisteiksi

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{\theta\,\mathrm{i}}} = (re^{\theta\,\mathrm{i}})^{-1} = r^{-1}e^{-\theta\,\mathrm{i}},$$

jotka muodostavat myös origon kautta kulkevan suora. Kuvattavan suoran origo kuvautuu äärettömyyspisteeksi ja äärettömyyspiste origoksi. Näin ollen (1)-kohta on tosi.

Suora, joka ei kulje origon kautta, koostuu pisteistä $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$, joille pätee suoran yhtälö $ax + by = c$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ovat vakioita ja $c \neq 0$. Niiden kuvapisteet inversion suhteen ovat muotoa $w = u+v\mathrm{i}$, $u, v \in \mathbb{R}$, joille pätee $w = 1/z$. Ilmaisemalla alkukuvapisteen koordinaatit x ja y kuvapisteen koordinaateilla u ja v ja sijoittamalla saadut yhteydet suoran yhtälöön $ax+by = c$ saadaan kuvapisteiden toteuttama yhtälö.

Koordinaattien väliset yhteydet saadaan yhtälöstä

$$x + y\mathrm{i} = z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + v\mathrm{i}} = \frac{u - v\mathrm{i}}{u^2 + v^2}.$$

Näin ollen pätee

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{ja} \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Sijoittamalla saadut ehdot suoran yhtälöön saadaan

$$\frac{au}{u^2 + v^2} - \frac{bv}{u^2 + v^2} = c.$$

Kun yhtälöä kerrotaan nimittäjällä $u^2 + v^2$, jaetaan vakiolla c ja siirretään termit samalle puolelle, se tulee muotoon

$$u^2 + v^2 - \frac{a}{c}u + \frac{b}{c}v = 0,$$

joka on ympyrän yhtälön normaalimuoto muuttujien u ja v suhteen. Ympyrä kulkee origon kautta, sillä piste $(u, v) = (0, 0)$ toteuttaa sen yhtälön. Origoksi kuvautuu kuvattavan suoran äärettömyyspiste. Siis (2)-kohta on myös tosi.

Koska inversiokuvaus on bijektio, (3)-kohdan tulos seuraa (2)-kohdasta. Origo kuvautuu tällöin äärettömyyspisteeksi.

Kohdassa (4) edetään vastaavasti kuin (2)-kohdassa. Ympyrä, joka ei kulje origon kautta, muodostuu pisteistä $z = x+y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ympyrän yhtälön $x^2 + y^2 + ax + by = c$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ovat vakioita ja $c \neq 0$. Pisteiden x ja y kuvapisteet ovat samat kuin (2)-kohdan todistuksessa, joten kirjoittamalla ympyrän yhtälö niiden suhteen saadaan

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{Au}{u^2+v^2}-\frac{Bv}{u^2+v^2}=c.$$

Kertomalla yhtälöä nimittäjällä u^2+v^2, jakamalla vakiolla c ja siirtämällä termit samalle puolelle yhtälöä saadaan

$$u^2+v^2-\frac{a}{c}u+\frac{b}{c}v-\frac{1}{c}=0,$$

joka on ympyrän yhtälön normaalimuoto muuttujien u ja v suhteen. Koska piste $(u,v)=(0,0)$ ei toteuta yhtälöä, ympyrä ei kulje origon kautta. Näin ollen myös (4)-kohta on tosi. □

Suorat voidaan ajatella ääretönsäteisiksi ympyröiksi, jotka kulkevat äärettömyyspisteen kautta. Näin ollen joissakin lähteissä myös suorista siirrytään tässä vaiheessa puhumaan ympyröinä, jolloin kirjallinen ilmaisu saadaan tiiviimpään ja yhtenäisempään ulkoasuun. Tässä tekstissä kuitenkin puhutaan erikseen suorista ja ympyröistä, eli sana ympyrä ei missään yhteydessä tarkoita myös suoraa.

Seuraavaa lukua varten myös joukon L kuvaukset laajennetaan laajennetun kompleksitason kuvauksiksi.

Propositio 3.1.8. *Joukon L kuvaus $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$, $f(z)=az+b$, missä $a\in\mathbb{C}_*$ ja $b\in\mathbb{C}$ ovat vakioita, on bijektio.*

Todistus. Väite on osoitettu todeksi tapauksessa $z\in\mathbb{C}$ Propositiossa 3.1.3. Tapauksessa $z=\infty$ pätee

$$T(\infty)=a\cdot\infty+b=\infty+b=\infty,$$

eli myös tässä tapauksessa pätee kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus. □

Käsitellään vielä kompleksitason peilaukset. Peilaukset jakaantuvat yleisesti kahteen tapaukseen: peilauksiin pisteen suhteen ja peilauksiin tason tai suoran suhteen. Käsitellään ensin peilaukset pisteen suhteen.

On suoraviivaista päätellä, että peilaus pisteen $a\in\mathbb{C}$ suhteen on kuvaus muotoa

$$f(z)=2a-z.$$

Koska kaavassa esiintyvä kuvaus $f(z)=-z=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}z$ eli peilaus origon suhteen on toisaalta myös kierto, kaikki pisteen suhteen tapahtuvat peilaukset voidaan esittää kierron ja siirron yhdisteenä. Näin on päätelty seuraava tulos.

Propositio 3.1.9. *Kompleksitason peilaukset pisteen suhteen ovat joukon L kuvauksia.*

Käsitellään lopuksi suoran suhteen tapahtuvat peilaukset. Kompleksiluvun z peilaus x-akselin suhteen on kuvaus

$$f(z) = f(x + y\mathrm{i}) = x - y\mathrm{i} = \overline{z}$$

eli "konjugaatin otto". Muut origon kautta kulkevan suoran suhteen tapahtuvat peilaukset saadaan konjugaatin ja kierron yhdisteinä.

Propositio 3.1.10. *Peilaus origon ja pisteen* $\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}$ *määräämän origon kautta kulkevan suoran suhteen on kuvaus*

$$f(z) = \mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}\overline{z}. \tag{3.3}$$

Todistus. Olkoon peilaussuora l muotoa $r\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}$, jossa $\theta \in \mathbb{R}$ on kiinteä ja r saa kaikki reaalilukuarvot, ja olkoon peilattava kompleksiluku muotoa $z = s\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}}$, $s \in \mathbb{R}_*$, $\phi \in \mathbb{R}$. Kun kompleksiluku z peilataan suoran l suhteen, sen pituus pysyy samana, mutta kulma ϕ peilautuu peilaussuoran suhteen. Tapauksessa $\phi < \theta$ peilattu kompleksiluku z_p on täten muotoa

$$z_p = s\mathrm{e}^{\theta+(\theta-\phi)\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}s\mathrm{e}^{-\phi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}\overline{z}.$$

Myös tapauksessa $\phi \geq \theta$ peilattu kompleksiluku sievistyy samaan muotoon:

$$z_p = s\mathrm{e}^{\theta-(\phi-\theta)\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}s\mathrm{e}^{-\phi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}\overline{z}.$$

Näin ollen peilausta vastaa kuvaus $f(z) = \mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}\overline{z}$. □

Jos peilaussuora ei kulje origon kautta, peilaus voidaan toteuttaa seuraavasti:

(1) Siirretään ensin kuvattavaa pistettä niin, että peilaussuora siirtyy origon kautta kulkevaksi.

(2) Suoritetaan tämän jälkeen peilaus kaavan (3.3) mukaisesti.

(3) Siirretään lopuksi peilattua pistettä alkuperäisen siirron verran takaisinpäin.

Jos esimerkiksi peilaussuora leikkaa imaginääriakselin pisteessä a, peilaus toteutettaisiin kaavalla

$$f(z) = a + \mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}\overline{(z-a)} = (a - \mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}\overline{a}) + \mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}\overline{z}.$$

Edellisestä yhtälöstä havaitaan, että suoran suhteen tapahtuvat kompleksitason peilaukset ovat yleisesti konjugaatin, kierron ja siirron yhdisteitä. Koska konjugaattia ei voida esittää joukon L kuvauksilla tai inversiolla, suoran suhteen tapahtuvat peilaukset eivät ole joukon L kuvauksia tai inversioita.

3.2 Möbius-kuvaus

Edellisessä alaluvussa käsitellyillä joukon L kuvauksilla ja inversioilla on samanlaisia ominaisuuksia, jotka säilyvät muodostettaessa niistä yhdistettyjä kuvauksia. Tämän johdosta kyseiset yhdisteet muodostavat mielenkiintoisen kuvausten joukon. Näitä kuvauksia tutki alun perin saksalainen August Ferdinand Möbius (1790–1868) paperissaan *Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung* vuodelta 1855 [16], minkä kunniaksi ne on nimetty Möbius-kuvauksiksi. Vaikka Möbius-kuvausten perustavammanlaatuinen määritelmä on niiden geometrisissä ominaisuuksissa siirtojen, kiertojen, venytysten ja inversioiden yhdisteinä, yleensä ne määritellään suoraan tietyllä lausekkeella sen johtamisen sijaan. Näin tehdään myös tässä tekstissä.

Määritelmä 3.2.1 ([5]). *Kompleksimuuttujan kuvauksia*

$$T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty, \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{3.4}$$

missä a, b, c ja d ovat kompleksilukuja, joille pätee $\Delta = ad - bc \neq 0$, sanotaan Möbius-kuvauksiksi.

Tässä tekstissä edellisen määritelmän lausekkeesta $\Delta = ad - bc$ käytetään nimitystä pseudodeterminantti. Termin tausta selkenee alaluvussa 3.3. Pseudodeterminantin ehto $\Delta \neq 0$ takaa muun muassa, että kuvaus on hyvin määritelty: ongelmatapauksessa $0/0$ tulisi päteä $az + b = 0$ ja $cz + d = 0$, mistä seuraisi yhtälö

$$0 = az + b = a\left(\frac{-d}{c}\right) + b \quad \text{eli} \quad ad - bc = 0.$$

Samalla ehto takaa, ettei Möbius-kuvaus yksinkertaistu vakiofunktioksi. Tämä nähdään esimerkiksi kuvauksen derivaatasta

$$T'(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2},$$

joka on nolla ainoastaan, kun pätee $ad - bc = 0$. Derivaatasta havaitaan myös Möbius-kuvauksen olevan analyyttinen kaikkialla muualla paitsi pisteessä $z = -d/c$.

Määritelmästä havaitaan myös, että Möbius-kuvaus määritellään laajennetulle kompleksitasolle. Äärettömyyspistettä koskevat ehdot ovat edellisen luvun äärettömyyspistettä koskevien laskusääntöjen nojalla

$$T(\infty) = \infty, \quad \text{jos } c = 0,$$

ja

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{ja} \quad T\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, \quad \text{jos } c \neq 0,$$

joista keskimmäinen kuvausehto nähdään selvemmin kirjoittamalla kuvaus muotoon

$$T(z) = \frac{z(a + \frac{b}{z})}{z(c + \frac{d}{z})} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}.$$

Möbius-kuvausten määrittely laajennetulle kompleksitasolle mahdollistaa teorian yleisemmän muotoilun: näin kuvauksesta tulee jatkuva [4], ja bijektio koko kompleksitasossa.

Osoitetaan seuraavaksi, että Möbius-kuvaukset todella ovat yhdisteitä joukon L kuvauksista ja inversioista.

Propositio 3.2.2 ([5])**.** *Möbius-kuvaukset ovat joukon L kuvausten ja inversioiden yhdisteitä. Lisäksi ne ovat bijektioita.*

Todistus. Seurataan lähteen [5] todistusta. Olkoon $T(z) = (az+b)/(cx+d)$ Möbius-kuvaus, ja olkoon ensin $c \neq 0$. Koska kuvaus T pyritään osoittamaan yhdistetyksi kuvaukseksi, sen lauseke halutaan kirjoittaa muotoon, jossa muuttuja z esiintyy vain yhdessä paikassa. Tämä tehdään kirjoittamalla nimittäjä $cx + d$ myös osoittajaan, jolloin muuttuja z eliminoituu sieventämisen jälkeen osoittajasta:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz + d}.$$

Tästä muodosta kuvauksen T voidaan lukea olevan yhdistetty kuvaus $T_3 \circ T_2 \circ T_1$, jossa

- $T_1(z) = cz + d$ on joukon L kuvaus, sillä $c \neq 0$
- $T_2(z) = 1/z$ on inversio
- $T_3(z) = (b - ad/c)z + a/c$ on joukon L kuvaus, sillä pseudodeterminantin ehdosta seuraa vakiolla $-c$ jaettaessa ehto $b - ad/c \neq 0$.

Käsitellään lopuksi tapaus $c = 0$. Tällöin kuvaus T yksinkertaistuu muotoon

$$T(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \tag{3.5}$$

joka on selvästi joukon L kuvausten muotoa. Pitäisi siis vielä näyttää, että kerroin a/d on nollasta poikkeava. Tämä seuraa siitä, että oletuksen $c = 0$ nojalla pseudodeterminantin ehto yksinkertaistuu muotoon $ad \neq 0$, joten täytyy päteä myös $a \neq 0$.

Propositioiden 3.1.6 ja 3.1.8 nojalla joukon L kuvaus ja inversio ovat bijektioita, joten Möbius-kuvaus on niiden yhdisteenä myös bijektio. □

Edellisen tulos voitaisiin muotoilla myös niin, että Möbius-kuvaus koostuu siirroista, kierroista, venytyksistä ja inversioista. Tapauksessa $c \neq 0$ edellisen todistuksen hajotelma voidaan kirjoittaa myös yksinkertaisempaan muotoon pseudodeterminantin avulla:

$$T(z) = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c}\frac{1}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}}. \tag{3.6}$$

Huomautus 3.2.3. *Edellisessä alaluvussa todettiin, etteivät suoran suhteen tapahtuvat peilaukset ole joukon L kuvauksia tai inversioita. Edellisen tuloksen nojalla ne eivät myöskään ole Möbius-kuvauksia.*

Edellisestä tuloksesta seuraa, että Möbius-kuvaus säilyttää inversion ympyröiden ja suorien kuvaamista koskevan ominaisuuden.

Propositio 3.2.4 ([5]). *Möbius-kuvaus kuvaa suorat ja ympyrät suoriksi ja ympyröiksi.*

Todistus. Möbius-kuvaus koostuu edellisen proposition nojalla joukon L kuvauksista ja inversioista. Proposition 3.1.7 nojalla inversio kuvaa suorat ja ympyrät suoriksi ja ympyröiksi. Toisaalta joukon L kuvaukset koostuvat kierroista venytyksistä ja siirroista, jotka kaikki säilyttävät kuvattavan alueen muodon. □

Bijektiivisyyden myötä Möbius-kuvauksella on käänteiskuvaus.

Propositio 3.2.5 ([5]). *Möbius-kuvauksen $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ käänteiskuvaus on*

$$T^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty, \quad T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a},$$

ja se on myös Möbius-kuvaus.

Todistus. Olkoon T Möbius-kuvaus. Johdetaan ensin sen käänteiskuvaus ratkaisemalla yhtälö $T(z) = w$ muuttujan z suhteen:

$$\frac{az+b}{cz+d} = w \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Käänteiskuvaus on siis

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a},$$

ja se vastaa ainakin muodoltaan Möbius-kuvausta. Pitää kuitenkin vielä näyttää, että sen pseudodeterminantti ei voi olla nolla. Tämä seuraa siitä, että Möbius-kuvauksen ja sen käänteiskuvauksen pseudodeterminantit ovat samat:

$$da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0.$$

□

Käänteiskuvaukselle pätee erityisesti

$$T^{-1}(\infty) = \infty, \quad \text{jos } c = 0,$$

ja

$$T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \quad \text{ja} \quad T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty, \quad \text{jos } c \neq 0.$$

Aiemmin todettiin joukon L kuvausten yhdisteiden olevan joukon L kuvauksia. Tämä ei kuitenkaan päde inversiolle, sillä kahden inversion yhdiste

$$(f \circ f)(z) = f\big[f(z)\big] = f(z^{-1}) = (z^{-1})^{-1} = z$$

ei ole inversio. Seuraavaksi nähdään, että tästä huolimatta Möbius-kuvausten yhdistäminen tuottaa Möbius-kuvauksen.

Propositio 3.2.6 ([5]). *Möbius-kuvausten yhdiste on Möbius-kuvaus.*

Todistus. Olkoot $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ ja $S(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ Möbius-kuvauksia. Niiden yhdistetty kuvaus on muotoa

$$\begin{aligned}
(T \circ S)(z) &= \frac{a\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) + b}{c\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) + d} \\
&= \frac{a(\alpha z + \beta) + b(\gamma z + \delta)}{\gamma z + \delta} \frac{\gamma z + \delta}{c(\alpha z + \beta) + d(\gamma z + \delta)} \\
&= \frac{a\alpha z + a\beta + b\gamma z + b\delta}{c\alpha z + c\beta + d\gamma z + d\delta}.
\end{aligned}$$

Termejä järjestelemällä se saadaan Möbius-kuvauksen muotoon

$$(T \circ S)(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}. \tag{3.7}$$

Pitäisi siis vielä näyttää, että saadun kuvauksen pseudodeterminantti on nollasta poikkeava. Pseudodeterminantti on aukikirjoitettuna muotoa

$$\begin{aligned}\Delta(T\circ S) &= (a\alpha+b\gamma)(c\beta+d\delta)-(a\beta+b\delta)(c\alpha+d\gamma)\\ &= a\alpha\beta c+a\alpha d\delta+b\beta c\gamma+b\gamma d\delta\\ &- a\alpha\beta c-a\beta\gamma d-\alpha bc\delta-b\gamma d\delta\\ &= a\alpha d\delta+b\beta c\gamma-a\beta\gamma d-\alpha bc\delta.\end{aligned}$$

Pienen järjestelyn myötä havaitaan, että saatu lauseke voidaan kirjoittaa kuvausten T ja S pseudodeterminanttien tuloksi, joka tiedetään nollasta poikkeavaksi:

$$\begin{aligned}\Delta(T\circ S) &= ad\alpha\delta-ad\beta\gamma-bc\alpha\delta+bc\beta\gamma\\ &= ad(\alpha\delta-\beta\gamma)-bc(\alpha\delta-\beta\gamma)\\ &= (ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)\\ &= \Delta(T)\Delta(S)\neq 0.\end{aligned}$$

□

Käänteiskuvausta ja yhdistettyä kuvausta koskevista tuloksista havaitaan, että Möbius-kuvauksissa on tiettyä säännönmukaisuutta. Tämä säännönmukaisuus voidaan muotoilla seuraavaksi tulokseksi.

Lause 3.2.7. *Möbius-kuvausten joukko*

$$GM(\mathbb{C}_\infty)=\left\{T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty\,\middle|\,T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbb{C},\quad \Delta=ad-bc\neq 0\right\}$$

muodostaa ryhmän yhdistetyn kuvauksen suhteen. Ryhmä on joukon L kuvausten ja inversioiden generoima.

Todistus. Todistetaan ensin joukko $GM(\mathbb{C}_\infty)$ ryhmäksi. Möbius-kuvausten joukko on edellisen tuloksen nojalla suljettu yhdistetyn kuvauksen suhteen. Yhdistetty kuvaus on myös liitännäinen. Yhdistetyn kuvauksen neutraalialkio on identtinen kuvaus $\mathrm{id}\,(x)=x$, mikä saadaan Möbius-kuvauksesta kertoimien arvoilla $a=d=1$ ja $b=c=0$, ja koska tällöin pseudodeterminantille pätee

$$\Delta=1\cdot 1-0\cdot 0=1\neq 0,$$

identtinen kuvaus on Möbius-kuvaus. Lisäksi 3.2.5 nojalla jokaisella Möbius-kuvauksella on käänteiskuvaus, joka on myös Möbius-kuvaus. Näin ollen $GM(\mathbb{C}_\infty)$ on ryhmä.

Ryhmä $GM(\mathbb{C}_\infty)$ on joukon L kuvausten ja inversioiden generoima, sillä jokainen sen alkio T todettiin Propositiossa 3.2.2 näiden kuvausten yhdisteeksi. □

Koska yhdistetty kuvaus ei ole vaihdannainen, ryhmä $GM(\mathbb{C}_\infty)$ ei ole vaihdannainen.

Edellisen tuloksen jälkimmäinen ominaisuus olisi voitu muotoilla myös niin, että ryhmä $GM(\mathbb{C}_\infty)$ on siirtojen, kiertojen, venytysten ja inversioiden generoima.

Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan Möbius-kuvauksia matriisien avulla esitettynä.

3.3 Möbius-kuvausten matriisiesitys

Edellisessä alaluvussa käytetty pseudo*determinantti*-termi saattoi antaa viitteitä siitä, että Möbius-kuvauksilla olisi jokin yhteys matriiseihin. Tässä alaluvussa osoitetaan, että matriisien avulla Möbius-kuvausten teoria saadaan eleganttiin muotoon.

Matriisien ja Möbius-kuvausten välille ei johdeta laskusääntöjen mukaista yhteyttä, vaan niiden välille luodaan merkinnällinen yhteys sopimalla, että matriisi

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0$$

indusoi Möbius-kuvauksen

$$T(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Tätä yhteyttä voidaan selittää homogeenisten koordinaattien avulla. Se ei kuitenkaan ole tämän työn kannalta oleellista ja sivutetaan. (Katso lisätietoa esimerkiksi lähteestä [15] sivuilta 157–158.)

Pseudodeterminantti näyttäisi vastaavan Möbius-kuvauksen indusoivan matriisin tavallista determinanttia. Näin ei kuitenkaan ole siirryttäessä kertoimien a, b, c ja d suhteen korkeampiin ulottuvuuksiin, vaan yleisesti Möbius-kuvauksen T pseudodeterminantti määritellään lausekkeena

$$\Delta(T) = ad^* - bc^*,$$

joka eroaa determinantista siinä, että kertoimista d ja c otetaan reversiot. Pseudodeterminantti ei siis esimerkiksi kvaternikertoimien tapauksessa vastaa determinanttia. Jokaiselle kompleksiluvulle z kuitenkin pätee $z^* = z$, joten kompleksikerrointen tapauksessa pseudodeterminantti ja determinantti ovat samat.

Edellisessä alaluvussa nähtiin, että Möbius-kuvaukset muodostavat ryhmän yhdistetyn kuvauksen suhteen. On suoraviivaista nähdä, että myös Möbius-kuvaukset indusoivien matriisien joukko muodostaa ryhmän. Ensinnäkin Möbius-kuvaukset indusoivien matriisien joukko voidaan määritellä kääntyvien kompleksisten 2×2-matriisien joukkona, sillä determinantin nollasta poikkeavuus on yhtäpitävää matriisin kääntyvyyden kanssa. Kyseinen joukko on suljettu matriisitulon suhteen, koska kääntyvien matriisien tulomatriisi on myös kääntyvä. Myös kunkin matriisin käänteismatriisi kuuluu kääntyvinä matriiseina kyseiseen joukkoon, kuten myös identiteettimatriisi. Koska lisäksi matriisitulo on liitännäinen, kääntyvät 2×2-matriisit muodostavat ryhmän matriisitulon suhteen. Kyseinen ryhmä tunnetaan myös nimellä *yleinen lineaarinen ryhmä*[5]. Näin ollen on päätelty seuraava tulos.

Lause 3.3.1. *Möbius-kuvaukset indusoivien matriisien joukko muodostaa ryhmän* $GL(2,\mathbb{C})$.

Näin ollen Möbius-kuvaukset indusoivien matriisien joukosta käytetään jatkossa merkintää $GL(2,\mathbb{C})$. Koska matriisitulo ei ole vaihdannainen, ryhmä $GL(2,\mathbb{C})$ ei ole vaihdannainen.

Möbius-kuvausten käänteiskuvaukset ja identiteettikuvaukset indusoivat matriisit voidaan päätellä suoraviivaisesti seuraavan lauseen avulla.

Lause 3.3.2. *Ryhmät* $GL(2,\mathbb{C})$ *ja* $GM(\mathbb{C}_\infty)$ *ovat homomorfiset*[6].

Todistus. On siis osoitettava, että ryhmien välille voidaan muodostaa kuvaus $f : GL(2,\mathbb{C}) \to GM(\mathbb{C}_\infty)$, joka toteuttaa ehdon $f(TS) = f(T) \circ f(S)$ jokaisella $T, S \in GL(2,\mathbb{C})$.

Olkoot $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ ja $S = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right]$ joukon $GL(2,\mathbb{C})$ matriiseja, jotka indusoivat Möbius-kuvaukset $\widetilde{T}(z) = (az+b)/(cz+d)$ ja $\widetilde{S}(z) = (\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$, ja olkoon kuvaus f muotoa $f(T) = \widetilde{T}$. Koska kuvaukselle f pätevät yhtälöt

$$f(TS) = \widetilde{TS} \quad \text{ja} \quad \widetilde{T} \circ \widetilde{S} = f(T) \circ f(S),$$

väitteen todistamiseksi riittää osoittaa todeksi yhtälö $\widetilde{TS} = \widetilde{T} \circ \widetilde{S}$.

Tulon

$$TS = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix},$$

indusoima Möbius-kuvaus on

$$(\widetilde{TS})(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)z + c\beta + d\delta}.$$

[5]Asteen n yleinen lineaarinen ryhmä on kääntyvien $n \times n$-matriisien joukon muodostama ryhmä matriisitulon suhteen [11]. Siitä käytetään merkintää $GL(n,\mathbb{F})$, jossa $\mathbb{F}$ on matriisien alkioiden joukko.

[6]Ryhmät $(G,\cdot)$ ja $(H,\odot)$ ovat homomorfiset, jos on olemassa kuvaus f, jolle pätee $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \odot f(g_2)$ jokaiselle $g_1, g_2 \in G$. Kuvauksesta f käytetään nimeä *ryhmähomomorfismi*. Käytännössä homomorfisuus tarkoittaa, että ryhmät G ja H ovat eräässä mielessä samanlaiset, jolloin ryhmien vastaavien alkioiden välille voidaan muodostaa kuvaus f, joka säilyttää ryhmän rakenteen: ryhmän G alkioita g_1 ja g_2 vastaavat ryhmän H alkiot $h_1 = f(g_1)$ ja $h_2 = f(g_2)$ ja myös edellisten tuloa vastaa jälkimmäisten tulo, sillä homomorfisuuden ehdon nojalla pätee $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \odot f(g_2) = h_1 \odot h_2$.

Jos kuvaus f on lisäksi bijektio, ryhmät ovat *isomorfiset*. Tällöin jokaista ryhmän G alkiota vastaa täsmälleen yksi ryhmän H alkio ja päinvastoin.

Näin ollen Möbius-kuvausten yhdisteitä käsittelevässä todistuksessa johdetun yhtälön (3.7) nojalla jokaiselle $z \in \mathbb{C}_\infty$ pätee yhtälö

$$(\widetilde{TS})(z) = (\widetilde{T} \circ \widetilde{S})(z) = \big[f(T) \circ f(S)\big](z)$$

eli $TS = f(T) \circ f(S)$, mikä todistaa väitteen. □

Ryhmät $GL(2,\mathbb{C})$ ja $GM(\mathbb{C}_\infty)$ eivät ole isomorfiset, vaan jokaista ryhmän $GM(\mathbb{C}_\infty)$ kuvausta vastaa matriisin $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in GL(2,\mathbb{C})$ lisäksi myös sen nollasta poikkeavat kompleksiset monikerrat:

$$(\alpha T)(x) = \frac{\alpha a x + \alpha b}{\alpha c x + \alpha d} = \frac{ax+b}{cx+d} = T(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}_*. \tag{3.8}$$

Toisin sanoen homomorfismin ydin on joukko $\{\, \alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C}_* \}$. Huomautettakoon, että monikertojen pseudodeterminantit ovat muotoa $\Delta(\alpha T) = \alpha^2 \Delta(T) \neq 0$, joten tapausta $\alpha = -1$ lukuun ottamatta niiden pseudodeterminantit poikkeavat alkuperäisen kuvauksen pseudodeterminantista.

Isomorfisuus saavutetaan muodostamalla ryhmästä $GL(2,\mathbb{C})$ uusi ryhmä, jossa kaikki saman kuvauksen indusoivat matriisit on niputettu yhdeksi alkioksi (joukoksi). Kyseinen tekijäryhmä tunnetaan *projektiivisena lineaarisena ryhmänä*[7], ja se on muotoa

$$PGL(2,\mathbb{H}) = GL(2,\mathbb{C})/\{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C}_*\}.$$

Näin ollen voidaan muotoilla seuraava tulos.

Lause 3.3.3. *Tekijäryhmä $PGL(2,\mathbb{C})$ on isomorfinen kompleksitason Möbius-kuvausten ryhmän $GM(\mathbb{C}_\infty)$ kanssa.*

Ryhmähomomorfismin perusominaisuuksiin kuuluu, että se kuvaa käänteisalkion käänteisalkioksi ja identiteettialkion identiteettialkioksi. Näin ollen päätellään, että Möbius-kuvauksen T käänteisfunktion indusoi matriisin T käänteismatriisi T^{-1} sekä sen nollasta poikkeavat kompleksiset monikerrat. Vastaavasti identiteettikuvauksen indusoiva matriisi on I sekä sen nollasta poikkeavat kompleksiset monikerrat. Lisäksi edellisen lauseen todistuksessa johdettu yhtälö $(\widetilde{TS})(z) = (\widetilde{T} \circ \widetilde{S})(z)$ tarkoittaa, että kahden Möbius-kuvauksen yhdiste saadaan kätevästi myös kyseiset kuvaukset indusoivien matriisien tulon indusoimana.

[7]Projektiivinen lineaarinen ryhmä $PGL(2,\mathbb{F})$ on yleisestä lineaarisesta ryhmästä $GL(2,\mathbb{F})$ muodostettu tekijäryhmä ryhmän $GL(2,\mathbb{F})$ *keskuksen* suhteen [11]. Ryhmän G keskus taas tarkoittaa joukkoa $\{a \in G \mid \forall g \in G : ag = ga\}$. Ryhmän $GL(2,\mathbb{C})$ keskuksen muodostavat täten matriisit $A \in GL(2,\mathbb{C})$, joille pätee $AT = TA$ kaikilla $T \in GL(2,\mathbb{C})$. Sopivilla matriisin $T \in GL(2,\mathbb{C})$ valinnoilla alkioille A saadaan johdettua ehtoja, joiden myötä niiden huomataan olevan muotoa $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C}_*$.

Tarkastellaan vielä lopuksi Möbius-kuvauksia siirtojen, kiertojen, venytysten ja inversioiden yhdisteinä matriisimuodossa, koska vastaava esitys on merkittävässä roolissa kvaternikertoimisen tapauksen käsittelyssä.

