TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Olli Tuohenmaa

Symmetria ja liikevakiot Hamiltonin mekaniikassa

DIPLOMITYÖ

Tarkastajat: Heikki Orelma,
Sirkka-Liisa Eriksson

Tarkastajat ja aihe hyväksytty Luonnontieteiden tiedekunnan tiedekuntaneuvoston kokouksessa 13.8.2014

Tiivistelmä

OLLI TUOHENMAA: Symmetria ja liikevakiot Hamiltonin mekaniikassa
Tampereen teknillinen yliopisto
diplomityö, 84 sivua, 7 liitesivua
joulukuu 2014
teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
pääaine: matematiikka
tarkastajat: tutkijatohtori Heikki Orelma, professori Sirkka-Liisa Eriksson

avainsanat: Hamiltonin mekaniikka, hamiltonilainen systeemi,
momenttikuvaus, symmetria, symplektinen geometria

Symplektinen monisto on sileä monisto, jolle on valittu ei-singulaarinen suljettu 2-differentiaalimuoto. Symplektinen muoto määrää kanonisen tavan kuvata sileän funktion differentiaali vektorikentäksi. Tällaisen vektorikentän määräämää dynaamista systeemiä kutsutaan hamiltonilaiseksi systeemiksi ja sen synnyttävää funktiota Hamiltonin funktioksi. Hamiltonin funktio on systeemin liikevakio, eli sen arvo ei muutu systeemin virtauksessa. Lisäksi hamiltonilaisen systeemin virtaus säilyttää symplektisen rakenteen.

Mekaanisen systeemin faasiavaruudella eli systeemin konfiguraatioavaruuden kotangenttikimpulla on kanoninen symplektinen rakenne. Tämä mahdollistaa mekaanisen systeemin määrittelyn hamiltonilaisena systeeminä, kun Hamiltonin funktioksi valitaan systeemin kokonaisenergia.

Hamiltonilaisen systeemin symmetriaryhmä on ryhmä diffeomorfismeja, jotka säilyttävät sekä symplektisen rakenteen että Hamiltonin funktion. Symmetriaryhmä voidaan usein esittää Lien ryhmän toimintana. Tällöin ryhmän Lien algebra kuvautuu symplektisen rakenteen säilyttäviksi vektorikentiksi. Jos moniston symplektinen muoto on eksakti 2-muoto ja sen määräävä 1-muoto on invariantti Lien ryhmän toiminnan suhteen, tämä symmetriaryhmä määrää momenttikuvauksen avulla liikevakion. Esimerkiksi kolmiulotteisen euklidisen avaruuden translaatio- ja rotaatiosymmetrioihin liittyvät liikevakiot ovat liikemäärä ja pyörimismäärä.

Abstract

OLLI TUOHENMAA: Symmetry and first integrals in Hamiltonian mechanics
Tampere University of Technology
Master of Science Thesis, 84 pages, 7 appendix pages
December 2014
Master's Degree Programme in Science and Engineering
Major: Mathematics
Examiners: Postdoc. Researcher Heikki Orelma, Prof. Sirkka-Liisa Eriksson

Keywords: Hamiltonian mechanics, Hamiltonian system, moment map, symmetry, symplectic geometry

A symplectic manifold is a smooth manifold equipped with a nondegenerate closed differential 2-form. The symplectic form defines a canonical way of mapping the differential of a smooth function into a vector field. A dynamical system defined by such a vector field is a Hamiltonian system and the function that generates the vector field is called the Hamiltonian function for the system. The Hamiltonian function is a first integral of the system: it's value stays constant along the flow of the system. Moreover, the flow of a Hamiltonian system preserves the symplectic form.

The phase space of a mechanical system, i.e. the cotangent bundle of the system's configuration space, has a canonical symplectic structure. A mechanical system is defined on the phase space by using the total energy of the system as the Hamiltonian function.

A symmetry group for a Hamiltonian system is a group of smooth transformations that preserve both the symplectic structure and the Hamiltonian function. Often a symmetry group arises from a Lie group action. The Lie algebra of the group can then be mapped into the space of symplectic structure-preserving vector fields. Furthermore, if the symplectic form is an exact 2-form and the associated 1-form is invariant under the Lie group action, the symmetry group defines a first integral via a moment map. In particular, the actions of the groups of translations and rotations of the Euclidean 3-space have moment maps that correspond to the linear and angular momentum, respectively.

Alkusanat

Diplomityöni aiheena on symmetria Hamiltonin mekaniikassa. Sisällysluetteloa vilkaisemalla huomaa kuitenkin nopeasti, että varsin suuri osa työn sivumäärästä on käytetty yleisen differentiaaligeometrian käsittelyyn. Tämä on tarkoituksellista, sillä yksi tavoitteistani työn aihetta valitessa oli saada parempi ymmärrys sileiden monistojen, differentiaalimuotojen ja Lien ryhmien teoriasta. Tähän tarkoitukseen Hamiltonin mekaniikka on aiheena ideaalinen, sillä siinä hyödynnetään suurta osaa modernin differentiaaligeometrian perustyökaluista tavalla, joka kuitenkin liittyy läheisesti fysikaalisen maailman ilmiöihin.

Henri Poincaré on muinoin todennut, että logiikalla todistetaan, mutta intuitiolla keksitään. Harmikseni joudun myöntämään, että geometrisesta aiheestaan huolimatta diplomityöni painottuu enemmän aksiomaattis-deduktiiviseen todistustyöhön kuin geometriseen intuitioon. Nykypäivänä hamiltonilaisten systeemien teoria on varsin pitkälle kehittynyt ja hyvin tunnettu. Ei siis ole erityisen yllättävää, että työni ei sisällä uusia matemaattisia tuloksia. Toivon kuitenkin, että teorian esitystavassa on havaittavissa tiettyä omaleimaisuutta. Tavoitteenani on ollut esittää ja todistaa mahdollisimman monet tulokset koordinaateista riippumattomassa muodossa. Toisaalta olen kuitenkin yrittänyt parhaani mukaan minimoida tarpeettomien abstraktien konseptien määrän. Lukijan tehtäväksi jääköön arvioida, kuinka hyvin näissä tavoitteissa on onnistuttu.
Haluan esittää kiitokseni työn ohjaajalle Heikki Orelmalle.

Tampereella 16.11.2014

Olli Tuohenmaa

Sisällys

Merkinnät

$\mathrm{Alt}\,(f)$	tensorin antisymmetrisaatio
$\mathrm{Aut}\,(V)$	vektoriavaruuden automorfismien ryhmä
d	ulkoderivaatta, differentiaali
$\mathrm{Diff}\,(M)$	moniston diffeomorfismien ryhmä
$\dim M$	moniston dimensio
$\mathrm{End}\,(V)$	vektoriavaruuden endomorfismien rengas $\mathrm{Hom}\,(V,V)$
$\mathfrak{F}\,(M)$	sileiden funktioiden assosiatiivinen algebra
$\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}\,(M)$	asteen k de Rhamin kohomologiaryhmä
$\mathrm{Hom}\,(U,V)$	U:lta V:lle kuvaavien lineaarikuvausten vektoriavaruus
id_S	identiteettikuvaus joukolla S
$\mathrm{im}\,(A)$	lineaarikuvauksen kuva-avaruus
ι_v	kontraktio vektorikentällä v
$\mathcal{J}^n_k$	joukon $\{1,\ldots,n\}$ kasvavien k-multi-indeksien joukko
$\ker\,(A)$	lineaarikuvauksen nolla-avaruus
ℓ_g	vasen translaatio alkiolla g
$\mathcal{L}_v$	Lien derivaatta suuntaan v
$\mathfrak{L}\,(G)$	vasemmalta invarianttien vektorikenttien Lien algebra
$\Lambda^k\,(V^*)$	antisymmetristen k-tensorien vektoriavaruus
$\Lambda\,(V^*)$	ulkoalgebra $\Lambda^0\,(V^*)\oplus\cdots\oplus\Lambda^n\,(V^*)$
$\Lambda^k\,(\mathrm{T}^*M)$	k-ulkokimppu

$\mathrm{nl}\, A$	nolla-avaruuden dimensio $\dim \ker(A)$
$\mathrm{rk}\, A$	kuvauksen aste $\dim \mathrm{im}(A)$
S_k	joukon $\{1, \dots, k\}$ bijektioiden ryhmä
$\mathrm{sgn}(\sigma)$	permutaation merkki
$\mathrm{span}(S)$	pienin vektorijoukon $S \subset V$ sisältävä aliavaruus
$\mathrm{supp}(f)$	kuvauksen kantaja
$\mathrm{T}_p M$	tangenttiavaruus
$\mathrm{T}M$	tangenttikimppu
$\mathrm{T}_p \phi$	sileän kuvauksen derivaatta
$\mathrm{T}\phi$	sileän kuvauksen tangenttikuvaus
$\mathrm{T}_p^* M$	kotangenttiavaruus
$\mathrm{T}^* M$	kotangenttikimppu
$\mathrm{T}^* \phi$	diffeomorfismin kotangenttikuvaus
$\mathfrak{X}(M)$	sileiden vektorikenttien Lien algebra
$\Omega^k(M)$	k-differentiaalimuotojen vektoriavaruus
$\Omega(M)$	ulkoalgebra $\Omega^0(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(M)$
$\langle u, v \rangle$	avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanoninen sisätulo
$[u, v]$	Lien sulkeet
$\{f, g\}$	Poissonin sulkeet
$f \otimes g$	tensoritulo
$\omega \wedge \eta$	ulkotulo
$\phi_* v$	vektorikentän pushforward
$\phi^* \omega$	differentiaalimuodon pullback
$g^\flat$	ei-singulaarisen 2-tensorikentän määräämä kimppuisomorfismi
$g^\sharp$	kimppuisomorfismin $g^\flat$ käänteiskuvaus

1 Johdanto

Analyyttinen mekaniikka on klassisen mekaniikan osa-alue, jossa mekaanisia systeemejä tarkastellaan skalaariarvoisia energiasuureita, kuten liike-energiaa ja potentiaalienergiaa, käyttäen. Analyyttisen mekaniikan teoria koostuu kahdesta osasta, Lagrangen mekaniikasta ja Hamiltonin mekaniikasta. Näiden teorioiden esittämiseen matemaattisesti täsmällisessä muodossa tarvitaan modernia differentiaaligeometriaa. Motivaationa yleiselle hamiltonilaisten systeemien teorialle tässä johdannossa käsitellään lyhyesti Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkaa klassisen analyysin menetelmiä käyttäen. Esitys perustuu lähteisiin (Arnold 1989, s. 55–70) ja (Mac Lane 1986, s. 278–284).

Mekaanisen systeemin kaikkien mahdollisten konfiguraatioiden joukkoa kutsutaan *konfiguraatioavaruudeksi*. Konfiguraatioavaruus muistuttaa lokaalisti euklidista avaruutta, mutta sen globaali topologia voi olla monimutkaisempi. Esimerkiksi tasossa liikkuvan heilurin paikka voidaan ilmaista yhden parametrin, heilurin varren kulman, avulla, mutta konfiguraatioavaruus ei ole $\mathbb{R}$ vaan S^1 eli ympyrä.

Yleisessä tapauksessa konfiguraatioavaruudelle annetaan sileän moniston rakenne. Oletetaan kuitenkin toistaiseksi, että mekaanisen systeemin konfiguraatio voidaan esittää pisteenä $q = (q^1, \dots, q^n)$ jollain avoimella joukolla $U \subset \mathbb{R}^n$. Systeemin aikakehitys esitetään käyränä

$$\begin{aligned} [t_1, t_2] &\to U \\ t &\mapsto c(t) . \end{aligned}$$

Käyrän oletetaan olevan sileä, jotta jokaiselle ajanhetkelle voidaan määritellä nopeusvektori

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(t) .$$

Nopeusvektori $v(t)$ kuuluu pisteen $c(t)$ *tangenttiavaruuteen*, joka voidaan tässä tapauksessa samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanssa.

Lagrangen mekaniikassa systeemiin kohdistuvien voimien ja liike-energian välinen vuorovaikutus ilmaistaan *Lagrangen funktion* $L\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avulla.

Tarkastellaan sileiden käyrien avaruudessa määriteltyä funktionaalia

$$S(c) = \int_{t_1}^{t_2} L(c(t), v(t))\, \mathrm{d}t.$$

Lagrangen mekaniikan keskeinen luonnonlaki on *Hamiltonin periaate*, jonka mukaan mekaanisen systeemin kehitys konfiguraatiosta $q_1 = c(t_1)$ konfiguraatioon $q_2 = c(t_2)$ seuraa käyrää, joka on funktionaalin S stationäärinen piste. Käyrä c on stationäärinen piste, jos

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(c + hu) - S(c)}{h} = 0, \qquad h \in \mathbb{R}$$

jokaisella reunaehdot $u(t_1) = u(t_2) = 0$ toteuttavalla sileällä käyrällä u. Olettaen, että Lagrangen funktio on sileä, Hamiltonin periaatteen stationäärisyysehto toteutuu, jos ja vain jos käyrä c toteuttaa jokaisen koordinaatin q^i suhteen *Eulerin–Lagrangen yhtälön*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

Hamiltonin periaate ja Eulerin–Lagrangen yhtälöt säilyttävät muotonsa yleisissä koordinaattimuunnoksissa, minkä vuoksi Lagrangen mekaniikassa voidaan käyttäää erilaisia ei-karteesisia koordinaatteja. Erityisesti systeemin konfiguraatioita rajoittavat sidosehdot voidaan usein esittää valitsemalla koordinaatisto, jossa osa koordinaattifunktioista häviää sidosehtojen toteutuessa.

Mikäli Lagrangen funktio on muuttujan v suhteen aidosti konveksi jokaisessa pisteessä $q \in U$, voidaan Eulerin–Lagrangen yhtälöt muuntaa yksinkertaisempaan muotoon, joka toimii pohjana Hamiltonin mekaniikalle. Konveksisuusehto toteutuu, jos ja vain jos komponenteista

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(q, v)$$

koostuva matriisi on positiivisesti definiitti jokaisella $(q, v) \in U \times \mathbb{R}^n$. Pisteen q tangenttivektorille v voidaan määritellä *konjugaattiliikemäärä* $p \in \mathbb{R}^n$, jonka komponentit ovat

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(q, v).$$

Kaikista pareista (q, p) koostuvaa joukkoa kutsutaan mekaanisen systeemin *faasiavaruudeksi*. Konveksisuuden toteutuessa kuvaus $(q, v) \mapsto (q, p)$ on bijektio. *Legendren muunnosta* käyttäen faasiavaruudelle voidaan tällöin määritellä *Hamiltonin funktio* $H \colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$H(q, p) = \sum p_i v^i - L(q, v),$$

missä v määräytyy q:n ja p:n funktiona. Hamiltonin funktion osittaisderivaatat koordinaattien q^i ja p_i suuntaan ovat

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = \sum p_j \frac{\partial v^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \sum \frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial q^i}$$

ja

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v^i + \sum p_j \frac{\partial v^j}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial p_i}.$$

Summaustermit kumoutuvat molemmissa lausekkeissa, sillä $p_i = \partial L / \partial v^i$. Lisäksi Eulerin–Lagrangen yhtälöiden toteutuessa pätee

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t}.$$

Näin saadaan *Hamiltonin yhtälöt*

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Näiden yhtälöiden määräämää dynaamista systeemiä kutsutaan *hamiltonilaiseksi systeemiksi*. Hamiltonin yhtälöissä paikka- ja liikemääräkoordinaateilla on keskenään symmetrinen rooli, mikä antaa vihjeen taustalla olevasta geometrisesta rakenteesta.

Sileän funktion $f\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivaatta Hamiltonin yhtälöiden integraalikäyrän suuntaan on

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \sum\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \sum\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\right).\end{aligned}$$

Määrittelemällä sileiden funktioiden *Poissonin sulkeet*

$$\{f, g\} = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\right)$$

saadaan integraalikäyrän suuntaiselle derivaatalle muoto

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\}.$$

Poissonin sulkeiden koordinaattimuotoa tarkastelemalla havaitaan, että jokaisella sileällä funktiolla f ja g pätee $\{f, g\} = -\{g, f\}$.

Mekaanisen systeemin *kokonaisenergia* tilassa (q, p) on Hamiltonin funktion arvo $H(q, p)$. Poissonin sulkeiden antisymmetrisyydestä seuraa *energian* *säilymislaki*

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \{H, H\} = 0.$$

Useimmilla mekaanisilla systeemeillä Lagrangen funktio on muotoa

$$L(q, v) = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(q) v^i v^j - V(q),$$

missä kertoimet $g_{ij}(q)$ muodostavat jokaisessa pisteessä symmetrisen ja positiivisesti definiitin matriisin. Tällöin Hamiltonin funktioksi saadaan

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(q) p_i p_j + V(q),$$

missä kertoimet $g^{ij}(q)$ ovat Lagrangen funktiossa esiintyvän matriisin käänteismatriisin komponentit. Funktion V tulkitaan olevan systeemin *potentiaalienergia*. Havaitaan, että

$$\frac{1}{2} \sum g_{ij}(q) v^i v^j = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(q) p_i p_j,$$

kun $p_j = \sum g_{ij} v^i$. Tämä neliömuoto on systeemin *liike-energia*. Lisäksi se määrää konfiguraatioavaruudelle *Riemannin metriikan*. Metriikka mahdollistaa konfiguraatioavaruuden geometrian tutkimisen.

Eräs Hamiltonin mekaniikan klassisista tuloksista liittyy faasiavaruuden tilavuusalkion säilymiseen. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemi voidaan esittää vektorikenttänä faasiavaruudessa. Esimerkiksi Hamiltonin yhtälöihin liittyvä vektorikenttä on

$$w = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q^n} \right).$$

Intuitiivisesti tällainen vektorikenttä voidaan nähdä nopeuskenttänä faasiavaruuden pisteiden virtaukselle, jolloin systeemin integraalikäyrät ovat kyseisen virtauksen virtaviivoja. Tunnetusti virtaus on kokoonpuristumaton, jos sen nopeuskentän divergenssi häviää. Havaitaan, että vektorikentän w divergenssin termit kumoutuvat pareittain, sillä

$$\operatorname{div}(w) = \sum \left(\frac{\partial w_i}{\partial q^i} + \frac{\partial w_{n+i}}{\partial p_i} \right) = \sum \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q^i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q^i \partial p_i} \right) = 0.$$

Toisin sanoen, hamiltonilaisen systeemin virtaus säilyttää faasiavaruudesta valitun alueen tilavuuden, vaikka alueen muoto voikin muuttua virtauksessa. Tästä seuraa esimerkiksi, että systeemin integraalikäyrät eivät voi pakkautua nollamittaiseen attraktorijoukkoon.

2 Monistot

2.1 *Differentioituvat kuvaukset*

Euklidisen avaruuden differentiaalilaskenta luo pohjan sileiden monistojen teorialle. Alla käsitellään lyhyesti tärkeimpiä tuloksia ja esitellään käytetty notaatio. Esitietona tarvittavia topologian ja algebran määritelmiä, perustuloksia ja notaatiota on käsitelty lyhyesti liitteissä A ja B.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ koordinaattifunktiot $r^i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määritellään kaavalla

$$r^i(a) = a^i,$$

missä $a = (a^1, \dots, a^n)$. Kanonisia kantavektoreita merkitään

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \; \dots \;, \; e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Euklidisen avaruuden kanoninen sisätulo ja normi ovat

$$\langle u, v \rangle = \sum u^i v^i \quad \text{ja} \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^m$ avoin joukko. Kuvaus $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ on *differentioituva* pisteessä $a \in U$, jos on olemassa lineaarikuvaus $T \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, jolla

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad h \in \mathbb{R}^m.$$

Kuvaus T on kuvauksen f *derivaatta* pisteessä a. Vektoria $T(v) \in \mathbb{R}^n$ kutsutaan *suunnattuksi derivaataksi* suuntaan $v \in \mathbb{R}^m$. On helppo nähdä, että jos f on differentioituva pisteessä a, saadaan suunnatulle derivaatalle kaava

$$T(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Komponenttifunktioiden $f^i = r^i \circ f$ *osittaisderivaatat* määritellään kaavalla

$$\frac{\partial f^i}{\partial r^j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f^i\left(a + te_j\right) - f^i(a)}{t},$$

joten differentioituvan funktion derivaatan komponentit ovat

$$T^i_j = r^i \circ T\left(e_j\right) = \frac{\partial f^i}{\partial r^j}(a).$$

Pelkkä osittaisderivaattojen pisteittäinen olemassaolo ei kuitenkaan takaa differentioituvuutta. Seuraava propositio antaa differentioituvuudelle riittävän ehdon:

PROPOSITIO 2.1. *Kuvaus $f: U \to \mathbb{R}^n$ on differentioituva pisteessä $a \in U$, jos komponenttifunktioiden f^i osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteen a jossain avoimessa ympäristössä.*

Todistus. Katso (Pugh 2002, s. 273).

Kuvaus f on *sileä pisteessä $a \in U$*, jos sen jokaisen kertaluvun kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa kyseisessä pisteessä. Kuvaus on C^1 eli *jatkuvasti differentioituva*, jos sen ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia jokaisessa U:n pisteessä, ja C^∞ eli *sileä*, jos se on sileä jokaisessa U:n pisteessä.

Avoimien joukkojen U ja V välistä bijektiota $f: U \to V$ sanotaan *diffeomorfismiksi*, jos sekä f että f^{-1} ovat sileitä. Koska differentioituvuudesta seuraa jatkuvuus, diffeomorfismit ovat aina homeomorfismeja.

LAUSE 2.2 (käänteiskuvauslause). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, $f: U \to \mathbb{R}^n$ sileä kuvaus ja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvauksen f derivaatta pisteessä $a \in U$. Jos T on isomorfismi, niin pisteellä a on avoin ympäristö $V \subset U$, jolla $f|_V : V \to f(V)$ on diffeomorfismi.*

Todistus. Katso (Pugh 2002, s. 289–290).

2.2 *Sileät monistot*

Sileät monistot ovat euklidiseen avaruuteen upotettujen sileiden käyrien ja pintojen yleistyksiä. Monisto rakennetaan joukosta, jonka jokaisen pisteen ympäristö voidaan muuntaa euklidisen avaruuden avoimeksi joukoksi kuvauksella, jota kutsutaan kartaksi. Karttojen avulla monistolle saadaan lokaalisti euklidinen topologia. Eri karttojen määrittelyjoukkojen päällekkäisyys määrää, millainen globaali topologia monistolla on. Monistojen määrittelyssä käytetty lähestymistapa perustuu lähteeseen (Lee 2009).

MÄÄRITELMÄ 2.3. *Olkoon M ei-tyhjä joukko. Kartta joukolla M on bijektio osajoukolta $U \subset M$ euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimelle joukolle.*

Karttaan $x: U \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$ viitataan usein parina (U, x), ja joukkoa U kutsutaan kartan *koordinaattiympäristöksi*. Olkoot (U, x) ja (V, y) kaksi joukon M karttaa, joilla $U \cap V \neq \varnothing$. Kuvauksia

$$x \circ y^{-1}: y(U \cap V) \to x(U \cap V) \quad \text{ja} \quad y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

kutsutaan *transitiokuvauksiksi* tai *koordinaattimuunnoksiksi*. Kartat ovat *yhteensopivia*, jos joukot $x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$ ja $y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ ovat avoimia ja transitiokuvaukset $x \circ y^{-1}$ ja $y \circ x^{-1}$ ovat diffeomorfismeja. Erityistapauksena kartat, joilla $U \cap V = \varnothing$, ovat automaattisesti yhteensopivia. Pareittain yhteensopivien karttojen kokoelma $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ on *atlas*, jos koordinaattiympäristöt U_λ muodostavat joukon M peitteen eli jos

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M.$$

Kartta on yhteensopiva atlaan kanssa, jos se on yhteensopiva kyseisen atlaan jokaisen kartan kanssa.

LEMMA 2.4. *Olkoot (U, x) ja (V, y) atlaan $\mathcal{A}$ kanssa yhteensopivia karttoja, joilla $U \cap V \neq \varnothing$.*

1. *Kartat (U, x) ja (V, y) ovat keskenään yhteensopivia.*
2. *Kartat $(U \cap V, x|_{U \cap V})$ ja $\left(U \cap V, y|_{U \cap V}\right)$ ovat yhteensopivia atlaan kanssa.*
3. *Jos $A \subset x(U)$ on avoin ja $S = x^{-1}(A)$, niin $(S, x|_S)$ on atlaan kanssa yhteensopiva kartta.*

Todistus. Todistetaan ensimmäinen väite. Valitaan $p \in U \cap V$. Koska $\mathcal{A}$ on atlas, on olemassa kartta $(W, z) \in \mathcal{A}$, jolla $p \in W$. Koska sekä (U, x) että (V, y) ovat yhteensopivia atlaan kanssa, kuvaukset

$$z \circ x^{-1} \colon x(U \cap W) \to z(U \cap W) \quad \text{ja} \quad y \circ z^{-1} \colon z(V \cap W) \to y(V \cap W)$$

ovat diffeomorfismeja. Joukkojen $x(U \cap V \cap W)$ ja $y(U \cap V \cap W)$ välille saadaan diffeomorfismi

$$\left(y \circ z^{-1}\right) \circ \left(z \circ x^{-1}\right) = y \circ x^{-1}\big|_{x(U \cap V \cap W)}.$$

Näin ollen kuvaus $y \circ x^{-1}$ on sileä jokaisessa pisteessä $x(p) \in x(U \cap V)$, eli $y \circ x^{-1}$ on C^∞. Vastaavasti nähdään, että $x \circ y^{-1}$ on C^∞. Lemman muut väitteet todistetaan samaan tapaan. □

Atlas on *maksimaalinen*, jos se ei sisälly mihinkään suurempaan atlaaseen. Edellisen lemman ensimmäinen kohta takaa, että jokainen atlas voidaan laajentaa yksikäsitteisesti maksimaaliseksi atlaaksi.

PROPOSITIO 2.5. *Olkoon $\mathcal{A}$ joukon M maksimaalinen atlas. Koordinaattiympäristöjen kokoelma $\mathcal{B} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ on kanta eräälle joukon M topologialle.*

Todistus (Tu 2011, s. 322). Olkoon $\mathcal{T}$ kaikista kokoelman $\mathcal{B}$ joukkojen mielivaltaisista unioneista koostuva joukkokokoelma. Koska $\mathcal{A}$ on atlas, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$, eli $M \in \mathcal{T}$. Lisäksi $\varnothing \in \mathcal{T}$, ja selvästi $\mathcal{T}$ on suljettu mielivaltaisten unionien suhteen.

Olkoon $S = \bigcup_\alpha U_\alpha$ ja $T = \bigcup_\beta U_\beta$ kaksi $\mathcal{T}$:n jäsentä. Tällöin

$$S \cap T = \left(\bigcup_\alpha U_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_\beta U_\beta \right) = \bigcup_{\alpha,\beta} \left(U_\alpha \cap U_\beta \right),$$

ja näin ollen jokaisella $p \in S \cap T$ on olemassa indeksit α ja β, joilla $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Lemman 2.4 kohdan 3 perusteella nähdään, että jokaisella $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ on $V_p \in \mathcal{B}$, jolla $p \in V_p$ ja $V_p \subset U_\alpha \cap U_\beta$. Näin ollen

$$S \cap T = \bigcup_{p \in S \cap T} V_p,$$

eli $S \cap T \in \mathcal{T}$. Havaitaan siis, että $\mathcal{T}$ on joukon M topologia. □

Kaksi atlasta ovat *ekvivalentit*, jos niiden unioni on atlas. Ekvivalentit atlaat kuuluvat samaan maksimaaliseen atlaaseen, ja atlaiden ekvivalenttius on ekvivalenssirelaatio. *Sileä rakenne* joukolla M on sileiden atlaiden ekvivalenssiluokka. Propositiossa 2.5 määritelty topologia on *sileän rakenteen indusoima topologia*.

MÄÄRITELMÄ 2.6. *Sileällä rakenteella varustettu joukko M on sileä monisto, jos sileän rakenteen indusoima topologia tekee joukosta M Hausdorffin avaruuden, jolla on numeroituva kanta. Jos moniston kaikkien karttojen maalijoukkona on $\mathbb{R}^n$ jollain kiinteällä $n \in \mathbb{N}$, moniston dimensio on* $\dim M = n$.

Tärkein sileä monisto on euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$, jonka kanonisen sileän rakenteen määrää atlas $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$, jossa id on identiteettikuvaus. Kaikki tässä työssä käsiteltävät monistot oletetaan sileiksi, joten jatkossa adjektiivia *sileä* ei erikseen mainita. Samoin oletetaan, että monistoilla on hyvin määritelty dimensio.

Monistojen topologia on määritelty siten, että maksimaalisen atlaan jokaisella kartalla (U, x) kuvaus $x\colon U \to x(U)$ on homeomorfismi. Näin ollen moniston M jokaisella pisteellä $p \in M$ on avoin ympäristö U, joka on homeomorfinen $\mathbb{R}^n$:n avoimen joukon kanssa. Toisin sanoen, M on *lokaalisti euklidinen*.

Monistojen M ja N kartat (U, x) ja (V, y) määräävät karteesiselle tulolle $M \times N$ kartan $(U \times V, x \times y)$, jossa $x \times y$ on kuvaus

$$\begin{aligned} U \times V &\to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (p, q) &\mapsto (x(p), y(q)). \end{aligned}$$

Tällaiset kartat peittävät joukon $M \times N$, ja ne ovat selvästi keskenään yhteensopivia, joten ne muodostavat atlaan joukolle $M \times N$. Tällöin sileän rakenteen indusoima topologia on sama kuin tulotopologia. Proposition A.10 perusteella $M \times N$ on sileä monisto.

MÄÄRITELMÄ 2.7. *Olkoot M ja N monistoja, $\phi\colon M \to N$ jatkuva kuvaus, $p \in M$*

sekä (U, x) ja (V, y) sellaiset M:n ja N:n kartat, joilla $p \in U$ ja $\phi(p) \in V$. Kuvaus ϕ on sileä pisteessä p, jos $y \circ \phi \circ x^{-1}$ on sileä pisteessä $x(p)$. Kuvaus on sileä eli C^∞, jos se on sileä jokaisessa pisteessä $p \in M$.

Atlaan diffeomorfisuusehdosta seuraa, että kuvauksien sileys ei ole riippuvainen karttojen (U, x) ja (V, y) valinnasta. Olkoot $(\hat{U}, \hat{x})$ ja $(\hat{V}, \hat{y})$ toiset kartat, joilla $p \in \hat{U}$ ja $\phi(p) \in \hat{V}$. Tällöin pisteen p jossain ympäristössä

$$\begin{aligned}\hat{y} \circ \phi \circ \hat{x}^{-1} &= \hat{y} \circ \left(y^{-1} \circ y\right) \circ \phi \circ \left(x^{-1} \circ x\right) \circ \hat{x}^{-1} \\ &= \left(\hat{y} \circ y^{-1}\right) \circ \left(y \circ \phi \circ x^{-1}\right) \circ \left(x \circ \hat{x}^{-1}\right).\end{aligned}$$

Selvästi $\hat{y} \circ \phi \circ \hat{x}^{-1}$ on sileä, jos $y \circ \phi \circ x^{-1}$ on sileä, sillä $\hat{y} \circ y^{-1}$ ja $x \circ \hat{x}^{-1}$ ovat määritelmän mukaan diffeomorfismeja.

Moniston M mikä tahansa avoin joukko $S \subset M$ on monisto, sillä moniston M atlaasta $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ saadaan monistolle S atlas

$$\left\{\left(U_\lambda \cap S, x_\lambda|_{U_\lambda \cap S}\right)\right\}_{\lambda \in \Lambda}.$$

Tällöin sileän rakenteen indusoima topologia on sama kuin aliavaruustopologia. Proposition A.8 perusteella S on sileä monisto. Tällaista monistoa S kutsutaan *avoimeksi alimonistoksi*. Yleisyyttä loukkaamatta voidaan siis puhua sileistä kuvauksista, joiden määrittelyjoukko on koko monisto M.

MÄÄRITELMÄ 2.8. *Diffeomorfismi monistolta M monistolle N on bijektiivinen C^∞-kuvaus, jonka käänteiskuvaus on myös C^∞. Diffeomorfismit monistolta itselleen muodostavat ryhmän* $\mathrm{Diff}(M)$*, kun laskutoimitukseksi valitaan kuvausten kompositio.*

Erityisesti kartat ovat aina diffeomorfismeja kuvalleen. Asian varmistamiseksi kartalla (U, x) riittää tutkia kuvausten x ja x^{-1} sileyttä, sillä moniston topologia on määritelty siten, että x on homeomorfismi. Sileys nähdään helposti käyttämällä joukolla $x(U)$ karttaa $\left(x(U), \mathrm{id}_{x(U)}\right)$, sillä

$$\mathrm{id}_{x(U)} \circ x \circ x^{-1} = \mathrm{id}_{x(U)} \quad \text{ja} \quad x \circ x^{-1} \circ \mathrm{id}_{x(U)} = \mathrm{id}_{x(U)}.$$

Funktio $f\colon M \to \mathbb{R}$ on sileä pisteessä $p \in U \subset M$, jos $f \circ x^{-1}\colon x(U) \to \mathbb{R}$ on sileä. Moniston M sileiden funktioiden joukkoa merkitään $\mathfrak{F}(M)$.

MÄÄRITELMÄ 2.9. *Assosiatiivinen $\mathbb{R}$-algebra on reaalinen vektoriavaruus V, jolle on lisäksi määritelty binäärioperaatio*

$$\begin{aligned} V \times V &\to V \\ (u, v) &\mapsto uv,\end{aligned}$$

joka toteuttaa jokaisella $a, b \in \mathbb{R}$ ja $u, v, w \in V$ sekä distributiivisuuslait

$$(u+v)\,w = uw + vw \quad \text{ja} \quad u\,(v+w) = uv + uw$$

että kertolaskujen yhteensopivuus- ja assosiatiivisuusehdot

$$(au)\,(bv) = (ab)\,(uv) \quad \text{ja} \quad (uv)\,w = u\,(vw)\,.$$

Funktioiden $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ ja skalaarikertoimien $a, b \in \mathbb{R}$ avulla määritellään funktiot $af + bg$ ja fg säännöillä

$$(af + bg)\,(p) = af\,(p) + bg\,(p) \quad \text{ja} \quad (fg)\,(p) = f\,(p)\,g\,(p)\,.$$

Selvästi näin määritellyt funktiot ovat myös sileitä. Joukolla $\mathfrak{F}(M)$ on siis assosiatiivisen algebran rakenne. Toisaalta vakiofunktio $1 \in \mathfrak{F}(M)$ on funktioiden kertolaskun neutraalialkio, joten $\mathfrak{F}(M)$ on samalla myös kommutatiivinen rengas.

Sileiden funktioiden käsittelyyn saadaan joustavuutta *normeerattujen testifunktioiden* avulla. Seuraava propositio takaa testifunktioiden olemassaolon:

PROPOSITIO 2.10. *Olkoon U moniston M avoin osajoukko ja $S \subset U$ sen suljettu osajoukko. On olemassa normeerattu testifunktio $\rho \in \mathfrak{F}(M)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

1 $\operatorname{supp}(\rho) \subset U$.

2 $\rho\,(q) = 1$ *jokaisella* $q \in S$.

Todistus. Katso (Lee 2013, s. 44–45).

2.3 *Tangenttiavaruus*

Derivaatio pisteessä $p \in M$ on lineaarikuvaus $v\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa *Leibnizin säännön*

$$v\,(fg) = v\,(f)\,g\,(p) + f\,(p)\,v\,(g)$$

jokaisella $f, g \in \mathfrak{F}(M)$. Derivaatioiden joukolle määritellään yhteenlasku ja skalaarilla kertominen kaavoilla

$$(u+v)\,f = u\,(f) + v\,(f) \quad \text{ja} \quad (av)\,f = a\,(vf)\,, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Helposti nähdään, että myös $u + v$ ja av ovat derivaatioita pisteessä $p \in M$, joten derivaatiot muodostavat vektoriavaruuden.

MÄÄRITELMÄ 2.11. *Moniston M tangenttiavaruus pisteessä $p \in M$ on kyseisen pisteen derivaatioista koostuva vektoriavaruus, ja sitä merkitään T_pM. Tangent-*

tiavaruuden jäseniä kutsutaan tangenttivektoreiksi.

Sileän kuvauksen $\phi\colon M \to N$ derivaatta pisteessä $p \in M$ on lineaarikuvaus

$$\mathrm{T}_p\phi\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{\phi(p)}N,$$

joka kuvaa tangenttivektorin $v \in \mathrm{T}_pM$ pisteen $\phi(p) \in N$ tangenttivektoriksi, joka saa funktiolla $f \in \mathfrak{F}(N)$ arvon

$$\mathrm{T}_p\phi(v)(f) = v(f \circ \phi).$$

Jälleen on helppoa varmistaa, että $\mathrm{T}_p\phi$ on lineaarinen ja että $\mathrm{T}_p\phi(v)$ todella on tangenttivektori pisteessä $\phi(p) \in N$.

Seuraavaksi tarkastellaan joitain tangenttivektorien perusominaisuuksia. Lineaarisuudesta ja Leibnizin säännöstä seuraa välittömästi, että jos $c \in \mathfrak{F}(M)$ on vakioarvoinen funktio, niin

$$v(c) = v(c) \cdot 1 = v(c \cdot 1) - c \cdot v(1) = c \cdot v(1) - c \cdot v(1) = 0$$

jokaisella $v \in \mathrm{T}_pM$. Lisäksi jos $f(p) = g(p) = 0$, niin

$$v(fg) = v(f) \cdot 0 + 0 \cdot v(g) = 0$$

jokaisella $v \in \mathrm{T}_pM$. Seuraavassa propositiossa osoitetaan, että tangenttivektorin arvo riippuu ainoastaan funktion arvoista pisteen p mielivaltaisen pienessä avoimessa ympäristössä.

PROPOSITIO 2.12. *Olkoot f ja g sileitä funktioita, joilla $f|_U = g|_U$ jollain avoimella joukolla U. Jos $p \in U$ ja $v \in \mathrm{T}_pM$, niin $v(f) = v(g)$.*

Todistus (Lee 2013, s. 56). Funktio $f - g$ on nolla-arvoinen joukossa U. Olkoon $\rho \in \mathfrak{F}(M)$ testifunktio, jolla

$$\mathrm{supp}(\rho) \subset M \setminus \{p\}$$

ja $\rho(q) = 1$ jokaisella $q \in \mathrm{supp}(f - g)$. Tällöin $(f - g)\rho = f - g$ koko monistolla. Koska $\rho(p) = 0$ ja $(f - g)(p) = 0$, nähdään, että

$$v(f) - v(g) = v(f - g) = v((f - g)\rho) = 0,$$

ja näin ollen $v(f) = v(g)$. □

Edellisen proposition perusteella avoimen alimoniston $U \subset M$ jokainen tangenttiavaruus voidaan samaistaa moniston M vastaavan pisteen tangenttiavaruuden kanssa.

Seuraavaksi näytetään, että tangenttiavaruuksilla määritelty derivaatta toteuttaa samat laskusäännöt kuin euklidisen avaruuden kuvausten derivaatta.

PROPOSITIO 2.13. *Sileän kuvauksen derivaatalla on seuraavat ominaisuudet:*

1 *Jos* $\phi\colon M \to N$ *ja* $\psi\colon N \to P$ *ovat sileitä kuvauksia, niin*

$$\mathrm{T}_p(\psi \circ \phi) = \mathrm{T}_{\phi(p)}\psi \circ \mathrm{T}_p\phi \quad (\textit{ketjusääntö}).$$

2 *Identiteetti kuvautuu identiteetiksi, eli* $\mathrm{T}_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_pM}$.

3 *Jos* $\phi\colon M \to N$ *on diffeomorfismi, niin* $\mathrm{T}_p\phi\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{\phi(p)}N$ *on isomorfismi jokaisella* $p \in M$.

Todistus (Tu 2011, s. 88–89)

1 Merkitään $q = \phi(p)$. Suoraan määritelmän perusteella jokaisella $v \in \mathrm{T}_pM$ ja $f \in \mathfrak{F}(P)$ pätee

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_p(\psi \circ \phi)(v)(f) &= v(f \circ \psi \circ \phi)\\ &= \mathrm{T}_p\phi(v)(f \circ \psi)\\ &= \big(\mathrm{T}_q\psi\big(\mathrm{T}_p\phi(v)\big)\big)f\\ &= \big(\mathrm{T}_q\psi \circ \mathrm{T}_p\phi(v)\big)f.\end{aligned}$$

2 Identiteettikuvaukselle saadaan jokaisella $v \in \mathrm{T}_pM$ ja $f \in \mathfrak{F}(M)$

$$\mathrm{T}_p(\mathrm{id}_M)(v)(f) = v(f \circ \mathrm{id}_M) = v(f) = \big(\mathrm{id}_{\mathrm{T}_pM}(v)\big)f.$$

3 Olkoon $\phi\colon M \to N$ diffeomorfismi. Valitaan mielivaltainen $p \in M$ ja merkitään taas $q = \phi(p)$. Diffeomorfisuusoletuksen mukaan on olemassa kuvaus $\phi^{-1}\colon N \to M$, jolla

$$\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_M \quad \text{ja} \quad \phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_N.$$

Tällöin ketjusäännön mukaan

$$\mathrm{T}_q\big(\phi^{-1}\big) \circ \mathrm{T}_p\phi = \mathrm{T}_p\big(\phi^{-1} \circ \phi\big) = \mathrm{T}_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_pM},$$

ja vastaavasti $\mathrm{T}_q(\phi^{-1}) \circ \mathrm{T}_p\phi = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_qN}$. Näin ollen

$$\big(\mathrm{T}_p\phi\big)^{-1} = \mathrm{T}_q\big(\phi^{-1}\big). \qquad \square$$

Kartan (U, x) koordinaattiympäristössä funktiolle $f \in \mathfrak{F}(M)$ määritellään *osittaisderivaatta* koordinaatin x^i suhteen kaavalla

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{x(p)} \big(f \circ x^{-1}\big).$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osittaisderivaatat $\partial/\partial r^i|_a$ toteuttavat Leibnizin säännön, joten ne kuuluvat tangenttiavaruuteen $\mathrm{T}_a\mathbb{R}^n$. Jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$ saadaan

$$\mathrm{T}_{x(p)}\big(x^{-1}\big)\left(\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{x(p)}\right)(f) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{x(p)} \big(f \circ x^{-1}\big) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

ja näin ollen

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \mathrm{T}_{x(p)}\left(x^{-1}\right)\left(\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{x(p)}\right), \quad \text{eli} \quad \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in \mathrm{T}_p M.$$

Osittaisderivaattojen lineaarikombinaatiot

$$v = \sum v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \quad v^i \in \mathbb{R}$$

ovat siis tangenttivektoreita pisteessä $p \in U$.

PROPOSITIO 2.14. *Olkoon (U, x) moniston M kartta ja $p \in U$. Tangenttivektorit $\partial/\partial x^i|_p$ muodostavat tangenttiavaruuden $\mathrm{T}_p M$ kannan, ja näin ollen mikä tahansa derivaatio $v \in \mathrm{T}_p M$ voidaan esittää muodossa*

$$v = \sum v\left(x^i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

Todistus (Tu 2011, s. 13, 89). Todistetaan ensin, että joukko

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial r^1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial r^n}\right|_a \right\}$$

muodostaa avaruuden $\mathrm{T}_a\mathbb{R}^n$ kannan. Lähteessä (Tu 2011, s. 6) on osoitettu, että avoimella pallolla

$$\mathrm{B}(a, r) = \{b \in \mathbb{R}^n \mid \|b - a\| < r\}$$

määritelty C^∞-funktio f voidaan esittää muodossa

$$f(b) = f(a) + \sum \left(r^i(b) - a^i\right) g_i(b)$$

siten, että sileille funktioille g_i pätee

$$g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(a).$$

Olkoon nyt $v \in \mathrm{T}_a\mathbb{R}^n$, jolloin edellistä muotoa käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
v(f) &= v\left(f(a) + \sum \left(r^i - a^i\right) g_i\right) \\
&= v(f(a)) + v\left(\sum \left(r^i - a^i\right) g_i\right) \\
&= \sum v\left(\left(r^i - a^i\right) g_i\right) \\
&= \sum v\left(r^i - a^i\right) g_i(a) + \sum \left(r^i(a) - a^i\right) v(g_i) \\
&= \sum \left(v\left(r^i\right) - v\left(a^i\right)\right) g_i(a) + \sum \left(a^i - a^i\right) v(g_i) \\
&= \sum v\left(r^i\right) \frac{\partial f}{\partial r^i}(a).
\end{aligned}$$

Koska $v\left(r^i\right) \in \mathbb{R}$, nähdään, että

$$\mathrm{T}_a\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\left(\left\{ \frac{\partial}{\partial r^1}\bigg|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial r^n}\bigg|_a \right\}\right).$$

Tarkastellaan sitten nolladerivaatiota $v = 0$. Tällöin

$$v(f) = \sum v^i \frac{\partial f}{\partial r^i}(a) = 0 \quad \text{jokaisella } f \in \mathfrak{F}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Sijoittamalla $f = r^j$ saadaan

$$v\left(r^j\right) = \sum v^i \frac{\partial r^j}{\partial r^i}(a) = \sum v^i \delta_i^j = v^j = 0,$$

ja näin ollen joukko $\left\{ \partial/\partial r^i|_a \right\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Olkoon (U, x) kartta pisteen $p \in M$ ympäristössä. Koska $x\colon U \to x(U)$ on diffeomorfismi, derivaatta

$$\mathrm{T}_{x(p)}\left(x^{-1}\right)\colon \mathrm{T}_{x(p)}\mathbb{R}^n \to \mathrm{T}_p M$$

on isomorfismi. Koska isomorfismi kuvaa kannan kannaksi ja

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \mathrm{T}_{x(p)}\left(x^{-1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\bigg|_{x(p)}\right),$$

joukko $\left\{ \partial/\partial x^i|_p \right\}$ on avaruuden $\mathrm{T}_p M$ kanta. □

KOROLLAARI 2.15. *Proposition 2.14 seurauksena nähdään, että*

1 $\dim M = \dim \mathrm{T}_p M$ *jokaisella* $p \in M$ *ja*

2 *jos M ja N ovat diffeomorfisia, niin* $\dim M = \dim N$.

Todistus

1 Kantavektoreita on sama lukumäärä kuin koordinaattifunktioita.

2 Proposition 2.13 mukaan kuvauksen $\phi\colon M \to N$ diffeomorfisuudesta seuraa tangenttiavaruuksien isomorfisuus, ja isomorfisuudella on välttämättömänä ehtona $\dim \mathrm{T}_p M = \dim \mathrm{T}_{\phi(p)} N$. □

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ jokainen vektori $v \in \mathbb{R}^n$ määrää pisteeseen $a \in \mathbb{R}^n$ tangenttivektorin $D_v \in \mathrm{T}_a\mathbb{R}^n$ kaavalla

$$D_v(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Koska f on sileä, on olemassa lineaarikuvaus $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jolla $T(v) = D_v(f)$, ja näin ollen kuvaus $v \mapsto D_v$ on myös lineaarinen. Koordinaateissa esitettynä kyseinen kuvaus on selvästi

$$\sum v^i e_i \mapsto \sum v^i \frac{\partial}{\partial r^i}\bigg|_a. \tag{2.1}$$

Koordinaattimuodon perusteella on selvää, että kyseessä on isomorfismi.

Etsitään seuraavaksi koordinaattiesitys kuvauksen $\phi\colon M \to N$ derivaatalle. Olkoon (U, x) pisteen $p \in M$ sisältävä kartta ja (V, y) pisteen $\phi(p) \in N$ sisältävä kartta. Nyt joukot

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right\} \quad \text{ja} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{\phi(p)} \right\}$$

ovat vektoriavaruuksien $\mathrm{T}_p M$ ja $\mathrm{T}_{\phi(p)} N$ kantoja, ja näin ollen on olemassa kertoimet A^i_j, joilla

$$\mathrm{T}_p\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right) = \sum A^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{\phi(p)}.$$

Operoimalla molemmilla puolilla koordinaattifunktioon y^k saadaan

$$\left(\mathrm{T}_p\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right)\right) y^k = \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \left(y^k \circ \phi\right) = \frac{\partial \phi^k}{\partial x^j}(p),$$

missä $\phi^k = y^k \circ \phi$, ja

$$\sum A^i_j \frac{\partial y^k}{\partial y^i}\bigg|_p = \sum A^i_j \delta^k_i = A^k_j.$$

Nähdään siis, että

$$A^k_j = \frac{\partial \phi^k}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial}{\partial r^j}\bigg|_{x(p)} \left(y^k \circ \phi \circ x^{-1}\right).$$

2.4 *Euklidisen avaruuden alimonistot*

Joukko $M \subset \mathbb{R}^n$ on m-ulotteinen *alimonisto*, jos jokaisella joukon M pisteellä on avoin ympäristö $U \subset \mathbb{R}^n$, avoin joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ ja diffeomorfismi $x\colon U \to V$, jolla

$$x(U \cap M) = \left\{ a \in V \mid a^i = 0 \ \text{ jokaisella } \ i > m \right\}.$$

Ehto voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$x(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

joten $x(U \cap M)$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^m$. Alimonistolle saadaan sileän moniston rakenne, kun atlas muodostetaan kartoista $(U \cap M, x^1, \dots, x^m)$. Sileän rakenteen indusoima topologia on tällöin sama kuin M:n aliavaruustopologia.

Tyypillisesti alimonisto saadaan alkukuvana

$$M = f^{-1}(\{0\}) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid f(a) = 0\},$$

missä $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ on sileä kuvaus ja $n > k$. Esimerkiksi tasossa liikkuvan jäykkävartisen heilurin konfiguraatioavaruus voidaan samaistaa yksikköympyrän

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}$$

kanssa. Seuraava lause antaa riittävän ehdon sille, että tällaiselle konfiguraatioavaruudelle saadaan sileän moniston rakenne:

LAUSE 2.16. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ sileä kuvaus ja $M = f^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$. Jos kuvauksen f derivaatta on täysiasteinen, eli $\operatorname{rk} \mathrm{T}_p f = k$, jokaisessa pisteessä $p \in M$, niin M on $n - k$ -ulotteinen alimonisto.*

Todistus. Merkitään $m = n - k$, ja esitetään $\mathbb{R}^n$:n pisteet pareina (a, b), joissa $a \in \mathbb{R}^m$ ja $b \in \mathbb{R}^k$. Olkoon $p \in M$. Valitaan muuttujien järjestystä vaihtava kuvaus $h \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$ siten, että kuvauksen $f \circ h$ derivaatta pisteessä $h^{-1}(p)$ voidaan esittää muodossa

$$T(a, b) = T_1(a) + T_2(b), \quad \text{missä } T_2 \in \operatorname{Aut}\left(\mathbb{R}^k\right).$$

Näin voidaan tehdä aina, kun $p \in M$, sillä oletuksen mukaan tällöin $\operatorname{rk} T = k$.

Määritellään kuvaus $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ säännöllä

$$g(a, b) = (a, f \circ h(a, b)).$$

Olkoon $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kuvauksen g Jacobin matriisi pisteessä $h^{-1}(p)$. Merkitään lisäksi kuvauksien T_1 ja T_2 matriisiesityksia $A \in \mathbb{R}^{k\times m}$ ja $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$, jolloin saadaan

$$\det(J) = \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix} = \det(B) \neq 0.$$

Käänteiskuvauslauseen perusteella pisteelle $h^{-1}(p)$ voidaan valita avoin ympäristö $V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $g|_V : V \to g(V)$ on diffeomorfismi. Tällöin $x = g \circ h^{-1}$ on diffeomorfismi pisteen $p \in M$ avoimessa ympäristössä $U = h(V)$. Lisäksi selvästi

$$x(q) = \left(h^{-1}(q), f(q)\right) = \left(q^{i_1}, \ldots, q^{i_m}, 0, \ldots, 0\right)$$

jokaisella $q \in U \cap M$, ja näin ollen $x\colon U \to x(U)$ on alimoniston määritelmässä esitetyn ehdon täyttävä diffeomorfismi. □

3 Vektorikentät ja virtaukset

3.1 *Tangenttikimppu*

Liittämällä moniston M tangenttiavaruudet yhteen saadaan *tangenttikimppu*

$$\mathrm{T}M = \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}_p M.$$

Unioni on pistevieras, sillä $\mathrm{T}_p M \cup \mathrm{T}_q M = \varnothing$, kun $p \neq q$.