Propositio 3.3.4 ([18]). *Matriisin $T \in GL(2,\mathbb{C})$ indusoima kuvaus on seuraavien kuvauksien*[8] *yhdiste:*

(1) *siirto* $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto x + b, \quad b \in \mathbb{C}$

(2) *kierto* $\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}} x, \quad \theta \in \mathbb{R}$

(3) *venytys* $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto rx, \quad r \in \mathbb{R}_+$

(4) *inversio* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto -x^{-1} = \dfrac{\overline{x}}{|x|^2}$

(5) *identtinen kuvaus* $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad x \mapsto x, \quad \alpha \in \mathbb{C}_*.$

Todistus. Olkoon T ryhmän $GL(2,\mathbb{C})$ matriisi. Tapauksessa $c = 0$ se indusoi kuvauksen (3.5), joka voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \left|\frac{a}{d}\right| \arg\left(\frac{a}{d}\right) z + \frac{b}{d}.$$

Tästä muodosta sen voidaan lukea olevan kierron, venytyksen ja siirron yhdiste eli matriisi(tulo)n

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\arg\left(\frac{a}{d}\right)\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|\frac{a}{d}\right| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

indusoima.

Tapauksessa $c \neq 0$ matriisi T indusoi kuvauksen (3.6), joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \left|-\frac{\Delta}{c^2}\right| \arg\left(-\frac{\Delta}{c^2}\right) \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Tästä muodosta sen voidaan lukea olevan siirron, inversion, kierron, venytyksen ja siirron yhdiste eli matriisitulon

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\arg\left(-\frac{\Delta}{c^2}\right)\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|-\frac{\Delta}{c^2}\right| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[8]Tuloksen muotoiluun lisätty identtinen kuvaus huomioi Möbius-kuvausten yhtälön (3.8) mukaiset kompleksiset nollasta poikkeavat monikerrat.

indusoima. □

Möbius-kuvauksen pseudodeterminantti saadaan myös sen hajotelman muodostavien kuvausten pseudodeterminanttien tulona.

Propositio 3.3.5. *Olkoot T ja S ryhmän $GL(2,\mathbb{C})$ matriiseja. Tällöin niiden pseudodeterminanteille pätee:*

$$\Delta(ST) = \Delta(T)\Delta(S) = \Delta(TS).$$

Todistus. Olkoot T ja S ryhmän $GL(2,\mathbb{C})$ matriiseja. Tällöin niiden tulo TS indusoi yhdistetyn kuvauksen $T \circ S$, jonka pseudodeterminantille pätee Proposition 3.2.6 todistuksen nojalla $\Delta(TS) = \Delta(T)\Delta(S)$. Vastaavasti saadaan $\Delta(ST) = \Delta(S)\Delta(T)$. Kompleksilukujen kertolaskun vaihdannaisuuden nojalla pätee siis yhteensä

$$\Delta(TS) = \Delta(T)\Delta(S) = \Delta(S)\Delta(T) = \Delta(ST)$$

□

Seuraavassa alaluvussa tutustutaan erääseen Möbius-kuvausten vähemmän ilmeiseen mutta jatkon kannalta tärkeään ominaisuuteen.

3.4 Laajenemisominaisuus

Avaruuden[9] $\mathbb{R}^3_\infty$ vektorit voidaan tulkita redusoiduiksi kvaterniksi muotoa $x = x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j}$. Myös kompleksiluvut voidaan tulkita samaan avaruuteen laajennetuiksi redusoiduiksi kvaterniksi, joiden j-komponentti on nolla. Tarkastelemalla edellisen alaluvun kuvauksia (1)–(5) redusoidun kvaternimuuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ suhteen havaitaan, että kuvaukset siirto, venytys ja inversio pysyvät avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$. Erityisesti havaitaan, ne kuvaavat myös avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ laajennetut kompleksiluvut kompleksiluvuiksi. Nämä havainnot eivät kuitenkaan päde kierrolle kaikissa tapauksissa, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 3.4.1. *Matriisi*

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

indusoi kuvauksen $T(x) = \mathrm{e}^{\pi/2}x = \mathrm{i}x$. Muuttujan arvolla $x = \mathrm{j} \in \mathbb{R}^3_\infty$ kuvauksen arvo $T(\mathrm{j}) = \mathrm{ij} = \mathrm{k}$ ei kuulu avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$.

Kierto ei siis laajene tässä muodossa avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$. Tämä ei kuitenkaan ole yllättävä havainto, sillä kierto kyseisessä muodossa on kompleksitasoon määritelty

[9] $\mathbb{R}^3_\infty = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, missä ∞ on kompleksitason äärettömyyspistettä vastaava avaruuden $\mathbb{R}^3$ äärettömyyspiste.

kuvaus, jolloin sen tulkinta avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ muuttujan suhteen on jo lähtökohtaisesti kyseenalainen. Näin ollen on luonnollista kysyä, onko mahdollista määritellä kierto jollakin muulla tavalla niin, että se laajenisi avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$. Jos Möbius-kuvaukset voitaisiin kirjoittaa myös tämän kierron suhteen siirtojen, kiertojen, venytysten ja inversioiden yhdisteinä, niin silloin kaikki kompleksikertoimiset kompleksimuuttujan Möbius-kuvaukset laajenisivat avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$. Osoittautuu, että tämä on mahdollista. Itse asiassa tämä *laajenemisominaisuus*[10] on eräs Möbius-kuvausten yleisistä ominaisuuksista: avaruuden $\mathbb{R}^n_\infty$ Möbius-kuvaukset pysyvät avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}_\infty$ jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{R}^{n+1}_\infty$ arvolla. Laajenemisominaisuus on merkittävässä roolissa tässäkin työssä käsiteltäessä yleisesti avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksia.

Miten kierto tulisi määritellä, jotta se voitaisiin laajentaa avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$? Koska muuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ ja kompleksilukujen väliset laskutoimitukset tapahtuvat kvaternien algebrassa, halutun kierron selvittämiseksi on siirryttävä tutkimaan, miten kiertoja ilmaistaan kvaternien avulla. Tämä ei valitettavasti ole suoraviivainen tarkastelu, vaan sille joudutaan omistamaan koko seuraava luku.

[10] Laajenemisominaisuus on kyseisestä ominaisuudesta tässä työssä käytettävä termi. Kirjallisuudessa kyseisestä ominaisuudesta ei käsittääkseni käytetä mitään tiettyä termiä.

4 ORTOGONAALIKUVAUKSET

Tässä luvussa osoitetaan, että kaikki avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ kierrot voidaan esittää kvaternikuvauksella $x \mapsto qxq^*$, $q \in \mathbb{H}$, $|q| = 1$. Kiertojen tarkastelu aloitetaan karakterisoimalla ne ensin matriisien avulla. Tällöin päädytään tutkimaan ortogonaalikuvauksia, jotka sisältävät kiertojen ohella myös peilaukset. Kiertojen ja peilausten välillä osoittautuu olevan yhteys, jota käytetään kvaternikiertoja koskevan tuloksen todistamiseen. Kvaternikiertoja tarvitaan myöhemmin sekä kompleksitason avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ laajenevien että avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten käsittelyssä.

4.1 Johdantoa matriisikiertoihin

Tason kierrot voidaan tunnetusti esittää kompleksitason kuvausten ohella myös matriisikuvauksina. On suoraviivaista päätellä, että kulman $\theta \in \mathbb{R}$ verran kiertynyt vektori $[x' \ y']^T \in \mathbb{R}^2$ saadaan alkuperäisestä vektorista $[x \ y]^T \in \mathbb{R}^2$ kertomalla sitä vasemmalta kiertomatriisilla

$$\rho = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Kiertynyt vektori on muotoa

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{bmatrix},$$

joka vastaa kierretyn kompleksiluvun komponenttiesitystä

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z = \big[\cos(\theta) + \sin(\theta)\big](x + y\mathrm{i}) = \big[\cos(\theta)x - \sin(\theta)y\big] + \big[\cos(\theta)y + \sin(\theta)x\big]\mathrm{i}.$$

Tason kierrot voidaan ajatella myös z-akselin suhteen tehtävinä kiertoina. Tätä tulkintaa hyödyntäen voidaan määritellä myös avaruuden $\mathbb{R}^3$ kierrot, sillä myös tällöin alkuperäinen ja kiertynyt vektori määrittävät origo kautta kulkevan tason, jolla kierto tapahtuu. Kiertoakseliksi määräytyy täten kiertotason origon kautta kulkeva normaalivektori, jonka suunta määräytyy yksikäsitteisesti oikean käden säännön perusteella. Akselin n, $|n| = 1$, suhteen tapahtuvaa kiertoa kulman θ verran vastaava kiertomatriisi on

$$\rho = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_\theta + n_x^2(1-\mathrm{c}_\theta) & n_x n_y(1-\mathrm{c}_\theta) - n_z \,\mathrm{s}_\theta & n_x n_z(1-\mathrm{c}_\theta) + n_y \,\mathrm{s}_\theta \\ n_x n_y(1-\mathrm{c}_\theta) + n_z \,\mathrm{s}_\theta & \mathrm{c}_\theta + n_y^2(1-\mathrm{c}_\theta) & n_y n_z(1-\mathrm{c}_\theta) - n_x \,\mathrm{s}_\theta \\ n_x n_z(1-\mathrm{c}_\theta) - n_y \,\mathrm{s}_\theta & n_y n_z(1-\mathrm{c}_\theta) + n_x \,\mathrm{s}_\theta & \mathrm{c}_\theta + n_z^2(1-\mathrm{c}_\theta) \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

missä n_x, n_y ja n_z ovat normaalin n komponentit ja trigonometrisista funktioista on käytetty lyhennettyjä merkintöjä $\mathrm{c}_\theta = \cos(\theta)$ ja $\mathrm{s}_\theta = \sin(\theta)$, jotta matriisi mahtuisi yhdelle riville [9].

Seuraavassa alaluvussa tarkastellaan kiertoja yleisessä tapauksessa. Tätä kautta havaitaan kiertojen ja tietyn tyyppisten matriisien välinen yhteys, jota hyödynnetään jatkossa.

4.2 Ortogonaalikuvausten määrittely

Pyrittäessä muodostamaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ kierrot esittävät kuvaukset tulee ensin pohtia, mitkä ovat ne ominaisuudet, jotka karakterisoivat kierrot. Tarkastellaan asiaa yksinkertaisen esimerkin kautta. Kun suorakulmion muotoista aluetta kierretään tasossa, havaitaan, että pisteiden väliset kulmat ja pisteiden etäisyydet origosta säilyvät kuvauksessa. Tavoitteena on määritellä seuraavaksi ne kuvaukset T, jotka toteuttavat nämä ehdot. Koska kuvauksen muuttuja voidaan tulkita myös paravektoriksi, kuvauksista käytetään perinteisen lineaarialgebran merkinnän $T\boldsymbol{x}$ sijaan merkintää $T(x)$, joka vastaa kompleksitapauksessa kierrosta käytettyä merkintää $f(x)$.

Pisteiden välisen kulman säilyminen voidaan ilmaista käyttökelpoisemmassa muodossa skalaaritulon avulla: vektorien x ja y välisen kulman kosini on

$$\cos\big[\angle(x,y)\big] = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|}.$$

Jotta kuvaus T säilyttäisi kulmat, täytyy siis päteä

$$\frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|} = \cos\big[\angle(x,y)\big] = \cos\Big(\angle\big[T(x), T(y)\big]\Big) = \frac{\langle T(x), T(y)\rangle}{|T(x)|\,|T(y)|}.$$

Tämä ehto pitää kuitenkin sisällään myös ne kuvaukset, joissa kulma kuvautuu vastakkaismerkkiseksi. Ne eivät ole kiertoja, vaan esimerkiksi tason tapauksessa origon kautta kulkevan suoran suhteen tapahtuvia peilauksia. Korkeampien ulottuvuuksien tapauksessa ei ole selvää, sisältääkö kyseinen ehto myös muunlaisia kuvauksia. Jatketaan kuitenkin asian käsittelyä edellisen vaatimuksen pohjalta.

Edellisen yhtälön perusteella näyttäisi siltä, että kierrot kattavat kuvaukset voidaan karakterisoida vaatimalla skalaaritulon säilyminen ja pisteiden etäisyyksien säilyminen origosta. Ensimmäinen ehto riittää kuitenkin yksinään, sillä skalaaritulon ja normin välisen yhteyden vuoksi pisteen pituuden säilyminen seuraa skalaaritulontulon säilymisestä. Näin ollen tarkastellut kuvaukset voidaan määritellä skalaaritulon säilyttävinä lineaarikuvauksina. Niistä käytetään nimitystä *ortogonaalikuvaukset*[1].

Määritelmä 4.2.1. *Olkoon V äärellisulotteinen euklidinen vektoriavaruus, jossa on määritelty skalaaritulo $\langle x, y\rangle$ ja normi $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Lineaarikuvaus $T : V \to V$ on ortogonaalinen, jos sille pätee ominaisuus*

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

jokaiselle $x, y \in V$.

Seuraava tulos antaa vaihtoehtoisen määritelmän kuvauksen ortogonaalisuudelle. Siitä myös nähdään, että pisteiden pituuksien säilyminen todella seuraa edellisestä määritelmästä.

Propositio 4.2.2 ([10]). *Kuvaus $T : V \to V$ on ortogonaalinen, jos ja vain jos se kuvaa origon origoksi ja säilyttää pisteiden väliset etäisyydet, eli jos sille pätee jokaiselle $x, y \in V$*

$$T(0) = 0 \quad ja \quad |T(x) - T(y)| = |x - y|\,. \tag{4.3}$$

Todistus. Täydennetään lähteen [10] todistusta. Todistetaan ensin väite "$\Longrightarrow$". Olkoon siis T ortogonaalinen. Ortogonaalisena se on myös lineaarinen, josta seuraa kuvausehto $T(0) = 0$.

Pisteiden välisten etäisyyksien todistamiseksi yhtälön $|T(x) - T(y)| = |x - y|$ oikean puolen neliö kirjoitetaan ensin sisätulon laskusääntöjen[2] nojalla muotoon

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x-y\rangle - \langle y, x+y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle\,. \end{aligned}$$

[1]Nimitys johtunee siitä, että tällaiset kuvaukset ovat matriiseja, joiden rivit ja sarakkeet ovat ortogonaalisia vektoreita [7]. Toisaalta nämä kuvaukset myös kuvaavat ortogonaalisen kannan ortogonaaliseksi kannaksi.

[2]Tarvittavat laskusäännöt ovat: $\langle ax, y\rangle = \langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle$, $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ ja $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$ [6].

Yhtälön vasemman puolen neliö kirjoitetaan vastaavasti muotoon

$$\begin{aligned}
|T(x)-T(y)|^2 &= \langle T(x)-T(y), T(x)-T(y)\rangle \\
&= \langle T(x), T(x)-T(y)\rangle - \langle (T(y), T(x)-T(y)\rangle \\
&= \langle T(x), T(x)\rangle - \langle T(x), T(y)\rangle - \langle (T(y), T(x)\rangle + \langle T(y), T(y)\rangle\,,
\end{aligned}$$

joka on pistetulon säilymisen nojalla yhtälöpitävää yhtälön

$$|T(x)-T(y)|^2 = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

kanssa. Näin ollen väitteen suunta ”$\Longrightarrow$” on tosi.

Olkoot sitten voimassa ehdot (4.3). On siis johdettava niitä käyttäen yhtälö $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Aloitetaan kirjoittamaan lauseke $\langle x, y\rangle$ muotoon, jossa esiintyy vain termejä muotoa $\langle a-b, a-b\rangle$, sillä tällöin päästään käsiksi normiin, jolloin voidaan hyödyntää oletuksen jälkimmäistä ehtoa. Tämä onnistuu yhtälön

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

avulla, sillä se voidaan kirjoittaa muotoon

$$2\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle = |x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2\,. \tag{4.4}$$

Jälkimmäistä oletusta soveltamalla saadaan nyt yhteys kuvaukseen T:

$$\begin{aligned}
2\langle x, y\rangle &= |x-0|^2 + |y-0|^2 - |(x-y)-0|^2 \\
&= |T(x)-T(0)|^2 + |T(y)-T(0)|^2 - |T(x-y)-T(0)|^2\,.
\end{aligned}$$

Käyttämällä lopuksi ensimmäistä oletusta sekä sen jälkeen yhtälöä (4.4) lausekkeen $\langle T(x), T(y)\rangle$ suhteen saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
2\langle x, y\rangle &= |T(x)-0|^2 + |T(y)-0|^2 - |T(x-y-0)|^2 \\
&= |T(x)|^2 + |T(y)|^2 - |T(x-y)|^2 \\
&= 2\langle T(x), T(y)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Näin ollen pätee $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ jokaiselle $x, y \in V$.

Pitäisi vielä näyttää, että ehdoista (4.3) seuraa myös kuvauksen T lineaarisuus. Tämän osoittamiseksi riittää näyttää, että kuvaus T toteuttaa ehdon

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.5}$$

missä kertoimet a_i ovat reaalisia ja vektorit v_i muodostavat avaruuden V ortonormaalin kannan[3]. Koska kuvaus T säilyttää oletuksen nojalla etäisyydet ja edellä todistetun nojalla myös kulmat, kantavektorien v_i kuvajoukko $\{T(v_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ on myös avaruuden V ortonormaali kanta. Täten avaruuden V vektori $x = \sum x_i v_i$, $x_i \in \mathbb{R}$, voidaan kirjoittaa myös tässä kannassa, joten sille pätee

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i). \tag{4.6}$$

Kuvauksen T lineaarisuuden osoittamiseksi riittää siis yhtälöiden (4.5) ja (4.6) nojalla näyttää, että kertoimille pätee ehto $x_i = a_i$.

Kertoimeen a_i päästään käsiksi ottamalla yhtälöstä sisätulo vektorin $T(v_i)$ suhteen, sillä sisätulot $\langle T(v_i), T(v_j)\rangle$ ovat nolla tapauksissa $i \neq j$. Yhtälön (4.6) oikea puoli tulee tällöin muotoon

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i), T(v_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i T(v_i), T(v_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle T(v_i), T(v_j)\rangle = a_j.$$

Koska kuvas T on ortogonaalinen, se säilyttää pistetulon, minkä perusteella yhtälön (4.6) vasemmalle puolelle pätee

$$\left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right), T(v_j) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, v_j \right\rangle = x_j.$$

Näin ollen on $a_j = x_j$, joten kuvaus T on lineaarinen. □

Edellisestä tuloksesta siis seuraa pisteen normin säilyminen:

$$|T(x)| = |T(x) - 0| = |T(x) - T(0)| = |x - 0| = |x|$$

Käydään vielä lopuksi läpi seuraava, kenties geometrisesti itsestään selvä, ortogonaalikuvausten ominaisuus.

Propositio 4.2.3. *Ortogonaalikuvausten yhdiste on myös ortogonaalinen.*

Todistus. Olkoot S ja T ortogonaalikuvauksia. Tällöin niiden yhdisteelle pätee

$$\langle (S \circ T)(x), (S \circ T)(y)\rangle = \big\langle S\big[T(x)\big], S\big[T(y)\big]\big\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle\,.$$

[3]Lineaarikuvausten määritelmässä yhtälön (4.5) ortonormaalien kantavektorien tilalla on mielivaltaiset avaruuden V vektorit. Yhtälön toteutumisesta ortonormaalin kannan tapauksessa kuitenkin seuraa sen toteutuminen myös mielivaltaisten avaruuden V vektorien tapauksessa, joten lineaarisuuden osoittamiseksi voidaan rajoittua tarkastelemaan ortonormaalin kannan tapausta.

□

Tähän mennessä on käsitelty ortogonaalikuvauksia niiden geometristen ominaisuuksien kannalta. Seuraavaksi niitä siirrytään tarkastelemaan kuvausmatriisin T ominaisuuksien kannalta.

4.3 Ortogonaalimatriisit

Ortogonaalikuvaukset ovat lineaarikuvauksia, joten ne voidaan esittää muodossa $T(x) = Ax$, missä A on matriisi ja x on pystyvektori. Matriisia A sanotaan *ortogonaalimatriisiksi*, ja se on $n \times n$-neliömatriisi, sillä ortogonaalikuvaukset ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kuvauksia. Ortogonaalimatriisit voidaan karakterisoida yksinkertaisella ehdolla, joka päätellään seuraavaksi.

Ortogonaalisuuden määritelmän nojalla pätee yhtälö

$$x^T y = \langle x, y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle = (Ax)^T Ax = x^T A^T Ay$$

jokaiselle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Kun muuttujille x ja y annetaan kiinteitä arvoja, edellisestä yhtälöstä saadaan johdettua matriisille A. Valitsemalla muuttujat yksikkövektoreiksi $x = \mathrm{e}_i$ ja $y = \mathrm{e}_j$ ja merkitsemällä $A^T A = B$ yhtälön vasemmaksi puoleksi saadaan

$$\mathrm{e}_i^T \mathrm{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{jos } i \neq j \\ 1, & \text{jos } i = j \end{cases}$$

ja oikeaksi puoleksi

$$\mathrm{e}_i^T B \mathrm{e}_j = \begin{bmatrix} b_{i1} & \cdots & b_{in} \end{bmatrix} \mathrm{e}_j = b_{ij}.$$

Näin ollen tulee päteä $B = I$ eli $A^T A = I$.

Toisaalta tällöin pätee myös yhtälö

$$\det(AA^T) = \det(A) \det(A^T) = \det(A^T) \det(A) = \det(A^T A) = \det(I) = 1,$$

joten matriisi AA^T on kääntyvä. Näin ollen yhtälö

$$AA^T = AIA^T = A(A^T A)A^T = (AA^T)^2$$

on yhtäpitävää ehdon $AA^T = I$ kanssa. Edellisen päättelyn nojalla on luontevaa määritellä ortogonaalimatriisit seuraavasti.

Määritelmä 4.3.1. *Matriisi A on ortogonaalinen, jos sille pätee $A^T A = AA^T = I$.*

Määritelmä on yhtäpitävä ehdon $A = (A^T)^{-1}$ kanssa.

Ortogonaalimatriisit muodostavat matriisitulon suhteen ryhmän, *ortogonaaliryhmän*, sillä kahden ortogonaalimatriisin tulo on ortogonaalimatriisi, matriisitulo on liitännäinen, identiteettimatriisi on ortogonaalinen ja ortogonaalimatriisin käänteismatriisi $A^{-1} = A^T$ on myös ortogonaalinen. Ortogonaaliryhmästä käytetään merkintää $O(\mathbb{R}^n)$ tai lyhemmin $O(n)$.

Ortogonaalimatriisit jakaantuvat determinantin mukaan kahteen eri joukkoon. Tämä nähdään ottamalla ortogonaalisuuden määritelmän ehdosta determinantti:

$$1 = \det(I) = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2.$$

Ortogonaalimatriisin determinantti voi siis olla vain joko 1 tai -1.

Determinanttia 1 vastaavat matriisit muodostavat ryhmän $O(n)$ aliryhmän

$$SO(n) = O^+(n) = \{\, A \in O(n) \mid \det(A) = 1\},$$

jota kutsutaan *erityisortogonaaliryhmäksi* ja sen alkioita *eristyisortogonaalimatriiseiksi*. Determinanttia -1 vastaavista matriiseista käytetään merkintää

$$O^-(n) = \{\, A \in O(n) \mid \det(A) = -1\}.$$

Ne eivät kuitenkaan muodosta aliryhmää, sillä joukko ei esimerkiksi sisällä identiteettimatriisia.

Joukkojen SO ja O^- välinen ero ei jää pelkästään merkinnälliseksi, vaan niiden havaitaan edustavan myös geometrisesti erilaisia kuvauksia. Ortogonaalikuvauksia johdettaessa todettiin, että niihin tulisi kuulua ainakin kierrot ja peilaukset. Tason $\mathbb{R}^2$ tapauksessa osoittautuu, ettei muita ortogonaalikuvauksia olekaan. Tällöin nimittäin jokainen ryhmän $SO(2)$ matriisi on kaavan (4.1) mukainen kiertomatriisi ja jokainen joukon $O^-(2)$ matriisi on peilausmatriisi

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix},$$

missä peilaus tapahtuu kulman $\theta/2$ määrittämän origon kautta kulkevan suoran suhteen [14]. Tason tapauksessa ortogonaalimatriisin determinantti siis kertoo, onko kyseessä kierto- vai peilausmatriisi. Tämä determinanttiin pohjautuva jako säilyy myös korkeampiin ulottuvuuksiin siirryttäessä, mikä todistetaan peilausten osalta seuraavassa luvussa.

Korkeampiin avaruuksiin siirryttäessä tilanne kuitenkin monimutkaistuu. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ tapauksessa kaikki joukon $SO(3)$ matriisit ovat edelleen kiertoja [13], mutta kaikki joukon $O(3)$ matriisit eivät enää olekaan peilauksia[4]. Avaruuksiin $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, siirryttäessä taas ei ole enää lainkaan selvää, miten kierto tulisi ylipäätään

[4]Tästä mainitaan esimerkki seuraavassa alaluvussa, kun tarvittava teoria on saatu esiteltyä.

määritellä. Tässä työssä ei keskitytä siihen, vaan todetaan ainoastaan, että Möbius-kuvausten teoria yleistyy avaruuteen $\mathbb{R}^n_\infty$ (luvussa 6 esitetyssä muodossa), kun kierrot tulkitaan erityisortogonaalikuvauksiksi. Koska tämä työ koskee vain ulottuvuuksia $n = 2$ ja $n = 3$, jolloin kaikki erityisortogonaalikuvaukset ovat kiertoja, jatkossa avaruuksia $\mathbb{C}_\infty$ ja $\mathbb{R}^3_\infty$ käsiteltäessä puhutaan havainnollisuuden vuoksi kierroista erityisortogonaalikuvausten sijaan.

Edellä käsiteltiin joukkojen $SO(n)$ ja $O^-(n)$ kuvausten välisiä eroja. Niiden välillä on myös yllättävä yhteys. Ryhmän $SO(n)$ kuvausten yhdiste pysyy ryhmässä $SO(n)$. Sen sijaan kahden joukon $O^-(n)$ matriisin tulon determinantti on 1, joten se kuuluukin ryhmään $SO(n)$. Täten kahden peilauksen yhdiste on aina erityisortogonaalikuvaus. Tätä geometrista yhteyttä hyödynnetään todistettaessa luvun päätulosta. Tästä johtuen seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan peilauksia.

4.4 Peilaukset

Edellisessä alaluvussa havaittiin, että kahden peilauksen yhdiste on kierto. Tässä alaluvussa johdetaan edellistä havaintoa laajentava tulos, jonka mukaan jokainen kierto on mahdollista esittää parillisena määränä peilauksia.

Peilaus voidaan tehdä joko pisteen tai *hypertason* suhteen. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ hypertaso tarkoittaa käytännössä avaruuden $\mathbb{R}^{n-1}$ joukkoa, joka jakaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ kahteen osaan, kuten suora tason tai taso kolmiulotteisen avaruuden. Tässä työssä peilauksella tarkoitetaan peilausta *origon kautta kulkevan hypertason suhteen.* Ne ilmaistaan peilaustasoa kohtisuorassa olevan vektorin avulla.

Määritelmä 4.4.1. *Vektorin $a \neq 0$ generoima peilaus avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on peilaus origon kautta kulkevan hypertason suhteen, joka on kohtisuorassa vektoria a vastaan.*

Propositio 4.4.2 ([10])**.** *Vektorin $a \neq 0$ generoima peilaus avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on kuvaus*

$$R_a(x) = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}a.$$

Todistus. Todistetaan väite johtamalla peilauksen lauseke. Olkoon l origon kautta kulkeva avaruuden $\mathbb{R}^n$ hypertaso, joka on kohtisuorassa vektoria $a \neq 0$ vastaan. Tällöin mielivaltainen vektori $x \in \mathbb{R}^n$ voidaan ilmoittaa muodossa $x = x_1 + x_2$, missä x_1 on tason l suuntainen vektori ja x_2 tätä kohtisuorassa oleva vektori. Näiden merkintöjen myötä peilattu vektori x' voidaan kirjoittaa muotoon

$$x' = x_1 - x_2.$$

Pitäisi siis onnistua ilmaisemaan edellinen lauseke $x_1 - x_2$ käyttäen vain vektoreita a ja x.

Vektori x_2 on vektorin a suuntainen, sillä ne ovat molemmat kohtisuorassa hypertasoa l vastaan. Näin ollen x_2 voidaan ilmaista vektorin x vektorin a suuntaisena vektoriprojektiona:

$$x_2 = \frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2} a.$$

Komponentti x_1 taas voidaan kirjoittaa muodossa $x_1 = x - x_2$. Näin ollen peilattu vektori saadaan muotoon

$$x' = x - 2x_2 = x - 2\frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2} a.$$

□

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ tapauksessa peilaukset voidaan esittää kvaternilausekkeella.

Seuraus 4.4.3. *Vektorin $a \neq 0$ generoima peilaus avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on muotoa*

$$R_a(x) = -a\overline{x}a'^{-1}.$$

Todistus. Olkoon $a \neq 0$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, jolloin se voidaan tulkita redusoiduksi kvaterniksi. Näin ollen edellisessä tuloksessa johdetun peilauksen lausekkeen skalaaritulo voidaan kirjoittaa Proposition 2.1.18 nojalla kvaternitulojen summaksi, jolloin kuvaus yksinkertaistuu muotoon[5]

$$R_a(x) = x - \frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2} a = x - \frac{a\overline{x} + x\overline{a}}{|a|^2} a = x - \frac{a\overline{x}a}{|a|^2} - \frac{x\overline{a}a}{|a|^2} = -\frac{a\overline{x}a}{|a|^2} = -a\overline{x}\,\overline{a}^{-1} = -a\overline{x}a'^{-1}.$$

□

Huomautus 4.4.4. *Edellistä todistusta seuraamalla havaitaan, että myös kompleksitason peilaukset voidaan esittää vastaavalla kaavalla vektorin $a \in \mathbb{C}_*$ suhteen.*

Tietyn peilauksen generoiva vektori ei ole yksikäsitteinen, sillä peilaustasoa kohtisuorassa olevia vektoreita on ääretön määrä. Näin ollen mikä tahansa vektorin a kanssa yhdensuuntainen vektori generoi täsmälleen saman peilauksen. Tämä nähdään seuraavasti: jos vektori b on vektorin a reaalinen monikerta, eli pätee $b = ka$, jollakin $k \in \mathbb{R}_*$, niin peilaukselle R_b pätee

$$R_b(x) = R_{ka}(x) = x - 2\frac{\langle ka, x \rangle}{|ka|^2} ka = x - 2\frac{k\langle a, x \rangle}{k^2 |a|^2} ka = x - 2\frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2} a = R_a(x).$$

[5] Peilauksen lausekkeessa jälkimmäinen kerroin a kirjoitetaan konjugaatin sijaan pääinvoluutiota käyttäen, sillä tällöin se on helpommin hyödynnettävässä muodossa seuraavassa luvussa, jossa kiertoja käsitellään kvaternilausekkeella, jossa esiintyy myös pääinvoluutio.