Olkoon (U, x) on moniston kartta ja $p \in U$. Avoimen alimoniston U tangenttikimppu on

$$\mathrm{T}U = \bigcup_{p \in U} \mathrm{T}_p U = \bigcup_{p \in U} \mathrm{T}_p M,$$

sillä $\mathrm{T}_p M = \mathrm{T}_p U$, kun $p \in U$. Tangenttikimpun $\mathrm{T}U$ jäsenille

$$v_p = \sum v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

saadaan kartan (U, x) indusoima kartta $\tilde{x} \colon \mathrm{T}U \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ kaavalla

$$\tilde{x}\left(v_p\right) = \left(x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n\right) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Näin ollen jokainen moniston M kartta (U, x) määrää tangenttikimpulle kartan $(\mathrm{T}U, \tilde{x})$. Päällekkäisten karttojen $(\mathrm{T}U, \tilde{x})$ ja $(\mathrm{T}V, \tilde{y})$ välinen transitiokuvaus $\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1} \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ on

$$\left(x(p), \sum v^i e_i\right) \mapsto \left(y(p), \sum v^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)\, e_i\right).$$

Koska funktiot $\partial y^i / \partial x^j$ ovat sileitä, myös transitiokuvaukset ovat sileitä. Näin ollen moniston M atlas määrää tangenttikimpulle kanonisen atlaan. Lähteessä (Tu 2011, s. 131-133) on osoitettu, että tämä atlas antaa tangenttikimpulle sileän moniston rakenteen.

Tangenttikimpun kanoninen projektio $\pi \colon \mathrm{T}M \to M$ määritellään kaavalla

$$\pi\left(v_p\right) = p, \quad \text{kun } v_p \in \mathrm{T}_p M.$$

Projektio on selvästi sileä kuvaus tangenttikimpun sileän rakenteen suhteen.

Sileän kuvauksen $\phi\colon M \to N$ derivaatoista $\mathrm{T}_p\phi\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{\phi(p)}N$ voidaan koota *tangenttikuvaus* $\mathrm{T}\phi\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$. Tangenttikuvaus toteuttaa yhtälön

$$\pi_2 \circ \mathrm{T}\phi = \phi \circ \pi_1,$$

eli toisin sanoen kuvan 3.1 kaavio kommutoi.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}M \arrow[r, "\mathrm{T}\phi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathrm{T}N \arrow[d, "\pi_2"] \\
M \arrow[r, "\phi"'] & N
\end{tikzcd}$$

Kuva 3.1. *Tangenttikuvaus.*

Koordinaattiesityksen

$$\mathrm{T}\phi\left(\sum v^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = \sum v^i \frac{\partial\phi^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)}$$

perusteella nähdään, että $\mathrm{T}\phi$ on sileä kuvaus, sillä funktiot $\partial\phi^j/\partial x^i$ ovat sileitä. Tangenttikuvauksien avulla ilmaistuna ketjusäännölle saadaan elegantti muoto

$$\mathrm{T}(\psi \circ \phi) = \mathrm{T}\psi \circ \mathrm{T}\phi.$$

Ketjusäännön perusteella nähdään, että jos $\phi\colon M \to N$ on diffeomorfismi, niin myös $\mathrm{T}\phi\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$ on diffeomorfismi ja $(\mathrm{T}\phi)^{-1} = \mathrm{T}(\phi^{-1})$.

3.2 *Vektorikentät*

Vektorikenttä monistolla M on kuvaus $v\colon M \to \mathrm{T}M$, jolle $\pi \circ v = \mathrm{id}_M$. Vektorikenttä v määrää siis jokaiselle $p \in M$ tangenttivektorin $v_p \in \mathrm{T}_pM$.

Vektorikenttien joukolle saadaan reaalisen vektoriavaruuden rakenne, kun laskutoimitukset määritellään pisteittäin kaavoilla

$$(u+v)_p = u_p + v_p \quad \text{ja} \quad (av)_p = av_p, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ avulla voidaan määritellä vektorikenttä fv kaavalla

$$(fv)_p = f(p)\,v_p.$$

Kartan (U, x) alueella vektorikenttä $\partial/\partial x^i$ määritellään asettamalla

$$p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

Koordinaattiympäristön U sisällä jokainen vektorikenttä voidaan kirjoittaa muodossa

$$v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{missä } v^i(p) = v_p\left(x^i\right).$$

Vektorikentän v avulla voidaan määritellä sileän funktion *Lien derivaatta* $\mathcal{L}_v f$ asettamalla

$$(\mathcal{L}_v f)(p) = v_p(f).$$

Algebran $\mathfrak{F}(M)$ *derivaatio* on $\mathbb{R}$-lineaarikuvaus $D: \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$, joka toteuttaa Leibnizin säännön

$$D(fg) = D(f)\, g + f D(g).$$

Jos $\mathcal{L}_v f$ on sileä funktio jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$, niin selvästi $\mathcal{L}_v$ on derivaatio.

PROPOSITIO 3.1. *Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalentteja:*

1 *Vektorikenttä $v: M \to \mathrm{T}M$ on sileä kuvaus.*

2 *On olemassa atlas, jonka jokaisella kartalla (U, x) vektorikentän*

$$v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

komponenttifunktiot v^i ovat sileitä.

3 *Funktio $\mathcal{L}_v f$ on sileä jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$.*

Todistus (Tu 2011, s.150–151). Todistetaan ensin, että (1) $\Rightarrow$ (2). Jos v on sileä, se on sileä jokaisella kartalla. Tällöin mielivaltaisella kartalla (U, x) määritelty kuvaus $\tilde{x} \circ v \circ x^{-1}: x(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ on sileä. Kuvaus $\tilde{x} \circ v \circ x^{-1}$ on komponenteissa esitettynä

$$\left(x^1(p), \dots, x^n(p)\right) \mapsto \left(x^1(p), \dots, x^n(p), v^1(p), \dots, v^n(p)\right),$$

joten jokaisen funktion v^i täytyy olla sileä koordinaattiympäristössä U.

Implikaatio suuntaan (2) $\Rightarrow$ (1) saadaan seuraavasti: Jos funktiot v^i ovat sileitä, niin kuvaus $\tilde{x} \circ v \circ x^{-1}$ on sileä. Jos tämä pätee jokaisella kartalla, niin kuvaus $v: M \to \mathrm{T}M$ on sileä.

Todistetaan sitten, että (2) $\Rightarrow$ (3). Olkoot komponenttifunktiot v^i sileitä kartalla (U, x). Mielivaltaisella sileällä funktiolla $f \in \mathfrak{F}(M)$ saadaan

$$\mathcal{L}_v f = \sum v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Funktio $\partial f / \partial x^i$ on sileä, sillä

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ x^{-1} = \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial r^i}$$

on sileä joukossa $x(U)$. Näin ollen $\mathcal{L}_v f$ on sileä joukossa U. Koska atlaan kartat peittävät koko moniston, nähdään, että $\mathcal{L}_v f \in \mathfrak{F}(M)$.

Osoitetaan vielä implikaatio (3) ⇒ (2). Oletetaan, että $\mathcal{L}_v f$ on sileä jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$. Valitaan avoin joukko V, jonka sulkeuma kuuluu joukkoon U. Valitsemalla sopiva testifunktio ρ kartan (U, x) koordinaattifunktiot voidaan laajentaa koko monistolla määritellyiksi sileiksi funktioiksi $\hat{x}^i = \rho x^i$ siten, että $\hat{x}^i|_V = x^i|_V$. Nyt oletuksen mukaan $\mathcal{L}_v \hat{x}^i$ on sileä, ja

$$\left(\mathcal{L}_v \hat{x}^i\right)(p) = v_p\left(\hat{x}^i\right) = v_p\left(x^i\right) = v^i(p), \quad \text{kun } p \in V.$$

Näin ollen v^i on sileä joukossa V, ja koska V voidaan valita vapaasti, nähdään, että $v^i \in \mathfrak{F}(U)$. □

Sileyskriteereistä nähdään helposti, että sileiden vektorikenttien lineaarikombinaatiot ovat myös sileitä vektorikenttiä. Sileiden vektorikenttien vektoriavaruutta merkitään $\mathfrak{X}(M)$. Lisäksi havaitaan, että fv on sileä jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja $v \in \mathfrak{X}(M)$, ja näin ollen $\mathfrak{X}(M)$ on $\mathfrak{F}(M)$-moduli.

Proposition 3.1 perusteella nähdään, että jos v on sileä vektorikenttä, niin $\mathcal{L}_v$ on algebran $\mathfrak{F}(M)$ derivaatio. Toisaalta jokainen derivaatio D määrää sileän vektorikentän kaavalla

$$v_p(f) = (Df)(p).$$

Vektorikenttä $v \in \mathfrak{X}(M)$ voidaan siis samaistaa derivaation $\mathcal{L}_v$ kanssa. Notaation keventämiseksi käytetään merkintää $v(f) = \mathcal{L}_v f$.

3.3 *Virtaukset*

Vektorikentän voidaan tulkita kuvaavan moniston pisteiden infinitesimaalista siirtymää. Kuvaus, joka siirtää moniston pisteitä vektorikentän suuntaisesti, tunnetaan *virtauksena*.

MÄÄRITELMÄ 3.2. *Virtaus monistolla M on C^∞-kuvaus $\phi\colon \mathbb{R} \times M \to M$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

1 $\phi(t_1 + t_2, p) = \phi(t_1, \phi(t_2, p))$ *jokaisella* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *ja* $p \in M$.
2 $\phi(0, p) = p$ *jokaisella* $p \in M$.

Valitsemalla kiinteä $t \in \mathbb{R}$ virtaus ϕ määrää sileän kuvauksen $\phi^t(p) = \phi(t, p)$ monistolta M itselleen. Tällöin virtauksen ensimmäinen ominaisuus voidaan kirjoittaa muodossa $\phi^{t_1} \circ \phi^{t_2} = \phi^{t_1 + t_2}$.

Kuvaus ϕ^t on bijektiivinen jokaisella $t \in \mathbb{R}$, sillä

$$\phi^{-t} \circ \phi^t = \phi^t \circ \phi^{-t} = \phi^0 = \mathrm{id}_M,$$

ja näin ollen $\left(\phi^t\right)^{-1} = \phi^{-t}$. Lisäksi virtauksen määritelmän mukaan sekä ϕ^t että ϕ^{-t} ovat C^∞, ja näin ollen ϕ^t on diffeomorfismi. Täten virtaus voidaan tulkita ryhmähomomorfismiksi

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}, +) &\to \operatorname{Diff}(M)\\ t &\mapsto \phi^t.\end{aligned}$$

Toisin sanoen, virtaus kuvaa reaaliluvun t moniston diffeomorfismiksi ϕ^t siten, että arvojoukko muodostaa diffeomorfismiryhmän aliryhmän. Tällainen aliryhmä

$$\left\{\phi^t \mid t \in \mathbb{R}\right\} \subset \operatorname{Diff}(M)$$

tunnetaan nimellä *yksiparametrinen diffeomorfismiryhmä*.

Sileä käyrä monistolla M on C^∞-kuvaus $c\colon I \to M$, missä $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli. Käyrällä c on tangenttikuvaus $\mathrm{T}c\colon \mathrm{T}I \to \mathrm{T}M$, jota käyttäen voidaan määritellään käyrän *nopeusvektori*

$$c'(t_0) = \mathrm{T}c\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right),$$

missä $t_0 \in I$ ja t on $\mathbb{R}$:n kanoninen koordinaattifunktio. Nopeusvektorin arvo funktiolla $f \in \mathfrak{F}(M)$ on siis

$$c'(t_0)(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}(f \circ c).$$

Olkoon (U, x) moniston M kartta, jolla $c(t_0) \in U$. Nopeusvektorille saadaan koordinaattiesitys

$$c'(t_0) = \mathrm{T}_{t_0}c\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right) = \sum \frac{\mathrm{d}c^i}{\mathrm{d}t}(t_0)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t_0)},$$

missä $c^i = x^i \circ c$.

Olkoon v sileä vektorikenttä monistolla M. Sileä käyrä $c\colon I \to M$ on vektorikentän v *integraalikäyrä*, jos

$$c'(t) = v_{c(t)} \quad \text{jokaisella } t \in I.$$

Integraalikäyrän sanotaan *alkavan pisteestä* $p \in M$, jos $c(0) = p$. Integraalikäyrä on *maksimaalinen*, jos sitä ei voida laajentaa suuremmalle määrittelyjoukolle. Jotta c olisi vektorikentän v integraalikäyrä, sen tulee toteuttaa lokaalisti kartalla (U, x) differentiaaliyhtälöryhmä

$$\frac{\mathrm{d}c^i}{\mathrm{d}t} = v^i \circ c, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

missä $c^i = x^i \circ c$ ja $v^i = v(x^i)$.

Olkoon $D \subset \mathbb{R} \times M$ avoin joukko, jolla reaalilukujen osajoukko

$$D_p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in D\}$$

on nollan sisältävä avoin väli jokaisella $p \in M$. *Lokaali virtaus* on sileä kuvaus $\phi \colon D \to M$, joka toteuttaa virtauksen määritelmän ehdon 2 jokaisella $p \in M$, ja ehdon 1 jokaisella $p \in M$, $t_1 \in D_{\phi(t_2,p)}$ ja $t_2 \in D_p$, joilla $t_1 + t_2 \in D_p$. Toisin sanoen, lokaali virtaus on kuin virtaus, mutta sen määrittelyjoukkoa on rajoitettu. Tämän korostamiseksi virtausta kutsutaan myös *globaaliksi virtaukseksi.* Jos $D = \mathbb{R} \times M$, lokaali virtaus on luonnollisesti myös globaali virtaus.

Lokaali virtaus $\phi \colon D \to M$ määrää jokaiselle pisteelle $p \in M$ sileän käyrän $\phi_p \colon D_p \to M$, kun asetetaan

$$\phi_p(t) = \phi(t, p).$$

Lokaalin virtauksen *nopeuskenttä* on vektorikenttä v, joka määritellään pisteittäin kaavalla

$$v_p = \phi_p'(0).$$

Nopeuskenttä on sileä, sillä se saa sileällä funktiolla $f \in \mathfrak{F}(M)$ arvon

$$v(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(f \circ \phi_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,p)} f \circ \phi$$

ja $f \circ \phi \colon D \to \mathbb{R}$ on sileä.

PROPOSITIO 3.3. *Lokaali virtaus $\phi \colon D \to M$ ja sen nopeuskenttä v toteuttavat yhtälön*

$$\phi_p'(t) = v_{\phi_p(t)}$$

jokaisella $p \in M$ ja $t \in D_p$, eli käyrät ϕ_p ovat vektorikentän v integraalikäyriä.

Todistus (Lee 2013, s. 210). Olkoon $p \in M$, $t_0 \in D_p$ ja $q = \phi_p(t_0)$, jolloin

$$\phi_q(t_1) = \phi^{t_1}(q) = \phi^{t_1} \circ \phi^{t_0}(p) = \phi^{t_1+t_0}(p) = \phi_p(t_1 + t_0)$$

jokaisella $t_1 \in D_q$. Näin ollen havaitaan, että

$$\begin{aligned} v_{\phi_p(t_0)}(f) &= v_q(f) = \phi_q'(0)(f) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(f \circ \phi_q\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \left(f \circ \phi_p\right) = \phi_p'(t_0)(f). \qquad \square \end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälöiden olemassaolo-, yksikäsitteisyys- ja sileä riippuvuus alkuarvoista -lauseiden avulla saadaan seuraava tulos:

LAUSE 3.4. *Olkoon $v \in \mathfrak{X}(M)$. On olemassa yksikäsitteinen lokaali virtaus $\phi\colon D \to M$, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

1 *Vektorikenttä v on ϕ:n nopeuskenttä.*

2 *Jokainen käyrä $\phi_p\colon D_p \to M$ on vektorikentän v maksimaalinen pisteestä p alkava integraalikäyrä.*

3 *Jos $t_0 \in D_p$, niin $D_{\phi(t_0,p)} = \left\{t - t_0 \mid t \in D_p\right\}$.*

Todistus. Katso (Lee 2013, s. 212–214).

Jokaisella sileällä vektorikentällä on siis lokaali virtaus muttei välttämättä globaalia virtausta. Vektorikentän, joka on jonkin globaalin virtauksen nopeuskenttä, sanotaan olevan *täydellinen*.

3.4 *Lien algebra*

Sileiden vektorikenttien $u, v \in \mathfrak{X}(M)$ kompositiona saadaan kuvaus

$$\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M).$$

Operaattori $\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v$ ei kuitenkaan toteuta Leibnizin sääntöä, sillä

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v(fg) &= \mathcal{L}_u(g\mathcal{L}_v f + f\mathcal{L}_v g)\\ &= g(\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v f) + f(\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v g)\\ &\quad + (\mathcal{L}_u f)(\mathcal{L}_v g) + (\mathcal{L}_v f)(\mathcal{L}_u g),\end{aligned}$$

eli $\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v$ ei ole derivaatio. Sen sijaan kommutaattorin $\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u$ tapauksessa kaksi viimeistä termiä katoavat, joten tuloksena saadaan derivaatio.

MÄÄRITELMÄ 3.5. *Lien algebra on reaalinen vektoriavaruus, jolle on määritelty Lien sulkeiksi kutsuttu binäärioperaatio*

$$\begin{aligned}V \times V &\to V\\ (u,v) &\mapsto [u,v].\end{aligned}$$

Lien sulkeilla tulee olla seuraavat ominaisuudet:

1 *Bilineaarisuus: jokaisella $u, v, w \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$ toteutuu*

$$[au + bv, w] = a[u,w] + b[v,w] \quad ja \quad [u, av + bw] = a[u,v] + b[u,w].$$

2 *Antikommutatiivisuus: $[u,v] = -[v,u]$ jokaisella $u, v \in V$.*

3 *Jacobin identiteetti: jokaisella $u, v, w \in V$ toteutuu*

$$[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0.$$

Lien sulkeiden antikommutatiivisuudesta nähdään helposti, että $[v,v] = 0$

jokaisella $v \in V$.

PROPOSITIO 3.6. *Sileiden vektorikenttien avaruus $\mathfrak{X}(M)$ on Lien algebra, kun sulkeet määritellään siten, että vektorikentän $[u, v]$ määräämä derivaatio on*

$$\mathcal{L}_{[u,v]} = \mathcal{L}_u \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u.$$

Todistus. Identifikaatiota $v(f) = \mathcal{L}_v f$ käyttäen voidaan kirjoittaa

$$[u, v] = uv - vu.$$

Kommutaattori on selvästi antikommutatiivinen. Myös lineaarisuus ensimmäisen argumentin suhteen toteutuu, sillä $\mathcal{L}_{u+v} f = \mathcal{L}_u f + \mathcal{L}_v f$ ja näin ollen

$$\begin{aligned} [au + bv, w] &= (au + bv) w - w (au + bv) \\ &= auw + bvw - awu - bwv \\ &= a (uw - wu) + b (vw - wv) \\ &= a [u, w] + b [v, w]. \end{aligned}$$

Lineaarisuus toisen argumentin suhteen seuraa antikommutatiivisuudesta.

Jacobin identiteetin ensimmäiselle termille saadaan

$$\begin{aligned} [[u, v], w] &= [uv, w] - [vu, w] \\ &= uvw - wuv - vuw + wvu. \end{aligned}$$

Vastaavasti muutkin termit koostuvat alkioiden u, v ja w permutaatioista etumerkin vaihdellessa. Laskemalla kaikki 12 termiä yhteen permutaatiot kumoutuvat pareittain, ja Jacobin identiteetti toteutuu. □

Diffeomorfismin $\phi \colon M \to N$ avulla määritellään vektorikentän $v \in \mathfrak{X}(M)$ *pushforward* $\phi_* v \in \mathfrak{X}(N)$ kaavalla

$$(\phi_* v)_q = \mathrm{T}\phi \left(v_{\phi^{-1}(q)} \right).$$

Diffeomorfismi ϕ määrää siis $\mathbb{R}$-lineaarikuvauksen $\phi_* \colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$.

LEMMA 3.7. *Olkoon $\phi \colon M \to N$ diffeomorfismi. Vektorikenttä $\hat{v} \in \mathfrak{X}(N)$ on kentän $v \in \mathfrak{X}(M)$ pushforward, jos ja vain jos*

$$(\mathcal{L}_{\hat{v}} f) \circ \phi = \mathcal{L}_v (f \circ \phi) \tag{3.1}$$

jokaisella $f \in \mathfrak{F}(N)$.

Todistus. Valitaan mielivaltainen $p \in M$ ja $f \in \mathfrak{F}(N)$, ja oletetaan, että $\hat{v} = \phi_* v$.

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v (f \circ \phi)(p) &= v_p (f \circ \phi) \\
&= \mathrm{T}\phi \left(v_p\right)(f) \\
&= (\phi_* v)_{\phi(p)} (f) \\
&= \left(\mathcal{L}_{\phi_* v} f\right) \circ \phi (p) \\
&= (\mathcal{L}_{\hat{v}} f) \circ \phi (p).
\end{aligned}$$

Toisaalta jos (3.1) pätee jokaisella $f \in \mathfrak{F}(N)$, niin jokaisella $q \in N$ saadaan

$$\hat{v}_q (f) = v_{\phi^{-1}(q)} (f \circ \phi) = \mathrm{T}\phi \left(v_{\phi^{-1}(q)}\right)(f) = (\phi_* v)_q f,$$

ja näin ollen $\hat{v} = \phi_* v$. □

Osoittautuu, että diffeomorfismit säilyttävät vektorikenttien Lien algebran rakenteen.

PROPOSITIO 3.8. *Olkoon $\phi\colon M \to N$ diffeomorfismi ja $u, v \in \mathfrak{X}(M)$. Tällöin*

$$\phi_* [u, v] = [\phi_* u, \phi_* v].$$

Todistus (Tu 2011, s. 160). Merkitään $\hat{u} = \phi_* u$ ja $\hat{v} = \phi_* v$. Kun yhtälöä (3.1) sovelletaan muutamia kertoja peräkkäin, saadaan

$$\begin{aligned}
[u, v](f \circ \phi) &= \mathcal{L}_u \mathcal{L}_v (f \circ \phi) - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u (f \circ \phi) \\
&= \mathcal{L}_u ((\mathcal{L}_{\hat{v}} f) \circ \phi) - \mathcal{L}_v ((\mathcal{L}_{\hat{u}} f) \circ \phi) \\
&= (\mathcal{L}_{\hat{u}} \mathcal{L}_{\hat{v}} f) \circ \phi - (\mathcal{L}_{\hat{v}} \mathcal{L}_{\hat{u}} f) \circ \phi \\
&= (\mathcal{L}_{\hat{u}} \mathcal{L}_{\hat{v}} f - \mathcal{L}_{\hat{u}} \mathcal{L}_{\hat{v}} f) \circ \phi = ([\hat{u}, \hat{v}] f) \circ \phi.
\end{aligned}$$

Lemman 3.7 perusteella nähdään, että $\phi_* [u, v] = [\phi_* u, \phi_* v]$. □

4 Differentiaalimuodot

4.1 *Tensorit ja multikovektorit*

Vektoriavaruuden V kopioista muodostavaa k-kertaista karteesista tuloa merkitään $V^k = V \times \cdots \times V$. Kuvaus $f\colon V^k \to \mathbb{R}$ on *multilineaarinen*, jos se on lineaarinen jokaisen argumenttinsa suhteen. Tällaisia multilineaarikuvauksia kutsutaan *k-tensoreiksi*, ja niiden muodostamaa vektoriavaruutta merkitään

$$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k \text{ kpl}},$$

Olkoon f asteen k tensori ja g asteen l tensori. Tensorien f ja g *tensoritulo* on $k+l$-tensori $f \otimes g$, joka määritellään säännöllä

$$f \otimes g\left(v_1, \ldots, v_{k+l}\right) = f\left(v_1, \ldots, v_k\right) g\left(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}\right), \quad v_i \in V.$$

Esimerkiksi kovektorien $\omega, \eta \in V^*$ tensoritulona saadaan 2-tensori eli *bilineaarimuoto* $\omega \otimes \eta\colon V \times V \to \mathbb{R}$.

Asetetaan äärellisulotteiselle avaruudelle V kanta $\{e_1, \ldots, e_n\}$, ja merkitään sen duaalikantaa $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\}$. Mielivaltaisen k-tensorin arvo vektoreilla $v_1, \ldots, v_k \in V$ saa muodon

$$\begin{aligned} f\left(v_1, \ldots, v_k\right) &= \sum v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k} f\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right) \\ &= \sum f_{i_1 \cdots i_k} v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k} \\ &= \sum f_{i_1 \cdots i_k} \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}\left(v_1, \ldots, v_k\right), \end{aligned}$$

missä $v_j^i = \epsilon^i\left(v_j\right)$ ja $f_{i_1 \cdots i_k} = f\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right)$. Tämän perusteella on selvää, että jokainen k-tensori voidaan esittää muodossa

$$f = \sum f_{i_1 \cdots i_k} \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}.$$

Lisäksi $f = 0$, jos ja vain jos $f_{i_1 \cdots i_k} = 0$, ja näin ollen tensorit $\epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}$ muodostavat k-tensorien vektoriavaruuden kannan.

Permutaatio joukolla $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ on bijektio $\sigma\colon I \to I$, joka voidaan tulkita järjestetyn n-monikon $(i_1, \ldots, i_n)$ uudelleenjärjestykseksi

$$(i_1, \ldots, i_n) \mapsto (\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_n)).$$

Permutaatioita on käsitelty tarkemmin esimerkiksi lähteessä (Tu 2011, s. 20–24), josta on löydettävissä myös alla esitettyjen tulosten todistukset.

Permutaatio, joka vaihtaa kaksi alkiota keskenään ja säilyttää muut, on 2-*sykli*. Keskeistä on, että jokainen permutaatio voidaan esittää 2-syklien yhdistelmänä. Permutaation *merkki* $\operatorname{sgn}(\sigma)$ on $+1$, jos 2-syklihajotelmassa on parillinen määrä syklejä, ja -1, jos 2-syklejä on pariton määrä. Helposti havaitaan, että jos σ ja τ ovat saman joukon permutaatioita, niin

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau).$$

Olkoon S_k joukon $\{1, \ldots, k\}$ kaikista permutaatioista koostuva ryhmä. Permutaation $\sigma \in \mathrm{S}_k$ toiminta k-tensorilla f määritellään kaavalla

$$\sigma(f)(v_1, \ldots, v_k) = f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right).$$

Nyt voidaan määritellä, että k-tensori f on *symmetrinen*, jos

$$\sigma(f) = f \quad \text{jokaisella } \sigma \in \mathrm{S}_k,$$

ja *antisymmetrinen*, jos

$$\sigma(f) = \operatorname{sgn}(\sigma) f \quad \text{jokaisella } \sigma \in \mathrm{S}_k.$$

Näin ollen tensori on symmetrinen, jos sen arvo ei muutu, kun kaksi sen argumenttia vaihdetaan keskenään, ja antisymmetrinen, jos se vaihtaa merkkiä kyseisessä toimenpiteessä. Lisäksi jos k-tensori f on antisymmetrinen, niin

$$f(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0 \quad \text{jokaisella } v \in V.$$

Mielivaltainen k-tensori f voidaan pakottaa antisymmetriseksi operaattorilla

$$\operatorname{Alt}(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma(f).$$

Antisymmetrisiä k-tensoreita kutsutaan *k-kovektoreiksi* tai yleisemmin *multikovektoreiksi*, ja niiden joukkoa merkitään $\Lambda^k(V^*)$. Skalaarit määritellään 0-kovektoreiksi. Joukko $\Lambda^k(V^*)$ on suljettu skalaarikertolaskun ja tensorien yhteenlaskun suhteen, joten k-kovektorit muodostavat k-tensorien aliavaruuden.

PROPOSITIO 4.1. *Olkoon $\omega \in \Lambda^k(V^*)$. Jos joukko $\{v_1, \ldots, v_k\}$ on lineaarisesti riippuva, niin $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$.*

Todistus. Yleisyyttä loukkaamatta voidaan olettaa, että vektori v_1 voidaan esittää muodossa

$$v_1 = \sum_{i=2}^{k} a^i v_i, \qquad a^i \in \mathbb{R}.$$

Tällöin lineaarisuuden perusteella

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega\left(\sum_{i=2}^{k} a^i v_i, \ldots, v_k\right) = \sum_{i=2}^{k} a^i \omega(v_i, \ldots, v_k).$$

Nyt antisymmetrisyydestä seuraa, että summan jokaisella termillä pätee

$$a^i \omega(v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0,$$

ja näin ollen $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$. □

Edellisen proposition perusteella havaitaan, että n-ulotteisella vektoriavaruudella jokainen asteen $k > n$ multikovektori on nolla-arvoinen, sillä dimension määritelmän mukaan jokainen vektorijoukko $\{v_1, \ldots, v_k\}$ on tällöin lineaarisesti riippuva.

Multikovektorien $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ ja $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ *ulkotulo* määritellään kaavalla

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Esimerkiksi kahden kovektorin $\omega, \eta \in V^*$ ulkotulo on

$$\omega \wedge \eta(u, v) = \omega(u)\eta(v) - \omega(v)\eta(u),$$

ja koska $\omega \otimes \eta(v, u) = \eta \otimes \omega(u, v)$, saadaan

$$\omega \wedge \eta = \omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega.$$

Skalaarin eli 0-kovektorin $a \in \mathbb{R}$ tapauksella määritellään $a \wedge \omega = a\omega$.

Eri asteisten multikovektorien avaruuksien suorana summana saadaan *ulkoalgebra*

$$\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(V^*).$$

Seuraava propositio käsittelee ulkotulon algebrallisia ominaisuuksia. Väitteiden todistukset ovat luonteeltaan teknisiä ja koostuvat pääosin permutaatioiden manipuloinnista, joten ne sivuutetaan.

PROPOSITIO 4.2. *Ulkoalgeralla $\Lambda(V^*)$ on seuraavat ominaisuudet:*

1 *Ulkotulolla varustettuna $\Lambda(V^*)$ on assosiatiivinen algebra. Erityisesti*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \mu = \omega \wedge (\eta \wedge \mu)$$

jokaisella $\omega, \eta, \mu \in \Lambda(V^*)$.

2 *Ulkotulo on antikommutatiivinen, eli se noudattaa laskusääntöä*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega,$$

kun $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ ja $\eta \in \Lambda^l(V^*)$.

3 *Olkoon $\omega^i \in \Lambda^{k_i}(V)$, missä $i \in \{1, \ldots, p\}$. Tällöin*

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p = \frac{1}{k_1! \cdots k_p!} \operatorname{Alt}\left(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^p\right).$$

Todistus. Katso (Tu 2011, s. 27–30).

Proposition 4.2 perusteella kovektorien $\omega^i \in V^*$ tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}
&\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p \left(v_1, \ldots, v_p\right) \\
&= \operatorname{Alt}\left(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^p\right)\left(v_1, \ldots, v_p\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^p \left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega^1\left(v_{\sigma(1)}\right) \cdots \omega^p\left(v_{\sigma(p)}\right) = \det(K),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

missä

$$K = \begin{pmatrix} \omega^1(v_1) & \omega^1(v_2) & \cdots & \omega^1\left(v_p\right) \\ \omega^2(v_1) & \omega^2(v_2) & \cdots & \omega^2\left(v_p\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^p(v_1) & \omega^p(v_2) & \cdots & \omega^p\left(v_p\right) \end{pmatrix}.$$

Lähteessä (Tu 2011, s. 31) on osoitettu, että jos $\{e_i\}$ on avaruuden V kanta ja $\{\epsilon^j\}$ sen duaalikanta, niin k-kovektorit

$$\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq k$$

muodostavat vektoriavaruuden $\Lambda^k(V^*)$ kannan. Multikovektorin ω komponentit tässä kannassa saadaan kaavalla

$$\omega_{i_1 \cdots i_k} = \omega\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right).$$

Aidosti kasvava multi-indeksi $(i_1, \ldots, i_k)$ voidaan valita indeksijoukosta $\{1, \ldots, n\}$ kaikkiaan $\binom{n}{k}$ tavalla. Tämän perusteella nähdään, että

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

missä $n = \dim V$. Erityisesti saadaan

$$\dim \Lambda^{n-1}(V^*) = \dim V^* \quad \text{ja} \quad \dim \Lambda^n(V^*) = 1.$$

PROPOSITIO 4.3. *Olkoon* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *avaruuden* V *kanta ja* $\omega \in \Lambda^n(V^*)$. *Tällöin* $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 0$, *jos ja vain jos* $\omega = 0$.

Todistus. Korkeimman asteen multikovektorien avaruus on yksiulotteinen, joten n-kovektorilla ω on yksikäsitteinen koordinaattiesitys $\omega = a\,\epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^n$, missä $a = \omega(e_1, \ldots, e_n)$. Näin ollen $a = 0$, jos ja vain jos $\omega = 0$. □

4.2 *Determinantti ja orientaatio*

Multikovektorin $\omega \in \Lambda^k(V)$ *pullback* lineaarikuvauksella $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$ on multikovektori $A^*\omega \in \Lambda^k(U)$, jonka arvo vektoreilla $u_i \in U$ on

$$A^*\omega(u_1, \ldots, u_k) = \omega(Au_1, \ldots, Au_k)\,.$$

Pullbackin määritelmästä saadaan selvästi lineaarikuvaus $A^*\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(U)$. Jos $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$ ja $B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, niin pullback-kuvaukselle

$$(BA)^* : \Lambda^k(W) \to \Lambda^k(U)$$

saadaan kaava $(BA)^* = A^*B^*$. Tapauksessa $k = 1$ kuvausta $A^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$ sanotaan *duaalikuvaukseksi*.

Koska $\dim \Lambda^n(V) = 1$, jokaisella V:n endomorfismilla eli lineaarikuvauksella $A\colon V \to V$ on olemassa yksikäsitteinen *determinantti* $\det(A) \in \mathbb{R}$, jolla pätee

$$A^*\omega = \det(A)\,\omega$$

jokaisella $\omega \in \Lambda^n(V)$. Identiteetistä $(BA)^* = A^*B^*$ seuraa, että

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Lisäksi on selvää, että $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.

PROPOSITIO 4.4. *Endomorfismi* $A \in \mathrm{End}(V)$ *on isomorfismi, jos ja vain jos* $\det(A) \neq 0$.

Todistus. Todistetaan väite $p \Leftrightarrow q$ osoittamalla, että $p \Rightarrow q$ ja että $\neg p \Rightarrow \neg q$. Oletetaan, että A on isomorfismi. Tällöin

$$1 = \det(\mathrm{id}_V) = \det\left(A^{-1}A\right) = \det\left(A^{-1}\right)\det(A)\,,$$

ja näin ollen $\det(A) \neq 0$.

Valitaan $\omega \neq 0$ ja oletetaan, että A ei ole isomorfismi. Tällöin kanta $\{e_i\}$ kuvautuu lineaarisesti riippuvaksi joukoksi $\{Ae_i\}$. Proposition 4.1 perusteella

$$A^*\omega(e_1, \ldots, e_n) = \omega(Ae_1, \ldots, Ae_n) = 0.$$

Proposition 4.3 perusteella taas $\omega(e_1,\ldots,e_n) \neq 0$, joten yhtälöstä

$$0 = A^*\omega(e_1,\ldots,e_n) = \det(A)\,\omega(e_1,\ldots,e_n)$$

nähdään, että $\det(A) = 0$. □

Kun kuvauksen A komponentteja merkitään $A^i_j = \epsilon^i\left(A\left(e_j\right)\right)$, saadaan

$$\begin{aligned}\det(A)\,\omega(e_1,\ldots,e_n) &= \omega(Ae_1,\ldots,Ae_n)\\ &= \omega\left(\sum A^{i_1}_1 e_{i_1},\ldots,\sum A^{i_n}_n e_{i_n}\right)\\ &= \sum A^{i_1}_1\cdots A^{i_n}_n\,\omega\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}\right).\end{aligned}$$

Antisymmetrisyyttä käyttäen determinantille saadaan kaava

$$\det(A) = \sum \operatorname{sgn}(\sigma)\,A^{\sigma(1)}_1\cdots A^{\sigma(n)}_n.$$

Näin ollen kuvauksen $A \in \mathrm{End}(V)$ determinantti on sama kuin sen matriisiesityksen $\left(A^i_j\right)$ determinantti.

Vektoriavaruudelle voidaan asettaa *orientaatio* valitsemalla avaruudelle järjestetty kanta $(e_1,\ldots,e_n)$. Olkoon $A \in \mathrm{End}(V)$ isomorfismi, joka kuvaa järjestetyn kannan $(e_1,\ldots,e_n)$ järjestetyksi kannaksi

$$(f_1,\ldots,f_n) = (Ae_1,\ldots,Ae_n).$$

Kannat (e_i) ja $\left(f_j\right)$ kuuluvat samaan orientaation, jos $\det(A) > 0$. Determinantin avulla vektoriavaruuden endomorfismit voidaan siis jakaa kolmeen luokkaan. Määritellään, että kuvaus $A \in \mathrm{End}(V)$ on

- *orientaation säilyttävä*, jos $\det(A) > 0$,
- *orientaation vaihtava*, jos $\det(A) < 0$, ja
- *singulaarinen*, jos $\det(A) = 0$.

Samaan orientaatioon kuuluminen on ekvivalenssirelaatio järjestettyjen kantojen joukossa, ja itse orientaatio vastaa ekvivalenssiluokan valintaa kahdesta vaihtoehdosta. Orientaatio voidaan esittää valitsemalla n-kovektori $\mu \neq 0$. Tällöin $(e_1,\ldots,e_n)$ on valitun orientaation mukainen järjestetty kanta, jos

$$\mu(e_1,\ldots,e_n) > 0.$$

Determinantin määritelmän perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\mu(f_1,\ldots,f_n) &= \mu(Ae_1,\ldots,Ae_n)\\ &= A^*\mu(e_1,\ldots,e_n) = \det(A)\,\mu(e_1,\ldots,e_n),\end{aligned}$$

joten n-kovektoriesitys on yhteensopiva orientaation määritelmän kanssa.

4.3 *Differentiaalimuodot*

Differentiaalimuodot ovat objekteja, joilla fysikaaliset suureet kuten voimakenttä tai virtauksen vuon tiheys voidaan mallintaa koordinaatistosta riippumattomalla tavalla. Matemaattisesti differentiaalimuodot esitetään kuvauksina, jotka määräävät moniston jokaiselle pisteelle multikovektorin, joka operoi tangenttivektoreihin.

Määritellään *k-ulkokimppu*

$$\Lambda^k\left(\mathrm{T}^*M\right) = \bigcup_{p\in M} \Lambda^k\left(\mathrm{T}^*_pM\right), \quad k \geq 1,$$

missä $\mathrm{T}^*_pM = \mathrm{Hom}\left(\mathrm{T}_pM, \mathbb{R}\right)$ on *kotangenttiavaruus*. Erityistapauksena $k = 1$ saadaan *kotangenttikimppu*

$$\mathrm{T}^*M = \bigcup_{p\in M} \mathrm{T}^*_pM.$$

Lisäksi määritellään, että $\Lambda^0\left(\mathrm{T}^*M\right)$ on *viivakimppu* $M \times \mathbb{R}$.

Sileän funktion $f \in \mathfrak{F}\left(M\right)$ *differentiaali pisteessä* $p \in M$ on kotangenttivektori $\mathrm{d}f_p \in \mathrm{T}^*_pM$, joka määritellään kaavalla

$$\mathrm{d}f_p\left(v_p\right) = v_p\left(f\right), \quad \text{missä } v_p \in \mathrm{T}_pM.$$

Derivaatan $\mathrm{T}_pf \in \mathrm{Hom}\left(\mathrm{T}_pM, \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}\right)$ ja differentiaalin $\mathrm{d}f_p \in \mathrm{Hom}\left(\mathrm{T}_pM, \mathbb{R}\right)$ välille saadaan yhteys

$$\mathrm{T}_pf\left(v_p\right) = v_p\left(f\right) \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(p)} = \mathrm{d}f_p\left(v_p\right) \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(p)}.$$

Jos $\left(U, x\right)$ on kartta pisteen $p \in M$ ympäristössä, niin

$$\mathrm{d}x^i_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\left(p\right) = \delta^i_j,$$

eli differentiaalit $\mathrm{d}x^i_p \in \mathrm{T}^*_pM$ muodostavat duaalikannan tangenttiavaruuden koordinaattikannalle. Näin ollen k-kovektorit

$$\mathrm{d}x^{i_1}_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}_p, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$$

muodostavat avaruuden $\Lambda^k\left(\mathrm{T}^*_pM\right)$ kannan. Kartta $\left(U, x\right)$ indusoi siis sekä kartan että topologian ulkokimpulle $\Lambda^k\left(\mathrm{T}^*U\right)$. Tangenttikimpun tapauksen kaltaisella konstruktiolla myös ulkokimpusta $\Lambda^k\left(\mathrm{T}^*M\right)$ saadaan sileä monisto.

Jos $\phi\colon M \to N$ on diffeomorfismi, saadaan yksittäisten derivaattojen $\mathrm{T}_p\phi$ pullback-kuvauksista koottua *kotangenttikuvaus* $\mathrm{T}^*\phi\colon \mathrm{T}^*N \to \mathrm{T}^*M$ kaavalla

$$\mathrm{T}^*\phi\left(\omega_q\right) = \left(\mathrm{T}_{\phi^{-1}(q)}\phi\right)^*\left(\omega_q\right), \quad \text{missä } \omega_q \in \mathrm{T}^*_qN.$$

Kun merkitään $p = \phi^{-1}(q)$, kuvaukset $\mathrm{T}\phi$ ja $\mathrm{T}^*\phi$ toteuttavat yhtälön

$$\mathrm{T}^*\phi\left(\omega_q\right)\left(v_p\right) = \omega_q\left(\mathrm{T}\phi\left(v_p\right)\right) \tag{4.2}$$

jokaisella $\omega_q \in \mathrm{T}_q^*N$ ja $v_p \in \mathrm{T}_pM$. Kotangenttikuvaus on määritelty siten, että kuvan 4.1 kaavio kommutoi.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^*M \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathrm{T}^*N \arrow[l, "\mathrm{T}^*\phi"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ M & N \arrow[l, "\phi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Kuva 4.1. *Kotangenttikuvaus.*

Merkitään taas $p = \phi^{-1}(q)$. Kotangenttikuvaukselle saadaan monistojen M ja N kartoilla (U, x) ja (V, y) koordinaattiesitys

$$\mathrm{T}^*\phi\left(\omega_q\right) = \sum \frac{\partial\phi^j}{\partial x^i}(p)\,\omega_j \mathrm{d}x_p^i, \quad \text{missä } \omega_j = \omega_q\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q\right).$$

Tämän perusteella havaitaan, että $\mathrm{T}^*\phi$ on sileä kuvaus. Lisäksi pullback-kuvausten ominaisuuksien perusteella saadaan kontravariantti ketjusääntö

$$\mathrm{T}^*(\phi \circ \psi) = \mathrm{T}^*\psi \circ \mathrm{T}^*\phi,$$

josta nähdään, että $\left(\mathrm{T}^*\phi\right)^{-1} = \mathrm{T}^*(\phi^{-1})$. Näin ollen kotangenttikuvaus on siis diffeomorfismi.

MÄÄRITELMÄ 4.5. *Asteen $k \geq 1$ differentiaalimuoto, eli k-muoto, on kuvaus $\omega\colon M \to \Lambda^k(\mathrm{T}^*M)$, jolla $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Asteen $k = 0$ differentiaalimuoto on funktio $f\colon M \to \mathbb{R}$.*

Differentiaalimuoto on siis kuvaus $\omega\colon M \to \Lambda^k(\mathrm{T}^*M)$, joka määrää jokaiselle pisteelle $p \in M$ antisymmetrisen k-tensorin $\omega_p \in \Lambda^k\left(\mathrm{T}_p^*M\right)$. Differentiaalimuotojen yhteenlasku sekä skalaareilla ja funktioilla kertominen määritellään tuttuun tapaan pisteittäin. Esimerkiksi funktiolla $f \in \mathfrak{F}(M)$ kertominen määritellään $(f\omega)_p = f(p)\,\omega_p$.

Multikovektorit operoivat vektoreihin tuottaen skalaarin, ja vastaavasti differentiaalimuoto ω operoi vektorikenttiin $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{X}(M)$ tuottaen funktion

$$\omega(v_1, \ldots, v_k)\colon M \to \mathbb{R},$$

joka määritellään säännöllä

$$\omega(v_1, \dots, v_k)(p) = \omega_p\left((v_1)_p, \dots, (v_k)_p\right).$$

Multikovektorien multilineaarisuudesta seuraa, että differentiaalimuodot ovat $\mathfrak{F}(M)$-lineaarisia jokaisen argumentin suhteen, eli

$$\omega(\dots, fu + gv, \dots) = f\omega(\dots, u, \dots) + g\omega(\dots, v, \dots),$$

kun $f, g \in \mathfrak{F}(M)$. Multikovektorien algebralliset operaatiot, kuten ulkotulo, laajennetaan differentiaalimuodoille pisteittäin. Esimerkiksi differentiaalimuotojen ω ja ψ ulkotulo määräytyy siis säännöllä

$$(\omega \wedge \psi)_p = \omega_p \wedge \psi_p.$$

Sileän funktion differentiaali $\mathrm{d}f$ on 1-muoto, joka määritellään

$$\begin{aligned} M &\to \mathrm{T}^*M \\ p &\mapsto \mathrm{d}f_p. \end{aligned}$$

Otetaan käyttöön multi-indeksinotaatio, jossa $I = (i_1, \dots, i_k)$ ja

$$\omega_I \mathrm{d}f^I = \omega_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}f^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^{i_k}.$$

Määritellään lisäksi aidosti kasvavien multi-indeksien joukko

$$\mathcal{J}_k^n = \left\{(i_1, \dots, i_k) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\right\}.$$

Kartan (U, x) alueella jokainen k-muoto voidaan kirjoittaa muodossa

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{J}_k^n} \omega_I \mathrm{d}x^I,$$

missä komponenttifunktiot ω_I saadaan kaavalla

$$\omega_{i_1 \cdots i_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right).$$

Funktion differentiaalin komponenttifunktiot ovat

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Näin saadaan klassisen analyysin kokonaisdifferentiaalia muistuttava tulos

$$\mathrm{d}f = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i.$$

Differentiaalimuotojen sileydelle saadaan seuraavat kriteerit:

PROPOSITIO 4.6. *Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalentteja:*

1 *Differentiaalimuoto* $\omega \colon M \to \Lambda^k(\mathrm{T}^*M)$ *on sileä kuvaus.*

2 *Funktio* $\omega(v_1, \dots, v_k) : M \to \mathbb{R}$ *on sileä jokaisella* $v_i \in \mathfrak{X}(M)$.

3 *On olemassa atlas, jonka jokaisella kartalla* (U, x) *differentiaalimuodon*

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{J}_k^n} \omega_I \mathrm{d}x^I.$$

komponenttifunktiot $\omega_I : M \to \mathbb{R}$ *ovat sileitä.*

Todistus. Katso (Tu 2011, s. 194–195).

Sileiden k-muotojen vektoriavaruutta merkitään $\Omega^k(M)$. Erityistapauksessa $k = 0$ määritellään $\Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$. Koska differentiaalimuodon kertominen funktiolla säilyttää sileyden, joukko $\Omega^k(M)$ on myös $\mathfrak{F}(M)$-moduli. Vektoriavaruuksien $\Omega^k(M)$ suorana summana saadaan differentiaalimuotojen ulkoalgebra

$$\Omega(M) = \Omega^0(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(M),$$

jolla on ulkotulolla varustettuna assosiatiivisen algebran rakenne.

4.4 *Ulkoderivaatta ja Lien derivaatta*

Differentiaalimuodoilla on luonnollinen differentiaalioperaattori, ulkoderivaatta, joka on vektorianalyysin gradientin, roottorin ja divergenssin yleistys. Lisäksi differentiaalimuotoja voidaan derivoida vektorikentän virtauksen suhteen. Tämä operaatio tunnetaan Lien derivaattana.

Kuvaus $A : \Omega(M) \to \Omega(M)$ on *antiderivaatio*, jos se on $\mathbb{R}$-lineaarinen ja

$$A(\omega \wedge \eta) = A(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge A(\eta)$$

jokaisella $\omega \in \Omega^k(M)$ ja $\eta \in \Omega^l(M)$. Antiderivaatio A on *astetta* p, jos se kuvaa k-muodot $k + p$ -muodoiksi.

PROPOSITIO 4.7. *Jokaisella sileällä monistolla* M *on olemassa yksikäsitteinen kuvaus* $\mathrm{d} : \Omega(M) \to \Omega(M)$, *jolla on seuraavat ominaisuudet:*

1 d *on asteen* $+1$ *antiderivaatio.*

2 $\mathrm{d}^2 = 0$, *eli* $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$ *jokaisella* $\omega \in \Omega^k(M)$.

3 *Jos* $f \in \Omega^0(M)$, *niin* $\mathrm{d}f(v) = v(f)$ *jokaisella* $v \in \mathfrak{X}(M)$.

Todistus. Katso (Tu 2011, s. 212–214).

Edellisessä propositiossa esiteltyä kuvausta $\mathrm{d} : \Omega(M) \to \Omega(M)$ kutsutaan *ulkoderivaataksi*. Ominaisuuksien 1–3 perusteella k-muodon $\omega = \sum \omega_I \mathrm{d}x^I$ ulkoderivaatalle saadaan koordinaattiesitys

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{I \in \mathcal{J}_k^n} \left(\mathrm{d}\omega_I \wedge \mathrm{d}x^I + \omega_I \mathrm{d}\big(\mathrm{d}x^I\big)\right) = \sum_{I \in \mathcal{J}_k^n} \sum_j \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^I.$$

Esimerkiksi 3-ulotteisella monistolla määritellyn 2-muodon

$$\omega = f \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

ulkoderivaatta on

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

Differentiaalimuoto $\omega \in \Omega^k(M)$ on *suljettu*, jos $\mathrm{d}\omega = 0$, ja *eksakti*, jos on olemassa $\xi \in \Omega^{k-1}(M)$, jolla $\omega = \mathrm{d}\xi$. Eksaktit muodot muodostavat siis ulkoderivaatan kuva-avaruuden, suljetut muodot taas nolla-avaruuden. Ulkoderivaatan ominaisuudesta $\mathrm{d}^2 = 0$ seuraa, että jokainen eksakti muoto on suljettu. Sen sijaan suljetut muodot eivät välttämättä ole eksakteja.

Algebrallisessa topologiassa suljettujen ja eksaktien muotojen aliavaruuksien kokoeroa mitataan *de Rhamin kohomologiaryhmillä*. Olkoon d_k asteen k differentiaalimuodoille rajoitettu ulkoderivointioperaattori, jolloin

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_{k-1}) \subset \ker(\mathrm{d}_k).$$

De Rhamin kohomologiaryhmät määritellään tekijävektoriavaruuksiksi

$$\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^k(M) = \frac{\ker(\mathrm{d}_k)}{\mathrm{im}(\mathrm{d}_{k-1})}.$$

Erityisesti tilannetta, jossa $\ker(\mathrm{d}_k) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_{k-1})$, merkitään $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^k(M) = \{0\}$. Vektoriavaruudet $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^k(M)$ sisältävät informaatiota moniston topologiasta. Aihetta on käsitelty syvällisemmin muun muassa lähteessä (Tu 2011, s. 273–316).

Differentiaalimuodon $\omega \in \Omega^k(M)$ *kontraktio* vektorikentällä $u \in \mathfrak{X}(M)$ on kuvaus $\iota_u \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, joka määritellään säännöllä

$$\iota_u \omega(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(u, v_1, \ldots, v_{k-1}) \quad \text{jokaisella } v_i \in \mathfrak{X}(M).$$

Erityistapauksena määritellään, että $\iota_u f = 0$ jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$.

PROPOSITIO 4.8. *Kontraktio on asteen -1 antiderivaatio.*

Todistus. Katso (Tu 2011, s. 227–228).

Olkoon $\phi \colon M \to N$ sileä kuvaus. Differentiaalimuodon $\omega \in \Omega^k(N)$ *pullback*

$\phi^*\omega$ määritellään pisteittäin kaavalla

$$(\phi^*\omega)_p = \left(\mathrm{T}_p\phi\right)^* \left(\omega_{\phi(p)}\right). \tag{4.3}$$

Funktion $f \in \mathfrak{F}(N)$ pullback määritellään kaavalla $\phi^* f = f \circ \phi$.