Erityisesti vektori $-a$ generoi saman peilauksen kuin vektori a. Näin ollen peilauksen käänteiskuvauksen generoi vektorin $-a$ ohella myös vektori a.

Propositio 4.4.5 ([10]). *Jokainen peilaus R_a on oma käänteiskuvauksensa.*

Todistus. On siis osoitettava, että peilaukselle pätee $R_a \circ R_a = \mathrm{id}$. Tämä nähdään suoraan laskemalla: jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$\begin{aligned}
(R_a \circ R_a)(x) &= R_a\big[R_a(x)\big] \\
&= R_a\left(x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}a\right) \\
&= x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}a - 2\frac{\left\langle a, x - 2\frac{\langle a,x\rangle}{|a|^2}a\right\rangle}{|a|^2}a \\
&= x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}a - 2\frac{\langle a, x\rangle - 2\frac{\langle a,x\rangle}{|a|^2}\langle a, a\rangle}{|a|^2}a \\
&= x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}a - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}a + 4\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}a = x.
\end{aligned}$$

□

Identtinen kuvaus ei ole peilaus, mutta kaikki peilaustason pisteet kuvautuvat aina itselleen. Muotoillaan tämä geometrisesti ilmeinen tulos jatkon kannalta hyödylliseen muotoon.

Propositio 4.4.6 ([10]). *Peilaus R_a kuvaa itselleen täsmälleen ne vektorit $x \in \mathbb{R}^n$, jotka ovat kohtisuorassa vektoria a vastaan.*

Todistus. Halutaan siis etsiä ne vektorit $x \in \mathbb{R}^n$, joille pätee $R_a(x) = x$ eli

$$x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}a = x.$$

Tämä yksinkertaistuu vaatimukseksi $\langle a, x\rangle\, a = 0$, ja koska a ei voi olla nollavektori, on skalaaritulon $\langle a, x\rangle$ oltava nolla. Tämä toteutuu täsmälleen, kun pätee $x \perp a$. □

Luvun alussa peilausten pääteltiin kuuluvan ortogonaalikuvauksiin. Todistetaan seuraavaksi, että näin todella on.

Propositio 4.4.7. *Peilaus R_a on ortogonaalikuvaus.*

Todistus. Todistetaan väite osoittamalla, että peilaus R_a toteuttaa ortogonaalisuuden määritelmän[6]. Yksinkertaistavia merkintöjä

$$b = -2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2} \quad \text{ja} \quad c = -2\frac{\langle a, y\rangle}{|a|^2}$$

käyttäen vektorien x ja y peilausten skalaaritulo voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\langle R_a(x), R_a(y)\rangle &= \langle x + ba, y + ca\rangle \\ &= \langle x, y\rangle + \langle x, ca\rangle + \langle ba, y\rangle + \langle ba, ca\rangle \\ &= \langle x, y\rangle + c\langle x, a\rangle + b\langle a, y\rangle + bc\langle a, a\rangle .\end{aligned}$$

Sijoittamalla b ja c takaisin edelliseen yhtälöön päädytään yhtälöön

$$\langle R_a(x), R_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle - 2\frac{\langle a, y\rangle}{|a|^2}\langle x, a\rangle - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}\langle a, y\rangle + 4\frac{\langle a, x\rangle\langle a, y\rangle}{|a|^4}\langle a, a\rangle .$$

Ominaisuudesta $\langle a, a\rangle = |a|^2$ seuraa, että kolme viimeistä termiä kumoavat toisensa:

$$-2\frac{\langle a, y\rangle}{|a|^2}\langle a, x\rangle - 2\frac{\langle a, x\rangle}{|a|^2}\langle a, y\rangle + 4\frac{\langle a, x\rangle\langle a, y\rangle}{|a|^2} = 0.$$

Näin ollen pätee

$$\langle R_a(x), R_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle .$$

□

Seuraavaksi osoitetaan edellisen alaluvun lopussa mainittu tulos, jonka nojalla peilaukset kuuluvat ortogonaalikuvausten osajoukkoon O^-.

Propositio 4.4.8. *Peilauksen R_a, $a \neq 0$, determinantti on -1.*

Todistus. Todistuksen idea on otettu lähteestä [17]. Aloitetaan määrittämällä peilauksen kuvausmatriisin R_a muoto. Käytetään merkintöjen yksinkertaistamiseksi merkintää $b = |a|^{-2}$. Tällöin peilauksen kuvausyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$R_a(x) = x - 2b(a, x)a = \begin{bmatrix} x_1 - 2b(a_1x_1 + \ldots + a_n + x_n)a_1 \\ \vdots \\ x_n - 2b(a_1x_1 + \ldots + a_n + x_n)a_n \end{bmatrix},$$

[6] Väite voitaisiin todistaa myös osoittamalla, että peilaus toteuttaa Lauseen 4.2.2 ehdot. Jälkimmäisen ehdon todistaminen ei kuitenkaan ole yhtä suoraviivaista kuin määritelmän ehdon todistaminen.

josta voidaan päätellä kuvausmatriisiksi

$$R_a = \begin{bmatrix} 1-2ba_1^2 & -2ba_2a_1 & \cdots & -2ba_na_1 \\ -2ba_1a_2 & 1-2ba_2^2 & \cdots & -2ba_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2ba_1a_n & -2ba_2a_n & \cdots & 1-2ba_n^2 \end{bmatrix} = I - 2baa^T.$$

Sen determinantin laskeminen suoraan on kuitenkin työlästä, joten määritetään se toisella tapaa determinantin ominaisuuksia hyväksi käyttäen.

Kun väitettä $\det(R_a) = -1$ kerrotaan matriisin C determinantilla, päädytään yhtälöön

$$\det(R_a)\det(C) = -\det(C), \tag{4.7}$$

joka on tulon determinanttia koskevan säännön nojalla yhtäpitävää yhtälön

$$\det(R_aC) = -\det(C).$$

kanssa. Koska matriisin determinantin merkki vaihtuu vastakkaiseksi kerrottaessa yksi matriisin sarakkeista vastakkaismerkkiseksi[7], edellinen yhtälö voidaan johtaa myös osoittamalla, että on olemassa sellainen matriisi $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$, jolle pätee

$$R_a \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}.$$

Jos matriisi C on lisäksi ei-singulaarinen, yhtälö 4.7 voidaan jakaa puolittain determinantilla $\det C \neq 0$ ja päätyä väitteeseen $\det(R_a) = -1$. Näin ollen riittää etsiä tällainen matriisi C.

Koska edellinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$R_aC = C - 2\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

ja toisaalta myös muotoon

$$R_aC = (I - 2baa^T)C = C - 2baa^TC,$$

matriisille C tulee päteä yhtälö

$$baa^T \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen on oltava voimassa ehdot $baa^Tc_1 = c_1$ ja $baa^Tc_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Jälkimmäinen ehto pätee selvästi, kun pystyvektorit c_i valitaan kohtisuoriksi vektorin

[7] Yleisemmin pätee: jos matriisi B saadaan matriisista A kertomalla yksi matriisin A riveistä tai sarakkeista vakiolla $c \neq 0$, niin matriisien determinanteille pätee yhtälö $\det(B) = c\det(A)$ [8].

$a \neq 0$ kanssa, jolloin pistetulot $a^T c_i$ menevät nolliksi. Ensimmäinen ehto taas toteutuu valinnalla $c_1 = a$, jolloin pätee

$$baa^T c_1 = |a|^{-2} aa^T a = |a|^{-2} a |a|^2 = a = c_1.$$

Näin ollen matriisiksi C voidaan valita $C = \begin{bmatrix} a & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$, jonka pystyvektorit $a, c_2, \ldots, c_n$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortogonaalisen kannan.

Osoitetaan vielä matriisi C ei-singulaariseksi. Matriisista C voidaan muokata ortogonaalimatriisi normeeraamalla sen pystyvektorit pituuteen 1. Normeeraamisessa pystyvektoreita kerrotaan vuorotellen jollakin nollasta poikkeavalla reaaliluvulla, mikä muuttaa matriisin C determinantin arvoa vastaavien kertoimien verran. Koska näin toimimalla päädytään determinantin arvoon ± 1, matriisin C determinantti ei voi olla nolla, joten se on ei-singulaarinen. $\square$

Edellisen tuloksen myötä voidaan todeta, että kaikki joukon $O^-(3)$ kuvaukset eivät ole peilauksia.

Esimerkki 4.4.9. *Matriisin* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *determinantti on* -1, *joten se on joukon* $O^-(3)$ *alkio. Osoitetaan seuraavaksi, että se ei kuitenkaan ole peilaus.*

Jos matriisi A olisi peilaus, sitä vastaava kuvaus $\begin{bmatrix} x_1 x_2 x_3 \end{bmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} -x_1 - x_3 x_2 \end{bmatrix}^T$ *tulisi voida esittää vektorin* $a \neq 0$ *generoimalla peilauksella* $R_a(x) = x - 2 \langle a, x \rangle a / |a|^2$ *jokaisella muuttujan* $x \in \mathbb{R}^3$ *arvolla. Vektorin* $a = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j}$ *alkioille voidaan täten johtaa ehtoja, kun muuttujalle x annetaan kiinteitä arvoja.*

Olkoon ensin $x = 1$. Tällöin peilauksen tulisi toteuttaa yhtälö

$$-1 = 1 - 2\frac{a_0}{|a|^2}(a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j}) = \frac{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_0^2) - 2a_0 a_1 \mathrm{i} - 2a_0 a_2 \mathrm{j}}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2},$$

mistä nähdään, että tulee päteä $a_1 = a_2 = 0$ *ja* $a_0 \neq 0$ *eli* $a = a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}_*$.

Jos a on edellä pääteltyä muotoa, niin vektorin $x = \mathrm{i}$ *kuvaukselle tulee edelleen päteä*

$$\mathrm{j} = \mathrm{i} - 2\frac{0}{|a|^2} a = \mathrm{i},$$

mikä on mahdotonta. Näin ollen ei voi olla semmoista vektoria $a \neq 0$, *jonka generoima peilaus vastaisi kuvausta* $\begin{bmatrix} x_1 x_2 x_3 \end{bmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} -x_1 - x_3 x_2 \end{bmatrix}^T$, *joten matriisi A ei ole peilaus.*

Seuraavaksi siirrytään osoittamaan, että kaikki ortogonaalikuvaukset voidaan kirjoittaa peilausten yhdisteinä. Ennen varsinaista päätulosta otetaan kuitenkin kaksi aputulosta.

Lemma 4.4.10. *Jos lineaariselle kuvaukselle A pätee* $A(u_i) = u_i$ *jokaiselle avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *kantavektorille* u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *niin A on identtinen kuvaus.*

Todistus. Olkoon A lineaarinen kuvaus, jolle pätee $A(u_i) = u_i$ jokaiselle kantavektorille u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin lineaarisuuden ja oletuksen kuvausehdon nojalla jokaiselle $x \in V$ pätee

$$A(x) = A\left(\sum x_i u_i\right) = \sum x_i A(u_i) = \sum x_i u_i = x.$$

Näin ollen A on identtinen kuvaus. □

Lemma 4.4.11 ([10]). *Olkoot u ja v avaruuden $\mathbb{R}^n$ eri vektorit, joiden normit ovat samat. Tällöin peilaus R_{u-v} kuvaa vektorin u vektoriksi v.*

Todistus. On suoraviivaista päätellä, että juuri vektori $u - v$ generoi kyseisen peilauksen: Halutaan siis löytää sellainen vektori, joka on kohtisuorassa sitä origon kautta kulkevaa tasoa vastaan, joka peilaa vektorin u vektoriksi v. Selvästi vektorien u ja v, $|u| = |v|$, välinen erotusvektori $u - v$ on tällainen vektori. Todistetaan havainto kuitenkin vielä suoralla laskulla.

Peilattava vektori u voidaan kirjoittaa kahden vektorin summana

$$u = \frac{1}{2}(u - v) + \frac{1}{2}(u + v),$$

missä ensimmäinen vektori on peilauksen generoivan vektorin kanssa samansuuntainen ja jälkimmäinen kohtisuorassa sitä vastaan eli peilaustason suuntainen, mikä nähdään yhtälöstä

$$\langle u - v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle - \langle v, v\rangle = |u| + \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle - |v| = 0.$$

Peilauksessa ensimmäinen vektori vaihtaa merkkiä ja jälkimmäinen pysyy ennallaan. Peilauksen lineaarisuutta ja edellisiä peilausominaisuuksia käyttäen voidaan täten kirjoittaa

$$\begin{aligned}
R_{u-v}(u) &= R_{u-v}\left[\frac{1}{2}(u - v) + \frac{1}{2}(u + v)\right] \\
&= \frac{1}{2}R_{u-v}(u - v) + \frac{1}{2}R_{u-v}(u + v) \\
&= -\frac{1}{2}(u - v) + \frac{1}{2}(u + v) \\
&= v.
\end{aligned}$$

□

Lause 4.4.12 ([10]). *Jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortogonaalikuvaus voidaan esittää korkeintaan n:n peilauksen yhdisteenä.*

Todistus. Täydennetään lähteen [10] todistusta. Olkoon $\{u_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortogonaalinen kanta, ja olkoon kuvaus $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonaalinen. Todistuksen ideana on johtaa kuvaus $R \circ T$, jolle pätee $(R \circ T)(u_i) = u_i$ jokaiselle $i = 1, 2, \ldots, n$ ja jossa R on yhdistetty kuvaus enintään n:stä peilauksesta. Lemman 4.4.10 nojalla pätee tällöin $R \circ T = \mathrm{id}$ eli $T = R^{-1}$. Proposition 4.4.5 nojalla kuvauksen T voidaan tällöin päätellä olevan yhdistetty kuvaus enintään n:stä peilauksesta.

Aloitetaan etsimällä peilaus R_1, jolle pätee ehto $(R_1 \circ T)(u_n) = u_n$. Kuvauksen T ortogonaalisuuden perusteella tällöin on myös voimassa $|T(u_n)| = |u_n|$. Tapauksessa $T(u_n) \neq u_n$ edellisen lemman nojalla on olemassa peilaus R_1, jolle pätee $(R_1 \circ T)(u_n) = u_n$; tapauksessa $T(u_n) = u_n$ haluttu ehto $(R_1 \circ T)(u_n) = u_n$ pätee, kun R_1 tulkitaan identtiseksi kuvaukseksi. Näin ollen on löydetty kuvaus $R_1 \circ T$, jossa R_1 on joko peilaus tai identtinen kuvaus ja joka kuvaa vektorin u_n itselleen. Seuraavaksi kuvausta halutaan täydentää niin, että se kuvaa vektorin u_n lisäksi myös vektorin u_{n-1} itselleen.

Kuvaus $R_1 \circ T$ on ortogonaalikuvausten yhdisteenä ortogonaalinen, joten sille on voimassa ehto $|(R_1 \circ T)(u_{n-1})| = |u_{n-1}|$. Edellisen lemman nojalla on siis olemassa peilaus tai identtinen kuvaus R_2, jolle pätee

$$(R_2 \circ R_1 \circ T)(u_{n-1}) = u_{n-1} \quad \text{eli} \quad R_2\big[(R_1 \circ T)(u_{n-1})\big] = u_{n-1}.$$

Täytyy siis osoittaa, että sille pätee myös

$$R_2\big[(R_1 \circ T)(u_n)\big] = u_n \quad \text{eli} \quad R_2(u_n) = u_n.$$

Tapaus $R_2 = \mathrm{id}$ on selvä. Olkoon siis R_2 peilaus, jolloin se on edellisen lemman nojalla muotoa $R_2 = R_{(R_1 \circ T)(u_{n-1}) - u_{n-1}}$. Tulisi siis päteä $R_{(R_1 \circ T)(u_{n-1}) - u_{n-1}}(u_n) = u_n$. Proposition 4.4.6 nojalla tiedetään, että näin on täsmälleen, kun vektorit $(R_1 \circ T)(u_{n-1}) - u_{n-1}$ ja u_n ovat kohtisuorat, mikä on yhtäpitävää seuraavan yhtälön kanssa:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (R_1 \circ T)(u_{n-1}) - u_{n-1}, u_n \rangle \\ &= \langle (R_1 \circ T)(u_{n-1}), u_n \rangle - \langle u_{n-1}, u_n \rangle \\ &= \langle (R_1 \circ T)(u_{n-1}), u_n \rangle . \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, sillä ortogonaalisena kuvauksena $R_1 \circ T$ säilyttää pistetulon, minkä perusteella voidaan kirjoittaa

$$\langle (R_1 \circ T)(u_{n-1}), u_n \rangle = \langle (R_1 \circ T)(u_{n-1}), (R_1 \circ T)(u_n) \rangle = \langle u_{n-1}, u_n \rangle = 0.$$

Näin ollen on löydetty kuvaus $(R_2 \circ R_1) \circ T$, jossa $R_2 \circ R_1$, $R_2 = R_{(R_1 \circ T)(u_{n-1}) - u_{n-1}}$ tai $R_2 = \mathrm{id}$, on joko peilausten yhdiste tai identtinen kuvaus ja joka kuvaa sekä vektorin u_n että vektorin u_{n-1} itselleen.

Tähän tapaan jatkamalla löydetään aina sellainen kuvaus $(R_i \circ \cdots \circ R_1) \circ T$, jossa $R_i \circ \cdots \circ R_1$, $R_i = R_{(R_{i-1} \circ \cdots \circ R_1 \circ T)(u_{n-i+1}) - u_{n-i+1}}$ tai $R_i = \mathrm{id}$, on joko peilausten yhdiste tai identtinen kuvaus ja joka kuvaa vektorit $u_n, \ldots, u_{n-i+1}$ itselleen. Lopulta päädytään kuvaukseen, jolle on voimassa jokaiselle $j = 1, 2, \ldots, n$

$$(R_n \circ \cdots \circ R_1 \circ T)(u_j) = u_j.$$

Tällöin Lemman 4.4.10 nojalla pätee edelleen

$$R_n \circ \cdots \circ R_1 \circ T = \mathrm{id} \quad \text{eli} \quad T = R_1^{-1} \circ \cdots \circ R_n^{-1},$$

joka on Proposition 4.4.5 nojalla yhtäpitävää yhtälön

$$T = R_1 \circ \cdots \circ R_n$$

kanssa. Näin ollen kuvaus T on yhdiste n:stä kuvauksesta, jotka ovat joko peilauksia tai identtisiä kuvauksia.

Erikoistapaus $T = \mathrm{id}$ saadaan kahden saman peilauksen yhdisteenä. □

Edellisen tuloksen myötä voidaan todistaa seuraava, alaluvun keskeisenä tavoitteena ollut, kierrot ja peilaukset yhdistävä tulos.

Propositio 4.4.13. *Jokainen kierto voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena parillisesta määrästä peilauksia.*

Todistus. Edellisen lauseen nojalla jokainen ortogonaalikuvaus voidaan esittää korkeintaan n:n peilauksen yhdisteenä. Tällöin erityisesti myös kierrot ovat esitettävissä peilausten yhdisteenä.

Peilausten parillinen määrä kierroissa päätellään determinantin avulla: Kiertojen eli ryhmän SO kuvausten determinantti on 1. Peilausten determinantti taas on Proposition 4.4.8 nojalla -1. Koska peilausten yhdistettä vastaa peilausmatriisien tulo ja tulon determinantille pätee

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

peilausten yhdisteiden determinantti on joko 1 tai -1 riippuen siitä, onko peilauksia parillinen vai pariton määrä. Näin ollen ryhmän $SO(n)$ kuvaukset muodostuvat parillisesta määrästä peilauksia. □

Tämän tuloksen myötä voidaan siirtyä käsittelemään kiertoja kvaterneilla kirjoitettuna.

4.5 Kierto kvaternilausekkeena

Tämän alaluvun ja koko luvun keskeisenä tavoitteena on todistaa, että kaikki muuttujan $x \in \mathbb{R}^3$ kierrot voidaan esittää seuraavassa tuloksessa esiteltävällä kuvauksella.

Propositio 4.5.1 ([18]). *Olkoon $q \neq 0$ kvaterni, ja olkoot x ja qxq'^{-1} avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkioita. Tällöin kuvaus*

$$\rho_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \rho_q(x) = qxq'^{-1}$$

on ortogonaalinen. Jos lisäksi $q \neq 0$ on redusoitu kvaterni, niin kuvaus ρ_q on yhdistetty kuvaus $R_q \circ R_1$ vektorin q generoimasta peilauksesta R_q ja pisteen $(1,0,0)$ generoimasta peilauksesta R_1.

Todistus. Olkoot x ja qxq'^{-1} avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkioita, ja olkoon ensin q nollasta poikkeava kvaterni. Ortogonaalisuuden osoittamiseksi riittää Proposition 4.2.2 nojalla näyttää, että kuvaus ρ_q kuvaa origon origoksi ja säilyttää pisteiden väliset etäisyydet. Ensimmäinen ehto nähdään selvästi:

$$\rho_q(0) = q \cdot 0 \cdot q'^{-1} = 0.$$

Toinen ehto nähdään myös suoraviivaisesti soveltamalla kvaternien laskusääntöjä:

$$\begin{aligned} |\rho_q(x) - \rho_q(y)| &= \left|qxq'^{-1} - qyq'^{-1}\right| \\ &= \left|q(x-y)q'^{-1}\right| \\ &= |q|\,|x-y|\,\left|q'^{-1}\right| \\ &= |q|\,|q|^{-1}\,|x-y| \\ &= |x-y|\,. \end{aligned}$$

Kuvaus ρ_q on näin ollen ortogonaalinen.

Käsitellään sitten jälkimmäinen väite. Olkoon siis $q \neq 0$ redusoitu kvaterni, jolloin se generoi peilauksen muotoa

$$R_q(x) = -q\overline{x}q'^{-1}$$

Piste (1,0,0) taas generoi peilauksen muotoa

$$R_1(x) = -\overline{x}$$

Näin ollen niiden yhdisteelle on voimassa jokaiselle $x \in \mathbb{R}^3$

$$(R_q \circ R_1)(x) = R_q\big[R_1(x)\big] = R_q(-\overline{x}) = -q\overline{(-\overline{x})}q'^{-1} = qxq'^{-1} = \rho_q(x),$$

joten väite $\rho_q = R_q \circ R_1$ on tosi. □

Kuvauksen ρ_q generoi kvaterni $q \neq 0$. Kuvauksella ρ_q on myös käänteiskuvaus, ja sen generoi kvaternin q käänteisluku q^{-1}.

Propositio 4.5.2 ([18]). *Kuvauksen ρ_q käänteiskuvaus on $\rho_q^{-1} = \rho_{q^{-1}}$. Jos $q \neq 0$ on redusoitu kvaterni, niin kuvaus ρ_q^{-1} voidaan kirjoittaa yhdistettynä kuvauksena $R_1 \circ R_q$ pisteen $(1, 0, 0)$ generoimasta peilauksesta R_1 ja pisteen q generoimasta peilauksesta R_q.*

Todistus. Kuvaus

$$\rho_{q^{-1}}(x) = q^{-1}x(q^{-1})'^{-1} = q^{-1}xq'$$

toteuttaa ehdot

$$\rho_{q^{-1}}\big[\rho_q(x)\big] = q^{-1}(qxq'^{-1})q' = x$$

ja

$$\rho_q\big[\rho_{q^{-1}}(x)\big] = q(q^{-1}xq')q'^{-1} = x$$

jokaiselle $x \in \mathbb{R}^3$, joten se on kuvauksen ρ_q käänteiskuvaus ρ_q^{-1}.

Jälkimmäinen väite todistetaan edellisen proposition todistuksen tapaan. Kun $q \neq 0$ on redusoitu kvaterni, pätee

$$\begin{aligned}(R_1 \circ R_q)(x) &= R_1\big[R_q(x)\big] \\ &= R_1(-q\overline{x}q'^{-1}) \\ &= -\overline{(-q\overline{x}q'^{-1})} \\ &= \overline{(a'^{-1})}\,\overline{\overline{x}}\,\overline{q} \\ &= q^{-1}xq' \\ &= \rho_{q^{-1}}(x)\end{aligned}$$

jokaiselle $x \in \mathbb{R}^3$, joten väite $\rho_q^{-1} = R_1 \circ R_q$ on tosi. □

Kuvausten ρ_q yhdisteet voidaan kirjoittaa myös yksinkertaiseen muotoon.

Propositio 4.5.3. *Olkoot a ja b nollasta poikkeavia kvaterneja. Kuvausten ρ_b ja ρ_a yhdiste on muotoa*

$$\rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab}.$$

Todistus. Suoraan laskemalla nähdään, että jokaiselle $x \in \mathbb{R}^3$ pätee yhtälö

$$\begin{aligned}(\rho_a \circ \rho_b)(x) &= \rho_a\big[\rho_b(x)\big] \\ &= \rho_a(bxb'^{-1}) \\ &= a(bxb'^{-1})a'^{-1} \\ &= abx(a'b')^{-1} \\ &= (ab)x(ab)'^{-1} \\ &= \rho_{ab}(x),\end{aligned}$$

joten väite on tosi. □

Näiden ominaisuuksien avulla voidaan seuraavaksi todistaa luvun päätulos, jonka mukaan edellä tarkasteltu kuvaus ρ_q on todella kierto ja erityisesti, että se kattaa kaikki avaruuden $\mathbb{R}^3$ kierrot.

Lause 4.5.4 ([18]). *Kuvaus*

$$\phi : \mathbb{H}_* \to SO(3), \quad \phi(q) = \rho_q,$$

on surjektio, ja sen ydin on $\mathbb{R}_*$.

Todistus. Täydennetään lähteen [18] todistusta. Todistetaan surjektiivisuus osoittamalla, että jokaista maalijoukon alkioita vastaa jokin määrittelyjoukon alkio. Olkoon siis φ mielivaltainen joukon $SO(3)$ alkio eli kierto. On siis osoitettava, että se voidaan kirjoittaa muotoon $\varphi = \rho_q$, $q \in \mathbb{H}_*$.

Lauseen 4.4.12 nojalla kuvaus φ on mahdollista muodostaa korkeintaan kolmen peilauksen avulla. Toisaalta kiertona se voidaan Proposition 4.4.13 nojalla kirjoittaa parillisesta määrästä peilauksia. Näin ollen se voidaan kirjoittaa kahden peilauksen yhdisteenä eli muodossa

$$\varphi = R_a \circ R_b,$$

missä a ja b ovat nollasta poikkeavia redusoituja kvaterneja.

Peilausten ja kuvauksen ρ_a välillä on Propositioiden 4.5.1 ja 4.5.2 nojalla yhteys. Tämän yhteyden käyttämiseksi edellisen yhtälöön tulisi lisätä kaksi kappaletta peilauksia R_1. Tämä on mahdollista, sillä Propositiossa 4.4.5 peilaus todettiin itsensä käänteiskuvaukseksi, minkä johdosta voidaan kirjoittaa

$$\varphi = R_a \circ \mathrm{id} \circ R_b = R_a \circ (R_1 \circ R_1) \circ R_b = (R_a \circ R_1) \circ (R_1 \circ R_b) = \rho_a \circ \rho_{b^{-1}}.$$

Saatu kuvaus voidaan edellisen proposition nojalla kirjoittaa edelleen muotoon

$$\varphi = \rho_{ab^{-1}},$$

missä ab^{-1} on nollasta poikkeavien redusoitujen kvaternien tulona joukon $\mathbb{H}_*$ alkio. Jokaista joukon $SO(3)$ kuvausta vastaa näin ollen joukon $\mathbb{H}_*$ alkio, joten kuvaus ϕ on surjektio.

Osoitetaan sitten kuvauksen ydintä koskeva tulos. Kuvaus ϕ on homomorfismi ryhmältä $(\mathbb{H}_*, \cdot)$ ryhmälle $SO(3)$, sillä jokaisella $a, b \in \mathbb{H}_*$ pätee

$$\phi(ab) = \rho_{ab} = \rho_a \circ \rho_b = \phi(a) \circ \phi(b).$$

Homomorfismin ydin on niiden määrittelyjoukon alkioiden joukko, jotka kuvautuvat arvojoukon neutraalialkioksi. Kiertojen ρ_q neutraalialkio on identtinen kuvaus $\mathrm{id}\,(x) = x$, joten homomorfismin ϕ ydin on joukko $\{\, q \in \mathbb{H}_* \mid qxq'^{-1} = x,\ x \in \mathbb{R}^3\}$. Ehto $qxq'^{-1} = x$ on yhtäpitävää ehdon $qx = xq'$ kanssa, ja koska sen tulee päteä jokaiselle $x \in \mathbb{R}^3$, siitä voidaan johtaa ehtoja luvulle q antamalla muuttujalle x tiettyjä arvoja.

Olkoon siis kvaterni $q \neq 0$ muotoa $q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k}$, ja olkoon ensin $x = 1$. Tällöin on oltava voimassa

$$(q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k}) \cdot 1 = 1 \cdot (q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k})$$

eli

$$2q_1\mathrm{i} + 2q_2\mathrm{j} = 0,$$

mikä on mahdollista vain, jos pätee $q_1 = 0$ ja $q_2 = 0$. Näin ollen $q \neq 0$ pelkistyy muotoon $q = q_0 + q_{12}\mathrm{k}$.

Olkoon sitten $x = \mathrm{i}$. Tällöin on oltava voimassa

$$(q_0 + q_{12}\mathrm{k})\mathrm{i} = \mathrm{i}(q_0 + q_{12}\mathrm{k}) \quad \text{eli} \quad q_0\mathrm{i} + q_{12}\mathrm{j} = q_0\mathrm{i} - q_{12}\mathrm{j},$$

mistä seuraa ehto $q_{12} = 0$. Näin ollen $q \neq 0$ pelkistyy edelleen muotoon $q = q_0$, $q_0 \in \mathbb{R}_*$. Koska muista muuttujan x valinnoista ei seuraa enää lisäehtoja luvulle q, kuvauksen ϕ ydin on $\mathbb{R}_*$. □

Edellisessä tuloksessa kuvauksen ρ_q kuuluminen joukkoon $SO(3)$ kertoo sen olevan kierto[8]. Kuvauksen ϕ surjektiivisuus täydentää tulosta osoittamalla, että *jokainen* kierto voidaan esittää kuvauksena ρ_q, $q \in \mathbb{H}_*$. Kuvauksen ϕ ydin taas kertoo,

[8] Kierto tapahtuu akselin $q_3 - q_2\mathrm{i} + q_3\mathrm{j}$ suhteen. Tämä nähdään ratkaisemalla yhtälö $qxq'^{-1} = x$ eli ne muuttujan x arvot, jotka kierto ρ_q kuvaa itselleen.

ettei kuvaus ole injektio, vaan jokaista kiertoa ρ_q vastaa kvaternin q lisäksi myös kvaternit kq, $k \in \mathbb{R}_*$.