PROPOSITIO 4.9. *Olkoon $\phi\colon M \to N$ sileä kuvaus. Kaava* (4.3) *määrää $\mathbb{R}$-lineaarikuvauksen $\phi^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, joka on distributiivinen ulkotulon suhteen ja kommutoi ulkoderivaatan kanssa. Toisin sanoen, kuvaus ϕ^* toteuttaa laskusäännöt*

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta) \quad \textit{ja} \quad \phi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\phi^*\omega)$$

jokaisella $\omega, \eta \in \Omega(N)$.

Todistus (Tu 2011, s. 196, 214–216). Kuvaus ϕ^* on selvästi lineaarinen, mutta k-muodon $\phi^*\omega$ sileyden osoittamiseksi tarvitaan proposition muita väitteitä.

Olkoon $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Avaruuden V tensorille f saadaan

$$\begin{aligned}
A^*(\mathrm{Alt}(f))(v_1, \ldots, v_k) &= A^*\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\sigma(f)\right)(v_1, \ldots, v_k) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, f\left(A\left(v_{\sigma(1)}\right), \ldots, A\left(v_{\sigma(k)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, A^* f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) \\
&= \mathrm{Alt}(A^* f)(v_1, \ldots, v_k),
\end{aligned}$$

ja näin ollen $A^*(\mathrm{Alt}(f)) = \mathrm{Alt}(A^* f)$. Vastaavasti nähdään, että

$$A^*(f \otimes g) = (A^* f) \otimes (A^* g).$$

Koska ulkotulo on määritelty tensoritulon antisymmetrisaationa, pullback-kuvaus $\left(\mathrm{T}_p\phi\right)^*$ on distributiivinen myös ulkotulon suhteen jokaisella $p \in M$. Näin ollen myös ϕ^* on distributiivinen ulkotulon suhteen.

Tarkastellaan sitten kommutointia ulkoderivaatan kanssa. Mielivaltaisen funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ ja tangenttivektorin v_p tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}
(\phi^*(\mathrm{d}f))_p\left(v_p\right) &= \mathrm{d}f_{\phi(p)}\left(\mathrm{T}_p\phi\left(v_p\right)\right) \\
&= \mathrm{T}_p\phi\left(v_p\right)(f) \\
&= \left(v_p\right)(f \circ \phi) \\
&= \left(v_p\right)(\phi^* f) \\
&= \mathrm{d}(\phi^* f)_p\left(v_p\right).
\end{aligned}$$

Näin ollen $\phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\phi^* f)$ jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$. Nyt kartan (U, x) alueella saadaan

$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= \phi^*\Big(\sum_{I\in\mathcal{J}_k^n} \omega_I \mathrm{d}x^I\Big)\\ &= \sum_{I\in\mathcal{J}_k^n} (\phi^*\omega_I)\,\phi^*\left(\mathrm{d}x^I\right)\\ &= \sum_{I\in\mathcal{J}_k^n} (\phi^*\omega_I)\,\mathrm{d}\phi^I,\end{aligned}$$

missä $\phi^i = \phi^* x^i$ ja $\mathrm{d}\phi^I = \mathrm{d}\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\phi^{i_k}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\phi^*\omega) &= \sum_{I\in\mathcal{J}_k^n} \mathrm{d}\big((\phi^*\omega_I)\,\mathrm{d}\phi^I\big)\\ &= \sum_{I\in\mathcal{J}_k^n} \mathrm{d}(\phi^*\omega_I) \wedge \mathrm{d}\phi^I\\ &= \sum_{I\in\mathcal{J}_k^n} \phi^*(\mathrm{d}\omega_I) \wedge \phi^*\left(\mathrm{d}x^I\right) = \phi^*(\mathrm{d}\omega).\end{aligned}$$

Lopulta differentiaalimuodon $\phi^*\omega$ sileys osoitetaan laskemalla sen koordinaattiesitys. Olkoon (V, y) moniston N kartta, jolla $\omega = \sum \omega_I \mathrm{d}y^I$, ja olkoon (U, x) alkukuvan $\phi^{-1}(V)$ kattava kartta monistolla M. Tällöin edellä todistettuja ominaisuuksia ja kaavaa (4.1) käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= \sum_{I\in\mathcal{J}_k^n} (\phi^*\omega_I)\,\phi^*\left(\mathrm{d}y^I\right)\\ &= \sum_{I\in\mathcal{J}_k^n} (\phi^*\omega_I)\,\mathrm{d}\phi^I\\ &= \sum_{I,J\in\mathcal{J}_k^n} (\omega_I \circ \phi)\det\left(\frac{\partial\phi^I}{\partial x^J}\right)\mathrm{d}x^J,\end{aligned}$$

missä $\phi^i = \phi^* y^i$ ja

$$\left(\frac{\partial\phi^I}{\partial x^J}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi^{i_1}}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \dfrac{\partial\phi^{i_1}}{\partial x^{j_k}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial\phi^{i_k}}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \dfrac{\partial\phi^{i_k}}{\partial x^{j_k}} \end{pmatrix}.$$

Funktio $\det\left(\partial\phi^I/\partial x^J\right)$ on osittaisderivaatoista koostuva polynomifunktio ja näin ollen sileä. Koordinaattiesityksen perusteella $\phi^*\omega$ on sileä mielivaltaisesti valitun joukon alkukuvassa $\phi^{-1}(V)$, joten se on sileä koko monistolla M. □

Olkoon $v \in \mathfrak{X}(M)$ vektorikenttä, jolla on lokaali virtaus ϕ. Differentiaalimuodon $\omega \in \Omega^k(M)$ *Lien derivaatta* suuntaan v pisteessä $p \in M$ on

$$\left(\mathcal{L}_v \omega\right)_p = \lim_{t \to 0} \frac{\left(\phi^{t*}\omega\right)_p - \omega_p}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\phi^{t*}\omega\right)_p .$$

Pullbackin koordinaattiesitystä käyttäen Lien derivaatalle saadaan kaava

$$\left(\mathcal{L}_v \omega\right)_p = \sum_{I \in \mathcal{J}_k^n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(0,p)} \omega_I^t \right) \mathrm{d}x_p^I,$$

missä sileät funktiot $(t, p) \mapsto \omega_I^t(p)$ määräytyvät kaavalla

$$\omega_I^t = \sum_{J \in \mathcal{J}_k^n} \left(\omega_J \circ \phi^t\right) \det\left(\frac{\partial (\phi^t)^J}{\partial x^I} \right).$$

Funktioiden eli 0-muotojen tapauksessa määritelmä on yhteensopiva aiemmin määritellyn operaattorin $\mathcal{L}_v$ kanssa, sillä jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$ saadaan

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_v f\right)_p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\phi^{t*} f\right)(p) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f \circ \phi_p = v_p(f) .
\end{aligned}$$

Esitetään seuraavaksi muutamia Lien derivaattaan ja ulkoderivaattaan liittyviä tuloksia.

LEMMA 4.10. *Olkoon ω^t differentiaalimuoto, jolla on koordinaattiesitys*

$$\omega^t = \sum_{I \in \mathcal{J}_k^n} \omega_I^t \mathrm{d}x^I,$$

missä komponenttifunktiot riippuvat sileästi parametristä t. Derivointi parametrin suhteen kommutoi ulkoderivoinnin kanssa, eli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}\omega^t\right) = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \omega^t \right).$$

Todistus. Katso (Tu 2011, s. 222–223).

Olkoon ω^t ja η^t kuten edellisessä lemmassa. Koordinaattiesityksen perusteella on helppo nähdä, että derivointi parametrin t suhteen toteuttaa myös Leibnizin säännön

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega^t \wedge \eta^t\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega^t\right) \wedge \eta^t + \omega^t \wedge \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta^t\right).$$

PROPOSITIO 4.11. *Lien derivaatta on derivaatio, eli se toteuttaa säännön*

$$\mathcal{L}_v(\omega \wedge \eta) = \left(\mathcal{L}_v \omega\right) \wedge \eta + \omega \wedge \left(\mathcal{L}_v \eta\right).$$

Lisäksi Lien derivaatta kommutoi ulkoderivaatan kanssa, eli

$$\mathrm{d}(\mathcal{L}_v \omega) = \mathcal{L}_v (\mathrm{d}\omega).$$

Todistus (Tu 2011, s. 229–230). Jokaisella $p \in M$ saadaan

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_v (\omega \wedge \eta))_p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\phi^{t*} (\omega \wedge \eta)\right)_p \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\phi^{t*} \omega\right)_p \wedge \left(\phi^{t*} \eta\right)_p \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\phi^{t*} \omega\right)_p\right) \wedge \eta_p + \omega_p \wedge \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\phi^{t*} \eta\right)_p\right) \\
&= (\mathcal{L}_v \omega)_p \wedge \eta_p + \omega_p \wedge (\mathcal{L}_v \eta)_p .
\end{aligned}$$

Lemman 4.10 perusteella nähdään, että

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_v (\mathrm{d}\omega))_p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \left(\phi^{t*} (\mathrm{d}\omega)\right)_p \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}\left(\phi^{t*} \omega\right)_p \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \phi^{t*} \omega\right)_p = \mathrm{d}(\mathcal{L}_v \omega)_p. \qquad \square
\end{aligned}$$

Seuraavaksi näytetään, että Lien derivaatta voidaan ilmaista ulkoderivaatan ja kontraktion avulla. Tulos osoittautuu äärimmäisen hyödylliseksi hamiltonilaisten systeemien tarkastelussa.

PROPOSITIO 4.12. *Lien derivaatta voidaan laskea Cartanin kaavalla*

$$\mathcal{L}_v \omega = \iota_v(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(\iota_v \omega).$$

Todistus (Tu 2011, s. 230). Olkoon $\omega \in \Omega^k(M)$ ja $\eta \in \Omega^l(M)$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\iota_v \mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \iota_v \mathrm{d}\omega \wedge \eta + \omega \wedge \iota_v \mathrm{d}\eta \\
&\quad + (-1)^{k+1} \mathrm{d}\omega \wedge \iota_v \eta + (-1)^k \iota_v \omega \wedge \mathrm{d}\eta,
\end{aligned}$$

ja vastaavasti operaattorille $\mathrm{d}\iota_v$ saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\iota_v(\omega \wedge \eta) &= \mathrm{d}\iota_v \omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathrm{d}\iota_v \eta \\
&\quad + (-1)^{k-1} \iota_v \omega \wedge \mathrm{d}\eta + (-1)^k \mathrm{d}\omega \wedge \iota_v \eta.
\end{aligned}$$

Laskemalla edelliset yhteen saadaan

$$(\iota_v \mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_v)(\omega \wedge \eta) = ((\iota_v \mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_v)\,\omega) \wedge \eta + \omega \wedge ((\iota_v \mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_v)\,\eta).$$

Operaattori $D = \iota_v \mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_v$ on siis derivaatio. Lisäksi

$$D(\mathrm{d}\eta) = \iota_v(\mathrm{d}(\mathrm{d}\eta)) + \mathrm{d}(\iota_v(\mathrm{d}\eta)) = \mathrm{d}(\iota_v(\mathrm{d}\eta))$$

$$= \mathrm{d}(\iota_v(\mathrm{d}\eta)) + \mathrm{d}(\mathrm{d}(\iota_v\eta)) = \mathrm{d}(D(\eta)),$$

eli D kommutoi ulkoderivaatan kanssa. Jos operaattorille D pätee

$$\mathcal{L}_v\omega = D(\omega) \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}_v\eta = D(\eta),$$

niin sille pätee myös

$$\mathcal{L}_v(\omega \wedge \eta) = D(\omega \wedge \eta) \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}_v(\mathrm{d}\eta) = D(\mathrm{d}\eta).$$

Näin ollen Cartanin kaavan todistamiseksi riittää osoittaa, että $\mathcal{L}_v f = D(f)$ jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$. Haluttu tulos saadaan laskemalla

$$D(f) = \iota_v(\mathrm{d}f) + \mathrm{d}(\iota_v f) = \iota_v(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}f(v) = v(f) = \mathcal{L}_v f. \qquad \square$$

LEMMA 4.13. *Vektorikentän $v \in \mathfrak{X}(M)$ lokaali virtaus $\phi\colon D \to M$ toteuttaa jokaisella $(t_0, p) \in D$ yhtälön*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \left(\phi^{t*}\omega\right)_p = \left(\phi^{t_0*}(\mathcal{L}_v\omega)\right)_p.$$

Todistus (Lee 2013, s. 324). Valitsemalla uusi parametrisointi $s = t - t_0$ jokaisessa pisteessä $p \in M$ pätee

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \left(\phi^{t*}\omega\right)_p &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \left(\mathrm{T}_p\phi^t\right)^* \left(\omega_{\phi^t(p)}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\mathrm{T}_p\phi^{s+t_0}\right)^* \left(\omega_{\phi^{s+t_0}(p)}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\mathrm{T}_{\phi^{t_0}(p)}\phi^s \circ \mathrm{T}_p\phi^{t_0}\right)^* \left(\omega_{\phi^s(\phi^{t_0}(p))}\right) \\
&= \left(\mathrm{T}_p\phi^{t_0}\right)^* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\mathrm{T}_{\phi^{t_0}(p)}\phi^s\right)^* \left(\omega_{\phi^s(\phi^{t_0}(p))}\right) \\
&= \left(\mathrm{T}_p\phi^{t_0}\right)^* (\mathcal{L}_v\omega)_{\phi^{t_0}(p)} = \left(\phi^{t_0*}(\mathcal{L}_v\omega)\right)_p. \qquad \square
\end{aligned}$$

Differentiaalimuoto $\omega \in \Omega^k(M)$ on *invariantti kuvauksen* $\phi \in \mathrm{Diff}(M)$ *suhteen*, jos $\phi^*\omega = \omega$. Seuraavaksi osoitetaan, että invarianssi virtauksen suhteen on sama asia kuin Lien derivaatan häviäminen virtauksen nopeuskentän suuntaan.

PROPOSITIO 4.14. *Olkoon $\phi\colon \mathbb{R} \times M \to M$ virtaus ja $v \in \mathfrak{X}(M)$ sen nopeuskenttä. Lien derivaatta $\mathcal{L}_v\omega$ häviää, jos ja vain jos $\phi^{t*}\omega = \omega$ jokaisella $t \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Jos $\mathcal{L}_v\omega = 0$, niin edellisen lemman mukaan

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \left(\phi^{t*}\omega\right)_p = 0,$$

eli $\phi^{t*}\omega$ ei riipu parametrista t. Näin ollen jokaisella $t \in \mathbb{R}$ pätee

$$\phi^{t*}\omega = \phi^{0*}\omega = \omega.$$

Käänteisesti jos $\phi^{t*}\omega = \omega$ jokaisella t, niin $\mathcal{L}_v\omega = 0$ suoraan Lien derivaatan määritelmän mukaan. □

4.5 *Integrointi ketjuilla*

Käsitellään seuraavaksi lyhyesti differentiaalimuotojen integrointia. Tavoitteena on määritellä k-muodon integraali parametrisoimalla integrointialue joukon

$$[0,1]^k = \left\{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq a_i \leq 1\right\}$$

avulla ja käyttämällä tavallista Riemannin integraalia.

Singulaarinen k-solu on sileä kuvaus $\sigma\colon [0,1]^k \to M$. Suljetulla joukolla S kuvauksen sileys määritellään vaatimalla, että on olemassa avoin joukko $U \supset S$ ja sileä kuvaus $\hat{\sigma}\colon U \to M$, jolla $\hat{\sigma}(p) = \sigma(p)$ jokaisella $p \in S$. Singulaarisista k-soluista muodostetut formaalit lineaarikombinaatiot

$$c = a^1\sigma_1 + a^2\sigma_n + \cdots + a^p\sigma_p, \quad a^i \in \mathbb{R}$$

ovat *singulaarisia k-ketjuja*.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^k$ avoin alimonisto. Jokainen k-muoto $\omega \in \Omega^k(U)$ voidaan esittää $\mathbb{R}^k$:n koordinaattifunktioista muodostetun k-muodon $\mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^k$ ja sileän funktion $f \in \mathfrak{F}(U)$ avulla muodossa

$$\omega = f\,\mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^k.$$

Määritellään, että k-muodon ω integraali joukon $A \subset U$ yli on

$$\int_A \omega = \int_A f\,\mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^k, \tag{4.4}$$

missä oikea puoli merkitsee funktion f Riemannin integraalia joukon A yli. Olkoon nyt $\omega \in \Omega^k(M)$ ja $\sigma\colon [0,1]^k \to M$ singulaarinen k-solu. Tällöin ω:n pullback $\sigma^*\omega$ on $[0,1]^k$:lla määritelty k-muoto. Integraali k-solun σ yli määritellään kaavalla

$$\int_\sigma \omega = \int_{[0,1]^k} \sigma^*\omega,$$

missä oikean puolen integraali lasketaan kaavalla (4.4). Tämä laajennetaan lineaarisesti k-ketjuille siten, että integraali ketjun $c = \sum a^i\sigma_i$ yli on

$$\int_c \omega = \sum a^i \int_{\sigma_i} \omega = \sum a^i \int_{[0,1]^k} \sigma_i^*\omega.$$

Osoitetaan, että differentiaalimuodon integraali ei riipu integrointialueen parametrisoinnin valinnasta, jos parametrisointien välillä on orientaation säilyttävä kuvaus. Koska integraali singulaarisen k-ketjun yli riippuu lineaarisesti integraaleista ketjun solujen yli, riittää, että tulos osoitetaan yhden singulaarisen k-solun tapauksessa.

PROPOSITIO 4.15. *Olkoon* $\phi\colon [0,1]^k \to [0,1]^k$ *sileä bijektio, jolla* $\det(\mathrm{T}_a\phi) > 0$ *jokaisella* $a \in [0,1]^k$. *Tällöin*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\sigma\circ\phi} \omega$$

jokaisella singulaarisella k*-solulla* $\sigma\colon [0,1]^k \to M$ *ja* k*-muodolla* $\omega \in \Omega^k(M)$.

Todistus (Spivak 2005, s. 247). Merkitään

$$\sigma^*\omega = f\,\mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^k,$$

ja määritellään funktio $\det(\mathrm{T}\phi) : [0,1]^k \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\det(\mathrm{T}\phi)(a) = \det(\mathrm{T}_a\phi) \quad \text{jokaisella } a \in [0,1]^k.$$

Lähteessä (Pugh 2002, s. 306) on osoitettu, että Riemannin integraalille pätee

$$\int_{\phi\left([0,1]^k\right)} f\,\mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^k = \int_{[0,1]^k} (f\circ\phi)\,|\det(\mathrm{T}\phi)|\,\mathrm{d}r^1\cdots\mathrm{d}r^k.$$

Koska $\det(\mathrm{T}\phi) = |\det(\mathrm{T}\phi)|$, tätä muuttujienvaihtokaavaa ja pullbackin koordinaattiesitystä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma\circ\phi}\omega &= \int_{[0,1]^k}(\sigma\circ\phi)^*\,\omega = \int_{[0,1]^k}\phi^*\,(\sigma^*\omega)\\
&= \int_{[0,1]^k}\phi^*\left(f\mathrm{d}r^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}r^k\right)\\
&= \int_{[0,1]^k}(f\circ\phi)\det(\mathrm{T}\phi)\,\mathrm{d}r^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}r^k\\
&= \int_{[0,1]^k}(f\circ\phi)\,|\det(\mathrm{T}\phi)|\,\mathrm{d}r^1\cdots\mathrm{d}r^k\\
&= \int_{\phi\left([0,1]^k\right)} f\,\mathrm{d}r^1\cdots\mathrm{d}r^k = \int_{[0,1]^k}\sigma^*\omega = \int_\sigma\omega.
\end{aligned}$$ □

Tilavuusmuoto n-ulotteisella monistolla M on kaikkialla nollasta eroava n-muoto $\mu \in \Omega^n(M)$. Singulaarisen n-solun $\sigma\colon [0,1]^n \to M$ *tilavuus* on

$$\mathrm{vol}(\sigma) = \int_\sigma \mu.$$

Tilavuusmuoto määrää jokaiselle tangenttiavaruudelle T_pM orientaation μ_p, joten μ:n valinta asettaa orientaation koko monistolle. Jos tilavuusmuoto on olemassa, monisto on *orientoituva*. Yhtenäisellä orientoituvalla monistolla on tasan kaksi mahdollista orientaatiota, μ ja $-\mu$.

5 Symplektinen geometria

5.1 *Symplektiset vektoriavaruudet*

Olkoon V äärellisulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Jokainen bilineaarimuoto $a \in V^* \otimes V^*$ määrää lineaarikuvauksen $a^\flat \colon V \to V^*$, kun vaaditaan, että

$$a^\flat(u)(v) = a(u,v) \quad \text{jokaisella } u, v \in V.$$

Komponenttimuodosta $a(u,v) = \sum a_{ij} u^i v^j$ nähdään, että kuvauksen $a^\flat$ komponenttiesitys on

$$\sum u^i e_i \mapsto \sum a_{ij} u^i \epsilon^j,$$

missä $\{e_i\}$ on avaruuden V kanta ja $\{\epsilon^j\}$ sitä vastaava duaalikanta. Bilineaarimuoto a on *ei-singulaarinen*, jos $a^\flat$ on isomorfismi. Tällöin käänteiskuvausta merkitään $a^\sharp = (a^\flat)^{-1}$.

PROPOSITIO 5.1. *Bilineaarimuoto $a \in V^* \otimes V^*$ on ei-singulaarinen, jos ja vain jos jokaisella $u \neq 0$ on olemassa $v \in V$, jolla $a(u,v) \neq 0$.*

Todistus. Oletetaan, että a on ei-singulaarinen ja $u \neq 0$, jolloin $a^\flat$ on isomorfismi ja $a^\flat(u) \neq 0$. Nyt nähdään, että on olemassa v, jolla

$$a(u,v) = a^\flat(u)(v) \neq 0,$$

sillä muutoin $a^\flat(u) = 0$.

Oletetaan sitten, että jokaisella $u \neq 0$ on $v \in V$, jolla $a(u,v) \neq 0$. Tällöin $a^\flat(u) = 0$ ainoastaan, jos $u = 0$, joten $\ker(a^\flat) = \{0\}$. Koska $\dim V = \dim V^*$, kuvaus $a^\flat$ on isomorfismi. □

MÄÄRITELMÄ 5.2. *Vektoriavaruuden V symplektinen tensori on ei-singulaarinen 2-kovektori $\omega \in \Lambda^2(V^*)$. Symplektisellä tensorilla varustettu vektoriavaruus on symplektinen vektoriavaruus.*

Symplektisillä vektoriavaruuksilla on joitain samoja ominaisuuksia kuin sisätuloavaruuksilla. Esimerkiksi ortogonaalikomplementin symplektiselle vastineelle saadaan seuraava tulos:

PROPOSITIO 5.3. *Olkoon* (V, ω) *symplektinen vektoriavaruus ja* $S \subset V$ *aliavaruus. Tällöin aliavaruudelle*

$$S^{\perp} = \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0 \text{ jokaisella } v \in S\}.$$

pätee kaava $\dim V = \dim S + \dim S^{\perp}$.

Todistus (Halmos 1987, s. 26). Aliavaruuden $S \subset V$ *annihilaattori* on V:n duaaliavaruuden aliavaruus $S^0 \subset V^*$, joka koostuu niistä kovektoreista η, jotka toteuttavat yhtälön $\eta(v) = 0$ jokaisella $v \in S$. Tarkastellaan kuvausta $\phi = \omega^\flat|_{S^\perp}$, jolle saadaan

$$\phi(u)(v) = \omega(u, v) = 0$$

jokaisella $u \in S^\perp$ ja $v \in S$. Näin ollen $\operatorname{im}(\phi) \subset S^0$. Toisaalta koska $\omega^\flat \colon V \to V^*$ on isomorfismi, jokaisella $\eta \in S^0$ on olemassa $u \in V$, jolla $\phi(u) = \eta$. Näin ollen $\phi^{-1}(\eta) \in S^\perp$ jokaisella $\eta \in S^0$, joten havaitaan, että $\phi \colon S^\perp \to S^0$ on isomorfismi.

Proposition todistamiseksi riittää osoittaa, että $\dim S^0 = \dim V - \dim S$. Olkoon $\{e_1, \ldots, e_n\}$ avaruuden V kanta, jonka m ensimmäistä vektoria $e_1, \ldots, e_m$ muodostavat aliavaruuden S kannan. Olkoon lisäksi $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\} \subset V^*$ edellisen duaalikanta. Nyt jokaisella $v \in S$ ja $i \in \{m+1, \ldots, n\}$ saadaan

$$\epsilon^i(v) = \sum_{j=1}^{m} v^j \epsilon^i\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} v^j \delta^i_j = 0.$$

Näin ollen $n - m$ -ulotteinen aliavaruus $W = \operatorname{span}(\{\epsilon^{m+1}, \ldots, \epsilon^n\})$ on annihilaattorin S^0 osajoukko. Olkoon nyt $\eta \in S^0$. Tällöin sillä on koordinaattiesitys $\eta = \sum \eta_i \epsilon^i$, missä $\eta_i = \eta(e_i)$. Toisaalta koska $e_1, \ldots, e_m \in S$, nähdään, että $\eta_i = 0$ jokaisella $i \leq m$. Näin ollen $\eta \in W$, joten $W = S^0$. Tästä nähdään, että

$$\dim S^\perp = \dim S^0 = n - m = \dim V - \dim S. \qquad \square$$

Olkoon $2n$-ulotteisella vektoriavaruudella V kanta $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ ja avaruudella V^* duaalikanta $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \beta^1, \ldots, \beta^n\}$. Määritellään 2-kovektori

$$\omega = \sum \alpha^i \wedge \beta^i. \tag{5.1}$$

Kantavektoreilla saadaan

$$\begin{aligned} \omega\left(a_i, b_j\right) &= \sum_k \det \begin{pmatrix} \alpha^k(a_i) & \alpha^k\left(b_j\right) \\ \beta^k(a_i) & \beta^k\left(b_j\right) \end{pmatrix} \\ &= \sum_k \det \begin{pmatrix} \delta^k_i & 0 \\ 0 & \delta^k_j \end{pmatrix} = \sum_k \delta^k_i \delta^k_j = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan $\omega\left(a_i, a_j\right) = \omega\left(b_i, b_j\right) = 0$. Olkoon $u = \sum u^i_a a_i + \sum u^j_b b_j$

vektori, jolla $\omega(u, v) = 0$ jokaisella $v \in V$. Tällöin erityisesti

$$\omega(u, b_i) = u_a^i = 0 \quad \text{ja} \quad \omega\left(u, a_j\right) = -u_b^j = 0,$$

ja näin ollen $u = 0$. Proposition 5.1 perusteella ω on symplektinen tensori.

Kantaa, jossa symplektisellä muodolla on kaavan (5.1) mukainen esitys, kutsutaan *Darboux'n kannaksi*. Multikovektorien algebrallisia ominaisuuksia käyttäen $2n$-kovektorille $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ saadaan Darboux'n kannassa esitys

$$\begin{aligned}\omega^n &= \sum_I \alpha^{i_1} \wedge \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_n} \wedge \beta^{i_n} \\ &= n!\left(\alpha^1 \wedge \beta^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n \wedge \beta^n\right).\end{aligned}$$

Tällöin vektoriavaruudella on siis kanoninen orientaatio, jonka määrää multikovektori $\omega^n \neq 0$.

PROPOSITIO 5.4. *Symplektisellä vektoriavaruudella on Darboux'n kanta.*

Todistus (Berndt 2001, s. 10–11). Olkoon (V, ω) symplektinen vektoriavaruus. Selvästi $\dim V \geq 2$. Koska symplektinen tensori on ei-singulaarinen, on olemassa vektorit $u, v \in V$, joilla $\omega(u, v) \neq 0$. Valitsemalla sopiva skaalauskerroin $c \in \mathbb{R}$, saadaan vektorit $a_1 = u$ ja $b_1 = cv$, joilla $\omega(a_1, b_1) = 1$.

Antisymmetrisyyttä käyttäen nähdään, että aliavaruuteen $E_1 = \operatorname{span}(\{a_1, b_1\})$ rajoitettuna tensorilla $\omega|_{E_1}$ on matriisiesitys

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Merkitään aliavaruuden E_1 symplektistä komplementtiä $V_2 = E_1^{\perp}$. Helposti nähdään, että $E_1 \cap V_2 = \{0\}$. Lisäksi jokainen $v \in V$ voidaan esittää muodossa $v = v_1 + v_2$, missä

$$v_1 = \omega(v, b_1)\, a_1 - \omega(v, a_1)\, b_1 \quad \text{ja} \quad v_2 = v - v_1.$$

Selvästi $v_1 \in E_1$, ja on helppo todeta, että $v_2 \in V_2$.

Koska ω on ei-singulaarinen ja näin ollen $\omega|_{V_2} \neq 0$, edellä esitettyä menetelmää voidaan soveltaa myös aliavaruuden V_2 tapauksessa. Näin saadaan vektorit $a_2, b_2 \in V_2$, joilla $\omega(a_2, b_2) = 1$. Induktiolla saadaan koko avaruuden V kanta $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$, jossa symplektisellä tensorilla on matriisiesitys

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

missä I on $n \times n$ -identiteettimatriisi. □

5.2 *Symplektiset monistot*

MÄÄRITELMÄ 5.5. *Symplektinen muoto monistolla M on ei-singulaarinen suljettu 2-muoto. Toisin sanoen, $\omega \in \Omega^2(M)$ on symplektinen muoto, jos ja vain jos* $\mathrm{d}\omega = 0$ *ja* $\omega_p \in \Lambda^2\left(\mathrm{T}_p^* M\right)$ *on ei-singulaarinen jokaisella $p \in M$. Symplektisellä muodolla varustettu monisto on symplektinen monisto.*

Symplektisen moniston (M, ω) jokainen tangenttiavaruus on siis symplektinen vektoriavaruus $\left(\mathrm{T}_p M, \omega_p\right)$. Tästä seuraa, että $\dim M = 2n$ jollain $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi

$$\omega_p^n \neq 0 \quad \text{jokaisella } p \in M,$$

jolloin $\omega^n \in \Omega^{2n}(M)$ on moniston M tilavuusmuoto. Näin ollen symplektisen moniston täytyy olla orientoituva.

Yksinkertaisin esimerkki symplektisestä monistosta on $\mathbb{R}^{2n}$, jonka kanoninen symplektinen muoto on

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}r^i \wedge \mathrm{d}s^i,$$

kun kartan $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$ jälkimmäiset koordinaattifunktiot s^i määritellään

$$s^i = r^{n+i}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Olkoot (M, ω_M) ja (N, ω_N) symplektisiä monistoja. Diffeomorfismi $\phi\colon M \to N$ on *symplektomorfismi*, jos

$$\phi^* \omega_N = \omega_M.$$

Tärkein yleisiä symplektisiä monistoja koskeva tulos on Darboux'n lause, jonka seurauksena nähdään, että kaikki samanulotteiset symplektiset monistot ovat lokaalisti symplektomorfisia keskenään.

LAUSE 5.6 (Darboux). *Olkoon (M, ω) symplektinen monisto ja* $\dim M = 2n$. *Tällöin jokaiselle pisteelle $p \in M$ voidaan löytää kartta*

$$\left(U, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n\right),$$

jolla $p \in U$ ja $\omega = \sum \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y^i$.

Todistus. Katso (Lee 2013, s. 571–574).

Darboux'n lauseen mukaisia koordinaatteja kutsutaan *Darboux'n koordinaateiksi*. Mekaanisten systeemien faasiavaruuksille saadaan kanoniset Darboux'n koordinaatit, joten tällöin itse Darboux'n lauseelle ei ole käyttöä.

Symplektinen muoto ω määrää joukon isomorfismeja $\omega_p^\flat\colon \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_p^* M$. Näistä kuvauksista voidaan koota *kimppuisomorfismi* $\omega^\flat\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$, joka kuvaa tangenttivektorit saman pisteen kotangenttivektoreiksi.

PROPOSITIO 5.7. *Kuvaus $\omega^\flat\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ on diffeomorfismi.*

Todistus. Kartalla (U, x) saadaan

$$\omega^\flat\left(\sum v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \sum \omega_{ij}(p)\, v^i \mathrm{d}x^j_p.$$

Koska funktiot $\omega_{ij} \in \mathfrak{F}(U)$ ovat sileitä, myös kuvaus $\omega^\flat$ on koordinaattimuodon perusteella sileä. Koska $\omega^\flat_p$ on isomorfismi jokaisella $p \in M$, myös kuvaus $\omega^\flat$ on bijektiivinen. Sen käänteiskuvaus $\omega^\sharp$ koostuu selvästi kuvauksista $\left(\omega^\flat_p\right)^{-1}$. Näin ollen $\omega^\sharp$ on yksittäisille kotangenttiavaruuksille rajoitettuna lineaarinen. On siis olemassa funktiot $\omega^{ij}\colon U \to \mathbb{R}$, joilla

$$\omega^\sharp\left(\sum \eta_i \mathrm{d}x^i_p\right) = \sum \omega^{ij}(p)\, \eta_i \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p.$$

Tällöin yhtälön $\omega^\sharp_p \circ \omega^\flat_p = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_pM}$ perusteella

$$\sum \omega^{ki}(p)\, \omega_{jk}(p) = \delta^i_j \quad \text{jokaisella } p \in U,$$

eli komponenteista $\omega^{ij}(p)$ muodostuva matriisi on symplektisen muodon matriisiesityksen käänteismatriisi. Koska matriisin kääntävä operaatio $A \mapsto A^{-1}$ on sileä kuvaus (Tu 2011, s. 66), myös funktiot ω^{ij} ovat sileitä. Nyt koordinaattimuodon perusteella nähdään, että $\omega^\sharp = \left(\omega^\flat\right)^{-1}$ on C^∞, eli näin ollen $\omega^\flat\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ on diffeomorfismi. □

5.3 *Hamiltonilaiset vektorikentät*

Olkoon (M, ω) symplektinen monisto. Tangentti- ja kotangenttikimppujen väliset diffeomorfismit $\omega^\flat$ ja $\omega^\sharp$ määräävät vastaavat vektorikenttien ja 1-muotojen väliset $\mathfrak{F}(M)$-lineaarikuvaukset kaavoilla

$$\omega^\flat(v) = \omega^\flat \circ v \quad \text{ja} \quad \omega^\sharp(\eta) = \omega^\sharp \circ \eta.$$

Näistä ensimmäinen voidaan kirjoittaa kontraktion avulla muodossa

$$\omega^\flat(v) = \iota_v \omega.$$

Sileän funktion differentiaali ja $\mathfrak{F}(M)$-lineaarikuvaus $\omega^\sharp\colon \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)$ yhdistämällä saadaan $\mathbb{R}$-lineaarikuvaus $\omega^\sharp \circ \mathrm{d}\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Tätä käyttäen määritellään, että funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ *hamiltonilainen vektorikenttä* on

$$v_f = \omega^\sharp(\mathrm{d}f).$$

Vektorikenttä $v \in \mathfrak{X}(M)$ on hamiltonilainen, jos ja vain jos se toteuttaa yhtälön

$$\iota_v \omega = \mathrm{d}f$$

jollain $f \in \mathfrak{F}(M)$, sillä $\iota_v \omega = \left(\omega^\sharp\right)^{-1}(v)$. Jokaisella $u \in \mathfrak{X}(M)$ saadaan siis

$$\omega\left(v_f, u\right) = \iota_{v_f}\omega(u) = \mathrm{d}f(u) = u(f).$$

MÄÄRITELMÄ 5.8. *Hamiltonilainen systeemi on symplektisellä monistolla määritelty dynaaminen systeemi, jonka aikakehityksen määrää täydellisen hamiltonilaisen vektorikentän $v_H = \omega^\sharp(\mathrm{d}H)$ virtaus. Funktiota H kutsutaan systeemin Hamiltonin funktioksi.*

Määritelmässä esitetty vaatimus hamiltonilaisen vektorikentän täydellisyydestä rajoittaa salittujen Hamiltonin funktioiden joukkoa.

Tarkastellaan hamiltonilaisten vektorikenttien koordinaattiesitystä. Hamiltonilainen vektorikenttä v_f voidaan ilmaista Darboux'n koordinaateissa muodossa

$$v_f = \sum \left(a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right), \qquad a^i, b^i \in \mathfrak{F}(M).$$

Tällöin saadaan

$$\iota_{v_f}\omega = \sum \left(\mathrm{d}x^i\left(v_f\right)\mathrm{d}y^i - \mathrm{d}y^i\left(v_f\right)\mathrm{d}x^i \right) = \sum \left(a^i \mathrm{d}y^i - b^i \mathrm{d}x^i \right).$$

Nyt yhtälön $\iota_{v_f}\omega = \mathrm{d}f$ perusteella nähdään, että

$$a^i = \frac{\partial f}{\partial y^i} \quad \text{ja} \quad b^i = -\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Näin ollen funktiota $f \in \mathfrak{F}(M)$ vastaava hamiltonilainen vektorikenttä on Darboux'n koordinaateissa ilmaistuna

$$v_f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i} \right).$$

Klassisessa differentiaaliyhtälöiden esitystavassa koordinaattifunktiot (x^i, y^i) ja vektorikentän integraalikäyrän komponentit $(x^i \circ c, y^i \circ c)$ samaistetaan keskenään. Tätä merkintätapaa käyttäen vektorikentän v_f integraalikäyrälle saadaan *Hamiltonin yhtälöt*

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial y^i} \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Vektorikenttä $v \in \mathfrak{X}(M)$ on *symplektinen*, jos $\mathcal{L}_v\omega = 0$. Proposition 4.14 perusteella täydellinen vektorikenttä on symplektinen, jos ja vain jos

$$\phi^{t*}\omega = \omega \quad \text{jokaisella } t \in \mathbb{R}.$$

Täydellinen symplektinen vektorikenttä määrää siis yksiparametrisen ryhmän symplektomorfismeja ϕ^t. Cartanin kaavalla saadaan

$$\mathcal{L}_v \omega = \iota_v(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(\iota_v \omega) = \mathrm{d}(\iota_v \omega),$$

sillä ω on suljettu. Vektorikentän symplektisyydelle saadaan siis ehto

$$\mathrm{d}(\iota_v \omega) = 0.$$

Hamiltonilaisen vektorikentän v_f tapauksessa pätee $\iota_{v_f}\omega = \mathrm{d}f$, joten jokainen hamiltonilainen vektorikenttä on symplektinen. Yhteenvetona voidaan todeta, että vektorikenttä $v \in \mathfrak{X}(M)$ on

- symplektinen, jos ja vain jos $\iota_v \omega$ on suljettu, ja
- hamiltonilainen, jos ja vain jos $\iota_v \omega$ on eksakti.

PROPOSITIO 5.9. *Jokainen symplektinen vektorikenttä monistolla M on hamiltonilainen, jos ja vain jos* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$.

Todistus (Lee 2013, s. 576). Ehto $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$ tarkoittaa, että jokainen suljettu 1-muoto on eksakti. Koska symplektisen vektorikentän v määräämä 1-muoto $\iota_v \omega$ on suljettu, on olemassa funktio $f \in \mathfrak{F}(M)$, jolla $\iota_v \omega = \mathrm{d}f$. Näin ollen v on hamiltonilainen.

Oletetaan seuraavaksi, että jokainen symplektinen vektorikenttä on hamiltonilainen. Olkoon η suljettu 1-muoto ja $v = \omega^\sharp(\eta)$. Vektorikenttä v on symplektinen, sillä

$$\mathrm{d}(\iota_v \omega) = \mathrm{d}\big(\omega^\flat(v)\big) = \mathrm{d}\big(\omega^\flat\big(\omega^\sharp(\eta)\big)\big) = \mathrm{d}\eta = 0.$$

Nyt oletuksen mukaan v on hamiltonilainen, eli on olemassa funktio $f \in \mathfrak{F}(M)$, jolla $v = \omega^\sharp(\mathrm{d}f)$. Näin ollen

$$\omega^\sharp(\eta) = v = \omega^\sharp(\mathrm{d}f), \quad \text{eli} \quad \eta = \mathrm{d}f. \qquad \square$$

Johdannossa mainittu klassinen tulos hamiltonilaisen virtauksen kokoonpuristumattomuudesta saa symplektisillä monistoilla seuraavan muodon:

LAUSE 5.10 (Liouville). *Faasiavaruuden tilavuus ei muutu täydellisen symplektisen vektorikentän virtauksessa, kun tilavuusmuodoksi valitaan* ω^n.

Todistus. Olkoon $\sigma\colon [0,1]^{2n} \to M$ singulaarinen $2n$-solu, v täydellinen symplektinen vektorikenttä ja ϕ sen virtaus. Solun σ liike virtauksessa ϕ esitetään määrittelemällä parametrisoitu solu $\sigma^t = \phi^t \circ \sigma$. Differentiaalimuodon $\eta \in \Omega^{2n}(M)$ integraalille saadaan tällöin kaava

$$\int_{\sigma^t} \eta = \int_{[0,1]^{2n}} \left(\phi^t \circ \sigma\right)^* \eta = \int_{[0,1]^{2n}} \sigma^* \left(\phi^{t*}\eta\right) = \int_\sigma \phi^{t*}\eta.$$

Koska vektorikenttä v on symplektinen, kuvaukset ϕ^t ovat symplektomorfismeja, eli $\phi^{t*}\omega = \omega$. Solun σ^t tilavuudeksi hetkellä $t \in \mathbb{R}$ saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}\left(\sigma^t\right) = \int_{\sigma^t} \omega^n &= \int_\sigma \phi^{t*}\left(\omega^n\right) \\
&= \int_\sigma \left(\phi^{t*}\omega\right) \wedge \cdots \wedge \left(\phi^{t*}\omega\right) \\
&= \int_\sigma \omega \wedge \cdots \wedge \omega = \int_\sigma \omega^n = \mathrm{vol}\left(\sigma\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

5.4 *Poissonin algebra*

Symplektisen moniston funktioille määritellään *Poissonin sulkeet* kaavalla

$$\{f, g\} = \omega\left(v_f, v_g\right),$$

missä v_f ja v_g ovat funktioiden f ja g määräämät hamiltonilaiset vektorikentät. Hamiltonilaisille vektorikentille pätee $\omega\left(v_f, v_g\right) = v_g\left(f\right)$, joten Poissonin sulkeille saadaan kaava

$$\{f, g\} = -v_f\left(g\right) = v_g\left(f\right).$$

Osoitetaan, että Poissonin sulkeilla varustettuna sileät funktiot muodostavat Lien algebran. Antikommutatiivisuus ja bilineaarisuus nähdään suoraan Poissonin sulkeiden ja hamiltonilaisten vektorikenttien määritelmistä. Sen sijaan Jacobin identiteetin todistaminen on hieman työläämpää.

LEMMA 5.11. *Jokaisella $\eta \in \Omega^k\left(M\right)$ ja $u, v \in \mathfrak{X}\left(M\right)$ pätee*

$$\iota_{[u,v]}\eta = \mathcal{L}_u \iota_v \eta - \iota_v \mathcal{L}_u \eta. \tag{5.2}$$

Todistus (Cannas da Silva 2001, s. 108). Olkoon $\eta \in \Omega^k\left(M\right)$ ja $\tau \in \Omega^l\left(M\right)$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u \iota_v (\eta \wedge \tau) = {} & \mathcal{L}_u \iota_v \eta \wedge \tau + \iota_v \eta \wedge \mathcal{L}_u \tau \\
& + (-1)^k \mathcal{L}_u \eta \wedge \iota_v \tau + (-1)^k \eta \wedge \mathcal{L}_u \iota_v \tau
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\iota_v \mathcal{L}_u \left(\eta \wedge \tau\right) = {} & \iota_v \mathcal{L}_u \eta \wedge \tau + (-1)^k \mathcal{L}_u \eta \wedge \iota_v \tau \\
& + \iota_v \eta \wedge \mathcal{L}_u \tau + (-1)^k \eta \wedge \iota_v \mathcal{L}_u \tau.
\end{aligned}$$

Vähentämällä jälkimmäinen yhtälö ensimmäisestä saadaan

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{L}_u \iota_v - \iota_v \mathcal{L}_u\right)\left(\eta \wedge \tau\right) \\
& = \mathcal{L}_u \iota_v \eta \wedge \tau + (-1)^k \eta \wedge \mathcal{L}_u \iota_v \tau - \iota_v \mathcal{L}_u \eta \wedge \tau - (-1)^k \eta \wedge \iota_v \mathcal{L}_u \tau
\end{aligned}$$

$$= ((\mathcal{L}_u\iota_v - \iota_v\mathcal{L}_u)\,\eta) \wedge \tau + (-1)^k\,\eta \wedge ((\mathcal{L}_u\iota_v - \iota_v\mathcal{L}_u)\,\tau)\,.$$

Koska sekä $(\mathcal{L}_u\iota_v - \iota_v\mathcal{L}_u)$ että $\iota_{[u,v]}$ ovat asteen -1 antiderivaatioita, lemman todistamiseksi riittää osoittaa, että yhtälö (5.2) pätee kaikilla sileillä funktioilla ja eksakteilla 1-muodoilla. Funktioiden tapaus on triviaali, sillä $\iota_v f = 0$ jokaisella $v \in \mathfrak{X}(M)$ ja $f \in \mathfrak{F}(M)$. Jokaisella eksaktilla muodolla $\mathrm{d}f$ puolestaan pätee

$$\iota_{[u,v]}\mathrm{d}f = \mathrm{d}f\,([u,v]) = [u,v]\,(f)\,,$$

ja

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u\iota_v(\mathrm{d}f) - \iota_v\mathcal{L}_u\,(\mathrm{d}f) &= \mathcal{L}_u\mathcal{L}_v f - \iota_v\mathrm{d}(\mathcal{L}_u f)\\ &= \mathcal{L}_u\mathcal{L}_v f - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u f = [u,v]\,(f)\,.\end{aligned}$$ □

LEMMA 5.12. *Jos u ja v ovat symplektisiä vektorikenttiä, niin $[u,v]$ on hamiltonilainen vektorikenttä ja $[u,v] = \omega^\sharp\,(\mathrm{d}(\omega\,(v,u)))$.*

Todistus (Cannas da Silva 2001, s. 108). Haluttu tulos saadaan näyttämällä, että $\iota_{[u,v]}\omega = \mathrm{d}(\omega(v,u))$. Edellistä lemmaa ja Cartanin kaavaa käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\iota_{[u,v]}\omega &= \mathcal{L}_u\iota_v\omega - \iota_v\mathcal{L}_u\omega\\ &= \iota_u\mathrm{d}\iota_v\omega + \mathrm{d}\iota_u\iota_v\omega - \iota_v\iota_u\mathrm{d}\omega - \iota_v\mathrm{d}\iota_u\omega.\end{aligned}$$

Koska ω on suljettu ja u ja v symplektisiä, saadaan

$$\iota_u\mathrm{d}\iota_v\omega = 0, \quad \iota_v\iota_u\mathrm{d}\omega = 0 \quad \text{ja} \quad \iota_v\mathrm{d}\iota_u\omega = 0.$$

Näin ollen jäljelle jää

$$\iota_{[u,v]}\omega = \mathrm{d}\iota_u\iota_v\omega = \mathrm{d}(\omega\,(v,u)).$$ □

KOROLLAARI 5.13. *Hamiltonilaiset vektorikentät muodostavat Lien algebran, jonka laskutoimitukset periytyvät Lien algebralta $\mathfrak{X}(M)$.*

Todistus. Kuvaus $\omega^\sharp \circ \mathrm{d}\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ on $\mathbb{R}$-lineaarinen, joten hamiltonilaisten vektorikenttien joukko $\mathrm{im}\,(\omega^\sharp \circ \mathrm{d})$ on sileiden vektorikenttien vektoriavaruuden aliavaruus. Lemman 5.12 perusteella nähdään lisäksi, että kyseinen aliavaruus on suljettu Lien sulkeiden suhteen, sillä

$$\left[v_f, v_g\right] = v_{\omega\left(v_g, v_f\right)} = v_{\{g,f\}}.$$ □

PROPOSITIO 5.14. *Poissonin sulkeet toteuttavat Jacobin identiteetin*

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$$

jokaisella $f, g, h \in \mathfrak{F}(M)$.

Todistus. Edellistä korollaaria käyttäen Jacobin identiteetin ensimmäiselle termille saadaan kaava

$$\{\{f, g\}, h\} = -v_{\{f,g\}}(h) = \left[v_f, v_g\right](h).$$

Kahdelle jälkimmäiselle termille puolestaan pätee

$$\begin{aligned}\{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} &= v_f\{g, h\} + v_g\{h, f\} \\ &= -\mathcal{L}_{v_f}\mathcal{L}_{v_g}h + \mathcal{L}_{v_g}\mathcal{L}_{v_f}h = -\left[v_f, v_g\right](h).\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\{\{f, g\}, h\} = -\{\{g, h\}, f\} - \{\{h, f\}, g\}. \qquad \square$$

Identiteettiä $\{f, g\} = -v_f(g)$ käyttäen Poissonin sulkeille saadaan Darboux'n koordinaateissa kaava

$$\{f, g\} = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial x^i}\right).$$

Koska $\mathfrak{F}(M)$ on myös assosiatiivinen algebra, on mielekästä tarkastella funktioiden kertolaskun ja Poissonin sulkeiden välistä yhteyttä. Jälleen tuloksena saadaan eräänlainen Leibnizin sääntö

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\},$$

sillä

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= -\{gh, f\} = -\omega\left(v_{gh}, v_f\right) \\ &= -v_f(gh) = -\left(v_f g\right)h - g\left(v_f h\right) \\ &= -\{g, f\}h - g\{h, f\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.\end{aligned}$$

Lien algebraa, jolla on lisäksi edellisen ominaisuuden toteuttava assosiatiivinen kertolasku, kutsutaan *Poissonin algebraksi*.

Funktiot $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ *Poisson-kommutoivat* keskenään, jos $\{f, g\} = 0$. Koska

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{v_g}f = -\mathcal{L}_{v_f}g,$$

Poisson-kommutoivat funktiot ovat vakioita toistensa hamiltonilaisten virtausten integraalikäyrillä. Funktiota, joka kommutoi hamiltonilaisen systeemin Hamiltonin funktion H kanssa, kutsutaan *liikevakioksi.* Jokaisella hamiltonilaisella systeemillä on vähintään yksi liikevakio, Hamiltonin funktio itse, sillä Poissonin sulkeiden antikommutatiivisuudesta seuraa $\{H, H\} = 0$.

Diffeomorfismi $\phi\colon M \to M$ on hamiltonilaisen systeemin *symmetria*, jos se säilyttää sekä Hamiltonin funktion että symplektisen muodon eli jos

$$H = \phi^* H \quad \text{ja} \quad \omega = \phi^* \omega.$$

Vektorikenttä $v \in \mathfrak{X}(M)$ on systeemin *infinitesimaalinen symmetria*, jos

$$\mathcal{L}_v H = 0 \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}_v \omega = 0.$$

Toisin sanoen, symplektinen vektorikenttä on infinitesimaalinen symmetria, jos Hamiltonin funktion arvo on vakio sen integraalikäyrillä. Systeemin jokaisen liikevakion f hamiltonilainen vektorikenttä v_f on infinitesimaalinen symmetria, sillä hamiltonilaiset vektorikentät ovat aina symplektisiä ja Poisson-kommutoinnin perusteella nähdään, että $\mathcal{L}_{v_f} H = \{H, f\} = 0$.

LAUSE 5.15 (Noether). *Olkoon $v \in \mathfrak{X}(M)$ funktion H määräämän hamiltonilaisen systeemin infinitesimaalinen symmetria. Jos $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$, on olemassa sileä funktio, joka on systeemin liikevakio. Jos monisto M on yhtenäinen, kyseinen funktio on vakiota vaille yksikäsitteinen.*

Todistus (Lee 2013, s. 580). Koska v on infinitesimaalinen symmetria, sen täytyy olla symplektinen. Proposition 5.9 mukaan v on hamiltonilainen, sillä $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$. Näin ollen on olemassa funktio $f \in \mathfrak{F}(M)$, jolla $v = \omega^\sharp(\mathrm{d}f)$. Havaitaan, että

$$\{H, f\} = \omega(v_H, v) = \mathcal{L}_v H = 0,$$

eli f on systeemin liikevakio.

Oletetaan, että on olemassa toinen funktio $g \in \mathfrak{F}(M)$, jolla $v = \omega^\sharp(\mathrm{d}g)$. Tällöin $\mathrm{d}f = \mathrm{d}g$, eli $\mathrm{d}(f - g) = 0$. Näin ollen $c = f - g$ on vakio jokaisen pisteen ympäristössä. Yhtenäisyydestä seuraa, että funktion c täytyy olla globaalisti vakioarvoinen. □

Hamiltonilaisella systeemillä voi olla useita toisistaan riippumattomia liikevakioita. Poissonin sulkeiden bilineaarisuuden vuoksi liikevakioiden f ja g lineaarikombinaatiot ovat myös liikevakioita. Lisäksi nähdään, että myös $\{f, g\}$ on liikevakio, sillä Jacobin identiteetin perusteella saadaan

$$\{\{f, g\}, H\} = \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = \{f, 0\} + \{g, 0\} = 0.$$

Vastaavasti Poissonin sulkeiden Leibnizin sääntö takaa, että fg on liikevakio, jos f ja g ovat liikevakioita. Näin ollen tietyn systeemin liikevakiot muodostavat Poissonin algebran.