Kuvaus ρ_q voidaan kirjoittaa reversiota käyttäen yksinkertaisempaan muotoon

$$\rho_q(x) = qxq'^{-1} = qx\frac{\overline{q'}}{|q'|^2} = \frac{1}{|q|^2}qxq^*. \tag{4.8}$$

Koska kunkin kierron ρ_q generoi kvaternin $q \neq 0$ lisäksi myös sen reaaliset monikerrat kq, $k \in \mathbb{R}_*$, kvaterni q voidaan valita aina niin, että sille pätee $|q| = 1$. Tällöin edellisestä yhtälöstä nähdään kierron yksinkertaistuvan edelleen muotoon

$$x \mapsto qxq^*, \quad q \in \mathbb{H}_*, \quad |q| = 1.$$

Jatkossa avaruuden $\mathbb{R}^3$ kierrolla tarkoitetaan kiertoa juuri tässä muodossa.

Osoitetaan vielä lopuksi, että kierrolle ρ_q pätee laajenemisominaisuus.

Propositio 4.5.5. *Kuvauksen $x \mapsto qxq^*$, $q \in \mathbb{H}_*$, arvot kuuluvat*

(1) *avaruuteen $\mathbb{R}^3$, kun muuttuja kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^3$*

(2) *avaruuteen $\mathbb{R}^4$, kun muuttuja kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^4$.*

Todistus. Käsitellään ensin kohta (1). Koska x on redusoitu kvaterni, pätee $x = x^*$ ja voidaan kirjoittaa

$$(qxq^*)^* = \big[q(xq^*)\big]^* = (xq^*)^*q^* = qx^*q^* = qxq^*.$$

Näin ollen qxq^* on myös redusoitu kvaterni, joten kohta (1) on tosi.

Kohdassa (2) muuttuja $x \in \mathbb{R}^4$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = x_0 + x_1\mathrm{e}_1 + x_2\mathrm{e}_2 + x_3\mathrm{e}_3 = y + x_3\mathrm{e}_3,$$

jolloin lauseke qxq^* tulee muotoon

$$qxq^* = qyq^* + q(x_3\mathrm{e}_3)q^*.$$

Nyt oikean puolen ensimmäinen termi qyq^* kuuluu kohdan (1) nojalla avaruuteen $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ jokaisella muuttujan $y \in \mathbb{R}^3$ arvolla. Riittää siis osoittaa, että myös termi $q(x_3\mathrm{e}_3)q^*$ kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^4$ jokaisella muuttujan $x_3\mathrm{e}_3 \in \mathbb{R}^4$ arvolla. Tämä nähdään vaihtamalla tulon e_3q^* järjestystä kaavan (2.5) mukaisesti, jolloin voidaan kirjoittaa

$$q(x_3\mathrm{e}_3)q^* = x_3q(q^*)'\mathrm{e}_3 = x_3q\overline{q}\mathrm{e}_3 = x_3\,|q|^2\,\mathrm{e}_3 = x_3\mathrm{e}_3.$$

Koska kerroin x_3 on reaalinen, lauseke $x_3\mathrm{e}_3$ kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^4$. □

Edellisen tuloksen (1)-kohta on jo Lauseen 4.5.4 perusteella selvä. Nyt se on kuitenkin helpommin viitattavassa muodossa jatkon kannalta.

Huomautus 4.5.6. *Edellisen tuloksen kohdan (2) todistuksesta nähdään, että laajennettaessa muuttuja $x \in \mathbb{R}^3$ avaruuden $\mathbb{R}^4$ muuttujaksi, kierto $x \mapsto qxq^*$, $|q| = 1$, pysyy ennallaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ suhteen ja muuttujan laajennettu komponentti $x_3\mathrm{e}_3$ pysyy kuvauksessa paikallaan. Täten kyseiselle kierrolle pätee alaluvussa 3.4 esitelty laajenemisominaisuus. Tämä ominaisuus on tärkeässä roolissa luvussa 6, jossa käsitellään yleisesti avaruuden $\mathbb{R}^3$ Möbius-kuvauksia.*

Kierto voidaan esittää myös kuvausmatriisin ρ_q ja pystyvektorin $x \in \mathbb{R}^3$ tulona. Laajennetun muuttujan $x \in \mathbb{R}^4$ tapauksessa kiertomatriisi ρ_q tulee tällöin korvata 4×4 lohkomatriisilla

$$\begin{bmatrix} \rho_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Näiden tulosten myötä voidaan palata takaisin käsittelemään kompleksikertoimisten Möbius-kuvausten laajentamista avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ ja erityisesti tämän jälkeen siirtyä käsittelemään yleisesti avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksia.

5 AVARUUTEEN $\mathbb{R}^3_\infty$ LAAJENEVAT KOMPLEKSITASON MÖBIUS-KUVAUKSET

Alaluvussa 3.4 todettiin, että kompleksikertoimiset Möbius-kuvaukset voidaan laajentaa avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$. Laajennuksen ongelmaksi nousi kierron laajentaminen kyseiseen avaruuteen, minkä vuoksi siirryttiin käsittelemään kiertoja kvaternien avulla ilmaistuna. Edellisen luvun tulosten myötä voidaan nyt palata takaisin käsittelemään tätä laajennusta.

Nyt siis muuttuja $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ on redusoitu kvaterni ja myös kompleksikertoimet a, b, c ja d tulkitaan kvaterniksi. Näiden muutosten myötä Möbius-kuvauksen lauseke kirjoitetaan jakolasku-merkintätavan sijaan muotoon

$$T(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}.$$

Pseudodeterminanttia koskevan ehdon puuttuminen ei ole vahinko tai kirjoittajan laiskuutta, vaan Esimerkistä 3.4.1 voidaan päätellä, ettei aiempi pseudodeterminantin ehto $\Delta \neq 0$ takaa kuvauksen pysymistä avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$: tapauksessa $a = \mathrm{i}$, $b = c = 0$, $d = 1$ Möbius-kuvaukselle T pätee

$$T(\mathrm{j}) = \mathrm{ij} = \mathrm{k} \notin \mathbb{R}^3_\infty,$$

vaikka pseudodeterminantti $\Delta = \mathrm{i}$ on nollasta poikkeava. Näin ollen on luontevaa kysyä, millä ehdoilla kuvaus sitten pysyy avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$.

Propositio 5.0.7. *Kuvauksen $T(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^3_\infty$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, arvojoukko kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ täsmälleen, kun pseudodeterminantille pätee ehto $\Delta \in \mathbb{R}_*$.*

Todistus. On siis osoitettava, että pseudodeterminantin $\Delta = ad - bc$ tulee olla nollasta poikkeava ja että tämän lisäksi sen imaginääriosan tulee olla nolla.

Aloitetaan ehdosta $\Delta \neq 0$. Kuten aiemmin, ehto seuraa siitä, että kuvaus ei ole määritelty tapauksessa $ax + b = 0 = cx + d$, josta seuraisi ehto

$$a\left(-c^{-1}d\right) + b = 0,$$

joka on edelleen kertoimien kompleksisuuden nojalla yhtäpitävää ehdon $ad - bd = 0$

kanssa. Näin ollen tulee päteä $\Delta \neq 0$.

Todistetaan sitten pseudodeterminantin imaginääriosaa koskeva ehto. Kuvaus $(ax+b)(cx+d)^{-1}$ pysyy avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$ jokaisella $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ täsmälleen, kun kuvauksen k-komponentti on nolla, eli kun jokaiselle $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ pätee

$$\operatorname{Im}\Big(Q\big[(ax+b)(cx+d)^{-1}\big]\Big) = 0.$$

Lähdetään tarkastelemaan, mitä ehtoja tästä vaatimuksesta seuraa kertoimille.

Kuvauksen ei-kompleksisen osan $Q\big[T(x)\big]$ selvittämiseksi kuvauksen lauseketta täytyy muokata. Kirjoitetaan ensin kuvauksen lausekkeessa oleva käänteisluku konjugaatin avulla:

$$(ax+b)(cx+d)^{-1} = \frac{(ax+b)\overline{(cx+d)}}{|cx+d|^2} = \frac{(ax+b)(\overline{x}\,\overline{c}+\overline{d})}{|cx+d|^2}.$$

Koska nimittäjä $|cx+d|^2$ on reaalinen, vain osoittajalla on vaikutusta kuvauksen arvojoukon dimensioon, joten rajoitutaan käsittelemään vain sitä.

Osoittajan aukikirjoitettu muoto on

$$(ax+b)(\overline{x}\,\overline{c}+\overline{d}) = |x|^2\,a\overline{c} + ax\overline{d} + b\overline{x}\,\overline{c} + b\overline{d},$$

ja koska lausekkeen ensimmäinen ja viimeinen termi ovat kompleksisia, riittää keskittyä kahteen keskimmäiseen termiin. Hajotetaan niiden tarkastelua varten muuttuja x kompleksiseen ja ei-kompleksiseen osaan operaattorien P ja Q avulla, jolloin saadusta lausekkeesta

$$ax\overline{d} + b\overline{xc} = a\big[P(x) + Q(x)\mathrm{j}\big]\overline{d} + b\big[\overline{P(x)} - Q(x)\mathrm{j}\big]\overline{c}$$

voidaan jälleen jättää huomiotta kompleksiset termit ja keskittyä kriittisiin, j-komponentista riippuviin termeihin. Ne voidaan kirjoittaa muotoon

$$aQ(x)\mathrm{j}\overline{d} - bQ(x)\mathrm{j}\overline{c} = Q(x)(ad-bc)\mathrm{j} = Q(x)\Delta\mathrm{j},$$

missä $Q(x)$ on reaalinen, sillä muuttujan x k-komponentti on nolla.

Näin ollen on päätelty ehto

$$Q\big[(ax+b)(cx+d)^{-1}\big] = \frac{Q(x)\Delta}{|cx+d|^2},$$

missä $Q(x)$ ja nimittäjä ovat reaalisia $|cx+d|^2$. Alkuperäinen vaatimus tulee täten muotoon

$$0 = \operatorname{Im}\Big(Q\big[(ax+b)(cx+d)^{-1}\big]\Big) = \frac{Q(x)}{|cx+d|^2}\operatorname{Im}\Delta,$$

missä käytettiin kompleksiluvun imaginääriosalle pätevää ehtoa $\operatorname{Im}(kz) = k\operatorname{Im}(z)$, $k \in \mathbb{R}$. Yhtälö toteutuu jokaiselle $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ täsmälleen, kun pätee

$$\operatorname{Im}\Delta = 0,$$

joka on yhtäpitävää ehdon $\Delta \in \mathbb{R}$ kanssa.

Kaiken kaikkiaan tulee siis päteä ehto $\Delta \in \mathbb{R}_*$. □

Edellisen tuloksen perusteella Möbius-kuvausten laajentaminen kiristää pseudodeterminanttia koskevaa ehtoa karsien pois ne kuvaukset, joiden pseudodeterminantti on aidosti kompleksinen, kuten luvun alussa tarkasteltu kuvaus $T(x) = \mathrm{i}x$. Voivatko kaikki alkuperäiset Möbius-kuvaukset tästä johtuen enää laajeta avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$? Asian selvittämiseksi tulee tarkastella, mitkä ovat ne kuvaukset, jotka karsiutuvat pois, eli mitkä ovat ne Möbius-kuvaukset, joiden pseudodeterminantti on kompleksinen.

Alaluvun 3.3 tulosten nojalla Möbius-kuvaukset voidaan kirjoittaa kuvausten (1)–(5) eli siirtojen, kiertojen, venytysten, inversioiden ja identtisten kuvausten yhdisteinä. Koska lisäksi Proposition 3.3.5 nojalla Möbius-kuvauksen pseudodeterminantti saadaan sen matriisihajotelman pseudodeterminanttien tulona, jokaisen Möbius-kuvauksen pseudodeterminantti saadaan kuvausten (1)–(5) pseudodeterminanttien tulona. Näin ollen riittää tarkastella niiden kompleksisuutta.

Selvästi nähdään, että kuvausten (1)–(5) muotoilussa vain kierrolla ja identtisellä kuvauksella voi olla kompleksinen determinantti. Identtiset kuvaukset vastaavat kuitenkin vain muiden Möbius-kuvausten "monikertoja", joten ne voidaan jättää huomiotta. Näin on päätelty, että laajennuksessa menetetään vain ne alkuperäiset Möbius-kuvaukset, joissa on kiertoja.

Jotta kaikki Möbius-kuvaukset voisivat laajeta avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$, edellisen nojalla tulisi näyttää, että alkuperäiset kierrot voidaan toteuttaa myös niin, että pseudodeterminantti pysyy reaalisena. Miten kierto tulisi määritellä, jotta kaikkia alkuperäiset kierrot varmasti säilyisivät laajennuksessa? Luonnollinen valinta kuvaukseksi on

$$T(x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(x_0 + x_1\mathrm{i}) + x_2\mathrm{j}, \tag{5.1}$$

joka siis vastaa muuten kompleksitason kiertoa, mutta lisäehtona on j-komponentin pysyminen paikallaan. Seuraavaksi osoitetaan, että tällainen kuvaus voidaan todella toteuttaa ja että sen pseudodeterminantti on reaalinen.

Koska kuvauksen laskutoimitukset tapahtuvat kvaternien algberassa, kierron tulee olla edellisessä luvussa johdettua muotoa muotoa $x \mapsto qxq^*$, $|q| = 1$, joka yksinkertaistuu kompleksikertoimien tapauksessa muotoon

$$x \mapsto qxq, \quad q \in \mathbb{C}, \quad |q| = 1.$$

Kun muuttuja x kirjoitetaan komponenttimuodossa, kierron kuvauslauseke tulee muotoon

$$q(x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j})q = q(x_0 + x_1\mathrm{i})q + x_2 q\mathrm{j}q = q^2(x_0 + x_1\mathrm{i}) + x_2\mathrm{j}. \tag{5.2}$$

Vertaamalla yhtälöitä (5.1) ja (5.2) nähdään, että kompleksiluvulle q tulee päteä ehto

$$q^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

joten sen on oltava muotoa

$$q = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}},$$

joka toteuttaa myös ehdon $|q| = 1$.

Edellä tehdyn päättelyn nojalla voidaan asettaa laajennetun kierron määritelmä.

Määritelmä 5.0.8. *Avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ laajenevien kompleksikertoimisten Möbius-kuvausten kierto on kuvaus muotoa*

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Näin määritellyn kierron pseudodeterminantti on selvästi reaalinen ja nollasta poikkeava:

$$\Delta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = 1.$$

Korostettakoon, että kyseinen kierto ei käsitä yleisesti avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ kiertoja, vaan se on tason kierto, joka mahdollistaa myös muuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ käytön pitämällä sen j-komponentin ennallaan.

Kompleksikertoimisten Möbius-kuvausten laajentamiseen liittyvä ongelma ei kuitenkaan vielä ratkea kierron käsittelyn myötä, vaan seuraavaksi tulisi osoittaa, että lauseke $(ax + b)(cx + d)^{-1}$ voidaan hajottaa sellaiseen muotoon, josta sen nähdään olevan yhdiste kuvauksista (1) ja (3)–(5) sekä edellä käsitellystä kierrosta. Tätä ei kuitenkaan tehdä seuraavaksi, sillä vastaava hajotelma täytyy tehdä joka tapauksessa vastaavalla tavalla seuraavassa luvussa, jossa käsitellään avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksia. Tämän luvun tarkoituksena on lähinnä tehdä uskottavaksi Möbius-kuvausten laajenemisominaisuus, sillä se on perustavanlaatuisessa roolissa seuraavan luvun alussa. Luvun lopuksi käsitellään vielä kiertoihin ja edellä mainittuun hajotelmaan liittyvää ongelmaa, joka johtaa, myös seuraavan luvun alussa tarvittaviin, oleellisiin muutoksiin avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten ominaisuuksissa.

Kuvaus $x \mapsto -x$ eli peilaus origon suhteen voitiin toteuttaa kompleksikerrointen tapauksessa kiertona $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}x = -x$ jokaiselle $x \in \mathbb{C}$, mutta edellä määritellyllä kierrolla ei selvästikään ole tätä ominaisuutta, sillä se ei vaikuta j-komponentin arvoon. Myöskään yleisellä avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ kierrolla ei ole tätä ominaisuutta. Tämä voidaan päätellä seuraavasti: Avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ kierrot ovat muotoa $x \mapsto qxq^* = qxq'^{-1}$, $q \in \mathbb{H}$, $|q| = 1$. Halutun kierron tapauksessa tulisi päteä $qxq'^{-1} = -x$ eli $qx = -xq'$ jokaiselle $x \in \mathbb{R}^3_\infty$. Antamalla siis muuttujalle x kiinteitä arvoja kertoimelle q saadaan johdetuksi ehtoja.

Olkoon siis kvaterni q muotoa $q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k}$, ja olkoon ensin $x = 1$. Tällöin on oltava voimassa

$$q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k} = -(q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_{12}\mathrm{k})' \quad \text{eli} \quad 2q_0 + 2q_{12}\mathrm{k} = 0,$$

mikä on mahdollista vain, jos pätee $q_0 = 0$ ja $q_{12} = 0$. Näin ollen q pelkistyy muotoon $q = q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j}$.

Olkoon seuraavaksi $x = \mathrm{i}$. Tällöin on oltava voimassa

$$(q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j})\mathrm{i} = -\mathrm{i}(q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j})' \quad \text{eli} \quad 0 = 2q_2\mathrm{k},$$

mistä seuraa ehto $q_2 = 0$. Näin ollen q pelkistyy edelleen muotoon $q = q_1\mathrm{i}$.

Olkoon lopuksi $x = \mathrm{j}$. Tällöin on oltava voimassa

$$q_1\mathrm{ij} = -\mathrm{j}(q_1\mathrm{i})' \quad \text{eli} \quad 2q_1\mathrm{k} = 0,$$

joten myös kertoimen q_1 on oltava nolla. Näin ollen $q = 0$, mikä on ristiriita ehdon $q = 1$ kanssa.

Huomattakoon, ettei peilausta origon suhteen saada avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$ edes kiertojen yhdisteinä, sillä Proposition 4.5.3 nojalla kiertojen yhdisteet ovat myös edellä käsiteltyä muotoa. Tästä johtuen tasoa korkeampien avaruuksien yhteydessä kuvaus $x \mapsto -x$ eli peilaus origon suhteen määritellään omaksi kuvaukseksi. Yleisemmin peilaus pisteen a suhteen avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on kuvaus muotoa $x \mapsto 2a - x$, joten kaikki peilaukset pisteen suhteen ovat origon suhteen tapahtuvan peilauksen ja siirron yhdisteinä Möbius-kuvauksia.

Origon suhteen tapahtuvalla peilauksella on merkittäviä seurauksia Möbius-kuvauksien geometriseen luonteeseen. Sitä vastaava kuvausmatriisi on $-I$, jonka determinantti on 1 parillisen ulottuvuuden ja -1 parittoman ulottuvuuden tapauksessa, joten se on ulottuvuudesta riippuen joko erityisortogonaalikuvaus tai joukon O^- kuvaus. Avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ tapauksessa se on joukon $O^-(3)$ kuvaus, ja koska joukon $O^-(3)$ ja $SO(3)$ kuvausten yhdisteet ovat myös joukon $O^-(3)$ kuvauksia, avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksilla on mahdollista toteuttaa origon suhteen tapahtuvan peilauksen lisäksi myös muita joukon $O^-(3)$ kuvauksia. Seuraava tulos osoittaa, että itse asiassa kaikki joukon $O^-(3)$ kuvaukset kuuluvat avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksiin.

Propositio 5.0.9. *Jokainen joukon $O^-(3)$ kuvaus voidaan kirjoittaa kierron ja origon suhteen tapahtuvan peilauksen yhdisteenä.*

Todistus. Olkoon A joukon $O^-(3)$ matriisi. Näin ollen se on 3×3-matriisi, joka toteuttaa ehdot $AA^T = I = A^TA$ ja $\det(A) = -1$. Kun A kirjoitetaan muotoon $A = -I(-A)$ se on matriisin $-A$ ja origon suhteen tapahtuvan peilauksen yhdiste. Riittää siis osoittaa, että $-A$ on kierto.

Koska matriisille $-A$ pätee ehto

$$(-A)(-A)^T = AA^T = I = A^TA = (-A)^T(-A),$$

se on ortogonaalimatriisi. Lisäksi matriisin A determinanttia koskeva ehto voidaan kirjoittaa matriisin koon nojalla muotoon

$$-1 = \det(A) = \det\big[-(-A)\big] = (-1)^3 \det(-A) = -\det(-A),$$

josta saadaan ratkaistua matriisin $-A$ determinantiksi $\det(-A) = 1$. Näin ollen $-A$ on kierto. $\square$

Tämän tuloksen myötä voidaan viimein siirtyä käsittelemään yleisesti avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksia.

6 AVARUUDEN $\mathbb{R}^3_\infty$ MÖBIUS-KUVAUKSET

Avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ kiertojen esittäminen ei onnistu kompleksikertoimisilla Möbius-kuvauksilla, mutta se on mahdollista kvaternikertoimilla. Myöskään avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ siirtoa ei voida toteuttaa kompleksikertoimilla, sillä siirron parametrin b on oltava tällöin redusoitu kvaterni. Näistä syistä avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten kertoimet a, b, c ja d tulee laajentaa kompleksiluvuista kvaterneiksi.

Kvaternikertoimisten avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten tapauksessa edetään hieman eri tavalla kuin kompleksikertoimisessa tapauksessa. Möbius-kuvauksia ei määritelläkään suoraan tietyllä kaavalla, vaan kuvausominaisuuksien perusteella tiettyjen geometristen kuvausten yhdisteinä. Tämän jälkeen osoitetaan, että tiettyyn tapaan määritelty joukko M, jonka matriisit indusoivat bijektiivisen kuvauksen $x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}$, on homomorfinen Möbius-kuvausten ryhmän kanssa. Samalla havaitaan, että joukon M kuvauksia koskeva alkuperäinen vaatimus voidaan korvata havainnollisemmilla ehdoilla, jolloin joukko M saadaan kompleksikertoimisten Möbius-kuvausten kanssa yhdenmukaisempaan muotoon. Tämä poikkeava lähestymistapa johtuu siitä, että kompleksitapauksen pseudodeterminantin ehto ei enää yksinään riitä takamaan Möbius-kuvauksille haluttuja ominaisuuksia korkeammissa avaruuksissa.

6.1 Möbius-kuvausten määrittely

Lähdetään liikkeelle määrittelemällä ensin, mitä avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksilla tarkkaan ottaen tarkoitetaan.

Määritelmä 6.1.1. *Avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten ryhmä $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ on similaarikuvausten*

$$x \mapsto \lambda k(x) + b,$$

missä λ on positiivinen reaaliluku, k on ortogonaalikuvaus ja b on avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, sekä inversioiden

$$x \mapsto -\frac{\overline{x}}{|x|^2}$$

generoima ryhmä.

Edellinen määritelmä poikkeaa lähteen [1] muotoilusta kahdella tapaa. Ensinnäkin k on kirjoitettu yleisempänä ortogonaalikuvauksena poiketen lähteestä, jossa se määritellään 3×3-ortogonaalimatriisiksi. Tämä muutos mahdollistaa myös laajennetun muuttujan $x \in \mathbb{R}^4$ huomioimisen. Toiseksi inversio on vastakkaismerkkinen lähteeseen verrattuna. Tämä on vain määrittelykysymys. Tässä tekstissä käytetty valinta mahdollistaa myöhemmin esiteltävän Möbius-kuvausten suunnistuksen säilymistä koskevan tuloksen, Proposition 6.4.3, esittämisen kyseisessä muodossa.

Osoitetaan seuraavaksi, että similaarikuvaus voidaan korvata tuttujen geometristen kuvausten yhdisteillä.

Propositio 6.1.2. *Avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ similaarikuvaukset voidaan muodostaa yhdisteinä seuraavista kuvauksista:*

- *siirto* $\begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto x + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}^3$
- *kierto* $\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q' \end{bmatrix}, \quad x \mapsto qxq^*, \quad q \in \mathbb{H}, \quad |q| = 1$
- *venytys* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \quad x \mapsto \lambda^2 x, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$
- *peilaus origon suhteen* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto -x.$

Todistus. Similaarikuvausten lauseke on muotoa $\lambda k(x) + b$, jossa $\lambda > 0$, k on ortogonaalikuvaus ja $b \in \mathbb{R}^3$. Kun ortogonaalikuvausta k vastaavan matriisin determinantti on 1, se kuuluu joukkoon $SO(3)$ ja saadaan Proposition 4.5.4 nojalla kierron $x \mapsto qxq^* = \rho_q(x)$ kuvausmatriisista $\rho_q \in SO(3)$. Kun ortogonaalikuvausta k vastaavan matriisin determinantti on -1, se kuuluu joukkoon $O^-(3)$ ja saadaan Proposition 5.0.9 nojalla kierron ja origon suhteen tapahtuvan peilauksen yhdisteen $x \mapsto -qxq^* = -\rho_q(x)$ kuvausmatriisista $-\rho_a \in O^-(3)$. Molemmissa tapauksissa positiivinen kerroin λ saadaan venytyksellä ja summattava vektori b siirrolla. $\square$

Similaarikuvaukset koostuvat siis kierrosta tai peilauksesta, venytyksestä ja siirrosta. Näin ollen ne voidaan ajatella kompleksilukujen yhteydessä esiteltyjen joukon L kuvausten laajennuksina avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$. Konkreettisena erona on kuitenkin se, kuten edellisessä luvussa perusteltiin, että similaarikuvaukset sisältävät kiertojen ohella myös joukon $O^-(3)$ kuvaukset. Kompleksilukujen tapauksessa Möbius-kuvausten osoitettiin olevan joukon L kuvausten ja inversioiden yhdisteitä, mutta myös tällöin olisi voitu lähteä liikkeelle päinvastaisesti määrittelemällä Möbius-kuvaukset tällaisiksi kuvauksiksi.

Huomattakoon, että similaarikuvauksille pätee laajenemisominaisuus, sillä siirto, venytys ja peilaus origon suhteen pysyvät selvästi avaruudessa $\mathbb{R}^4_\infty$ myös muuttujan $x \in \mathbb{R}^4_\infty$ tapauksessa ja sama pätee kierrolle Proposition 4.5.5 nojalla.

Edellisen tuloksen myötä Möbius-kuvausten ryhmä voidaan ilmaista seuraavassa muodossa.

Seuraus 6.1.3. *Avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten ryhmä $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ on siirtojen, kiertojen, venytysten, origon suhteen tapahtuvien peilausten sekä inversioiden generoima ryhmä.*

Määritellään seuraavaksi matriisien joukko, joka osoitetaan myöhemmin homomorfiseksi Möbius-kuvausten ryhmän kanssa.

Määritelmä 6.1.4. *Joukko M muodostuu kvaternialkioisista 2×2-matriiseista $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, jotka indusoivat bijektion*

$$\mathbb{R}^4_\infty \to \mathbb{R}^4_\infty, \quad x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}.$$

Joukon M matriisien indusoimat kuvaukset vastaavat muodoltaan kompleksitapauksen Möbius-kuvauksia, mutta niiltä vaaditaan pseudodeterminantin ehdon sijaan alaluvussa 3.4 esitelty laajenemisominaisuus. Tämä johtuu siitä, että kompleksitapauksen mukainen vaatimus pseudodeterminantin nollasta poikkeavuudesta ei johda haluttuihin ominaisuuksiin kyseisille kuvauksille, kun taas laajenemisominaisuus johtaa. Laajenemisominaisuus on siis eräässä mielessä perustavammanlaatuisempi Möbius-kuvausten ominaisuus kuin pseudodeterminantin ehto. Huomautettakoon, että bijektiivisyysoletuksen seurauksena matriisin T indusoimassa kuvauksessa esiintyvä käänteisalkio $(cx+d)^{-1}$ on aina olemassa.

Tarkkaan ottaen joukon M alkiot ovat matriiseja ja kuvaus $x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}$ on ”matriisin T indusoima kuvaus”. Tekstin sujuvuuden parantamiseksi jälkimmäisestä käytetään kuitenkin yksinkertaisempaa ilmaisua ”kuvaus T”. Tämä on hieman epätäsmällistä myös siksi, kuten myöhemmin huomautetaan, että kuvausta vastaava matriisi ei ole yksikäsitteinen. Tämä käytäntö ei kuitenkaan aiheuta tulkintaongelmia.

Huomattakoon, että edellisen määritelmän bijektiivisyysoletuksesta seuraa myös, että muuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ tapauksessa kuvaukset ovat bijektioita avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$. Tämä johtuu siitä, että muuttuja $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ on redusoitu kvaterni, joten lausekkeen $(ax+b)(cx+d)^{-1}$ laskutoimitukset tapahtuvat kvaternien algebrassa. Lausekkeen arvo on siis kvaterni, ja jotta se voisi kuulua avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$, sen tulee olla redusoitu kvaterni.

Tämän luvun keskeisenä tavoitteena on osoittaa joukko M homomorfiseksi ryhmän $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ kanssa, mikä todistaa, että avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvaukset voidaan esittää kuvauksilla $T(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$. Tämä tehdään hajottamalla kuvaus T muotoon, josta se nähdään siirtojen, kiertojen, venytysten, origon suhteen tapahtuvien peilausten ja inversioiden yhdisteeksi. Tästä nimittäin seuraa, että jokainen matriisi $T \in M$ voidaan kirjoittaa siirron, kierron, venytyksen, origon suhteen tapahtuvan peilauksen sekä inversion indusoivien matriisien tulona, mikä tarkoittaa, että kyseiset matriisit generoivat joukon M kuvaukset. Tämän jälkeen homomorfisuuden osoittaminen onnistuu suoraviivaisesti. Kyseistä hajotelmaa varten tulee kuitenkin ensin johtaa tiettyjä ehtoja, jotta esimerkiksi hajotelmaan muodostuvat siirron parametria μ vastaavat termit tiedetään kuuluvan avaruuteen $\mathbb{R}^3$. Jotta joukko M voisi olla homomorfinen ryhmän $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ kanssa, joukko M on myös ensin osoitettava ryhmäksi.

6.2 Joukon M osoittaminen ryhmäksi

Ensimmäinen tulos antaa kertoimia koskevia ehtoja, joita käytetään jatkossa toistuvasti hyväksi muokattaessa lausekkeita tarkoituksenmukaisiin muotoihin.

Propositio 6.2.1 ([18])**.** *Kuvausten $T(0) = bd^{-1}$, $T(\infty) = ac^{-1}$, $T^{-1}(0) = -a^{-1}b$ ja $T^{-1}(\infty) = -c^{-1}d$ arvot ovat redusoituja kvaterneja.*

Todistus. Täydennetään lähteen [18] todistusta. Koska matriisin T indusoiman kuvauksen maalijoukko on $\mathbb{R}^4_\infty$, kuvausten arvot ovat muotoa $v = v_0+v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3$. Väitteen kuvausten arvot ovat kvaternituloina muotoa $q = q_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_{12}e_{12}$, joten avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ kuuluakseen niiden tulee olla muotoa $q = q_0 + q_1e_1 + q_2e_2$, jolloin ne ovat redusoituja kvaterneja. Näin ollen tuloksen todistamiseksi riittää johtaa väitteen kuvausehdot.

Tapaus $T(0) = bd^{-1}$ on selvä.

Muokataan tapausta $T(\infty) = ac^{-1}$ varten lauseketta $(ax + b)(cx + d)^{-1}$ niin, että muuttuja x esiintyy siinä vain käänteislukuna, jolloin voidaan käyttää ehtoa $1/\infty = 0$. Tämä onnistuu ottamalla muuttuja x ensin molemmissa sulkulausekkeissa yhteiseksi tekijäksi ja muokkaamalla jälkimmäisen sulkulausekkeen tulon käänteislukua seuraavasti

$$\begin{aligned} T(x) &= (ax+b)(cx+d)^{-1} \\ &= \big[(a+bx^{-1})x\big]\big[(c+dx^{-1})x\big]^{-1} \\ &= (a+bx^{-1})xx^{-1}(c+dx^{-1})^{-1} \\ &= (a+bx^{-1})(c+dx^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Viimeisestä muodosta voidaan lukea, että äärettömyyspisteelle pätee $T(\infty) = ac^{-1}$.

Nollan ja äärettömän alkukuvapisteiden määräämiseksi asetetaan $T(x) = y$ ja ratkaistaan käänteiskuvaus $T^{-1}(y) = x$ seuraavasti

$$\begin{aligned} & (ax+b)(cx+d)^{-1} = y \\ \Longleftrightarrow \quad & (ax+b) = y(cx+d) \\ \Longleftrightarrow \quad & (a-yc)x = yd-b \\ \Longleftrightarrow \quad & x = (a-yc)^{-1}(yd-b). \end{aligned}$$

Edellisen päättelyn viimeisessä vaiheessa tarvitaan tietoa, että luvulla $a - yc$ on käänteisalkio. Tämä nähdään kirjoittamalla se muotoon

$$a - yc = ac^{-1}c - yc = (ac^{-1} - y)c.$$

Nyt ac^{-1} on edellä todistetun nojalla redusoitu kvaterni, joten $ac^{-1} - y$ on vektori. Näin ollen $a - yc$ on kääntyvien alkioiden tulona itsekin kääntyvä. Käänteiskuvaus on täten muotoa $T^{-1}(y) = (a - yc)^{-1}(yd - b)$, josta voidaan lukea suoraan alkukuva $T^{-1}(0) = -a^{-1}b$.

Tapauksessa $T^{-1}(\infty)$ menetellään kuten tapauksessa $T(\infty)$ ja kirjoitetaan käänteiskuvaus muotoon

$$\begin{aligned} (a-yc)^{-1}(yd-b) &= \big[y(y^{-1}a-c)\big]^{-1}\big[y(d-y^{-1}b)\big] \\ &= (y^{-1}a-c)^{-1}y^{-1}y(d-y^{-1}b) \\ &= (y^{-1}a-c)^{-1}(d-y^{-1}b), \end{aligned}$$

jolloin äärettömän alkukuvapisteeksi nähdään $T^{-1}(\infty) = -c^{-1}d$. □

Edellisen tuloksen ehdot voidaan kirjoittaa myös reversiota käyttäen.

Propositio 6.2.2 ([18]). *Olkoon T joukon M matriisi. Tällöin kvaternitulot ab^*, a^*c, b^*d ja cd^* ovat redusoituja kvaterneja.*

Todistus. Edellisen tuloksen nojalla $bd^{-1}, ac^{-1}, a^{-1}b$ ja $c^{-1}d$ ovat redusoituja kvaterneja. Koska a, b, c ja d ovat kvaterneja, tulot ab^*, a^*c, b^*d ja cd^* ovat Proposition 2.1.20 nojalla redusoituja kvaterneja. □

Ryhmäominaisuuksia käsittelevistä tuloksista ensimmäinen koskee joukon M kuvausten yhdisteitä.

Propositio 6.2.3 ([18]). *Joukon M matriisien tulo indusoi yhdistetyn kuvauksen.*

Todistus. Täydennetään lähteen [18] todistusta. Olkoot $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ ja $S = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right]$ joukon M matriiseja. On siis näytettävä, että matriisitulon

$$ST = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma + b\delta d \end{bmatrix}$$

indusoima kuvaus

$$(ST)(x) = \big[(\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)\big]\big[(\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)\big]^{-1},$$

ja matriisien indusoimien kuvausten yhdistetty kuvaus

$$(S \circ T)(x) = S\big[T(x)\big] = \big[\alpha(ax+b)(cx+d)^{-1} + \beta\big]\big[\gamma(ax+b)(cx+d)^{-1} + \delta\big]^{-1}.$$

voidaan muokata samaan muotoon.

Jotta jälkimmäinen lauseke voisi olla oikeaa muotoa, termeistä $(cx+d)^{-1}$ olisi päästävä eroon. Tämä tehdään ottamalla ne yhteisiksi tekijöiksi ja kirjoittamalla jälkimmäisten hakasulkujen tulon käänteisluku auki:

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(x) &= \Big(\big[\alpha(ax+b) + \beta(cx+d)\big](cx+d)^{-1}\Big) \\
&\quad \cdot \Big(\big[\gamma(ax+b) + \delta(cx+d)\big](cx+d)^{-1}\Big)^{-1} \\
&= \big[\alpha(ax+b) + \beta(cx+d)\big](cx+d)^{-1}(cx+d)\big[\gamma(ax+b) + \delta(cx+d)\big]^{-1} \\
&= \big[(\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)\big]\big[(\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)\big]^{-1}.
\end{aligned}$$

Näin saatu lauseke on haluttua muotoa. □

Käydään läpi seuraavaa tulosta varten eräs kompleksitapauksesta tuttu havainto.

Huomautus 6.2.4. *Kuvauksen $x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}$ indusoiva joukon M matriisi T ei ole yksikäsitteinen, vaan kaikki sen nollasta poikkeavat reaaliset monikerrat ($\lambda \in \mathbb{R}_*$) indusoivat saman kuvauksen kuin T:*

$$\begin{aligned}
(\lambda T)(x) &= (\lambda a x + \lambda b)(\lambda c x + \lambda d)^{-1} \\
&= \lambda(ax+b)\big[\lambda(cx+d)\big]^{-1} \\
&= (ax+b)\lambda(cx+d)^{-1}\lambda^{-1} \\
&= (ax+b)(cx+d)^{-1} = T(x).
\end{aligned}$$

Kompleksitapauksesta poiketen kerroin $\lambda \neq 0$ ei siis voi olla kompleksinen (tai kvaterni) kvaternien kertolaskun ei-vaihdannaisuudesta johtuen.

Identtisen kuvauksen indusoivat matriisit ovat muuten ilmeistä muotoa, mutta kompleksitapauksesta poiketen niiden alkioiden täytyy olla reaalisia.

Propositio 6.2.5 ([18]). *Matriisi $T \in M$ indusoi identtisen kuvauksen, jos ja vain jos se on muotoa*

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}_*.$$

Todistus. Täydennetään lähteen [18] todistusta. Identtinen kuvaus $T(x) = x$ on yhtäpitävää yhtälön $ax+b = x(cx+d)$ kanssa. Koska kuvauksen tulee olla voimassa jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{R}^4_\infty$ arvolla, kertoimille a, b, c ja d saadaan johdettua ehtoja valitsemalla muuttujalle x sopivia kiinteitä arvoja.

Olkoon ensin $x = 0$. Valinnasta seuraa suoraan ehto $b = 0$, minkä seurauksena identtistä kuvausta vastaava yhtälö yksinkertaistuu muotoon $ax = x(cx + d)$.

Tapauksen $x = \infty$ tarkastelemiseksi yhtälö $ax = x(cx + d)$ muokataan yhtäpitävään muotoon $x^{-1}a = c + dx^{-1}$, josta voidaan lukea muuttujan valinnasta aiheutuvaksi ehdoksi $c = 0$. Näin ollen alkuperäinen yhtälö saa muodon $ax = xd$.

Valitsemalla lopuksi vielä $x = 1$ saadaan ehto $a = d$, joten matriisi T indusoi identiteettikuvauksen täsmälleen, kun pätee $a = d$ ja $b = c = 0$.

Todistetaan vielä, että kertoimen a tulee olla reaalinen ja nollasta poikkeava. Edellä todistetun nojalla identtisen kuvauksen tapauksessa on oltava voimassa $ax = xa$ jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{R}^4_\infty$ arvolla. Kertoimelle a saadaan jälleen johdettua ehtoja antamalla muuttujalle x sopivia arvoja.

Olkoon siis a kvaterni muotoa $a = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k}$, ja olkoon ensin $x = \mathrm{i}$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k})\mathrm{i} = \mathrm{i}(a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_{12}\mathrm{k}) \\ \iff \quad & a_0\mathrm{i} - a_1 - a_2\mathrm{k} + a_{12}\mathrm{j} = a_0\mathrm{i} - a_1 + a_2\mathrm{k} - a_{12}\mathrm{j} \\ \iff \quad & a_{12}\mathrm{j} = a_2\mathrm{k}, \end{aligned}$$

mistä seuraa ehto $a_2 = a_{12} = 0$, jolloin kertoimen a on oltava muotoa $a = a_0 + a_1\mathrm{i}$.

Olkoon sitten $x = \mathrm{j}$. Tällöin tulee päteä

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1\mathrm{i})\mathrm{j} = \mathrm{j}(a_0 + a_1\mathrm{i}) \\ \iff \quad & a_0\mathrm{j} + a_1\mathrm{k} = a_0\mathrm{j} - a_1\mathrm{k} \\ \iff \quad & 2a_1\mathrm{k} = 0, \end{aligned}$$

joten täytyy olla $a_1 = 0$. Näin ollen kerroin a on muotoa $a = a_0$ eli $a \in \mathbb{R}$. Lisäksi ei voi päteä $a = 0$, koska tällöin matriisin T indusoima kuvaus $0 \cdot 0^{-1}$ ei olisi määritelty. Täytyy siis päteä $a \in \mathbb{R}_*$. □

Kuten kompleksitapauksessa, matriisin T indusoiman kuvauksen käänteiskuvaus saadaan alkuperäisen matriisin kertoimista, joskin niistä tulee nyt ottaa myös reversiot.

Propositio 6.2.6 ([18]). *Kuvauksen $T(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}$ käänteiskuvauksen indusoi matriisi $T^* = \left[\begin{smallmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{smallmatrix}\right]$.*

Todistus. Täydennetään lähteen [18] todistusta. Bijektiivisyysoletuksen nojalla riittää osoittaa, että yhtälö $T(x) = y$ saadaan muokattua yhtäpitävin välivaihein muotoon $T^*(y) = x$.

Proposition 6.2.1 todistuksen nojalla tiedetään, että kuvauksen T käänteiskuvaus on $T^{-1}(y) = (a - yc)^{-1}(yd - b)$. Tässä muodossa kuitenkin sekä sulkulausekkeiden välinen tulo että tulot yc ja yd ovat väärässä järjestyksessä Möbius-kuvauksen lausekkeeseen verrattuna. Tulot saadaan oikeaan muotoon ottamalla yhtälöstä reversio:

$$\begin{aligned} x^* &= \big[(a - yc)^{-1}(yd - b)\big]^* \\ &= (yd - b)^*[(a - yc)^{-1}]^* \\ &= \big[(yd)^* - b^*\big][a^* - (yc)^*]^{-1} \\ &= (d^*y^* - b^*)(a^* - c^*y^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Huomioimalla, että reversio ei vaikuta avaruuden $\mathbb{R}^4_\infty$ vektoreihin x ja y, edellä käsitelty yhtälö tulee lopulta muotoon

$$x = (d^*y - b^*)(-c^*y + a^*)^{-1},$$

joka on yhtäpitävää väitteen $x = T^*(y)$ kanssa. □

Joukon M ryhmäominaisuuksia varten tulisi osoittaa, että käänteismatriisi T^{-1} kuuluu joukkoon M. Edellinen tulos ei kuitenkaan takaa, että T^* olisi matriisin T käänteismatriisi, sillä esimerkiksi tapauksessa $T = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ pätee

$$TT^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq I.$$

Käänteismatriisin sijaan seuraavaksi tarkastellaan kuitenkin pseudodeterminanttia, sillä sitä koskevan tuloksen myötä myös käänteismatriisia koskeva tulos nähdään suoraviivaisesti.

Määritelmä 6.2.7. *Matriisin $T \in M$ pseudodeterminantti on*

$$\Delta(T) = ad^* - bc^*.$$

Seuraava tulos osoittaa, että myös kvaternikertoimisessa tapauksessa pseudodeterminantti tulee olla nollasta poikkeava. Avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ laajenevien kompleksikertoimisten Möbius-kuvausten tapaan sen tulee olla lisäksi reaalinen. Tuloksen kohdat (1) ja (2) ovat aputuloksia varsinaista tulosta, kohtaa (3), varten.

Propositio 6.2.8 ([18]). *Olkoon T joukon M matriisi. Tällöin seuraavat väittämät ovat tosia*

(1) $TT^* = \begin{bmatrix} \Delta(T) & 0 \\ 0 & \big[\Delta(T)\big]^* \end{bmatrix}$

(2) $T^*T = \begin{bmatrix} \Delta(T^*) & 0 \\ 0 & \big[\Delta(T^*)\big]^* \end{bmatrix}$

(3) $\Delta(T) = \Delta(T^*) \in \mathbb{R}_*$.

Todistus. Täydennetään lähteen [18] todistusta. Kohdassa (1) saadaan suoraan laskemalla

$$TT^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad^* - bc^* & -ab^* + ba^* \\ cd^* - dc^* & -cb^* + da^* \end{bmatrix}.$$

Proposition 6.2.2 nojalla ab^* ja cd^* ovat redusoituja kvaterneja, joten niille pätee $ab^* = (ab^*)^*$ ja $cd^* = (cd^*)^*$, mistä voidaan päätellä yhtälöt

$$-ab^* + ba^* = -(ab^*)^* + ba^* = -ba^* + ba^* = 0 \tag{6.1}$$

ja

$$cd^* - dc^* = (cd^*)^* - dc^* = dc^* - dc^* = 0. \tag{6.2}$$

Lisäksi lauseke $-cb^* + da^*$ osoittautuu matriisin T pseudodeterminantin reversioksi:

$$\big[\Delta(T)\big]^* = (ad^* - bc^*)^* = (ad^*)^* - (bc^*)^* = -cb^* + da^*.$$

Näin ollen pätee

$$TT^* = \begin{bmatrix} \Delta(T) & 0 \\ 0 & \Delta(T)^* \end{bmatrix},$$

joten (1)-kohta on tosi.

Menettelemällä kuten (1)-kohdassa kohdassa (2) saadaan

$$\begin{aligned} T^*T &= \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^*a - b^*c & d^*b - b^*d \\ -c^*a + a^*c & -c^*b + a^*d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d^*a - b^*c & 0 \\ 0 & (d^*a - b^*c)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta(T^*) & 0 \\ 0 & \Delta(T^*)^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin ollen myös (2)-kohta on tosi.

Koska T^* on kuvauksen T käänteiskuvaus, Proposition 6.2.3 nojalla voidaan kirjoittaa $(TT^*)(x) = T\big[T^*(x)\big] = x$ ja $(T^*T)(x) = T^*\big[T(x)\big] = x$, joten tulot TT^* ja T^*T indusoivat identtisen kuvauksen. Tästä seuraa Proposition 6.2.5 nojalla, että matriisin TT^* diagonaalialkioiden on oltava yhtä suuria nollasta poikkeavia reaalilukuja, kuten myös matriisin T^*T. Näin ollen pätee

$$\Delta(T) = \big[\Delta(T)\big]^* \in \mathbb{R}_* \quad \text{ja} \quad \Delta(T^*) = \big[\Delta(T^*)\big]^* \in \mathbb{R}_*.$$

Näiden ehtojen myötä väitteet (1) ja (2) yksinkertaistuvat yhtälöiksi $TT^* = \Delta(T)I$ ja $T^*T = \Delta(T^*)I$. Kirjoittamalla ne edelleen muotoon $T = \Delta(T)(T^*)^{-1}$ ja $T =$

$(T^*)^{-1}\Delta(T^*)I = \Delta(T^*)(T^*)^{-1}$ havaitaan, että pseudodeterminanttien $\Delta(T)$ ja $\Delta(T^*)$ on oltava yhtä suuret. Näin ollen myös kohta (3) on tosi. □

Matriisin T ja sen käänteiskuvauksen indusoivan matriisin T^* pseudodeterminantit ovat siis samat. Näin ollen jatkossa voidaan käyttää yksinkertaisuuden vuoksi merkintää

$$\Delta = \Delta(T) = \Delta(T^*).$$

Huomattakoon, että koska myös matriisin T reaaliset monikerrat indusoivat saman kuvauksen mutta eri pseudodeterminantin arvolla, edellinen tulos ei tarkoita, että kuvauksen ja sen käänteiskuvauksen indusoivien matriisien pseudodeterminantit olisivat aina samat. Tämä pätee vain matriisin T ja sitä vastaavien matriisien $\pm T^*$ kohdalla.

Edellisen tuloksen todistusta hyödyntäen voidaan osoittaa, että joukko M sisältää myös kunkin alkion käänteisalkion, joten joukko M voidaan osoittaa nyt ryhmäksi.

Propositio 6.2.9. *Joukko M muodostaa ryhmän matriisitulon suhteen.*

Todistus. Olkoon T ja S joukon M matriiseja. Niiden indusoimien kuvausten yhdiste on bijektioiden yhdisteenä bijektio avaruudessa $\mathbb{R}^4_\infty$. Proposition 6.2.3 nojalla tämä on sama kuvaus kuin matriisitulon ST indusoima kuvaus. Näin ollen ST indusoi bijektion avaruudessa $\mathbb{R}^4_\infty$, joten se on joukon M alkio. Näin ollen joukko M on suljettu matriisitulon suhteen.

Matriisitulo on liitännäinen myös, kun alkiot ovat kvaterneja – kvaternien kertolaskun ei-vaihdannaisuus ei vaikuta tähän mitenkään.

Matriisitulon neutraalialkio, identiteettimatriisi I, kuuluu joukkoon M, sillä se indusoi identiteettikuvauksen, joka on bijektio.

Edellisen proposition nojalla jokaiselle $T \in M$ pätee

$$TT^* = \Delta(T)I = T^*T,$$

joten matriisin T käänteisalkio on

$$T^{-1} = \frac{1}{\Delta(T)}T^* = \frac{1}{\Delta(T)}\begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

s Se kuuluu joukkoon M Huomautuksen 6.2.4 nojalla matriisin T^* reaalisena monikertana, joten jokaisella joukon M matriisilla on käänteismatriisi joukossa M. □

Joukko M sisältää ryhmänä alkioidensa käänteismatriisit. Se ei kuitenkaan sisällä kaikkia kvaternialkioisia kääntyviä 2×2 matriiseja, sillä esimerkiksi matriisilla $T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{k} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ on olemassa käänteismatriisi $\left[\begin{smallmatrix} 1 & -\mathrm{k} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, mutta sen indusoima kuvaus

$T(x) = x+\mathrm{k}$ ei ole bijektio avaruudessa $\mathbb{R}^4_\infty$, joten T ei ole joukon M alkio. Näin ollen ryhmä $(M, \cdot)$ ei ole alkioiden suhteen tarkasteltuna kompleksitapauksessa esitellyn yleisen lineaarisen ryhmän $GL(2, \mathbb{C})$ kvaternialkioinen vastine. Ryhmä $(M, \cdot)$ voidaan kuitenkin ominaisuuksiensa puolesta määritellä ryhmän $GL(2, \mathbb{C})$ kvaternialkioiseksi laajennukseksi. Tämän vuoksi siitä käytetään jatkossa merkintää $GL(2, \mathbb{H})$.

Tuloksissa 6.2.1 ja 6.2.8 on osoitettu, että ehdot bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$, $c^{-1}d \in \mathbb{R}^3$ ja $\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*$ seuraavat Määritelmän 6.1.4 bijektiivisyyttä koskevasta ehdosta. Seuraavaksi osoitetaan, että tämä pätee myös kääntäen.

Propositio 6.2.10 ([2])**.** *Jos matriisin $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ kertoimille pätevät ehdot bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$, $c^{-1}d \in \mathbb{R}^3$ ja $\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*$, niin sen indusoima kuvaus $T(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ on bijektio avaruudessa $\mathbb{R}^4_\infty$.*

Todistus. Täydennetään lähteen [2] todistusta, joskin kuvauksen T hajotelmat kirjoitetaan hieman eri tavalla hyödyntäen lähteen [18] Lemman 6 todistusta. Olkoon $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ matriisi, jonka kertoimille pätevät ehdot bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$, $c^{-1}d \in \mathbb{R}^3$ ja $\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*$. Tulee siis osoittaa, että kuvauksella $T(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ on käänteiskuvaus ja että kuvauksen ja sen käänteiskuvauksen arvot kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{R}^4_\infty$ arvolla.

Varmistetaan aluksi, että kuvaus on hyvin määritelty. Tätä varten tulee varmistaa, että käänteisluku $(cx+d)^{-1}$ on olemassa ja ettei kuvauksen lauseke ole muotoa $0/0$ millään muuttujan x arvolla. Lauseke $cx+d$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$cx + d = cx + cc^{-1}d = c(x + c^{-1}d),$$

josta sen nähdään olevan kvaternin ja vektorin tulo, sillä tulo $c^{-1}d$ on oletuksen nojalla redusoitu kvaterni. Näin ollen lauseke $cx+d$ on kääntyvien alkioiden tulona kääntyvä.

Osoitetaan seuraavaksi, ettei tapaus $0/0$ ole mahdollinen. Olkoon aluksi $c \neq 0$. Tällöin voidaan johtaa ristiriita pseudodeterminantin ehdon suhteen: Jos pätisi $ax+b = 0$ ja $cx+d = 0$, niin tällöin voitaisiin kirjoittaa $x = -c^{-1}d$ ja edelleen $-ac^{-1}d + b = 0$. Tulo $c^{-1}d$ on oletuksen redusoitu kvaterni, joten sille pätee $c^{-1}d = (c^{-1}d)^* = d^*(c^{-1})^* = d^*(c^*)^{-1}$. Näin ollen kaikkiaan olisi voimassa yhtälö $ad^*(c^*)^{-1} + b = 0$ joka taas on yhtäpitävää ehdon $ad^* - bc^* = 0$ kanssa, mikä on ristiriita. Käsitellään lopuksi tapaus $c = 0$. Tällöin pätee $ax+b = 0$ ja $d = 0$, joten pseudodeterminantti on nolla, mikä on ristiriita. Näin ollen kuvaus T on hyvin määritelty.

Siirrytään seuraavaksi käsittelemään kuvauksen T arvoja. Tätä varten sen lauseke halutaan hajottaa sellaisten termien summaksi, joiden tiedetään kuuluvan avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$. Olkoon ensin $c = 0$. Tällöin pätee

$$T(x) = (ax + b)d^{-1} = axd^{-1} + bd^{-1},$$

missä tulo bd^{-1} on oletuksen nojalla redusoitu kvaterni. Riittää siis näyttää, että termi axd^{-1} kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$. Termiä axd^{-1} voidaan muokata pseudodeterminantin ehdon $\Delta = ad^*$ avulla. Sijoittamalla ehto muodossa[1] $d^{-1} = (1/\Delta)a^*$ tarkasteltava termi saa muodon $axd^{-1} = axa^*/\Delta$, missä lauseke axa^* kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ Proposition 4.5.5 nojalla ja reaalinen kerroin $1/\Delta$ ei vaikuta lausekkeen ulottuvuuteen. Näin ollen tapauksessa $c = 0$ kuvauksen T arvot kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ jokaiselle muuttujan $x \in \mathbb{R}^4_\infty$ arvolla.

Olkoon lopuksi $c \neq 0$. Tällöin kuvauksen lauseke voidaan muokata yksinkertaisempaan muotoon, jossa muuttuja x esiintyy vain yhdessä termissä, kun lauseke $cx + d$ kirjoitetaan myös ensimmäiseen sulkulausekkeeseen ja kerrotaan tämän jälkeen ensimmäisen sulkulausekkeen termejä jälkimmäisellä sulkulausekkeella:

$$\begin{aligned}
T(x) &= (ax + b)(cx + d)^{-1} \\
&= (ac^{-1}cx + b + ac^{-1}d - ac^{-1}d)(cx + d)^{-1} \\
&= \big[ac^{-1}(cx + d) + (b - ac^{-1}d)\big](cx + d)^{-1} \\
&= ac^{-1} + (b - ac^{-1}d)(cx + d)^{-1}.
\end{aligned}$$

Näin saadun yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi ac^{-1} on oletuksen nojalla redusoitu kvaterni, joten riittää keskittyä jälkimmäiseen termiin. Sen kerroin $b - ac^{-1}d$ muistuttaa selvästi pseudodeterminanttia, joka olisi reaalisena helposti käsiteltävä vakio, joten pyritään kirjoittamaan kerroin pseudodeterminanttia käyttäen. Tätä varten lausekkeeseen tarvitaan kertoimien c ja d reversiot. Ne saadaan todistuksessa aiemmin pääteltyä ehtoa $c^{-1}d = d^*(c^*)^{-1}$ käyttäen, jolloin voidaan kirjoittaa

$$b - ac^{-1}d = b - ad^*(c^*)^{-1} = (bc^* - ad^*)(c^*)^{-1} = -\Delta(c^*)^{-1}.$$

Näin ollen jälkimmäinen termi saadaan muotoon[2]

$$(b - ac^{-1}d)(cx + d)^{-1} = -\Delta(c^*)^{-1}(cx + d)^{-1} = -\Delta(c^{-1})^*(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}.$$

[1] Pseudodeterminantti ratkaistaan kertoimen d^{-1} suhteen kertoimen a sijaan, sillä tämä valinta johtaa Proposition 6.3.1 kannalta siistimpään lausekkeeseen.

[2] Jälkimmäinen termi olisi voitu hajottaa myös muotoon $(b - ac^{-1}d)(cx + d)^{-1} = -\Delta(cxc^* + dc^*)^{-1}$. Tämä muotoilu aiheuttaisi kuitenkin ongelmia seuraavassa luvussa, jossa vastaavaa tulosta käsitellään muuttujan $x \in \mathbb{C}$ suhteen. Tällöin nimittäin tulo dc^* ei ole kompleksinen, mutta tulo $c^{-1}d$ on. Todistuksessa käytetty hajotelma on myös kuvausten yhdisteinä ilmaistuna yhtä kuvausta tiiviimpi kuin vaihtoehtoinen hajotelma (ks. Proposition 6.3.1 todistus).

Kerroin $c^{-1}d$ on oletuksen nojalla redusoitu kvaterni, joten lauseke $x + c^{-1}d$ ja näin ollen myös sen käänteisluku $(x+c^{-1}d)^{-1}$ kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ jokaisella muuttujan arvolla. Näin ollen lauseke $(c^{-1})^*(x+c^{-1}d)^{-1}c^{-1}$ kuuluu Proposition 4.5.5 nojalla avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ jokaiselle muuttujan $x \in \mathbb{R}^4_\infty$ arvolla. Reaalisella kertoimella $-\Delta$ ei ole vaikutusta jälkimmäisen termin ulottuvuuteen. Näin ollen myös tapauksessa $c \neq 0$ kuvaus T pysyy avaruudessa $\mathbb{R}^4_\infty$.

Käsitellään sitten käänteiskuvaus. Ensiksi on osoitettava bijektiivisyysoletusta käyttämättä, että kuvauksella T on käänteiskuvaus. Oletusten nojalla voidaan seurata Proposition 6.2.8 todistusta ja päätyä ehtoon

$$TT^* = \Delta I = T^*T.$$

Koska ΔI indusoi indentiteettikuvauksen, matriisin T^* on indusoitava kuvauksen T käänteiskuvaus.

Käänteiskuvauksen arvoja tarkastellessa edetään täysin vastaavasti kuin kuvauksen T arvoja käsiteltäessä. Tapauksessa $c = 0$ pseudodeterminantille pätee $\Delta = d^*a$ eli $d^* = a^{-1}/\Delta$, minkä nojalla käänteiskuvauksen lauseke voidaan hajottaa muotoon[3]

$$T^*(x) = (d^*x - b^*)(a^*)^{-1} = d^*x(a^*)^{-1} - b^*(a^*)^{-1} = \frac{1}{\Delta}a^{-1}x(a^{-1})^* - a^{-1}b,$$

missä ensimmäinen termi kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ Proposition 4.5.5 nojalla ja jälkimmäinen on oletuksen nojalla redusoitu kvaterni, mitä käytettiin hyväksi sen sieventämisessä.

Tapauksessa $c \neq 0$ pätee oletusten nojalla yhtälö

$$-b^* + (c^{-1}d)^*a^* = -b^* + c^{-1}da^* = c^{-1}(-cb^* + da^*) = \Delta c^{-1},$$

minkä myötä käänteiskuvauksen lauseke voidaan hajottaa muotoon

$$\begin{aligned}
T^*(x) &= (d^*x - b^*)(-c^*x + a^*)^{-1} \\
&= \big[-d^*(c^*)^{-1}(-c^*x + a^*) - b^* + d^*(c^*)^{-1}a^*\big](-c^*x + a^*)^{-1} \\
&= -d^*(c^*)^{-1} + \big[-b^* + (c^{-1}d)^*a^*\big](-c^*x + a^*)^{-1} \\
&= -(c^{-1}d)^* + \Delta c^{-1}(-c^*x + a^*)^{-1} \\
&= -c^{-1}d + \Delta c^{-1}\big[-x + (c^*)^{-1}a^*\big]^{-1}(c^*)^{-1} \\
&= -c^{-1}d - \Delta c^{-1}\big[x - (ac^{-1})^*\big]^{-1}(c^{-1})^* \\
&= -c^{-1}d - \Delta c^{-1}(x - ac^{-1})^{-1}(c^{-1})^*.
\end{aligned}$$

[3]Ensimmäinen termi muotoillaan kertoimen a^{-1} suhteen kertoimen d sijaan, mikä yksinkertaistaa vastaavaa todistusta seuraavassa luvussa.