6 Mekaniikkaa Riemannin monistoilla

6.1 *Riemannin monistot*

Äärellisulotteisella vektoriavaruudella V määritelty symmetrinen bilineaarimuoto $g \in V^* \otimes V^*$ on *positiivisesti definiitti*, jos

$$g(v, v) > 0 \quad \text{jokaisella } v \neq 0.$$

Positiivisesti definiitti bilineaarimuoto tekee vektoriavaruudesta *sisätuloavaruuden*. Proposition 5.1 perusteella nähdään, että positiivisesti definiitti bilineaarimuoto on ei-singulaarinen. Näin ollen kuvaus $g^\flat : V \to V^*$ määrää kanonisen isomorfismin $u \mapsto g^\flat(u)$ siten, että

$$g^\flat(u)(v) = g(u, v) \quad \text{jokaisella } v \in V.$$

Kuvauksen $g^\flat$ käänteiskuvausta merkitään $g^\sharp : V^* \to V$.

Moniston M kotangenttiavaruuksista $\mathrm{T}_p^* M$ voidaan muodostaa 2-*tensorikimppu*

$$\mathrm{T}^* M \otimes \mathrm{T}^* M = \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}_p^* M \otimes \mathrm{T}_p^* M.$$

Tensorit $\mathrm{d}x_p^i \otimes \mathrm{d}x_p^j$ muodostavat avaruuden $\mathrm{T}_p^* M \otimes \mathrm{T}_p^* M$ kannan kartan (U, x) jokaisessa pisteessä, joten tensorikimpulle $\mathrm{T}^* U \otimes \mathrm{T}^* U$ saadaan niiden avulla kartta. Tällaisia karttoja käyttäen joukolle $\mathrm{T}^* M \otimes \mathrm{T}^* M$ saadaan sileän $n + n^2$ -moniston rakenne samalla tavalla kuin k-ulkokimpuille.

Sileä 2-*tensorikenttä* monistolla M on sileä kuvaus $g : M \to \mathrm{T}^* M \otimes \mathrm{T}^* M$, joka määrää jokaisen pisteen $p \in M$ tangenttiavaruudelle bilineaarimuodon $g_p \in \mathrm{T}_p^* M \otimes \mathrm{T}_p^* M$. Tensorikenttien sileydelle saadaan täsmälleen samat kriteerit kuin differentiaalimuotojen tapauksessa, ja jokainen sileä 2-tensori voidaan kirjoittaa kartan (U, x) alueella muodossa

$$g = \sum g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j,$$

missä $\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ on tensorikenttä $p \mapsto \mathrm{d}x_p^i \otimes \mathrm{d}x_p^j$ ja $g_{ij} \in \mathfrak{F}(U)$. Tensorikenttä g on symmetrinen ja positiivisesti definiitti, jos bilineaarimuoto g_p on symmetrinen ja positiivisesti definiitti jokaisella $p \in M$.

MÄÄRITELMÄ 6.1. *Riemannin monisto koostuu sileästä monistosta M ja sileästä 2-tensorikentästä g, joka on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Tensorikenttää g kutsutaan Riemannin metriikaksi.*

Tensorin $g\colon N \to \mathrm{T}^*N \otimes \mathrm{T}^*N$ *pullback* sileällä kuvauksella $\phi\colon M \to N$ määritellään samalla tavalla kuin differentiaalimuotojenkin tapauksessa. Toisin sanoen, tensori $\phi^* g\colon M \to \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{T}^*M$ määräytyy pisteittäin kaavalla

$$\left(\phi^* g\right)_p \left(u_p, v_p\right) = g_{\phi(p)} \left(\mathrm{T}\phi\left(u_p\right), \mathrm{T}\phi\left(v_p\right)\right).$$

Olkoot (U, x) ja (V, y) monistojen M ja N kartat, joilla $p \in U$ ja $\phi(p) \in V$. Pullbackin määritelmästä nähdään, että koordinaattiesitys on

$$\left(\phi^* g\right)_p = \sum g_{ij}\left(\phi(p)\right) \frac{\partial \phi^i}{\partial x^k}(p) \frac{\partial \phi^j}{\partial x^l}(p)\, \mathrm{d}x_p^k \otimes \mathrm{d}x_p^l,$$

missä

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \quad \text{ja} \quad \phi^k = y^k \circ \phi.$$

Tarkastellaan erityistapauksena euklidisen avaruuden alimonistoa $M \subset \mathbb{R}^n$. Olkoon $i\colon M \to \mathbb{R}^n$ inkluusiokuvaus, jolla $i(p) = p$ jokaisella $p \in M$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanoninen metriikka $g = \sum \mathrm{d}r^j \otimes \mathrm{d}r^j$ määrää monistolle M *pullback-metriikan* $i^* g$. Tensorikenttä $i^* g$ on positiivisesti definiitti, sillä inkluusiokuvaus on injektio. Näin alimonistosta saadaan Riemannin monisto $(M, i^* g)$.

Riemannin monistolla jokainen tangenttiavaruus on isomorfinen saman pisteen kotangenttiavaruuden kanssa kanonisella isomorfismilla

$$g_p^\flat\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_p^*M.$$

Aivan kuten symplektisten muotojen tapauksessa, nämä tangenttiavaruuksien kuvaukset indusoivat tangentti- ja kotangenttikimppujen välisen diffeomorfismin $g^\flat\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$. Kartalla (U, x) kuvaus $g^\flat$ voidaan esittää muodossa

$$\sum v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \mapsto \sum g_{ij} v^i \mathrm{d}x_p^j.$$

Vastaavasti on olemassa funktiot $g^{ij} \in \mathfrak{F}(U)$, joilla

$$g^\sharp\left(\sum \eta_i \mathrm{d}x^i\right) = \sum g^{ij} \eta_i \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p.$$

Näin saadaan sileä funktio

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}^*M \times \mathrm{T}^*M \to \mathbb{R} \\ &\quad \left(\eta_p, \tau_p\right) \mapsto g_p\left(g^\sharp\left(\eta_p\right), g^\sharp\left(\tau_p\right)\right), \end{aligned}$$

joka on selvästi sisätulo kotangenttiavaruuksilla T_p^*M. Koordinaateissa tämä funktio saa muodon $\sum g^{ij}(p)\,\eta_i\tau_j$.

6.2 *Kotangenttikimpun symplektinen rakenne*

Tarkastellaan n-ulotteisen moniston M kotangenttikimppua T^*M, jonka pisteet ovat kotangenttivektoreita. Jokainen moniston M kartta (U, x) määrää kotangenttikimpulle kartan, joka kuvaa pisteen $p_q = \sum p_i \mathrm{d}x_q^i$ pisteeksi

$$\begin{aligned}\tilde{x}\left(p_q\right) &= \left(x^1(q), \ldots, x^n(q), p_1, \ldots, p_n\right)\\ &= \left(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n\right).\end{aligned}$$

Määritellään koordinaattifunktiot

$$x^i = r^i \circ \tilde{x} \quad \text{ja} \quad y_i = r^{n+i} \circ \tilde{x},$$

kun $i \in \{1, \ldots, n\}$. Näin saadaan n koordinaattifunktioparia (x^i, y_i), joilla

$$x^i\left(p_q\right) = q^i \quad \text{ja} \quad y_i\left(p_q\right) = p_i.$$

Nämä koordinaattifunktiot ovat kotangenttikimpun *kanoniset koordinaatit*.

Kanonisen projektion $\pi\colon \mathrm{T}^*M \to M$ derivaatta pisteessä p_q on lineaarikuvaus

$$\mathrm{T}_{p_q}\pi\colon \mathrm{T}_{p_q}(\mathrm{T}^*M) \to \mathrm{T}_q M.$$

Tangenttivektori $v_{p_q} \in \mathrm{T}_{p_q}(\mathrm{T}^*M)$ voidaan siis kuvata moniston M tangenttivektoriksi projektion derivaatalla. *Liouvillen* 1-*muoto* λ määritellään siten, että pisteessä $p_q \in \mathrm{T}^*M$ se saa tangenttivektorilla v_{p_q} arvon

$$\lambda_{p_q}\left(v_{p_q}\right) = p_q\left(\mathrm{T}_{p_q}\pi\left(v_{p_q}\right)\right).$$

Toisin sanoen, kotangenttikimpun pisteessä p_q määritelty tangenttivektori projisoidaan monistolle M, jolloin se kelpaa argumentiksi kotangenttivektorille p_q. Pullbackin avulla ilmaistuna Liouvillen 1-muodolle saadaan kaava

$$\lambda_{p_q} = \left(\mathrm{T}_{p_q}\pi\right)^* p_q.$$

PROPOSITIO 6.2. *Liouvillen* 1-*muoto on sileä, ja sen avulla kotangenttikimpulle* T^*M *saadaan symplektinen muoto* $\omega = -\mathrm{d}\lambda$.

Todistus. Olkoon (U, x) kartta pisteen $q \in M$ ympäristössä. Moniston T^*M

koordinaattivektorikentillä pätee kaavat

$$\mathrm{T}_{p_q}\pi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p_q}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q \quad \text{ja} \quad \mathrm{T}_{p_q}\pi\left(\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{p_q}\right) = 0.$$

Jokainen 1-muoto monistolla T^*M voidaan esittää muodossa

$$\lambda_{p_q} = \sum\left(a_i \mathrm{d}x^i_{p_q} + b^i\left(\mathrm{d}y_i\right)_{p_q}\right), \quad a_i, b^i \in \mathbb{R}.$$

Liouvillen 1-muodon λ:n määritelmän perusteella kertoimet a_i ovat

$$a_i = \lambda_{p_q}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p_q}\right) = p_q\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q\right) = p_i.$$

Kertoimille b^i puolestaan saadaan

$$b^i = \lambda_{p_q}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{p_q}\right) = p_q(0) = 0.$$

Näin ollen Liouvillen 1-muodon koordinaattiesitys pisteessä p_q on

$$\lambda_{p_q} = \sum p_i \mathrm{d}x^i_{p_q} = \sum y_i\left(p_q\right)\mathrm{d}x^i_{p_q},$$

ja koko kartalla saadaan

$$\lambda = \sum y_i \mathrm{d}x^i.$$

Koska Liouvillen 1-muodolla on jokaisella kartalla tämä koordinaattimuoto, voidaan todeta, että se on sileä.

Muoto $\omega = -\mathrm{d}\lambda$ on eksaktiutensa perusteella suljettu, eli $\mathrm{d}\omega = 0$. Koordinaateissa esitettynä saadaan

$$\omega = -\mathrm{d}\lambda = \sum \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y_i.$$

Tensorilla ω_{p_q} on siis jokaisessa pisteessä sama koordinaattiesitys kuin $\mathbb{R}^{2n}$:n kanonisella symplektisellä tensorilla, ja näin ollen ω on ei-singulaarinen. □

Jokaisen sileän moniston kotangenttikimpulla on siis Liouvillen 1-muodosta saatava kanoninen symplektinen rakenne. Koska Liouvillen 1-muodon määritelmä on moniston M kartan valinnasta riippumaton, sen koordinaattiesitys $\lambda = \sum y_i \mathrm{d}x^i$ pätee minkä tahansa kartan (U, x) indusoimalla kotangenttikimpun kartalla. Jos siis (U, x) ja $(\hat{U}, \hat{x})$ ovat kaksi moniston M karttaa, joilla $U \cap \hat{U} \neq \varnothing$, niin

$$\sum y_i \mathrm{d}x^i = \sum \hat{y}_i \mathrm{d}\hat{x}^i$$

joukossa $U \cap \hat{U}$. Näiden karttojen välinen transitiokuvaus on symplektomorfismi, sillä se säilyttää $\mathbb{R}^{2n}$:n kanonisen symplektisen rakenteen, ja näin ollen myös

Hamiltonin yhtälöt ovat samanmuotoisia molemmissa lokaalikoordinaateissa ilmaistuna. Tällaisia koordinaattimuunnoksia kutsutaan klassisesti *kanonisiksi muunnoksiksi*.

Koordinaattimuunnokset tunnetaan fysiikassa *passiivisina muunnoksina*, sillä ne eivät siirrä moniston pisteitä. Diffeomorfismeja monistolta itselleen kutsutaan puolestaan *aktiivisiksi muunnoksiksi*. Seuraavassa propositiossa osoitetaan, että jokainen moniston M aktiivinen muunnos määrää symplektiselle monistolle T^*M symplektomorfismin. Myös näitä kuvauksia kutsutaan kanonisiksi muunnoksiksi.

PROPOSITIO 6.3. *Jos $\phi\colon M \to M$ on diffeomorfismi, niin $\mathrm{T}^*\phi \in \mathrm{Diff}\,(\mathrm{T}^*M)$ on symplektomorfismi.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että $(\mathrm{T}^*\phi)^*\,\lambda = \lambda$. Koska pullback kommutoi ulkoderivoinnin kanssa, saadaan

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^*\phi)^*\,\omega &= (\mathrm{T}^*\phi)^*\,(-\mathrm{d}\lambda)\\ &= -\mathrm{d}\big((\mathrm{T}^*\phi)^*\,\lambda\big) = -\mathrm{d}\lambda = \omega.\end{aligned}$$

Proposition todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$\big((\mathrm{T}^*\phi)^*\,\lambda\big)_{p_q} = \lambda_{p_q} \quad \text{jokaisella } p_q \in \mathrm{T}^*M.$$

Merkitään $\xi = \mathrm{T}^*\phi\,(p_q)$. Pullbackin, Liouvillen 1-muodon ja kotangenttikuvauksen määritelmiä käyttäen ja sieventäen saadaan

$$\begin{aligned}\big((\mathrm{T}^*\phi)^*\,\lambda\big)_{p_q} &= \big(\mathrm{T}_{p_q}(\mathrm{T}^*\phi)\big)^*\,(\lambda_\xi)\\ &= \big(\mathrm{T}_{p_q}(\mathrm{T}^*\phi)\big)^*\,\big((\mathrm{T}_\xi\pi)^*\,\xi\big)\\ &= \big(\mathrm{T}_\xi\pi\circ\mathrm{T}_{p_q}(\mathrm{T}^*\phi)\big)^*\,\xi\\ &= \big(\mathrm{T}_\xi\pi\circ\mathrm{T}_{p_q}(\mathrm{T}^*\phi)\big)^*\,\Big(\big(\mathrm{T}_{\phi^{-1}(q)}\phi\big)^*\,p_q\Big)\\ &= \Big(\mathrm{T}_{\phi^{-1}(q)}\phi\circ\mathrm{T}_\xi\pi\circ\mathrm{T}_{p_q}(\mathrm{T}^*\phi)\Big)^*\,p_q\\ &= \big(\mathrm{T}_{p_q}(\phi\circ\pi\circ\mathrm{T}^*\phi)\big)^*\,p_q.\end{aligned}$$

Koska $\pi\circ\mathrm{T}^*\phi = \phi^{-1}\circ\pi$, nähdään, että

$$\big(\mathrm{T}_{p_q}(\phi\circ\pi\circ\mathrm{T}^*\phi)\big)^* = \big(\mathrm{T}_{p_q}(\phi\circ\phi^{-1}\circ\pi)\big)^* = \big(\mathrm{T}_{p_q}\pi\big)^*.$$

Lopulta havaitaan siis, että

$$\big((\mathrm{T}^*\phi)^*\,\lambda\big)_{p_q} = \big(\mathrm{T}_{p_q}\pi\big)^*\,p_q = \lambda_{p_q}. \qquad \square$$

6.3 *Mekaaniset systeemit*

Mekaaninen systeemi koostuu *konfiguraatioavaruudesta*, joka on yhtenäinen Riemannin monisto (M, g), ja *potentiaalienergiasta* $V \in \mathfrak{F}(M)$. Tangenttivektorit $u_q \in \mathrm{T}M$ ovat systeemin *yleistettyjä nopeuksia*. Kanonisen isomorfismin $g^\flat \colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ avulla jokaiselle tangenttivektorille saadaan *konjugaattiliikemäärä*

$$p_q = g^\flat\left(u_q\right).$$

Mekaanisen systeemin *faasiavaruus* on konfiguraatioavaruuden kotangenttikimppu T^*M, ja sille annetaan Liouvillen 1-muodon määräämä symplektinen rakenne. Systeemin liikeyhtälöiden muodostamiseen tarvitaan sekä konfiguraatioavaruuden Riemannin metriikkaa g että faasiavaruuden symplektistä muotoa $\omega = -\mathrm{d}\lambda$. Systeemin *kineettinen energia* eli *liike-energia* on funktio $K \in \mathfrak{F}(\mathrm{T}^*M)$, jonka arvo pisteessä p_q on

$$K\left(p_q\right) = \frac{1}{2}\left\|p_q\right\|^2,$$

missä

$$\begin{aligned}\left\|p_q\right\|^2 &= g_q\left(g^\sharp\left(p_q\right), g^\sharp\left(p_q\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}p_q\left(g^\sharp\left(p_q\right)\right) = \frac{1}{2}\sum g^{ij}(q)\, p_i p_j.\end{aligned}$$

Potentiaalienergia $V \in \mathfrak{F}(M)$ voidaan nostaa projektion $\pi \colon \mathrm{T}^*M \to M$ avulla faasiavaruuden funktioksi $\pi^* V \in \mathfrak{F}(\mathrm{T}^*M)$. Selkeyden vuoksi myös tätä funktiota merkitään symbolilla V, jolloin $V\left(p_q\right) = V(q)$. Mekaanisen systeemin *Hamiltonin funktio* $H \in \mathfrak{F}(\mathrm{T}^*M)$ on

$$H = K + V.$$

Systeemin aikakehityksen määrää faasiavaruudessa määritelty hamiltonilainen vektorikenttä $v_H = \omega^\sharp(\mathrm{d}H)$.

Huomionarvoista on, että Riemannin metriikkaan liittyvät diffeomorfismit $g^\flat$ ja $g^\sharp$ ovat kimppuisomorfismeja konfiguraatioavaruuden tangenttikimpun $\mathrm{T}M$ ja faasiavaruuden T^*M välillä, kun taas symplektiseen muotoon liittyvät diffeomorfismit $\omega^\flat$ ja $\omega^\sharp$ ovat kimppuisomorfismeja faasiavaruuden tangenttikimpun $\mathrm{T}(\mathrm{T}^*M)$ ja kotangenttikimpun $\mathrm{T}^*(\mathrm{T}^*M)$ välillä.

Hamiltonin funktion arvon määritellään olevan systeemin *kokonaisenergia*, ja tästä seuraa *energian säilymislaki*

$$\mathcal{L}_{v_H}(H) = \{H, H\} = 0.$$

Jakamalla H liike-energiaan ja potentiaalienergiaan saadaan

$$\{K, H\} + \{V, H\} = 0 \quad \text{eli} \quad \mathcal{L}_{v_H}(K) = -\mathcal{L}_{v_H}(V).$$

Etsitään koordinaattiesitys hamiltonilaiselle vektorikentälle v_H. Kanonisissa koordinaateissa laskettuna saadaan

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}\sum g^{jk} y_j y_k\right) + \frac{\partial V}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} y_j y_k + \frac{\partial V}{\partial x^i}.$$

Lisäksi havaitaan, että jokaisella $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ pätee

$$g^{jk} = g^{kj}, \qquad \frac{\partial g^{jk}}{\partial y_i} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = 0.$$

Nyt koordinaattien y_i suuntaan saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{j,k} g^{jk} y_j y_k\right) + \frac{\partial V}{\partial y_i} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(g^{jk}\frac{\partial y_j}{\partial y_i} y_k + g^{jk} y_j \frac{\partial y_k}{\partial y_i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(g^{jk}\delta^i_j y_k + g^{jk} y_j \delta^i_k\right) = \sum g^{ji} y_j.
\end{aligned}$$

Näin ollen mekaanisen systeemin hamiltonilainen vektorikenttä on

$$v_H = \sum_i\left(\sum_j g^{ji} y_j \frac{\partial}{\partial x^i} - \left(\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} y_j y_k + \frac{\partial V}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\right). \tag{6.1}$$

Tätä vektorikenttää vastaavat klassiset liikeyhtälöt ovat

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \sum_j g^{ji} p_j \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial g^{jk}}{\partial q^i} p_j p_k - \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

On syytä huomata, että fysikaalisesti metriikka g ei voi olla pelkkä etäisyysmitta. Isomorfismi $g^\flat$ on kuvaus nopeuksilta liikemäärille, ja näin ollen sen täytyy sisältää informaatiota systeemin inertiaalimassasta. Metriikan komponentit g_{ij} muodostavat systeemin *massamatriisin*. Esimerkiksi euklidisessa avaruudessa liikkuvan pistemäisen kappaleen massamatriisi on skalaarilla $m > 0$ kerrottu identiteettimatriisi. Tällöin kineettiselle energialle saadaan fysiikasta tuttu kaava

$$K(p) = \frac{1}{2m}\langle p, p\rangle = \sum \frac{p_i^2}{2m}.$$

Lisäksi liikeyhtälöt saavat tällöin yksinkertaisen muodon

$$m\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = p_i \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Havaitaan, että näistä ensimmäinen on liikemäärän määritelmä massan ja nopeuden tulona ja toinen on Newtonin toinen laki

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}, \quad \text{missä } F = -\operatorname{grad}(V).$$

Palataan takaisin yleisten Riemannin monistojen pariin. Jos potentiaalienergia V on kaikkialla vakio, saadaan *geodeesiyhtälöt*

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \sum_j g^{ji} p_j \quad \text{ja} \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g^{jk}}{\partial q^i} p_j p_k.$$

Kaikkialla vakioarvoinen potentiaalienergia voidaan korvata nollapotentiaalilla $V = 0$ ilman, että hamiltonilainen vektorikenttä muuttuu. Määritellään siis, että *geodeesisysteemi* on hamiltonilainen systeemi, jonka Hamiltonin funktio on

$$H(p_q) = \frac{1}{2} \|p_q\|^2.$$

Geodeesisysteemien täydellisyyttä eli virtausten olemassaoloa on käsitelty esimerkiksi lähteessä (Abraham & Marsden 1978).

Euklidisen avaruuden tapaukseen vertaamalla voidaan tulkita, että geodeesiyhtälöissä liikemäärän muutosnopeuden määräävä termi

$$-\frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g^{jk}}{\partial q^i} p_j p_k$$

vastaa voimia, jotka konfiguraatioavaruutta rajoittavat sidosehdot kohdistavat systeemiin. Energian säilymislaista seuraa, että geodeesisysteemin liike-energia ei riipu ajasta. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa, että sidosehdoista aiheutuvat voimat eivät tee työtä systeemiin. Kyseessä on erityistapaus *d'Alembertin periaatteesta* (Arnold 1989, s. 92).

Jokaisen sileän käyrän $c: I \to M$ nopeusvektori määrää tangenttikimppulle sileän käyrän $c': I \to \mathrm{T}M$. Toisaalta $g^\sharp: \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M$ kuvaa mekaanisen systeemin integraalikäyrän tangenttikimpun käyräksi. Jotta tällainen integraalikäyrä olisi fysikaalisesti mielekäs, liikemäärää vastaavan nopeusvektorin tulee olla sama kuin konfiguraatioavaruudelle projisoidun käyrän nopeusvektori. Tämä osoitetaan seuraavassa propositiossa:

PROPOSITIO 6.4. *Olkoon v_H mekaanisen systeemin hamiltonilainen vektorikenttä, $c: I \to \mathrm{T}^*M$ sen integraalikäyrä ja $\pi: \mathrm{T}^*M \to M$ kanoninen projektio faasiavaruudelta konfiguraatioavaruudelle. Tällöin $g^\sharp \circ c = (\pi \circ c)'$.*

Todistus. Kiinnitetään mielivaltainen $t_0 \in I$, jolla

$$c(t_0) = \sum p_i \mathrm{d}x_q^i.$$

Tangentti- ja kotangenttikimppujen kanonisen isomorfismin avulla saadaan

$$g^\sharp \circ c(t_0) = g^\sharp \left(\sum p_i \mathrm{d}x^i_q\right) = \sum g^{ij}(q)\, p_i \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_q .$$

Toisaalta projisoidun käyrän nopeusvektoriksi saadaan kaavan (6.1) perusteella

$$\begin{aligned}(\pi \circ c)'(t_0) &= \mathrm{T}(\pi \circ c)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right)\\ &= \mathrm{T}\pi\left(c'(t_0)\right)\\ &= \mathrm{T}\pi\left(\left(v_H\right)_{p_q}\right) = \sum g^{ij}(q)\, p_i \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_q .\end{aligned}$$ □

Yleisen Hamiltonin funktion $H \in \mathfrak{F}(\mathrm{T}^*M)$ tapauksessa hamiltonilaisen systeemin konjugaattiliikemäärä ei kuitenkaan välttämättä vastaa Riemannin metriikan määräämää fysikaalista liikemäärää.

7 Symmetria ja liikevakiot

7.1 *Lien ryhmät*

MÄÄRITELMÄ 7.1. *Lien ryhmä on joukko G, jolla on sekä ryhmän että sileän moniston rakenne siten, että ryhmäoperaatio $(g, h) \mapsto gh$ ja käänteisalkiokuvaus $g \mapsto g^{-1}$ ovat sileitä kuvauksia.*

Motivaationa Lien ryhmän käsitteelle toimivat klassiset matriisiryhmät

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n) &= \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\right\}, \\ \mathrm{SL}(n) &= \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\right\}, \\ \mathrm{O}(n) &= \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^{\mathrm{T}}A = I\right\} \text{ ja} \\ \mathrm{SO}(n) &= \mathrm{SL}(n) \cap \mathrm{O}(n). \end{aligned}$$

Lähteessä (Lee 2013, s. 151-167) on osoitettu, että nämä kaikki ovat Lien ryhmiä. Lisäksi avaruus $\mathbb{R}^n$ on Lien ryhmä, kun laskutoimitukseksi valitaan vektorien yhteenlasku.