Saadun lausekkeen ensimmäinen termi on oletuksen nojalla redusoitu kvaterni. Vastaavasti myös tulo ac^{-1} on redusoitu kvaterni, joten lauseke $x - ac^{-1}$ ja näin ollen sen käänteisluku $(x-ac^{-1})^{-1}$ kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ jokaiselle muuttujan $x \in \mathbb{R}^4_\infty$ arvolla. Proposition 4.5.5 nojalla myös lauseke $c^{-1}(x - ac^{-1})^{-1}(c^{-1})^*$ kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ jokaiselle muuttujan $x \in \mathbb{R}^4_\infty$ arvolla. Reaalisella kertoimella Δ ei ole vaikutusta jälkimmäisen termin ulottuvuuteen. Näin ollen myös käänteiskuvauksen arvot kuuluvat molemmissa tapauksissa $c = 0$ ja $c \neq 0$ avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$. $\square$

Edellisen todistuksen hajotelmista

$$T(x) = \frac{1}{\Delta}axa^* + bd^{-1}, \quad \text{jos } c = 0,$$

ja

$$T(x) = ac^{-1} - \Delta(c^{-1})^*(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}, \quad \text{jos } c \neq 0,$$

voidaan myös päätellä vastaavalla tavalla Proposition 4.5.5 kohtaa (1) käyttäen, että kuvauksen arvot kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ jokaiselle muuttujan $\mathbb{R}^3_\infty$ arvolla.

Joukko M olisi edellisen tuloksen nojalla voitu alun perin määritellä bijektiivisyysoletuksen sijaan ehdoilla bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$, $c^{-1}d \in \mathbb{R}^3$ ja $\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*$. Tämä olisi kuitenkin siinä mielessä huono lähtökohta, että se ei selitä mistä kyseiset ehdot seuraavat. Näitä ehtoja käytetään kuitenkin tästä eteenpäin määrittelemään ryhmä $(M, \cdot) = GM(\mathbb{R}^3)$, sillä ne antavat konkreettisemmat ja kompleksitapauksen kanssa yhdenmukaisemmat ehdot avaruuden $\mathbb{R}^3$ Möbius-kuvauksille.

Tiivistetään vielä edellä tehdyt päättelyt tulokseksi. Tuloksen muotoilussa kvaternituloja koskevat ehdot ilmaistaan käänteisluvun sijaan reversiota käyttäen, jolloin ne ovat lähteen [18] kanssa yhdenmukaisessa ja helpommin laskettavassa muodossa.

Lause 6.2.11.

$$GL(2,\mathbb{H}) = \{\, [\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}] \mid a,b,c,d \in \mathbb{H},\ ab^*, cd^*, c^*a, d^*b \in \mathbb{R}^3,\ ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_* \}.$$

Seuraavaksi siirrytään todistamaan, että ryhmä $GL(2,\mathbb{H})$ todella muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvaukset.

6.3 Ryhmien $GL(2,\mathbb{H})$ ja $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ homomorfisuus

Avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten ryhmä on siirtojen, kiertojen, venytysten, origon suhteen tapahtuvien peilausten sekä inversioiden generoima ryhmä. Seuraavassa tuloksessa osoitetaan, että ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ generoivat juuri ne matriisit, jotka indusoivat kyseiset kuvaukset.

Propositio 6.3.1 ([18]). *Matriisin $T \in GL(2,\mathbb{H})$ indusoima kuvaus on yhdiste seuraavista kuvauksista:*

(1) *siirto* $\begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto x+\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}^3$

(2) *kierto* $\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q' \end{bmatrix}, \quad x \mapsto qxq^*, \quad q \in \mathbb{H}, \quad |q| = 1$

(3) *venytys* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \quad x \mapsto \lambda^2 x, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$

(4) *peilaus origon suhteen* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto -x$

(5) *inversio* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto -x^{-1} = -\dfrac{\overline{x}}{|x|^2}$

(6) *identtinen kuvaus* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad x \mapsto x, \quad \lambda \in \mathbb{R}_*.$

Todistus. Täydennetään lähteen [18] Lemmojen 6 ja 10 todistuksia. Olkoon ensin $c = 0$. Tällöin kuvaus T voidaan Proposition 6.2.10 todistuksen nojalla kirjoittaa muotoon

$$T(x) = \frac{1}{\Delta} axa^* + bd^{-1}.$$

Koska termi bd^{-1} on redusoitu kvaterni, kuvaus on siirto muuttujan $(1/\Delta)axa^*$ suhteen. Lauseke $(1/\Delta)axa^*$ taas näyttäisi olevan kierron ja venytyksen yhdiste. Tämän osoittamiseksi lauseketta tulee kuitenkin muokata.

Ensinnäkin, jotta kierron ehto $|q| = 1$ toteutuisi, kvaternit a ja a^* täytyy jakaa omilla pituuksillaan. Tällöin kuvaus tulee muotoon

$$T(x) = \left(\frac{|a|^2}{\Delta}\right)\left(\frac{a}{|a|}\right)x\left(\frac{a}{|a|}\right)^* + bd^{-1}.$$

Lisäksi reaalisen kertoimen $|a|^2/\Delta$ etumerkki riippuu pseudodeterminantin arvosta, joten sitä ei voida esittää kaikissa tapauksissa venytyksellä. Se voidaan kuitenkin kirjoittaa kertoimen etumerkin ja kertoimen itseisarvon muodostamaksi tuloksi, jolloin kerroin on esitettävissä venytyksen ja etumerkistä riippuen joko venytyksen $\lambda = 1$ tai origon suhteen tapahtuvan peilauksen yhdisteenä. Kirjoitetaan siis kyseinen kerroin muotoon

$$\frac{|a|^2}{\Delta} = \frac{|\Delta|}{\Delta}\frac{|a|^2}{|\Delta|}$$

Tällöin jälkimmäinen osamäärä on positiivinen ja voidaan esittää venytyksellä. Ensimmäinen osamäärä taas voi saada vain arvot 1 ja -1, joten sitä vastaava kuvaus voidaan indusoida matriisilla

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{|\Delta|} \end{bmatrix},$$

joka vastaa positiivisen pseudodeterminantin tapauksessa venytystä ($\lambda = 1$) ja negatiivisen pseudodeterminantin tapauksessa peilausta origon suhteen.

Kuvaus T voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$T(x) = \left(\frac{|\Delta|}{\Delta}\right)\left(\frac{|a|^2}{|\Delta|}\right)\left(\frac{a}{|a|}\right)x\left(\frac{a}{|a|}\right)^* + bd^{-1},$$

josta sen voidaan lukea olevan yhdiste kierrosta, venytyksestä, venytyksestä ($\lambda = 1$) tai peilauksesta origon suhteen ja siirrosta eli matriisi(tulo)n

$$T = \begin{bmatrix} 1 & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{|\Delta|}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{|a|}{\sqrt{|\Delta|}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|a|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{|a|} & 0 \\ 0 & \frac{a'}{|a|} \end{bmatrix}$$

indusoima.

Olkoon sitten $c \neq 0$. Tällöin kuvaus voidaan Proposition 6.2.10 todistuksen nojalla kirjoittaa muotoon

$$T(x) = ac^{-1} - \Delta(c^{-1})^*(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}. \tag{6.4}$$

Edellisen tapauksen todistusta seuraten kertoimet $(c^*)^{-1}$ ja c^{-1} täytyy normeerata, jotta kuvaukseen T saadaan kiertoa vastaava lauseke. Tämä voidaan tehdä kirjoittamalla kertoimet muodossa

$$(c^{-1})^* = (c^*)^{-1} = \frac{\overline{c^*}}{|c^*|^2} = \frac{1}{|c|}\frac{c'}{|c|}$$

ja

$$c^{-1} = \frac{\overline{c}}{|c|^2} = \frac{1}{|c|}\frac{(c')^*}{|c|},$$

jolloin alkuperäinen yhtälö (6.4) saa muodon

$$T(x) = ac^{-1} + \Delta\frac{1}{|c|^2}\left(\frac{c'}{|c|}\right)\left[-(x + c^{-1}d)^{-1}\right]\left(\frac{c'}{|c|}\right)^*.$$

Samalla kerroin -1 siirrettiin lausekkeen $(x + c^{-1}d)^{-1}$ eteen, jolloin lauseke $-(x + c^{-1}d)^{-1}$ vastaa sellaisenaan inversiota. Lisäksi pseudodeterminantti tulee jäl-

leen kirjoittaa muodossa
$$\Delta = \frac{\Delta}{|\Delta|}\,|\Delta|\,,$$
minkä seurauksena yhtälö (6.4) tulee muotoon
$$T(x) = ac^{-1} + \left(\frac{\Delta}{|\Delta|}\right)\left(\frac{|\Delta|}{|c|^2}\right)\left(\frac{c'}{|c|}\right)\big[-(x+c^{-1}d)^{-1}\big]\left(\frac{c'}{|c|}\right)^*.$$
josta sen voidaan lukea olevan yhdiste kuvauksista siirto, inversio, kierto, venytys, venytys ($\lambda = 1$) tai peilaus origon suhteen ja siirto eli matriisi(tulo)n
$$T = \begin{bmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{|\Delta|} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|c|} & 0 \\ 0 & \frac{|c|}{\sqrt{|\Delta|}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{c'}{|c|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{|c|} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
indusoima. □

Edellisen proposition myötä ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ voidaan todeta generoivan avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvaukset.

Lause 6.3.2. *Ryhmät $GL(2,\mathbb{H})$ ja $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ ovat homomorfiset. Ryhmähomomorfismi on muotoa*
$$f : GL(2,\mathbb{H}) \to GM(\mathbb{R}^3_\infty), \quad f(T) = \widetilde{T},$$
missä $\widetilde{T}$ on matriisin T indusoima kuvaus. Homomorfismin f ydin on $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\}$.

Todistus. Edellisen proposition nojalla ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ matriisit voidaan kirjoittaa yhdisteinä siirrot, kierrot, venytykset, peilaukset origon suhteen ja inversiot indusoivista matriiseista. Täten kyseiset matriisit generoivat ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$. Toisaalta näitä matriiseja vastaavat kuvaukset generoivat ryhmän $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$. Näin ollen homomorfisuuden todistamiseksi on löydettävä kuvaus $f : GL(2,\mathbb{H}) \to GM(\mathbb{R}^3_\infty)$, jolle pätee $f(TS) = f(T) \circ f(S)$ jokaiselle $T, S \in GL(2,\mathbb{H})$. Koska Proposition 6.2.3 nojalla ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ matriisien tulo indusoi yhdistetyn kuvaukset, etsitty kuvaus on $f(T) = \widetilde{T}$, missä $\widetilde{T}$ on matriisin T indusoima kuvaus.

Homomorfismin f ydin on matriisijoukko $\{T \in GL(2,\mathbb{H}) \mid T(x) = x\}$, joka yksinkertaistuu Proposition 6.2.5 nojalla muotoon $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\}$. □

Ryhmät $GL(2,\mathbb{H})$ ja $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ eivät edellisen tuloksen nojalla ole isomorfiset, vaan jokaista ryhmän $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ kuvausta vastaa ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ matriisin T lisäksi myös sen reaaliset monikerrat $\lambda T, \lambda \in \mathbb{R}_*$. Isomorfisuus saavutetaan määrittelemällä projektiivinen lineaarinen ryhmä
$$PGL(2,\mathbb{H}) = GL(2,\mathbb{H})/\{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\},$$

joka siis niputtaa kaikki kuvausta T vastaavat ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ matriisit λT, $\lambda \in \mathbb{R}_*$, yhdeksi alkioksi (joukoksi).

Lause 6.3.3 ([18]). *Tekijäryhmä $PGL(2,\mathbb{H})$ on isomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten ryhmän $GM(\mathbb{R}^3_\infty)$ kanssa.*

Seuraavaksi tarkastellaan erästä Möbius-kuvausten ryhmän aliryhmää.

6.4 Suunnistuksen säilyttävät Möbius-kuvaukset

Möbius-kuvaukset voidaan jakaa kahteen joukkoon sen mukaan, säilyttääkö kuvaus suunnistuksen vai ei. Suunnistuksella tarkoitetaan siis esimerkiksi kolmiulotteisessa tapauksessa koordinaatiston kätisyyttä. Yleisesti se määritellään seuraavasti.

Määritelmä 6.4.1. *Kuvaus säilyttää suunnistuksen, jos sen Jacobin determinantti on* 0.

Möbius-kuvauksen suunnistuksen säilyvyys voidaan karakterisoida siistiksi ehdoksi pseudodeterminantin avulla. Tätä varten tarvitaan kompleksitapauksesta tuttu tulos, jonka mukaan pseudodeterminantti käyttäytyy tulon suhteen kuten tavallinen determinantti.

Propositio 6.4.2 ([18]). *Olkoot S ja T ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ matriiseja. Tällöin niiden pseudodeterminanteille pätee*

$$\Delta(ST) = \Delta(S)\Delta(T) = \Delta(TS).$$

Todistus. Täydennetään lähteen [18] todistusta. Matriisien S ja T tulo on

$$ST = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{bmatrix}$$

joten sen pseudodeterminantti on

$$\begin{aligned} \Delta(ST) &= (\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d)^* - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c)^* \\ &= (\alpha a + \beta c)(b^*\gamma^* + d^*\delta^*) - (\alpha b + \beta d)(a^*\gamma^* + c^*\delta^*) \\ &= \alpha ab^*\gamma^* + \alpha ad^*\delta^* + \beta cb^*\gamma^* + \beta cd^*\delta^* - \alpha ba^*\gamma^* - \alpha bc^*\delta^* \\ &\quad - \beta da^*\gamma^* - \beta dc^*\delta^*. \end{aligned}$$

Saadun yhtälön oikea puoli halutaan kirjoittaa pseudodeterminanttien $\Delta(S)$ ja $\Delta(T)$

tuloksi, joten jatketaan ryhmittelemällä termejä niin, että matriisin T pseudodeterminantit $ad^* - bc^* = da^* - cb^*$ saadaan omiksi lausekkeiksi. Samalla loputkin matriisin T alkiot saadaan kirjoitettua siistiin muotoon:

$$\Delta(ST) = \alpha(ad^* - bc^*)\delta^* - \beta(da^* - cb^*)\gamma^* + \alpha(ab^* - ba^*)\gamma^* + \beta(cd^* - dc^*)\delta^*$$

Yhtälöiden (6.1) ja (6.2) nojalla on $ab^* - ba^* = 0$ ja $cd^* - dc^* = 0$, ja kun huomioidaan vielä pseudodeterminantin $\Delta(T)$ reaalisuus saadaan

$$\Delta(ST) = \alpha\Delta(T)\delta^* - \beta\Delta(T)^*\gamma^* = (\alpha\delta^* - \beta\gamma^*)\Delta(T) = \Delta(S)\Delta(T),$$

joten pätee $\Delta(ST) = \Delta(S)\Delta(T)$.

Toisaalta tulon

$$TS = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix}$$

pseudodeterminantiksi saadaan vastaavasti menettelemällä

$$\begin{aligned}
\Delta(TS) &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta)^* - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma)^* \\
&= (a\alpha + b\gamma)(\beta^* c^* + \delta^* d^*) - (a\beta + b\delta)(\alpha^* c^* + \gamma^* d^*) \\
&= a\alpha\beta^* c^* + a\alpha\delta^* d^* + b\gamma\beta^* c^* + b\gamma\delta^* d^* - a\beta\alpha^* c^* - a\beta\gamma^* d^* - b\delta\alpha^* c^* - b\delta\gamma^* d^* \\
&= a(\alpha\delta^* - \beta\gamma^*)d^* - b(\delta\alpha^* - \gamma\beta^*)c^* + a(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)c^* + b(\gamma\delta^* - \delta\gamma^*)d^* \\
&= a\Delta(S)d^* - b\Delta(S)^* c^* \\
&= (ad^* - bc^*)\Delta(S) \\
&= \Delta(T)\Delta(S),
\end{aligned}$$

joten kaiken kaikkiaan pätee $\Delta(TS) = \Delta(T)\Delta(S) = \Delta(S)\Delta(T) = \Delta(ST)$. □

Edellisen aputuloksen myötä voidaan siirtyä varsinaiseen tulokseen.

Propositio 6.4.3. *Möbius-kuvaus säilyttää suunnistuksen, jos ja vain jos sen pseudodeterminantti on positiivinen.*

Todistus. Edellisen tuloksen myötä kuvauksen T pseudodeterminantti on positiivinen jos ja vain jos se koostuu kuvauksista, joiden pseudodeterminantit ovat positiivisia, tai kuvauksista, joilla on parillinen määrä negatiivisia pseudodeterminantteja. Koska parillinen määrä suunnistuksen kääntäviä kuvauksia säilyttää suunnistuksen, riittää todistaa, että suunnistuksen säilyttävien kuvausten pseudodeterminantit ovat positiivisia ja suunnistuksen kääntävien negatiivisia. Toisin sanoen on näytettävä, että kunkin kuvauksen (1)–(6) pseudodeterminantti ja Jacobin determinantti ovat samanmerkkisiä.

Siirto on kuvaus

$$x \mapsto x + \mu = \begin{bmatrix} x_0 + \mu_0 \\ x_1 + \mu_1 \\ x_2 + \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}^3,$$

joten sen Jacobin matriisi on

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen siirron Jacobin determinantti on 1. Siirron pseudodeterminantti on myös 1, joten molemmat determinantit ovat samanmerkkiset.

Kierto on kuvaus

$$x \mapsto qxq^* = \rho_q(x), \quad q \in \mathbb{H}, \quad |q| = 1,$$

ja se on erityisortogonaalikuvauksena lineaarikuvaus. Koska lineaarikuvauksen Jacobin matriisi on sen kuvausmatriisi, kierron Jacobin matriisi on ρ_q, jonka determinantti on kiertomatriisina 1. Kuvauksen pseudodeterminantti $q(q')^* = q\overline{q} = |q|^2 = 1^2 = 1$ on myös positiivinen, joten molemmat determinantit ovat myös tässä tapauksessa samanmerkkiset.

Venytys on kuvaus

$$x \mapsto \lambda^2 x = \begin{bmatrix} \lambda^2 x_0 \\ \lambda^2 x_1 \\ \lambda^2 x_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

joten se Jacobin matriisi on

$$J = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Sen determinantti λ^6 on positiivinen. Kuvauksen pseudodeterminantti on 1, joten molemmat determinantit ovat samanmerkkiset.

Peilaus origon suhteen on kuvaus

$$x \mapsto -x = \begin{bmatrix} -x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix},$$

joten se Jacobin matriisi on

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jacobin matriisin determinantti on -1. Sen pseudodeterminantin arvo on myös -1.

Inversio on kuvaus

$$x \mapsto -x^{-1} = -\frac{\overline{x}}{|x|^2} = \begin{bmatrix} \frac{-x_0}{x_0^2+x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_0^2+x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_2}{x_0^2+x_1^2+x_2^2} \end{bmatrix}.$$

Sen Jacobin matriisia laskettaessa tulee vastaan kahdentyyppisiä alkioita, sillä diagonaalialkioissa derivoitava muuttujaa esiintyy sekä osoittajassa että nimittäjässä, kun taas muissa alkioissa derivoitava muuttuja on vain nimittäjässä. Ensimmäiseksi diagonaalialkioksi lasketaan

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{-x_0}{x_0^2+x_1^2+x_2^2}\right) = \frac{-1\cdot(x_0^2+x_1^2+x_2^2)-(-x_0)\cdot 2x_0}{(x_0^2+x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{-|x|^2+2x_0^2}{|x|^4}.$$

Muut diagonaalialkiot lasketaan muuten vastaavasti, mutta ne ovat vastakkaismerkkiset. Rivin 1 sarakkeen 2 alkioksi taas saadaan yksinkertaisemmin

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{-x_0}{x_0^2+x_1^2+x_2^2}\right) = \frac{0-(-x_0)\cdot 2x_1}{(x_0^2+x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{2x_0x_1}{|x|^4}.$$

Muut ei-diagonaalialkiot lasketaan vastaavasti, joskin toisen ja kolmannen rivin alkiot ovat vastakkaismerkkiset ensimmäiseen riviin verrattuna. Näin ollen Jacobin matriisiksi saadaan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{-|x|^2+2x_0^2}{|x|^4} & \frac{2x_0x_1}{|x|^4} & \frac{2x_0x_2}{|x|^4} \\ \frac{-2x_0x_1}{|x|^4} & \frac{|x|^2-2x_1^2}{|x|^4} & \frac{-2x_1x_2}{|x|^4} \\ \frac{-2x_0x_2}{|x|^4} & \frac{-2x_1x_2}{|x|^4} & \frac{|x|^2-2x_2^2}{|x|^4} \end{bmatrix} = \frac{1}{|x|^4}\begin{bmatrix} -|x|^2+2x_0^2 & 2x_0x_1 & 2x_0x_2 \\ -2x_0x_1 & |x|^2-2x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_0x_2 & -2x_1x_2 & |x|^2-2x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Determinanttia laskettaessa matriisia edeltävä reaalinen kerroin $1/|x|^4$ korotetaan matriisin dimensiota vastaavaan potenssiin:

$$\det(J) = \frac{1}{|x|^{12}}\begin{vmatrix} -|x|^2+2x_0^2 & 2x_0x_1 & 2x_0x_2 \\ -2x_0x_1 & |x|^2-2x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_0x_2 & -2x_1x_2 & |x|^2-2x_2^2 \end{vmatrix}.$$

Kehitetään seuraavaksi determinantti ylimmäisen rivin suhteen:

$$\det(J) = \frac{1}{|x|^{12}}\Bigg[(-|x|^2 + 2x_0^2)\begin{vmatrix} |x|^2 - 2x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & |x|^2 - 2x_2^2 \end{vmatrix}$$
$$- 2x_0x_1\begin{vmatrix} -2x_0x_1 & -2x_1x_2 \\ -2x_0x_2 & |x|^2 - 2x_2^2 \end{vmatrix} + 2x_0x_2\begin{vmatrix} -2x_0x_1 & |x|^2 - 2x_1^2 \\ -2x_0x_2 & -2x_1x_2 & |x|^2 \end{vmatrix}\Bigg].$$

Kirjoitetaan tämän jälkeen auki 2×2-determinatit:

$$\begin{aligned}\det(J) = |x|^{-12} \Big[&(-|x|^2 + 2x_0^2)\big[(|x|^2 - 2x_1^2)(|x|^2 - 2x_2^2) - (-2x_1x_2)(-2x_1x_2)\big] \\ &- 2x_0x_1\big[(-2x_0x_1)(|x|^2 - 2x_2^2) - (-2x_0x_2)(-2x_1x_2)\big] \\ &+ 2x_0x_2\big[(-2x_0x_1)(-2x_1x_2) - (-2x_0x_2)(|x|^2 - 2x_1^2)\big]\Big] \\ &= |x|^{-12}\big[(-|x|^2 + 2x_0^2)(|x|^4 - 2|x|^2 x_2^2 - 2|x|^2 x_1^2 + 4x_1^2x_2^2 - 4x_1^2x_2^2) \\ &- 2x_0x_1(-2|x|^2 x_0x_1 + 4x_0x_1x_2^2 - 4x_0x_1x_2^2) \\ &+ 2x_0x_2(4x_0x_1^2x_2 + 2|x|^2 x_0x_2 - 4x_0x_1^2x_2)\big]\end{aligned}$$

Kumoamalla vastakkaismerkkiset termit ja kertomalla sulut auki yhtälö tulee muotoon

$$\begin{aligned}\det(J) = \frac{1}{|x|^{12}}\big[&-|x|^6 + 2|x|^4(x_2^2 + x_1^2) + 2|x|^4 x_0^2 - 4|x|^2 x_0^2(x_2^2 + x_1^2) \\ &+ 4|x|^2 x_0^2(x_1^2 + x_2^2)\big],\end{aligned}$$

joka sievenee lopulta muotoon

$$\det(J) = \frac{|x|^4}{|x|^{12}}\big[-|x|^2 + 2(x_2^2 + x_1^2) + 2x_0^2\big] = \frac{1}{|x|^8}(-|x|^2 + 2|x|^2) = \frac{1}{|x|^6}.$$

Inversion Jacobin matriisin determinantti on siis positiivinen. Kuvauksen pseudodeterminantti on 1, joten molemmat determinantit ovat positiivisia.

Identtinen kuvaus on kuvaus

$$x \mapsto x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

joten se jacobin matriisi on

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jonka determinantti on 1. Kuvauksen pseudodeterminantti λ^2, $\lambda \in \mathbb{R}_*$, on myös positiivinen.

Näin ollen kunkin kuvauksen (1)–(6) Jacobin determinantti ja pseudodeterminantti ovat samanmerkkiset, joten Möbius-kuvaus säilyttää suunnistuksen, jos ja vain jos sen pseudodeterminantti on positiivinen. □

Suunnistuksen säilyttävät Möbius-kuvaukset muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten aliryhmän: Niiden joukko on selvästi suljettu yhdistetyn kuvauksen suhteen, ja identiteettimatriisi kuuluu kyseiseen joukoon, sillä sen pseudodeterminantti on 1. Lisäksi ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ suunnistuksen säilyttävien matriisien käänteismatriisit ovat myös suunnistuksen säilyttäviä, sillä jos matriisin T pseudodeterminantille pätee $\Delta(T) > 0$, niin yhtälön (6.3) nojalla myös sen käänteismatriisin pseudodeterminantille pätee $\Delta(T^{-1}) = \Delta(T^*)/\Delta(T)^2 = 1/\Delta(T) > 0$. Muotoillaan seuraavaksi edellinen havainto siistiksi tulokseksi Lauseen 6.3.3 tapaan.

Koska matriisin T indusoima kuvaus saadaan myös matriiseilla $\alpha T, \alpha \in \mathbb{R}_*$, joiden pseudodeterminantti ovat $\alpha^2\Delta(T)$, suunnistuksen säilyttävien kuvausten tapauksessa näiden matriisien joukosta voidaan aina valita sellainen, että sen pseudodeterminantiksi tulee $\Delta(\alpha T) = 1$. Näin ollen ryhmän $GL(2,\mathbb{H})$ suunnistuksen säilyttävät kuvaukset voidaan kattaa myös *erityisellä lineaarisella ryhmällä*[4]

$$SL(2,\mathbb{H}) = \{\, T \in GL(2,\mathbb{H}) \mid \Delta(T) = 1\}.$$

Tämä ei kuitenkaan ole isomorfinen suunnistuksen säilyttävien Möbius-kuvausten kanssa, sillä jokainen matriisin $T, \Delta(T) = 1$, indusoima kuvaus saadaan myös matriisin $-T, \Delta(-T) = 1$, indusoimana. Isomorfisuus saadaan muodostamalla *projektiivinen erityinen lineaarinen ryhmä*[5] eli tekijäryhmä

$$PSL(2,\mathbb{H}) = SL(2,\mathbb{H})/\{\, \pm I\,\},$$

joka siis niputtaa kaikki ryhmän $SL(2,\mathbb{H})$ alkiot T ja $-T$, yhdeksi alkioksi (joukoksi).

Lause 6.4.4 ([18])**.** *Tekijäryhmä $PSL(2,\mathbb{H})$ on isomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ suunnistuksen säilyttävien Möbius-kuvausten ryhmän $GM_+(\mathbb{R}^3_\infty)$ kanssa.*

6.5 Avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}_\infty$ Möbius-kuvaukset

Edellisen alaluvun päätulokset, Lauseet 6.2.11, 6.3.3 ja 6.4.4, ovat itse asiassa erikoistapauksia seuraavista yleisistä avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}_\infty$ Möbius-kuvauksia koskevista tuloksista.

---

[4]Erityinen lineaarinen ryhmä $SL(n,\mathbb{F})$ on yleisen lineaarisen ryhmän $GL(n,\mathbb{F})$ aliryhmä, joka koostuu niistä ryhmän $GL(n,\mathbb{F})$ matriiseista, joiden determinantti on 1 [11].

[5]Projektiivinen erityinen lineaarinen ryhmä $PSL(2,\mathbb{F})$ on erityisestä lineaarisesta ryhmästä $SL(2,\mathbb{F})$ muodostettu tekijäryhmä ryhmän $SL(2,\mathbb{F})$ keskuksen suhteen [11].

Lause 6.5.1 ([18]).

$$GL(2, C_n) = \{[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}] \mid a, b, c, d \in \Gamma_n \cup \{0\},\ ab^*, cd^*, c^*a, d^*b \in \mathbb{R}^{n+1},\ ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*\}.$$

Lause 6.5.2 ([18]). *Tekijäryhmä $PGL(2, C_n)$ on isomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}_\infty$ Möbius-kuvausten ryhmän $GM(\mathbb{R}^{n+1}_\infty)$ kanssa.*

Lause 6.5.3 ([18]). *Tekijäryhmä $PSL(2, C_n)$ on isomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}_\infty$ suunnistuksen säilyttävien Möbius-kuvausten ryhmän $GM_+(\mathbb{R}^{n+1}_\infty)$ kanssa.*

Tapaus $n = 1$ vastaa siis kompleksitason Möbius-kuvauksia ja tapaus $n = 2$ avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksia. Huomattakoon, että tapauksessa $n = 1$ pätee $C_2 = \mathbb{C}$ ja $\Gamma_2 \cup \{0\} = \mathbb{C}$, joten Lauseen 6.5.1 ryhmä yksinkertaistuu muotoon

$$GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ [\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}] \mid a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \in \mathbb{R}_* \right\}.$$

Lause 6.5.1 siis rajaa kompleksitason avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ laajenevat Möbius-kuvaukset täsmälleen samoin kuin edellisessä luvussa pääteltiin.

Edellisessä luvussa laajennettiin kompleksitason Möbius-kuvaukset avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$. Tällöin kertoimet a, b, c ja d tulkittiin kvaterneiksi, vaikka ne olivat kompleksilukuja. Tällöin saattoi herätä ajatus siitä, miten kompleksimuuttujan Möbius-kuvaukset toimivat yleisesti kvaternikertoimilla. Seuraava luku käsittelee tätä tapausta.

7 KOMPLEKSITASON KVATERNIKERTOIMISET MÖBIUS-KUVAUKSET

Tässä luvussa käydään läpi kompleksitason kvaternikertoimisten Möbius-kuvausten tapaus. Tavoitteena on selvittää, onko kompleksikertoimien lisäksi olemassa myös muita kvaternikertoimia, joilla kuvaukset ovat mahdollisia, ja mitkä ovat näiden uusien mahdollisten kuvausten geometriset tulkinnat. Tämän tehdään tarkastelemalla, minkälaiset ehdot rajoittavat kertoimia, ja yhdistämällä ne mahdollisimman konkreettisiksi ehdoiksi.

Lähteen [18] tulokset eivät sellaisenaan käsitä tätä tapausta, sillä niissä kvaternikertoimia vastasivat avaruuteen $\mathbb{R}^4_\infty$ laajennettavissa olevat avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ kuvaukset, kun taas tässä tapauksessa on kyseessä avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ laajennettavissa olevat avaruuden $\mathbb{C}_\infty$ kuvaukset. Samaa lähestymistapaa voidaan kuitenkin soveltaa pienin muutoksin myös tässä tapauksessa. Koska suuri osa asiasta menee lähes identtisesti edellisen luvun tulosten kanssa, etenemistä kommentoidaan ja todistukset esitetään vain tilanteissa, jotka eroavat oleellisesti aikaisemmista.

7.1 Alkutarkastelut

Ensiksi tulee selvittää, ovatko kvaternikertoimiset kompleksitason Möbius-kuvaukset ylipäänsä mahdollisia muussa kuin kompleksikertoimisessa tapauksessa. Tämä onnistuu suoraviivaisesti tarkastelemalla edellisen luvun kuvauksia (1)–(6), sillä kuvaus T on jälleen voitava hajottaa niiden yhdisteiksi.

Kuvaukset (3)–(6) eli venytys, peilaus origon suhteen, inversio ja identtinen kuvaus toimivat sellaisinaan myös kompleksimuuttujan tapauksessa. Sen sijaan siirron parametrin μ tulee olla nyt kompleksinen, jotta siirto voisi olla kompleksitason kuvaus. Täten kuvauksen T hajotelmien termit bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$ ja $c^{-1}d$ on vaadittava kompleksisiksi. Lisävaatimuksia aiheuttaa myös kierto, joka pitäisi myös saada pysymään kompleksitasossa jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ arvolla. Seuraava tulos kertoo, milloin tämä on mahdollista.

Propositio 7.1.1. *Olkoon q, $|q| = 1$, kvaterni. Lauseke qxq^* kuuluu kompleksitasoon jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ arvolla, jos ja vain jos kvaternille q pätee joko $P(q) = 0$*

tai $Q(q) = 0$.

Todistus. Todistetaan ensin väite ”$\Longrightarrow$”. Olkoon siis lauseke qxq^* kompleksiluku jokaisella $x \in \mathbb{C}_\infty$. Toisin muotoiltuna jokaiselle $x \in \mathbb{C}_\infty$ pätee $Q(qxq^*) = 0$. Antamalla siis muuttujalle x kiinteitä arvoja saadaan kerrointa q koskevia ehtoja.

Olkoon ensin $x = 1$. Tällöin on oltava voimassa

$$0 = Q(qq^*),$$

joten operaattorin Q tulosääntöä käyttämällä saadaan

$$0 = P(q)Q(q^*) + Q(q)\overline{P(q^*)}.$$

Koska pätee $Q(q^*) = \overline{Q(q)}$ ja $P(q^*) = P(q)$, edellinen yhtälö on yhtäpitävää yhtälön

$$0 = P(q)\overline{Q(q)} + Q(q)\overline{P(q)}$$

kanssa. Yhtälön termien havaitaan olevan toistensa konjugaatteja, mistä seuraa ehto

$$0 = P(q)\overline{Q(q)} + \overline{P(q)\overline{Q(q)}} = 2\,\mathrm{Re}\left[P(q\overline{Q(q)}\,\right].$$

Olkoon sitten $x = \mathrm{i}$. Tällöin on oltava voimassa

$$0 = Q(q\mathrm{i}q^*) = Q\big[(q\mathrm{i})q^*\big].$$

Käyttämällä operaattorien P ja Q tulosääntöjä kahdesti saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= P(q\mathrm{i})Q(q^*) + Q(q\mathrm{i})\overline{P(q^*)} \\ &= \big[P(q)P(\mathrm{i}) - Q(q)\overline{Q(\mathrm{i})}\,\big]Q(q^*) + \big[P(q)Q(\mathrm{i}) + Q(q)\overline{P(i)}\,\big]\overline{P(q^*)} \end{aligned}$$

Imaginääriyksikölle pätevät ehdot $P(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, $Q(\mathrm{i}) = 0$ ja $\overline{P(i)} = -\mathrm{i}$, joten edellinen yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$0 = P(q)\mathrm{i}Q(q^*) - Q(q)\mathrm{i}\overline{P(q^*)}.$$

Koska kaikki yhtälön luvut ovat kompleksisia, imaginääriyksikkö voidaan jakaa pois, ja koska lisäksi pätee $Q(q^*) = \overline{Q(q)}$ ja $\overline{P(q^*)} = \overline{P(q)}$, edellinen yhtälö saadaan edelleen muotoon

$$0 = P(q)\overline{Q(q)} - Q(q)\overline{P(q)}.$$

Yhtälön termien havaitaan olevan toistensa konjugaatteja, jolloin saadaan

$$0 = P(q)\overline{Q(q)} - \overline{P(q)\overline{Q(q)}} = 2\,\mathrm{Im}\left[P(q)\overline{Q(q)}\,\right].$$

Näin ollen pätee siis $\mathrm{Re}\left[P(q)\overline{Q(q)}\,\right] = 0$ ja $\mathrm{Im}\left[P(q)\overline{Q(q)}\,\right] = 0$ eli $P(q)\overline{Q(q)} = 0$, jolloin on oltava $P(q) = 0$ tai $Q(q) = 0$.

Suunnan "$\Longleftarrow$" todistaminen on suoraviivaista. Tapauksessa $Q(x) = 0$ lauseke qxq^* on aina kompleksinen kompleksilukujen tulona. Tapauksessa $P(x) = 0$ taas pätee

$$qxq^* = Q(q)\mathrm{j}x\big[Q(q)\mathrm{j}\big]^* = Q(q)\mathrm{j}x\mathrm{j}^*Q(q)^* = -Q(q)\overline{x}Q(q),$$

joten lauseke qxq^* on taas kompleksilukujen tulona kompleksiluku jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ arvolla. $\square$

Edellisen tuloksen nojalla kompleksitason kuvaus $x \mapsto qxq^*$, $q \in \mathbb{H}$, $|q| = 1$, pysyy kompleksitasossa täsmälleen, kun kerroin q on kompleksiluku tai kun sen kompleksiosa on nolla. Ensimmäisessä tapauksessa kerroin voidaan kompleksisena kirjoittaa muotoon $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, jolloin kuvauksen lauseke tulee muotoon $qxq = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Tämä on Määritelmän 5.0.8 mukainen kierto kulman 2θ verran, joka pitää laajennetun muuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ j-komponentin ennallaan. Koska kerroin $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $|q| = 1$, on mielivaltainen, kaikki kompleksitason kierrot voidaan esittää tällä kuvauksella. Osoitetaan vielä, että kyseinen kuvaus voidaan esittää kompleksimuuttujan tapauksessa myös luvusta q muodostetun kiertomatriisin avulla.

Propositio 7.1.2. *Olkoon $q = q_0 + q_1\mathrm{i}$, $|q| = 1$, kompleksiluku. Tällöin jokaiselle $x \in \mathbb{C}_\infty$ pätee*

$$\rho_q(x) = qxq,$$

missä $\rho_q = \left[\begin{smallmatrix} q_0^2-q_1^2 & -2q_0q_1 \\ 2q_0q_1x_0 & q_0^2-q_1^2 \end{smallmatrix}\right]$ on kiertomatriisi.

Todistus. Olkoon $q = q_0 + q_1\mathrm{i}$, $|q| = 1$, kompleksiluku. Tällöin kuvaus $x \mapsto qxq$ voidaan kirjoittaa kertoimen q kompleksisuuden nojalla muotoon

$$\begin{aligned} qxq = q^2x &= (q_0 + q_1\mathrm{i})^2(x_0 + x_1\mathrm{i}) \\ &= \big[(q_0^2 - q_1^2) + 2q_0q_1\mathrm{i}\big](x_0 + x_1\mathrm{i}) \\ &= \big[(q_0^2 - q_1^2)x_0 - 2q_0q_1x_1\big] + \big[(q_0^2 - q_1^2)x_1 + 2q_0q_1x_0\big]\mathrm{i}, \end{aligned}$$

joka voidaan esittää myös matriisimuodossa:

$$qxq = \begin{bmatrix} q_0^2 - q_1^2 & -2q_0q_1 \\ 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \rho_q(x).$$

Osoitetaan vielä, että matriisi ρ_q on kiertomatriisi ρ. Kompleksiluvun q yhteys trigonometrisiin funktioihin saadaan polaariesityksen kautta:

$$q_0 + q_1\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}} = \cos(\phi) + \sin(\phi)\mathrm{i}.$$

Näin ollen matriisi ρ_q voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{bmatrix} q_0^2 - q_1^2 & -2q_0q_1 \\ 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2 & -2\cos(\phi)\sin(\phi) \\ 2\cos(\phi)\sin(\phi) & \cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2 \end{bmatrix}.$$

Trigonometrisiä kaavoja $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$ ja $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$ käyttäen saadaan lopulta

$$\begin{bmatrix} q_0^2 - q_1^2 & -2q_0q_1 \\ 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\phi) & -\sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{bmatrix},$$

joten ρ_q on kiertomatriisi. □

Proposition 7.1.1 jälkimmäisessä tapauksessa $P(q) = 0$ kerroin q on muotoa $q = Q(q)\mathrm{j}$, $|Q(q)| = 1$. Tällöin kuvauksen $x \mapsto qxq^*$, $x \in \mathbb{C}_\infty$, lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$qxq^* = Q(q)\mathrm{j}x\big[Q(q)\mathrm{j}\big]^* = Q(q)\mathrm{j}x\mathrm{j}^*Q(q)^* = -Q(q)\overline{x}Q(q). \tag{7.1}$$

Tämä vastaa seurauksen 4.4.3 nojalla pisteen $Q(q)$ generoimaa peilausta:

$$R_{Q(q)}(x) = -Q(q)\overline{x}\big[Q(q)'\big]^{-1} = -Q(q)\overline{x}\frac{\overline{Q(q)'}}{|Q(q)'|^2} = -Q(q)\overline{x}Q(q).$$

Koska kompleksiluku $Q(q)$, $|Q(q)| = 1$, on mielivaltainen, kaikki kompleksitason peilaukset origon kautta kulkevan suoran suhteen on mahdollista esittää kyseisellä kuvauksella.

Edellisen havainnon nojalla kuvaus $x \mapsto qxq^*$ ei olekaan kvaternikertoimisten kompleksitason Möbius-kuvausten yhteydessä *erityis*ortogonaalikuvaus vaan ortogonaalikuvaus, kattaen sekä kierrot että peilaukset suoran suhteen. Jos siis kuvaus T voidaan hajottaa edellisen luvun tapaan kuvausten (3)–(6) sekä edellä käsitellyt ehdot toteuttavien siirtojen ja ortogonaalikuvausten yhdisteiksi, kvaternikertoimiset kompleksitason Möbius-kuvaukset täydentäisivät alkuperäistä tapausta lisäämällä siihen kaikki tason peilaukset origon kautta kulkevan suoran suhteen.

Edellä käsiteltyyn peilaukseen liittyy kuitenkin kaksi ongelmaa. Ensinnäkin sen pseudodeterminantti on 1, minkä seurauksena suunnistuksen säilyttäviä Möbius-kuvauksia koskevan tuloksen kirjoittaminen edellisen luvun tapaan ei olisi mahdollista. Toisaalta se ei säilytä j-komponettia, vaan kuvaa sen vastaluvukseen:

$$q(x_2\mathrm{j})q^* = Q(q)\mathrm{j}(x_2\mathrm{j})\left[Q(q)\mathrm{j}\right]^* = -x_2Q(q)\mathrm{j}Q(q) = -x_2Q(q)\overline{Q(q)}\mathrm{j} = -x_2\mathrm{j}. \quad (7.2)$$

On suoraviivaista päätellä, että kuvauksella $x \mapsto -qxq^*$, $q = Q(q)\mathrm{j}$, $|q| = 1$, ei ole edellä mainittuja ongelmia. Seuraavaksi osoitetaan, että se on myös peilaus.

Propositio 7.1.3. *Kuvaus*

$$\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & -q' \end{bmatrix}, \quad x \mapsto -qxq^*, \quad q \in \mathbb{H}, \quad P(q) = 0, \quad |q| = 1.$$

on origon kautta kulkevan suoran suhteen tapahtuva kompleksitason peilaus, joka säilyttää j *komponentin ja jonka pseudodeterminantti on* -1.

Todistus. Olkoon q, $|q| = 1$, kvaterni, jonka kompleksiosa on nolla, ja olkoon muuttuja x kompleksinen. Tulee siis osoittaa, että lauseke $-qxq^*$ voidaan kirjoittaa muotoon $R_a = -a\overline{x}a$, missä a on kompleksiluku.

Yhtälön (7.1) nojalla pätee

$$-qxq^* = Q(q)\overline{x}Q(q),$$

joka voidaan kompleksilukujen laskusääntöjen nojalla muokata haluttuun muotoon

$$-qxq^* = -\mathrm{i}Q(q)\overline{x}\mathrm{i}Q(q) = R_{\mathrm{i}Q(q)}, \quad \mathrm{i}Q(q) \in \mathbb{C}.$$

Komponentin j säilyminen nähdään yhtälöstä (7.2) ottamalla puolittain vastaluvut.

Kuvauksen pseudodeterminantti on

$$\Delta = q(-q')^* = -q\overline{q} = -|q|^2 = -1.$$

□

Edellisen tuloksen peilaus ei ole sama peilaus kuin $x \mapsto qxq^*$, $q = Q(q)\mathrm{j}$, mutta edellinen voidaan kirjoittaa jälkimmäisen paikalle muodossa $-(-qxq^*)$, $q = Q(q)\mathrm{j}$. Tästä johtuen kuvauksen T hajotelma voidaan muodostaa myöhemmin lähes samalla tavalla kuin edellisessä luvussa.

Kaikkiaan on siis päätelty, että kun edellisen luvun kuvausten (1)–(6) siirrot ja kierrot määritellään edellä käsiteltyjen ehtojen mukaisesti sekä lisätään kuvauksiin Proposition 7.1.3 mukainen peilaus, niin kvaternikertoimisten kompleksitason Möbius-kuvausten käsittelyä voidaan jatkaa edellisen luvun tapaan.

7.2 Möbius-kuvausten määrittely

Edellisen alaluvun tarkastelujen myötä kvaternikertoimisten kompleksitason Möbius-kuvausten ryhmä määritellään yhdenmukaisesti avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ tapauksen kanssa, jolloin se siis sisältää myös peilaukset.

Määritelmä 7.2.1. *Avaruuden $\mathbb{C}_\infty$ kvaternikertoimisten Möbius-kuvausten ryhmä $GM_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\infty)$ on similaarikuvausten*

$$x \mapsto \lambda k(x) + b,$$

missä λ on positiivinen reaaliluku, k on ortogonaalikuvaus ja b on kompleksiluku, sekä inversioiden

$$x \mapsto -\frac{\overline{x}}{|x|^2}$$

generoima ryhmä.

Seuraavassa tuloksessa, jossa similaarikuvaukset osoitetaan yksinkertaisempien geometristen kuvausten yhdisteiksi, peilaukset ilmaistaan omana kuvauksena poiketen edellisestä luvusta, jossa ne saatiin kierron ja origon suhteen tapahtuvan peilauksen yhdisteinä.

Propositio 7.2.2. *Avaruuden $\mathbb{C}_\infty$ similaarikuvaukset voidaan muodostaa yhdisteinä seuraavista kuvauksista:*

- *siirto* $\begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x \mapsto x + \mu, \quad \mu \in \mathbb{C}$
- *kierto* $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{bmatrix}, \quad x \mapsto \alpha x \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad |\alpha| = 1$
- *venytys* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \quad x \mapsto \lambda^2 x, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$
- *peilaus* $\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & -q' \end{bmatrix}, \quad x \mapsto -qxq^* \quad q \in \mathbb{H}, \quad P(q) = 0, \quad |q| = 1.$

Todistus. Similaarikuvausten lauseke on muotoa $\lambda k(x) + b$, jossa $\lambda > 0$, k on ortogonaalikuvaus ja $b \in \mathbb{C}$. Kun ortogonaalikuvausta k vastaavan matriisin determinantti on 1, se kuuluu joukkoon $SO(2)$ ja saadaan Proposition 7.1.2 nojalla kierron $x \mapsto qxq^* = \rho_q(x)$ kuvausmatriisista $\rho_q \in SO(2)$. Kun ortogonaalikuvausta k vastaavan matriisin determinantti on -1, se kuuluu joukkoon $O^-(2)$ ja saadaan Proposition 7.1.3 todistuksen nojalla peilauksen $x \mapsto -qxq^* = R_{\mathrm{i}Q(q)}(x)$ kuvausmatriisista $R_{\mathrm{i}Q(q)} \in O^-(2)$. Molemmissa tapauksissa positiivinen kerroin λ saadaan venytyksellä ja summattava vektori b siirrolla. $\square$

Similaarikuvauksille pätee laajenemisominaisuus: siirto ja venytys pysyvät selvästi avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$ myös muuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ tapauksessa ja sama pätee kierrolle ja peilaukselle Proposition 4.5.5 nojalla.

Seuraus 7.2.3. *Avaruuden $\mathbb{C}_\infty$ Möbius-kuvausten ryhmä $GM(\mathbb{C}_\infty)$ on siirtojen, kiertojen, venytysten, peilausten, origon suhteen tapahtuvien peilausten sekä inversioiden generoima ryhmä.*

Joukon M määritelmää joudutaan kiristämään edelliseen lukuun verrattuna vaatimalla bijektiivisyys koskemaan laajennetun avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ lisäksi myös varsinaista käsiteltävää avaruutta $\mathbb{C}_\infty$, sillä jälkimmäinen ei edellisestä luvusta poiketen seuraakaan edellisestä. Tätä ominaisuutta tarvitaan osoittamaan edellisessä alaluvussa havaittu vaatimus tulojen bd^{-1}, ac^{-1}, $c^{-1}d$ ja $a^{-1}b$ kuulumisesta kompleksilukuihin.

Määritelmä 7.2.4. *Joukko M_2 muodostuu kvaternialkioisista 2×2-matriiseista $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, jotka indusoivat bijektiot*

$$\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty, \quad x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}$$

ja

$$\mathbb{R}^3_\infty \to \mathbb{R}^3_\infty, \quad x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}.$$

Seuraavaksi siirrytään käsittelemään ryhmäominaisuuksia.

7.3 Joukon M_2 osoittaminen ryhmäksi

Propositiota 6.2.1 vastaavassa tuloksessa kvaternitulojen on oltava nyt kompleksilukuja. Samalla tuloksen todistus muuttuu hieman.

Propositio 7.3.1. *Kuvausten $T(0) = bd^{-1}$, $T(\infty) = ac^{-1}$, $T^{-1}(0) = -a^{-1}b$ ja $T^{-1}(\infty) = -c^{-1}d$ arvot ovat kompleksilukuja.*

Todistus. Proposition 6.2.1 todistusta seuraten nähdään, että pätee seuraavat kuvaukset: $T(0) = bd^{-1}$, $T(\infty) = ac^{-1}$, $T^{-1}(0) = -a^{-1}b$ ja $T^{-1}(\infty) = -c^{-1}d$. Koska kuvauksen T on kuvattava kompleksitaso kompleksitasolle, sen on erityisesti kuvattava nolla ja äärettömyyspiste kompleksiluvuiksi ja nollan ja äärettömän alkukuvapisteiden on oltava kompleksilukuja. Näin ollen tulot bd^{-1}, ac^{-1}, $-a^{-1}b$ ja $-c^{-1}d$ ovat kompleksisia. $\square$

Edellinen tulos voidaan kirjoittaa myös konjugaattia käyttäen, jolloin se on jatkon kannalta hyödyllisemmässä muodossa.

Propositio 7.3.2. *Tulot $b\overline{d}$, $a\overline{c}$, $\overline{a}b$ ja $\overline{c}d$ ovat kompleksilukuja.*

Todistus. Edellisen tuloksen nojalla tulot bd^{-1}, ac^{-1}, $-a^{-1}b$ ja $-c^{-1}d$ ovat kompleksisia. Tuloissa olevat kvaternien käänteisluvut voidaan edelleen ilmaista konjugaatin ja normin avulla. Esimerkiksi ensimmäiselle tulolle pätee

$$bd^{-1} = b\frac{\overline{d}}{|d|^2} = \frac{1}{|d|^2}b\overline{d}.$$

Koska reaalikerroin $1/|d|^2$ ei vaikuta, mihin avaruuteen alkio kuuluu, tulon $b\overline{d}$ on oltava kompleksinen. Tämä pätee myös muille kolmelle tulolle. □

Kertoimia koskevat ehdot halutaan muotoilla myös reversiota käyttäen, jotta pseudodeterminanttia koskeva tulos voidaan toistaa edellisen luvun tapaan.

Propositio 7.3.3. *Olkoon T joukon M_2 matriisi. Tällöin kvaternitulot ab^*, a^*c, b^*d ja cd^* ovat redusoituja kvaterneja.*

Todistus. Katso Proposition 6.2.2. □

Yhdistettyä kuvausta, identiteettikuvausta sekä käänteiskuvausta koskeviin tuloksiin ei tule muutoksia.

Propositio 7.3.4. *Joukon M_2 matriisien tulo indusoi yhdistetyn kuvauksen.*

Todistus. Katso Proposition 6.2.3 todistus. □

Propositio 7.3.5. *Matriisi $T \in M_2$ indusoi identtisen kuvauksen, jos ja vain jos se on muotoa*

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}_*.$$

Todistus. Katso Proposition 6.2.5 todistus. Huomattakoon, että Määritelmän 7.2.4 bijektiivisyysoletus tulee päteä myös avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$, jotta edellisessä todistuksessa kerroin a voidaan osoittaa kompleksiluvun sijaan reaaliluvuksi. □

Propositio 7.3.6. *Kuvauksen $T(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ käänteiskuvauksen indusoi matriisi $T^* = \left[\begin{smallmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{smallmatrix}\right] \in M_2$.*

Todistus. Katso Proposition 6.2.6 todistus. □

Pseudodeterminanttia koskeva tulos ja sitä seuraava tulos, jossa joukko M_2 osoitetaan ryhmäksi, pysyvät myös ennallaan.

Propositio 7.3.7. *Olkoon T joukon M_2 matriisi. Tällöin sen pseudodeterminantille pätee $\Delta(T) = \Delta(T^*) \in \mathbb{R}_*$.*

Todistus. Katso Proposition 6.2.8 todistus. □

Propositio 7.3.8. *Joukko M_2 muodostaa ryhmän matriisitulon suhteen.*

Todistus. Katso Proposition 6.2.9 todistus. □

Tässä kohtaa tulosten käsitteleminen poikkeaa edellisestä kappaleesta. Ryhmä $(M_2, \cdot)$ voidaan nyt nimittäin määritellä hieman yksinkertaisemmilla kertoimia a, b, c ja d koskevilla ehdoilla.

7.4 Ryhmän M_2 muotoileminen kertoimia a, b, c ja d koskevilla ehdoilla

Propositiossa 7.1.1 todettiin, että kvaternikertoimiseen kompleksitason tapaukseen tulee kiertoja koskeva lisäehto. Tällöin ei kuitenkaan todettu, mitä kertoimia se koskee.

Propositio 7.4.1. *Olkoon T joukon M_2 kuvaus. Tällöin tapauksessa $c = 0$ pätee*

$$P(a) = 0 \quad \textit{tai} \quad Q(a) = 0$$

ja tapauksessa $c \neq 0$ pätee

$$P(c) = 0 \quad \textit{tai} \quad Q(c) = 0.$$

Todistus. Olkoon T joukon M_2 kuvaus, ja olkoon ensin $c = 0$. Tällöin kuvaus T voidaan hajottaa Proposition 6.3.1 todistusta seuraten muotoon

$$T(x) = \left(\frac{|\Delta|}{\Delta}\right)\left(\frac{|a|^2}{|\Delta|}\right)\left(\frac{a}{|a|}\right)x\left(\frac{a}{|a|}\right)^* + bd^{-1}.$$

Termi bd^{-1} on Proposition 7.3.1 nojalla kompleksiluku, ja kerroin $(|\Delta|/\Delta)(|a|^2/|\Delta|)$ on reaalinen. Jotta kuvaus voisi olla bijektio kompleksitasossa, myös lausekkeen $(a/|a|)x(a/|a|)^*$ on oltava kompleksinen jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ arvolla. Tämä on Proposition 7.1.1 nojalla yhtäpitävää ehdon $P(a/|a|) = 0$ tai $Q(a/|a|) = 0$ kanssa, joka yksinkertaistuu ehdoksi $P(a) = 0$ tai $Q(a) = 0$.

Tapauksessa $c \neq 0$ kuvaus T voidaan hajottaa vastaavasti muotoon

$$T(x) = ac^{-1} + \left(\frac{\Delta}{|\Delta|}\right)\left(\frac{|\Delta|}{|c|^2}\right)\left(\frac{c'}{|c|}\right)\left[-(x + c^{-1}d)^{-1}\right]\left(\frac{c'}{|c|}\right)^*.$$

Tulot ac^{-1} ja $c^{-1}d$ ovat Proposition 7.3.1 nojalla kompleksisia, jolloin myös lauseke $(x+c^{-1}d)^{-1}$ on kompleksisen lausekkeen käänteislukuna kompleksinen. Jotta kuvaus T voisi olla bijektio kompleksitasossa, lausekkeen $(c'/|c|)\left[-(x+c^{-1}d)^{-1}\right](c'/|c|)^*$ on oltava kompleksinen jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ arvolla. Proposition 7.1.1 nojalla tämä on yhtäpitävää ehdon $P(c'/|c|) = 0$ tai $Q(c'/|c|) = 0$ kanssa, joka yksinkertaistuu ehdoksi $P(c) = 0$ tai $Q(c) = 0$. □

Bijektiivisyysoletuksesta on nyt johdettu 3 kertoimia a, b, c ja d koskevaa ehtoa:

(1) bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$ ja $c^{-1}d \in \mathbb{C}$

(2) $\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*$

(3) $P(a) = 0 \quad \text{tai} \quad Q(a) = 0, \quad \text{jos } c = 0 \quad \text{ja}$
$P(c) = 0 \quad \text{tai} \quad Q(c) = 0, \quad \text{jos } c \neq 0.$

Nämä ovat ne ehdot, joiden perusteella edellisessä todistuksessa käytetyt hajotelmat voidaan tulkita siirtojen, kiertojen, venytysten, peilausten, origon suhteen tapahtuvien peilausten sekä inversioiden yhdisteiksi. Osoitetaan seuraavaksi, että ehdot (1) ja (3) voidaan yhdistää siistiksi yksittäisiä kertoimia koskevaksi ehdoksi. Ennen päätulosta otetaan kuitenkin aputulos, jonka myötä varsinainen tulos voidaan käsitellä suoraviivaisemmin.

Lemma 7.4.2. *Olkoot a, b, c ja d kvaterneja. Tällöin ehdot bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$ ja $c^{-1}d \in \mathbb{C}$ ovat yhtäpitävät seuraavan yhtälöryhmän kanssa:*

$$\begin{cases} -P(b)Q(d) + Q(b)P(d) = 0 \\ -P(a)Q(c) + Q(a)P(c) = 0 \\ \overline{P(a)}Q(b) - Q(a)\overline{P(b)} = 0 \\ \overline{P(c)}Q(d) - Q(c)\overline{P(d)} = 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Todistus. Ehdot bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$ ja $c^{-1}d \in \mathbb{C}$ ovat Proposition 7.3.2 nojalla yhtäpitäviä ehtojen $b\overline{d}$, $a\overline{c}$, $\overline{a}b$ ja $\overline{c}d \in \mathbb{C}$ kanssa, jotka ovat edelleen yhtäpitäviä ehtojen $Q(b\overline{d}) = Q(a\overline{c}) = Q(\overline{a}b) = Q(\overline{c}d) = 0$ kanssa. Ehdon $Q(b\overline{d}) = 0$ aukikirjoitettu muoto on operaattorin Q tulosäännön nojalla

$$0 = Q(b\overline{d}) = P(b)Q(\overline{d}) + Q(b)\overline{P(\overline{d})} = -P(b)Q(d) + Q(b)P(d),$$

joka on yhtälöryhmän ylin yhtälö. Ehdosta $Q(a\overline{c}) = 0$ saadaan täysin vastaavasti yhtälöryhmän toinen yhtälö. Yhtälöryhmän kolmas yhtälö saadaan ehdosta $Q(\overline{a}b) = 0$:

$$0 = Q(\overline{a}b) = P(\overline{a})Q(b) + Q(\overline{a})\overline{P(b)} = \overline{P(a)}Q(b) - Q(a)\overline{P(b)}.$$

Neljäs yhtälö saadaan vastaavasti kuin edellinen yhtälö ehdosta $Q(\overline{c}d) = 0$. □

Propositio 7.4.3. *Olkoon T ryhmän $(M_2, \cdot)$ matriisi. Tällöin kertoimia a, b, c ja d koskevat ehdot*

$$bd^{-1}, ac^{-1}, a^{-1}b, c^{-1}d \in \mathbb{C},$$

ja

$$P(a) = 0 \quad \text{tai} \quad Q(a) = 0, \quad \text{jos } c = 0 \quad \text{ja} \quad P(c) = 0 \quad \text{tai} \quad Q(c) = 0, \quad \text{jos } c \neq 0$$

ovat yhtäpitävät seuraavan ehdon kanssa:

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0 \quad \text{tai} \quad Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0.$$

Todistus. Olkoon T ryhmän $(M_2, \cdot)$ matriisi. Lemman 7.4.2 nojalla ehto bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$, $c^{-1}d \in \mathbb{C}$ voidaan korvata yhtäpitävällä yhtälöryhmällä (7.3).

Todistetaan ensin suunta ”$\Longrightarrow$”. Olkoon siis voimassa yhtälöryhmä (7.3). Käsitellään ensin tapaus $c = 0$. Tällöin on voimassa $P(a) = 0$ tai $Q(a) = 0$, joka jakaantuu kolmeen mahdolliseen tilanteeseen: $P(a) = 0$ ja $Q(a) \neq 0$, $P(a) \neq 0$ ja $Q(a) = 0$ sekä $P(a) = 0$ ja $Q(a) = 0$. Osoitetaan, että väite pätee kussakin tilanteessa.

Pseudodeterminantin reaalisuuden ja oletuksen $c = 0$ perusteella saadaan kertoimia koskeva lisäehto

$$0 = Q(\Delta) = Q(ad^*) = P(a)Q(d^*) + Q(a)\overline{P(d^*)} = P(a)\overline{Q(d)} + Q(a)\overline{P(d)}, \tag{7.4}$$

jota hyödynnetään väitteen todistuksessa.

Tapauksessa $P(a) = 0$, $Q(a) \neq 0$ yhtälöstä (7.4) seuraa ehto $P(d) = 0$. Lisäksi yhtälöryhmän kolmannesta yhtälöstä seuraa ehto $P(b) = 0$, joten kaikkiaan pätee siis $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$.

Tapauksessa $P(a) \neq 0$, $Q(a) = 0$ yhtälöstä (7.4) seuraa ehto $Q(d) = 0$. Lisäksi yhtälöryhmän kolmannesta yhtälöstä seuraa ehto $Q(b) = 0$, joten yhteensä pätee $Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0$.

Viimeinen tapaus, $P(a) = 0$ ja $Q(a) = 0$, on mahdoton, sillä silloin olisi $\Delta = 0$. Näin ollen suunta ”$\Longrightarrow$” on tosi tapauksessa $c = 0$.

Olkoon sitten $c \neq 0$. Tällöin yhtälöryhmän (7.3) lisäksi on voimassa ehto $P(c) = 0$ tai $Q(c) = 0$, joka jakaantuu kolmeen eri tapaukseen: $P(c) = 0$ ja $Q(c) \neq 0$, $P(c) \neq 0$ ja $Q(c) = 0$ sekä $P(c) = 0$ ja $Q(c) = 0$

Pseudodeterminantin reaalisuuden perusteella pätee yhtälö

$$\begin{aligned} 0 = Q(\Delta) &= Q(ad^* - bc^*) = Q(ad^*) - Q(bc^*) \\ &= P(a)Q(d^*) + Q(a)\overline{P(d^*)} - P(b)Q(c^*) - Q(b)\overline{P(c^*)} \\ &= P(a)\overline{Q(d)} + Q(a)\overline{P(d)} - P(b)\overline{Q(c)} - Qb\overline{P(c)}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Tapauksessa $P(c) = 0$, $Q(c) \neq 0$ yhtälöryhmän toisesta yhtälöistä saadaan ehto $P(a) = 0$ ja viimeisestä yhtälöstä ehto $P(d) = 0$. Näin ollen yhtälöstä (7.5) seuraa edelleen ehto $P(b) = 0$. Kaikkiaan pätee siis $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$.

Tapauksessa $P(c) \neq 0$, $Q(c) = 0$ yhtälöryhmän toisesta yhtälöistä saadaan ehto $Q(a) = 0$ ja viimeisestä ehto $Q(d) = 0$, jolloin yhtälöstä (7.5) seuraa edelleen ehto $Q(b) = 0$. Yhteensä pätee siis $Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0$.

Tapaus $P(c) = Q(c) = 0$ eli $c = 0$ käsiteltiinkin jo todistuksen alussa, joten kaikissa tapauksissa saadaan

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0 \quad \text{tai} \quad Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0,$$

mikä todistaa suunnan ”$\Longrightarrow$”.

Suunnan ”$\Longleftarrow$” todistaminen on suoraviivaista: oletuksen $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$ tai $Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0$ nojalla voidaan sopivasti kertomalla, konjugaatteja ottamalla ja summaamalla kirjoittaa yhtälöryhmä (7.3). $\square$

Bijektiivisyysoletuksesta seuraavat siis ehdot $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$ tai $Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0$ ja $\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*$, joista ensimmäinen tarkoittaa, että kvaternikertoimiset kompleksitason Möbius-kuvaukset ovat mahdollisia ainoastaan kahdessa tapauksessa: kun kaikki kertoimet ovat kompleksilukuja ja kun kaikkien kertoimien kompleksiosa on nolla. Osoitetaan seuraavaksi, että tämä pätee myös kääntäen, eli että näiden ehtojen perusteella voidaan näyttää kuvaus T bijektioksi sekä avaruudessa $\mathbb{C}_\infty$ että avaruudessa $\mathbb{R}^3_\infty$.

Propositio 7.4.4. *Jos matriisin $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ kertoimille pätevät ehdot*

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0 \quad \textit{tai} \quad Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0$$

ja

$$\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*,$$

niin sen indusoima kuvaus $T(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}$ on bijektio avaruuksissa $\mathbb{C}_\infty$ ja $\mathbb{R}^3_\infty$.

Todistus. Olkoon $T = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ matriisi, jonka kertoimille pätevät ehdot $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$ tai $Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0$ ja $\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*$. Tällöin edellisen proposition nojalla kertoimille pätevät myös ehdot bd^{-1}, ac^{-1}, $a^{-1}b$, $c^{-1}d \in \mathbb{C}$ ja $P(a) = 0$ tai $Q(a) = 0$, kun $c = 0$ ja $P(c) = 0$ tai $Q(c) = 0$, kun $c \neq 0$. Seuraamalla Proposition 6.2.10 todistusta havaitaan, että kuvaus T on hyvin määritelty, että sillä on olemassa käänteiskuvaus ja että kuvaus T ja käänteiskuvaus

T^* voidaan hajottaa tapauksessa $q = 0$ muotoon

$$T(x) = \frac{1}{\Delta} axa^* + bd^{-1}$$

ja

$$T^*(x) = \frac{1}{\Delta} a^{-1}x(a^*)^{-1} - a^{-1}b.$$

Termit bd^{-1} ja $a^{-1}b$ ovat oletusten nojalla kompleksilukuja. Lausekkeet axa^* ja $a^{-1}x(a^*)^{-1}$ taas ovat kompleksisia jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ arvolla oletuksen $P(a) = 0$ tai $Q(a) = 0$ ja Proposition 7.1.1 nojalla. Toisaalta ne kuuluvat Proposition 4.5.5 nojalla avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ jokaisella muuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ arvolla. Näin ollen kuvaus T on tapauksessa $c = 0$ bijektio avaruuksissa $\mathbb{C}_\infty$ ja $\mathbb{R}^3_\infty$.

Tapauksessa $c \neq 0$ vastaavat hajotelmat ovat

$$T(x) = ac^{-1} - \Delta(c^{-1})^*(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}$$

ja

$$T^*(x) = -c^{-1}d - \Delta c^{-1}(x - ac^{-1})^{-1}(c^{-1})^*.$$

Tulot ac^{-1} ja $c^{-1}d$ ovat oletuksen nojalla kompleksilukuja. Näin ollen lausekkeet $(x + c^{-1}d)^{-1}$ ja $(x - ac^{-1})^{-1}$ ovat muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ tapauksessa kompleksisen lausekkeen käänteislukuna kompleksisia ja muuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ tapauksessa ne kuuluvat vastaavasti avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$. Täten lausekkeet $(c^{-1})^*(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}$ ja $c^{-1}(x - ac^{-1})^{-1}(c^{-1})^*$ ovat muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ tapauksessa kompleksisia oletuksen $P(c) = 0$ tai $Q(c) = 0$ ja Proposition 7.1.1 nojalla ja muuttujan $\mathbb{R}^3_\infty$ tapauksessa ne kuuluvat Proposition 4.5.5 nojalla avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$. Täten kuvaus T on myös tapauksessa $c \neq 0$ bijektio avaruuksissa $\mathbb{C}_\infty$ ja $\mathbb{R}^3_\infty$ □

Edellisen tuloksen myötä ryhmä $(M_2, \cdot)$ voidaan kirjoittaa seuraavan lauseen mukaiseen muotoon.

Lause 7.4.5.

$$\begin{aligned} M = \{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \mid a, b, c, d \in \mathbb{H},\ & P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0 \quad \textit{tai} \\ & Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0,\ ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_* \} \end{aligned}$$

7.5 Ryhmien $(M_2, \cdot)$ ja $GM(\mathbb{C}_\infty)$ homomorfisuus

Seuraavan tuloksen todistus monimutkaistuu hieman edelliseen lukuun verrattuna, sillä kuvaus T hajotetaan hieman eri muotoihin kiertojen ja peilausten tapauksissa. Huomattakoon, että peilaus origon suhteen eli kuvaus (5) vastaa muuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$

tapauksessa kiertoa puolen kierroksen verran, jolloin kuvaus (5) on turha. Kuvaus (5) tarvitaan kuitenkin muuttujan $x \in \mathbb{R}^3_\infty$ tapausta varten, jolloin edellinen huomio ei päde.

Propositio 7.5.1. *Matriisin $T \in M_2$ indusoima kuvaus on yhdiste seuraavista kuvauksista:*

(1) *siirto* $\begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x \mapsto x + \mu, \quad \mu \in \mathbb{C}$

(2) *kierto* $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{bmatrix}$, $x \mapsto \alpha x \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad |\alpha| = 1$

(3) *venytys* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$, $x \mapsto \lambda^2 x, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$

(4) *peilaus* $\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & -q' \end{bmatrix}$, $x \mapsto -qxq^*, \quad q \in \mathbb{H}, \quad P(q) = 0, \quad |q| = 1$

(5) *peilaus origon suhteen* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $x \mapsto -x$

(6) *inversio* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x \mapsto -x^{-1} = -\dfrac{\overline{x}}{|x|^2}$

(7) *identtinen kuvaus* $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $x \mapsto x, \quad \lambda \in \mathbb{R}_*.$

Todistus. Olkoon ensin $c = 0$. Proposition 6.3.1 todistusta seuraten kuvaus T voidaan kirjoittaa muotoon

$$T(x) = \left(\frac{|\Delta|}{\Delta}\right)\left(\frac{|a|^2}{|\Delta|}\right)\left(\frac{a}{|a|}\right)x\left(\frac{a}{|a|}\right)^* + bd^{-1}. \tag{7.6}$$

Kuvauksen tulkinta riippuu siinä esiintyvän ortogonaalikuvauksen

$$T_1(x) = \left(\frac{a}{|a|}\right)x\left(\frac{a}{|a|}\right)^*$$

kertoimesta a, jolle pätee Proposition 7.4.1 nojalla joko $P(a) = 0$ tai $Q(a) = 0$.

Tapauksessa $Q(a) = 0$ ortogonaalikuvaus T_1 on kierto, joten sitä vastaa kuvaus (2).

Tapauksessa $P(a) = 0$ ortogonaalikuvaus T_1 on peilaus. Tällöin se voidaan kirjoittaa muotoon

$$T_1(x) = \left(\frac{a}{|a|}\right)x\left(\frac{a}{|a|}\right)^* = -\left[-\left(\frac{a}{|a|}\right)x\left(\frac{a}{|a|}\right)^*\right],$$

jolloin se saadaan peilauksen ja origon suhteen tapahtuvan peilauksen yhdisteenä. Yhtälö (7.6) voidaan täten kirjoittaa seuraavaan muotoon, joka kattaa molemmat tapaukset:

$$T(x) = \Big(\pm \frac{|\Delta|}{\Delta}\Big)\Big(\frac{|a|^2}{|\Delta|}\Big)\Big[\pm \Big(\frac{a}{|a|}\Big) x \Big(\frac{a}{|a|}\Big)^*\Big] + bd^{-1}.$$

Tästä muodosta nähdään, että kuvaus T on yhdiste kuvauksista kierto (+) tai peilaus (−), venytys, venytys ($\lambda = 1$) tai peilaus origon suhteen ja siirto eli matriisi(tulo)n

$$T = \begin{bmatrix} 1 & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm\frac{|\Delta|}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{|a|}{\sqrt{|\Delta|}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|a|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{|a|} & 0 \\ 0 & \pm\frac{a'}{|a|} \end{bmatrix}$$

indusoima.

Olkoon sitten $c \neq 0$. Tällöin kuvaus T voidaan kirjoittaa Proposition 6.3.1 todistuksen nojalla muotoon

$$T(x) = \Big(\frac{\Delta}{|\Delta|}\Big)\Big(\frac{|\Delta|}{|c|^2}\Big)\Big(\frac{c'}{|c|}\Big)\big[-(x + c^{-1}d)^{-1}\big]\Big(\frac{c'}{|c|}\Big)^* + ac^{-1}. \tag{7.7}$$

Sen tulkinta riippuu siinä esiintyvästä lausekkeesta

$$T_2(x) = \Big(\frac{c'}{|c|}\Big)\big[-(x + c^{-1}d)^{-1}\big]\Big(\frac{c'}{|c|}\Big)^*,$$

mikä on tapauksessa $Q(c) = 0$ kierto ja tapauksessa $P(c) = 0$ peilaus muuttujan $-(x + c^{-1}d)^{-1}$ suhteen. Edellistä tapausta seuraten yhtälö (7.7) voidaan kirjoittaa muotoon

$$T(x) = \Big(\pm\frac{\Delta}{|\Delta|}\Big)\Big(\frac{|\Delta|}{|c|^2}\Big)\Big[\pm\Big(\frac{c'}{|c|}\Big)\big[-(x + c^{-1}d)^{-1}\big]\Big(\frac{c'}{|c|}\Big)^*\Big] + ac^{-1},$$

mistä nähdään, että kuvaus T on yhdiste kuvauksista siirto, inversio, kierto (+) tai peilaus (−), venytys, venytys ($\lambda = 1$) tai inversio ja siirto eli matriisi(tulo)n

$$T = \begin{bmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm\frac{\Delta}{|\Delta|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|c|} & 0 \\ 0 & \frac{|c|}{\sqrt{|\Delta|}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{c'}{|c|} & 0 \\ 0 & \pm\frac{c}{|c|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

indusoima. □

Korostettakoon, että tapaus $P(a) = P(b) = P(c) = P(d)$ ei edellisen tuloksen nojalla lisää peilausten lisäksi muita uusia kuvauksia.

Alaluvun viimeisten tulosten todistuksiin ei tule muutoksia.

Lause 7.5.2. *Ryhmät* $(M_2, \cdot)$ *ja* $GM_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\infty)$ *ovat homomorfiset. Ryhmähomomorfismi on muotoa*

$$f : (M_2, \cdot) \to GM_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\infty), \quad f(T) = \widetilde{T},$$

missä $\widetilde{T}$ *on matriisin* T *indusoima kuvaus. Homomorfismin ydin on* $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\}$.

Todistus. Katso Lauseen 6.3.2 todistus. □

Lause 7.5.3. *Tekijäryhmä* $(M_2, \cdot)/\{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\}$ *on isomorfinen avaruuden* $\mathbb{C}_\infty$ *kvaternikertoimisten Möbius-kuvausten ryhmän* $GM_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\infty)$ *kanssa.*

7.6 Suunnistuksen säilyttävät avaruuden $\mathbb{C}_\infty$ Möbius-kuvaukset

Peilauksen määrittely edellä käytetyssä muodossa mahdollistaa seuraavan tuloksen muotoilemisen yhdenmukaisesti edellisen luvun kanssa.

Propositio 7.6.1. *Avaruuden* $\mathbb{C}_\infty$ *kvaternikertoiminen Möbius-kuvaus säilyttää suunnistuksen, jos ja vain jos sen pseudodeterminantti on positiivinen.*

Todistus. Osoitetaan Proposition 6.4.3 todistuksen tapaan, että kunkin kuvauksen (1)–(7) Jacobin determinantti ja pseudodeterminantti ovat samanmerkkiset.

Siirto on kuvaus

$$x \mapsto x + \mu = \begin{bmatrix} x_0 + \mu_0 \\ x_1 + \mu_1 \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

joten sen Jacobin matriisi on

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen siirron Jacobin determinantti on 1. Sen pseudodeterminantti on myös 1, joten molemmat determinantit ovat samanmerkkiset.

Kierto on kuvaus

$$x \mapsto qxq^* = \rho_q(x), \quad q \in \mathbb{H}, \quad Q(q) = 0, \quad |q| = 1.$$

Sen kuvausmatriisi ρ_q on kiertomatriisi. Ortogonaalikuvauksena kierto on lineaarikuvaus, joten sen Jacobin matriisi on kuvausmatriisi ρ_q, jonka determinantti on kiertona 1. Kuvauksen pseudodeterminantti $q(q')^* = q\overline{q} = |q|^2 = 1^2 = 1$ on myös positiivinen, joten molemmat determinantit ovat myös tässä tapauksessa samanmerkkiset.

Venytys on kuvaus

$$x \mapsto \lambda^2 x = \begin{bmatrix} \lambda^2 x_0 \\ \lambda^2 x_1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

joten sen Jacobin matriisi on
$$J = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$
Sen Jacobin determinantti on täten λ^4 eli positiivinen. Kuvauksen pseudodeterminantti on 1, joten molemmat determinantit ovat samanmerkkiset.

Peilaus on kuvaus
$$x \mapsto -qxq^* = R_{\mathrm{i}Q(q)}(x), \quad q \in \mathbb{H}, \quad P(q) = 0, \quad |q| = 1.$$
Se on ortogonaalikuvauksena lineaarikuvaus, joten sen Jacobin matriisi on kuvausmatriisi $R_{\mathrm{i}Q(q)}$, jonka determinantti on peilauksena -1. Kuvauksen pseudodeterminantti $q(-q')^* = -q\overline{q} = -|q|^2 = -1^2 = -1$ on myös negatiivinen, joten molemmat determinantit ovat myös tässä tapauksessa samanmerkkiset.

Peilaus origon suhteen on kompleksimuuttujan $x \in \mathbb{C}_\infty$ tapauksessa kierto puolen kierroksen verran. Täten sen molemmat determinantit ovat edellä todistetun nojalla samanmerkkiset.

Inversio on kuvaus muotoa
$$x \mapsto -x^{-1} = -\frac{\overline{x}}{|x|^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{-x_0}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2} \end{bmatrix}, \quad x \neq 0,$$
joten sen Jacobin matriisi on
$$J = \begin{bmatrix} \frac{-|x|^2 + 2x_0^2}{|x|^4} & \frac{2x_0x_1}{|x|^4} \\ \frac{-2x_0x_1}{|x|^4} & \frac{|x|^2 - 2x_1^2}{|x|^4} \end{bmatrix} = \frac{1}{|x|^4} \begin{bmatrix} -|x|^2 + 2x_0^2 & 2x_0x_1 \\ -2x_0x_1 & |x|^2 - 2x_1^2 \end{bmatrix}.$$
Matriisin J determinantiksi saadaan
$$\begin{aligned}
\det(J) &= \frac{1}{|x|^8} \begin{vmatrix} -|x|^2 + 2x_0^2 & 2x_0x_1 \\ -2x_0x_1 & |x|^2 - 2x_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{|x|^8} \left[(-|x|^2 + 2x_0^2)(|x|^2 - 2x_1^2) - (2x_0x_1)(-2x_0x_1)\right] \\
&= \frac{1}{|x|^8}(-|x|^4 + 2|x|^2(x_1^2 + x_0^2) - 4x_0^2x_1^2 + 4x_0^2x_1^2) \\
&= \frac{1}{|x|^8}(-|x|^4 + 2|x|^2|x|^2) \\
&= \frac{1}{|x|^8}|x|^4 = \frac{1}{|x|^4}.
\end{aligned}$$
Inversion Jacobin determinantti on siis positiivinen. Kuvauksen pseudodeterminant-

ti on 1, joten molemmat determinantit ovat positiivisia.

Identtinen kuvaus on muotoa

$$x \mapsto x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

joten se jacobin matriisi on

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jonka determinantti on 1. Kuvauksen pseudodeterminantti λ^2, $\lambda \in \mathbb{R}_*$, on myös positiivinen, joten Jacobin determinantti ja pseudodeterminantti ovat kaikissa tapauksissa samanmerkkiset. □

Edellisen tuloksen myötä voidaan muotoilla suunnistuksen säilyttävien Möbius-kuvausten aliryhmää koskeva tulos edellisen luvun tapaan.

Lause 7.6.2. *Tekijäryhmä* $\{ T \in M_2 \mid \Delta(T) = 1\}/\{ \pm I \}$ *on isomorfinen avaruuden* $\mathbb{C}_\infty$ *suunnistuksen säilyttävien kvaternikertoimisten Möbius-kuvausten ryhmän* $GM_{\mathbb{H},+}(\mathbb{C})$ *kanssa.*

7.7 Esimerkkejä

Vaikka kaikki alkuperäiset kompleksitason Möbius-kuvaukset laajenevat avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ geometrisessa mielessä, kuvausten muoto eli kertoimien arvot voivat muuttua. Ensimmäinen esimerkki havainnollistaa tätä.

Esimerkki 7.7.1. *Kiertoa kulman* $\pi/4$ *verran myötäpäivään vastaa kompleksimuuttujan tapauksessa kuvaus* $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}x$. *Kuvauksen lauseke voidaan kirjoittaa muotoon*

$$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}x = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}x + 0\right)(0 \cdot x + 1)^{-1},$$

joten sitä vastaa Möbius-kuvaus

$$T = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(T) = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Sen sijaan avaruuteen $\mathbb{R}^3_\infty$ *laajentuvien Möbius-kuvausten tapauksessa kyseinen kuvaus on muotoa* $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}x\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$. *Tällöin se voidaan kirjoittaa muotoon*

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}x\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}x + 0)(0 \cdot x + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}})^{-1},$$

josta sitä nähdään vastaavan Möbius-kuvaus

$$S = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\pi}{8}i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi}{8}i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \Delta(S) = 1 \in \mathbb{R}_*.$$

Loput esimerkit havainnollistavat, että työssä käsiteltyjä geometrisia kuvauksia voidaan todella esittää Möbius-kuvauksilla.

Esimerkki 7.7.2. *Etsitään se Möbius-kuvaus, joka peilaa kompleksitason suoran $y = x$ suhteen.*

Kompleksitason peilaukset (origon kautta kulkevan suoran suhteen) Möbius-kuvauksella esitettynä ovat muotoa

$$x \mapsto -qxq^*, \quad q \in \mathbb{H}, \quad P(q) = 0, \quad |q| = 1.$$

On siis määritettävä se kvaterni q, joka generoi halutun peilauksen.

Proposition 7.1.3 todistuksessa havaittiin, että edellisen kuvauksen sekä pisteen $a \in \mathbb{C}_*$ generoiman peilauksen R_a välinen yhteys on

$$-qxq^* = R_{iQ(q)}(x),$$

missä piste $\mathrm{i}Q(q)$ on siis kohtisuorassa peilaussuoraa vasten. Pisteen $\mathrm{i}Q(q)$ on täten oltava suoralla $y = -x$, ja koska sen etäisyys origosta on 1, sen on oltava $\mathrm{i}Q(q) = \pm(1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$. Molemmat pisteet generoivat saman peilauksen, joten voidaan valita etumerkki $-$, jolloin q sievenee yksinkertaisempaan muotoon. Etsitty kvaterni on täten

$$q = 0 + Q(q)\mathrm{j} = -\frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{j}}{\sqrt{2}\mathrm{i}} = \frac{(\mathrm{i}+1)\mathrm{j}}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{j}+\mathrm{k}}{\sqrt{2}},$$

joten haluttua peilausta vastaa Möbius-kuvaus

$$T = \begin{bmatrix} \frac{j+k}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{j-k}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \Delta(T) = \left(\frac{\mathrm{j}+\mathrm{k}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\mathrm{j}+\mathrm{k}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{j}^2 + \mathrm{jk} + \mathrm{kj} + \mathrm{k}^2}{2} = -1 \in \mathbb{R}_*.$$

Esimerkki 7.7.3. *Peilaus pisteen $1+\mathrm{i}$ suhteen on kuvaus $x \mapsto 2(1+\mathrm{i}) - x$, joten se on origon suhteen tapahtuvan peilauksen ja siirron yhdisteenä Möbius-kuvaus. Kun kuvaus kirjoitetaan muotoon*

$$x \mapsto 2(1+\mathrm{i}) - x = (-x + 2 + 2\mathrm{i})(0 \cdot x + 1)^{-1},$$

sitä nähdään vastaavan Möbius-kuvaus

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 2+2\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta = -1 \in \mathbb{R}_*.$$

Esimerkki 7.7.4. *Etsitään se Möbius-kuvaus, joka kiertää kompleksitasoa kulman $\pi/2$ verran vastapäivään pisteen $1-\mathrm{i}$ suhteen.*

Kyseinen kuvaus voidaan toteuttaa siirtämällä ensin kompleksitasoa niin, että piste $1-\mathrm{i}$ siirtyy origoon, suorittamalla tämän jälkeen haluttu kierto ja siirtämällä lopuksi kompleksitasoa niin, että origo siirtyy pisteeseen $1-\mathrm{i}$. Kuvauksen lauseke on tällöin

$$x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\big[x + (-1+\mathrm{i})\big]\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} + (1-\mathrm{i}).$$

Hyödyntäen yhteyksiä $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ ja $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = (1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$ kuvauksen lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\big[x + (-1+\mathrm{i})\big]\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} + (1-\mathrm{i}) &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}x\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}(-1+\mathrm{i}) + 1 - \mathrm{i} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}x\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} + \mathrm{i}(-1+\mathrm{i}) + 1 - \mathrm{i} \\ &= \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} - 2\mathrm{i} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}x\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} + 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}, \end{aligned}$$

josta havaitaan, että sama kuvaus voidaan toteuttaa myös kierron ja siirron yhdisteenä. Kuvausta vastaava Möbius-kuvaus on selvästi muotoa $T(x) = axd^{-1} + bd^{-1}$, missä $a = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ ja $d^{-1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ eli $d = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$. Ehdosta $bd^{-1} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ voidaan päätellä edelleen kerroin b:

$$b = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}d = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 2\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}.$$

Näin ollen haluttu kuvaus on Möbius-kuvaus

$$T = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} & 2\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -2\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \Delta = 1 \in \mathbb{R}_*.$$

8 YHTEENVETO

Tässä työssä käsiteltiin avaruuksien $\mathbb{C}_\infty$ ja $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvauksia. Työn keskeisenä tavoitteena oli selvittää seuraavat kvaternikertoimisia kompleksitason Möbius-kuvauksia koskevat kysymykset: Millaisia ehtoja tämä tapaus asettaa kertoimille a, b, c ja d, vai onko ylipäänsä edes olemassa muita mahdollisia tapauksia kuin kompleksiset kertoimet? Jos on, niin minkälaisia kuvauksia ne ovat geometrisessa mielessä?

Tässä tapauksessa päädyttiin tyylikkäisiin tuloksiin: Kvaternikertoimisten kompleksitason Möbius-kuvausten joukko on muotoa

$$\begin{aligned} M =\Big\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \mid a,b,c,d \in \mathbb{H}, \quad & P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0 \\ \text{tai} \quad Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0, \quad & ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_* \Big\}, \end{aligned}$$

eli kuvaukset ovat mahdollisia täsmälleen silloin, kun kaikki kertoimet a, b, c ja d ovat kompleksilukuja tai kun kaikkien kerrointen kompleksiosa on nolla. Jälkimmäinen tapaus siis laajentaa alkuperäisten kompleksitason Möbius-kuvausten joukkoa. Erityisesti osoittautui, että nämä uudet kuvaukset lisäävät Möbius-kuvausten joukkoon kuvaukset muotoa $x \mapsto -a\overline{x}a$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, jotka ovat peilauksia origon kautta kulkevan suoran suhteen. Näin ollen kvaternikertoiminen tapaus täydentää kompleksitason Möbius-kuvausten geometrista luonnetta sisällyttämällä niihin myös peilaukset.

Työn toisena tavoitteena oli tutkia, voidaanko avaruuden $\mathbb{R}^3_\infty$ Möbius-kuvausten joukkoa

$$GL(2, \mathbb{H}) = \{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \mid a, b, c, d \ \mathbb{H},\ ab^*, cd^*, c^*a, d^*b \in \mathbb{R}^3,\ ad^* - bc^* \in \mathbb{R}_*\}$$

koskevat ehdot yhdistää konkreettisemmiksi, yksittäisiä kertoimia a, b, c ja d koskeviksi ehdoiksi. Tämä tapaus kuitenkin johti niin monimutkaisiin ehtoihin, ettei niitä saanut tiivistettyä mielekkääksi tulokseksi.

LÄHTEET

[1] Ahlfors, L. V., *Möbius transformations in Several Dimensions*, Lecture Notes, University of Minnesota, 1981.

[2] Ahlfors, L. V., *Möbius Transformation and Clifford Numbers*, Differential Geometry and Complex Analysis, Springer, Berlin, 1985, pp. 65–73.

[3] Boyer, C. B. & Merzbach, U. C., *A History of Mathematics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 2011.

[4] Brown J. W. & Churchill R. V., *Complex Variables and Applications*, 7th edition, MacGraw-Hill, New York, 2003.

[5] Chen, W. W. L., *Möbius Transformations*, Introduction to Complex Analysis [WWW], Macquarie University Sydney, 2008, [viitattu 06.07.2012], Saatavissa: http://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lnicafolder/ica13.pdf.

[6] Chen, W. W. L., *Inner Product Spaces*, Linear Functional Analysis [WWW], Macquarie University Sydney, 2008, [viitattu 16.1.2014] Saatavissa: http://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lnlfafolder/lfa04.pdf.

[7] Chen, W. W. L., *Orthogonal Matrices*, Linear Algebra [WWW], Macquarie University Sydney, 2008, [viitattu 3.10.2013], Saatavissa: http://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lnlafolder/la10.pdf.

[8] Chen, W. W. L., *Determinants*, Linear Algebra [WWW], Macquarie University Sydney, 2008, [viitattu 3.10.2013], Saatavissa: http://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lnlafolder/la03.pdf.

[9] Craig, J., J., *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd edition, Pearson Education, Inc, New Jersey, 2005.

[10] Eriksson, S.-L., *MAT-53750 Johdatusta geometrisiin algebroihin ja niiden sovellutuksiin*, Opintomoniste, Tamperereen teknillinen yliopisto, 2012.

[11] Gorenstein, D., *Finite Groups*, 2nd edition, Chelsea Publishing Co., New York, 1980.

[12] Heard, W. B., *Rigid Body Mechanics*, Mathematics, Physics and Applications, WILEY-VCH, Germany, 2006.

[13] Kossmann-Schwarzbach, Y., *Groups and Symmetries: From Finite Groups to Lie Groups*, Springer, New York, 2010.

[14] Mac Lane, S., Birkhoff, G., *Algebra*, 3rd edition, Chelsea Publishing Co., New York, 1988.

[15] Needham, T., *Visual Complex Analysis*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[16] Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2006.

[17] Turtianen, E., *Möbius-kuvaukset avaruudessa* $\mathbb{R}^3$, pro gradu -tutkielma, Joensuun yliopisto, 2002.

[18] Waterman, P. L., *Möbius Transformations in Several Dimensions*, Adv. Math. **101** (1993), 87–113.