Ryhmärakenteen vuoksi Lien ryhmien teoria on huomattavasti yleisten sileiden monistojen teoriaa rikkaampi. Lien ryhmälle määritellään *vasen translaatio* $\ell_g\colon G \to G$ kaavalla

$$\ell_g(h) = gh, \quad g, h \in G.$$

Translaatiolle saadaan kaavat

$$\ell_g(e) = g \quad \text{ja} \quad \ell_e = \mathrm{id}_G,$$

missä e on ryhmän G identiteettialkio. Lisäksi nähdään, että $\ell_g \circ \ell_h = \ell_{gh}$. Lien ryhmän määritelmän perusteella vasen translaatio on sileä kuvaus jokaisella $g \in G$. Lisäksi

$$\left(\ell_g\right)^{-1} = \ell_{g^{-1}},$$

eli näin ollen ℓ_g on diffeomorfismi jokaisella $g \in G$.

Vasemman translaation derivaattana identiteetissä saadaan isomorfismi

$$\mathrm{T}_e\ell_g\colon \mathrm{T}_eG \to \mathrm{T}_gG,$$

joka mahdollistaa tangenttivektorien siirtämisen eri pisteiden tangenttiavaruuksien välillä. Vektorikenttä $v \in \mathfrak{X}(G)$ on *vasemmalta invariantti*, jos $\ell_{g*}v = v$ jokaisella $g \in G$, eli jos

$$\mathrm{T}\ell_g(v_h) = v_{gh} \quad \text{jokaisella } g, h \in G.$$

Pushforwardin lineaarisuudesta seuraa, että vasemmalta invarianttien vektorikenttien lineaarikombinaatiot ovat myös vasemmalta invariantteja. Vasemmalta invarianttien vektorikenttien vektoriavaruutta merkitään $\mathfrak{L}(G)$.

PROPOSITIO 7.2. *Vektoriavaruudella $\mathfrak{L}(G)$ on seuraavat ominaisuudet:*
1 *Avaruudet T_eG ja $\mathfrak{L}(G)$ ovat luonnollisesti isomorfiset.*
2 *Vasemmalta invariantit vektorikentät ovat sileitä, eli $\mathfrak{L}(G) \subset \mathfrak{X}(G)$.*
3 *Jokainen vasemmalta invariantti vektorikenttä on täydellinen.*
4 *Jos $u, v \in \mathfrak{L}(G)$, niin $[u, v] \in \mathfrak{L}(G)$.*

Todistus (Tu 2011, s. 180–182; Lee 2013, s. 216)
1 Mikä tahansa tangenttivektori $\xi \in \mathrm{T}_eG$ voidaan laajentaa vasemmalta invariantiksi vektorikentäksi v koko G:lle säännöllä

$$v_g = \mathrm{T}\ell_g(\xi), \tag{7.1}$$

jolloin $v_e = \xi$. Kuvaus $\xi \mapsto v$ on selvästi lineaarinen, ja kenttä v on vasemmalta invariantti, sillä ketjusääntöä käyttäen jokaisella $g, h \in G$ saadaan

$$\mathrm{T}\ell_g(v_h) = \mathrm{T}\ell_g \circ \mathrm{T}\ell_h(\xi) = \mathrm{T}\ell_{gh}(\xi) = v_{gh}.$$

Mikä tahansa vasemmalta invariantti vektorikenttä v saadaan muodostettua kaavalla (7.1) asettamalla $\xi = v_e$, joten kuvaus $\xi \mapsto v$ on surjektiivinen. Lisäksi kuvaus $\mathrm{T}_e\ell_g$ on isomorfismi jokaisella $g \in G$, joten $v = 0$ ainoastaan, jos $\xi = 0$. Näin ollen $\xi \mapsto v$ on bijektio ja $\mathrm{T}_eG \simeq \mathfrak{L}(G)$.
2 Katso (Tu 2011, s. 181).
3 Olkoon $\phi\colon D \to G$ lokaali virtaus, jonka nopeuskenttä on $v \in \mathfrak{L}(G)$. Tällöin on olemassa $\epsilon > 0$, jolla väli $(-\epsilon, \epsilon)$ kuuluu identiteetistä alkavan maksimaalisen integraalikäyrän ϕ_e määrittelyjoukkoon. Valitaan mielivaltainen $g \in G$, ja määritellään uusi sileä käyrä $c = \ell_g \circ \phi_e$. Vasemmalta invarianttiuden perusteella jokaisella $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ pätee

$$\begin{aligned} c'(t) &= \left(\ell_g \circ \phi_e\right)'(t) \\ &= \mathrm{T}\ell_g\left(\phi_e'(t)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{T}\ell_g\left(v_{\phi_e(t)}\right) \\
&= v_{g\phi_e(t)} = v_{c(t)}.
\end{aligned}
$$

Havaitaan siis, että c on kentän v integraalikäyrä, joka alkaa pisteestä g. Näin ollen on olemassa $\epsilon > 0$, jolla jokaiselle $g \in G$ saadaan integraalikäyrä, joka alkaa g:stä ja joka on määritelty vähintään välillä $(-\epsilon, \epsilon)$. Valitaan mielivaltainen $g \in G$, ja oletetaan, että tästä pisteestä alkavien integraalikäyrien määrittelyjoukoilla on äärellinen pienin yläraja b. Tällöin väli $(-\epsilon, b)$ kuuluu maksimaalisen integraalikäyrän ϕ_g määrittelyjoukkoon. Valitaan $t_0 \in (b-\epsilon, b)$, ja merkitään $h = \phi_g(t_0)$. Määritellään käyrä $c\colon (-\epsilon, t_0+\epsilon) \to G$ kaavalla

$$
c(t) = \begin{cases} \phi_g(t), & \text{kun } -\epsilon < t < b, \\ \phi_h(t-t_0), & \text{kun } t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon. \end{cases}
$$

Käyrä on hyvin määritelty, sillä määrittelyjoukkojen päällekkäisessä osassa

$$
\begin{aligned}
\phi_h(t-t_0) &= \phi^{t-t_0}(h) \\
&= \phi^{t-t_0} \circ \phi^{t_0}(g) = \phi^t(g) = \phi_g(t).
\end{aligned}
$$

Lisäksi se on selvästi vektorikentän v integraalikäyrä. Koska $t_0 + \epsilon > b$, pisteestä g alkavien integraalikäyrien määrittelyjoukoilla ei voi olla äärellistä ylärajaa. Samalla tekniikalla voidaan osoittaa, että määrittelyjoukko ei voi olla myöskään alhaalta rajoitettu.

4 Proposition 3.8 perusteella nähdään, että jokaisella $u, v \in \mathfrak{L}(G)$

$$
[u, v] = \left[\ell_{g*}u, \ell_{g*}v\right] = \ell_{g*}[u, v]. \qquad \square
$$

MÄÄRITELMÄ 7.3. *Lien ryhmän G Lien algebra on vektoriavaruus* $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_e G$, *jonka Lien sulkeet ovat*

$$
[\xi_1, \xi_2] = [v_1, v_2]_e, \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g},
$$

missä vektorikentät $v_1, v_2 \in \mathfrak{L}(G)$ *määritellään kaavalla* (7.1).

Lien ryhmän *yksiparametrinen aliryhmä* on ryhmähomomorfismi $(\mathbb{R}, +) \to G$. Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen vasemmalta invariantin vektorikentän maksimaalinen identiteetistä alkava integraalikäyrä on yksiparametrinen aliryhmä. Tarkastellaan vasemmalta invariantin vektorikentän $v \in \mathfrak{L}(G)$ integraalikäyrää $\phi_e\colon \mathbb{R} \to G$. Valitsemalla $g = \phi_e(t_0)$ saadaan integraalikäyrä $\phi_g(t)$, jolla

$$
\phi_g(t) = \ell_g \circ \phi_e(t) = g\phi_e(t) = \phi_e(t_0)\,\phi_e(t).
$$

Toisaalta myös $t \mapsto \phi_e(t_0 + t)$ määrää saman integraalikäyrän ϕ_g. Näin ollen

$$\phi_e(t_1 + t_2) = \phi_e(t_1)\,\phi_e(t_2) \quad \text{jokaisella } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Kuvaus $t \mapsto \phi_e(t)$ on siis yksiparametrinen aliryhmä.

Jokainen $\xi \in \mathfrak{g}$ määrää vasemmalta invariantin vektorikentän $v \in \mathfrak{L}(G)$ siten, että $\xi = v_e$. Olkoon ϕ kentän $v \in \mathfrak{L}(G)$ virtaus, jolloin

$$\phi_e(0) = e \quad \text{ja} \quad \phi_e'(0) = \xi.$$

Nyt voidaan määritellä kuvaus $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ siten, että

$$\exp(\xi) = \phi_e(1).$$

Jokainen vektori $\xi \in \mathfrak{g}$ synnyttää yksiparametrisen aliryhmän

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}, +) &\to G\\ t &\mapsto \exp(t\xi).\end{aligned}$$

Tämä on esitetty täsmällisesti seuraavassa propositiossa:

PROPOSITIO 7.4. *Eksponentiaalikuvauksella on seuraavat ominaisuudet:*

1 *Kuvaus* $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ *on sileä.*

2 *Jokaisella* $\xi \in \mathfrak{g}$ *ja* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$\exp((t_1 + t_2)\,\xi) = \exp(t_1\xi)\exp(t_2\xi).$$

3 *Jokaisella* $\xi \in \mathfrak{g}$ *pätee* $(\exp(\xi))^{-1} = \exp(-\xi)$.

Todistus. Katso (Lee 2013, s. 519–520).

7.2 *Momenttikuvaus*

Virtauksen käsite voidaan yleistää Abelin ryhmältä $(\mathbb{R}, +)$ korkeampiulotteisille Lien ryhmille määrittelemällä ryhmän *toiminta*:

MÄÄRITELMÄ 7.5. *Lien ryhmän* G *toiminta monistolla* M *on sileä kuvaus* $\psi\colon G \times M \to M$*, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

1 $\psi(gh, p) = \psi(g, \psi(h, p))$ *jokaisella* $g, h \in G$ *ja* $p \in M$.

2 $\psi(e, p) = p$ *jokaisella* $p \in M$.

Lien ryhmän toimintaa kutsutaan myös lyhyesti *G-toiminnaksi*. Valitsemalla kiinteä $g \in G$ ja asettamalla

$$\psi^g(p) = \psi(g, p)$$

saadaan sileä kuvaus $\psi^g\colon M \to M$. Toiminnan ominaisuuksien perusteella nähdään, että jokaisella $g, h \in G$ pätee

$$\psi^g \circ \psi^h = \psi^{gh}, \quad \psi^e = \mathrm{id}_M \quad \text{ja} \quad (\psi^g)^{-1} = \psi^{g^{-1}}.$$

Lisäksi toiminnan sileydestä seuraa, että ψ^g on diffeomorfismi. Toiminta määrää siis ryhmähomomorfismin

$$\begin{aligned} G &\to \mathrm{Diff}\,(M) \\ g &\mapsto \psi^g. \end{aligned}$$

Symplektisellä monistolla määritelty toiminta on *symplektinen*, jos kuvaukset ψ^g ovat symplektomorfismeja.

Olkoon ψ Lien ryhmän G toiminta monistolla M. Valitsemalla kiinteä $\xi \in \mathfrak{g}$ ja yhdistämällä toiminta eksponentiaalikuvaukseen saadaan virtaus

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times M &\to M \\ (t, p) &\mapsto \psi^{\exp(t\xi)}\,(p)\,. \end{aligned}$$

Jokainen $\xi \in \mathfrak{g}$ määrää vektorikentän $v_\xi \in \mathfrak{X}\,(M)$, kun vaaditaan, että v_ξ on tämän virtauksen nopeuskenttä. Toisin sanoen, vektorikenttä v_ξ toteuttaa yhtälön

$$\left(v_\xi\right)_p (f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\psi^{\exp(t\xi)}\,(p)\right)$$

jokaisella $f \in \mathfrak{F}\,(M)$ ja $p \in M$. Symplektisen toiminnan määräämä vektorikenttä on selvästi symplektinen vektorikenttä.

Valitsemalla kiinteä $p \in M$ toiminnasta ψ saadaan sileä kuvaus $\psi_p\colon G \to M$ määrittelemällä, että

$$\psi_p\,(g) = \psi\,(g, p)\,.$$

Tämän kuvauksen derivaattana identiteetissä e saadaan kuvaus $\mathrm{T}_e\psi_p\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{T}_pM$, joka toteuttaa jokaisella $f \in \mathfrak{F}\,(M)$ ja $\xi \in \mathfrak{g}$ yhtälön

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_e\psi_p\,(\xi)\,(f) &= \xi\left(f \circ \psi_p\right) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \psi_p\,(\exp\,(t\xi)) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \psi^{\exp(t\xi)}\,(p) = \left(v_\xi\right)_p (f)\,. \end{aligned}$$

Näin ollen vektorikenttä v_ξ voidaan määritellä myös kaavalla

$$\left(v_\xi\right)_p = \mathrm{T}_e\psi_p\,(\xi)\,. \tag{7.2}$$

Yksiparametristen symmetriaryhmien tapauksessa hamiltonilaisen systeemin liikevakiot voidaan esittää reaaliarvoisina funktioina. Kun symmetriaryhmänä on yleinen Lien ryhmä, liikevakioiden esittämiseen käytetään momenttikuvausta, joka saa arvoja symmetriaryhmän Lien algebran duaaliavaruudessa.

MÄÄRITELMÄ 7.6. *Olkoon* (M, ω) *symplektisellä G-toiminnalla varustettu symplektinen monisto ja* $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ *sileä kuvaus, jonka arvoa pisteessä* $p \in M$ *merkitään* $\mu_p \in \mathfrak{g}^*$. *Asetetaan*

$$H_\xi(p) = \mu_p(\xi),$$

jolloin saadaan sileä funktio $H_\xi \in \mathfrak{F}(M)$. *Kuvaus* μ *on G-toiminnan momenttikuvaus, jos symplektiset vektorikentät* v_ξ *ovat hamiltonilaisia ja* $v_\xi = \omega^\sharp\left(\mathrm{d}H_\xi\right)$ *jokaisella* $\xi \in \mathfrak{g}$.

Toisin sanoen, kuvaus $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ on momenttikuvaus, jos se toteuttaa ehdon

$$\mathrm{d}H_\xi = \iota_{v_\xi}\omega \quad \text{jokaisella } \xi \in \mathfrak{g}. \tag{7.3}$$

Jos symplektisellä G-toiminnalla on momenttikuvaus, toiminnan sanotaan olevan *hamiltonilainen*. Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että jos hamiltonilainen G-toiminta on hamiltonilaisen systeemin symmetria, niin siihen liittyy momenttikuvauksen määräämä $\mathfrak{g}^*$-arvoinen liikevakio.

LAUSE 7.7. *Olkoon* ψ *monistolla* M *määritelty hamiltonilainen G-toiminta, jonka momenttikuvaus on* $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$. *Olkoon lisäksi*

$$v_f = \omega^\sharp(\mathrm{d}f)$$

täydellinen hamiltonilainen vektorikenttä ja ϕ *kentän* v_f *virtaus. Jos*

$$f = f \circ \psi^g,$$

jokaisella jokaisella $g \in G$, *niin*

$$\mu = \mu \circ \phi^t$$

jokaisella $t \in \mathbb{R}$.

Todistus (Berndt 2001, s. 95). Oletuksen mukaan jokaisella $\xi \in \mathfrak{g}$, $p \in M$ ja $t \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(p) = f\left(\psi^{\exp(t\xi)}(p)\right).$$

Näin ollen jokaisella $p \in M$ saadaan

$$\left(v_\xi\right)_p(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\psi^{\exp(t\xi)}(p)\right) = 0.$$

Koska toiminta ψ on hamiltonilainen, jokaisella $\xi \in \mathfrak{g}$ on olemassa funktio H_ξ, jolla $v_\xi = \omega^\sharp \left(\mathrm{d}H_\xi\right)$ ja $\mu_p(\xi) = H_\xi(p)$ jokaisella $p \in M$. Näin ollen

$$\mathcal{L}_{v_f} H_\xi = \left\{H_\xi, f\right\} = -v_\xi(f) = 0 \quad \text{jokaisella } \xi \in \mathfrak{g}.$$

Proposition 4.14 perusteella edellisestä nähdään, että

$$H_\xi = H_\xi \circ \phi^t \quad \text{jokaisella } \xi \in \mathfrak{g} \text{ ja } t \in \mathbb{R},$$

josta seuraa, että $\mu_p = \mu_{\phi^t(p)}$ jokaisella $p \in M$ ja $t \in \mathbb{R}$. □

Seuraava tulos antaa riittävän ehdon momenttikuvauksen olemassaololle:

PROPOSITIO 7.8. *Olkoon M eksaktilla symplektisellä muodolla $\omega = -\mathrm{d}\lambda$ varustettu monisto ja ψ sen symplektinen G-toiminta. Jos $\lambda \in \Omega^1(M)$ on G-invariantti, eli jos $\psi^{g*}\lambda = \lambda$ jokaisella $g \in G$, niin kaava*

$$\mu_p(\xi) = \lambda_p\left(\left(v_\xi\right)_p\right), \quad p \in M, \quad \xi \in \mathfrak{g}$$

määrää momenttikuvauksen G-toiminnalle ψ.

Todistus (Berndt 2001, s. 98–99). Koska λ on G-invariantti, $\mathcal{L}_{v_\xi}\lambda = 0$ jokaisella $\xi \in \mathfrak{g}$. Nyt Cartanin kaavan avulla nähdään, että

$$0 = \mathcal{L}_{v_\xi}\lambda = \mathrm{d}\left(\iota_{v_\xi}\lambda\right) + \iota_{v_\xi}(\mathrm{d}\lambda)$$

jokaisella $\xi \in \mathfrak{g}$. Koska $\omega = -\mathrm{d}\lambda$, edellisestä seuraa, että

$$\mathrm{d}\left(\iota_{v_\xi}\lambda\right) = \iota_{v_\xi}\omega \quad \text{jokaisella } \xi \in \mathfrak{g}.$$

Funktio $H_\xi = \iota_{v_\xi}\lambda = \lambda\left(v_\xi\right)$ toteuttaa yhtälön (7.3) jokaisella $\xi \in \mathfrak{g}$, joten kaavan $\mu_p(\xi) = H_\xi(p)$ määräämä kuvaus $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ on momenttikuvaus. □

Edellistä tulosta voidaan soveltaa suoraan faasiavaruuteen. Propositiossa 6.3 on osoitettu, että konfiguraatioavaruudella M määritelty diffeomorfismi ϕ määrää faasiavaruudelle T^*M symplektomorfismin $\mathrm{T}^*\phi$. Lisäksi kyseisen proposition todistuksessa on osoitettu, että myös Liouvillen 1-muoto λ on tämän symplektomorfismin suhteen invariantti. Tätä tulosta käyttäen jokaisesta konfiguraatioavaruuden G-toiminnasta ψ saadaan muodostettua symplektinen G-toiminta $\hat{\psi}$ faasiavaruudelle kaavalla

$$\hat{\psi}^g = \mathrm{T}^*\left(\psi^{g^{-1}}\right).$$

Koska Liouvillen 1-muoto on kyseisen toiminnan suhteen G-invariantti, toiminta $\hat{\psi}$ on hamiltonilainen. Lisäksi koska kuvauksen $\hat{\psi}^g$ määritelmässä käytetään käänteisalkiota g^{-1}, kuvan 4.1 kommutatiivisen kaavion perusteella kuvaukset

$\psi^g \in \mathrm{Diff}\,(M)$ ja $\hat{\psi}^g \in \mathrm{Diff}\,(\mathrm{T}^*M)$ toteuttavat yhtälön

$$\psi^g \circ \pi = \pi \circ \hat{\psi}^g \quad \text{jokaisella } g \in G. \tag{7.4}$$

Seuraavaksi näytetään, että faasiavaruuden momenttikuvaukselle saadaan hyvin yksinkertainen esitysmuoto.

LAUSE 7.9. *Monistolla M määritellyn G-toiminnan ψ määräämän hamiltonilaisen G-toiminnan $\hat{\psi}$ momenttikuvaus voidaan esittää pisteessä p_q kaavalla*

$$\mu_{p_q}(\xi) = p_q\left(\left(v_\xi\right)_q\right),$$

missä $v_\xi \in \mathfrak{X}(M)$ on vektorin $\xi \in \mathfrak{g}$ määräämä vektorikenttä.

Todistus. Proposition 7.8 perusteella hamiltonilaisen G-toiminnan $\hat{\psi}$ momenttikuvaus voidaan esittää kaavalla

$$\mu_p(\xi) = \lambda_{p_q}\left(\left(\hat{v}_\xi\right)_{p_q}\right),$$

missä $\hat{v}_\xi$ se vektorikenttä, jonka $\xi \in \mathfrak{g}$ määrää monistolle T^*M. Kun tähän sovelletaan Liouvillen 1-muodon määritelmää, saadaan

$$\mu_p(\xi) = p_q\left(\mathrm{T}_{p_q}\pi\left(\left(\hat{v}_\xi\right)_{p_q}\right)\right).$$

Proposition todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$\mathrm{T}_{p_q}\pi\left(\left(\hat{v}_\xi\right)_{p_q}\right) = \left(v_\xi\right)_q$$

jokaisella $p_q \in \mathrm{T}^*M$. Suoraan vektorikentän $\hat{v}_\xi$ määritelmää ja yhtälöä (7.4) käyttäen jokaisella $f \in \mathfrak{F}(M)$ saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{p_q}\pi\left(\left(\hat{v}_\xi\right)_{p_q}\right)(f) &= \left(\hat{v}_\xi\right)_{p_q}(f \circ \pi) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \pi\left(\hat{\psi}^{\exp(t\xi)}\left(p_q\right)\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\psi^{\exp(t\xi)} \circ \pi\left(p_q\right)\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\psi^{\exp(t\xi)}(q)\right) = \left(v_\xi\right)_q(f).
\end{aligned}$$

□

7.3 *Liikemäärä ja pyörimismäärä*

Riemannin moniston (M, g) symmetrioita eli kuvauksia $\phi \in \mathrm{Diff}\,(M)$, joilla $\phi^* g = g$, kutsutaan *isometrioiksi*. Seuraavassa propositiossa osoitetaan, että isometrian ϕ määräämä symplektomorfismi $\mathrm{T}^*\phi$ ovat geodeesisysteemin symmetria:

PROPOSITIO 7.10. *Jos* $\phi \in \mathrm{Diff}(M)$ *on isometria, niin monistolla* T^*M *määritelty Hamiltonin funktio*

$$H(p_q) = \frac{1}{2}\|p_q\|^2$$

on invariantti symplektomorfismin $\mathrm{T}^*\phi$ *suhteen. Toisin sanoen,* $H \circ \mathrm{T}^*\phi = H$.

Todistus. Kiinnitetään $q \in M$, ja käytetään Hamiltonin funktiolle esitysmuotoa

$$H(p_q) = \frac{1}{2} p_q\left(g^\sharp(p_q)\right).$$

Yhtälöä (4.2) käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} H \circ \mathrm{T}^*\phi(p_q) &= \frac{1}{2}\mathrm{T}^*\phi(p_q)\left(g^\sharp\left(\mathrm{T}^*\phi(p_q)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} p_q\left(\mathrm{T}\phi \circ g^\sharp \circ \mathrm{T}^*\phi(p_q)\right). \end{aligned}$$

Proposition todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$\mathrm{T}\phi \circ g^\sharp \circ \mathrm{T}^*\phi = g^\sharp.$$

Pullback-tensorin ϕ^*g määritelmää käyttäen nähdään, että kaikilla pisteen q tangenttivektoreilla u_q ja v_q pätee

$$\begin{aligned} (\phi^*g)_q(u_q, v_q) &= g_{\phi(q)}\left(\mathrm{T}\phi(u_q), \mathrm{T}\phi(v_q)\right) \\ &= g^\flat \circ \mathrm{T}\phi(u_q)\left(\mathrm{T}\phi(v_q)\right) \\ &= \mathrm{T}^*\phi \circ g^\flat \circ \mathrm{T}\phi(u_q)(v_q). \end{aligned}$$

Toisaalta vektoreilla u_q ja v_q pätee myös

$$g_q(u_q, v_q) = g^\flat(u_q)(v_q).$$

Koska $\phi^*g = g$, edellisten yhtälöiden perusteella saadaan

$$\mathrm{T}^*\phi \circ g^\flat \circ \mathrm{T}\phi(u_q)(v_q) = g^\flat(u_q)(v_q).$$

Tämän yhtälön pitää toteutua mielivaltaisen pisteen mielivaltaisilla tangenttivektoreilla, ja näin ollen

$$\mathrm{T}^*\phi \circ g^\flat \circ \mathrm{T}\phi = g^\flat.$$

Yhdistämällä tähän yhtälöön vasemmalta puolelta kuvaus $\mathrm{T}\phi \circ g^\sharp$ saadaan

$$\mathrm{T}\phi \circ g^\sharp \circ \mathrm{T}^*\phi \circ g^\flat \circ \mathrm{T}\phi = \mathrm{T}\phi.$$

Kun tähän yhdistetään vielä oikealta kuvaus $\mathrm{T}\phi^{-1} \circ g^\sharp$, jäljelle jää

$$\mathrm{T}\phi \circ g^\sharp \circ \mathrm{T}^*\phi = g^\sharp. \qquad \square$$

Isometrian $\phi \in \mathrm{Diff}(M)$ määräämä geodeesisysteemin symmetria on luonnollisesti myös potentiaalilla $V \in \mathfrak{F}(M)$ varustetun mekaanisen systeemin symmetria, jos $\phi^* V = V$.

Lien ryhmä G ja sen toiminta $\psi\colon G \times M \to M$ muodostavat Riemannin moniston (M, g) *isometriaryhmän*, jos moniston M jokainen isometria voidaan esittää kuvauksena $\psi^g \in \mathrm{Diff}(M)$ jollain $g \in G$. Myersin–Steenrodin lauseen (Kobayashi 1995, s. 39) mukaan Riemannin moniston isometriat muodostavat aina äärellisulotteisen Lien ryhmän.

Aivan kuten muidenkin toimintojen tapauksessa, isometriaryhmän Lien algebran alkio $\xi \in \mathfrak{g}$ voidaan kuvata vektorikentäksi $v_\xi \in \mathfrak{X}(M)$, jonka virtaus on symmetriaryhmän yksiparametrinen aliryhmä. Isometriaryhmien tapauksessa tällaisia vektorikenttiä kutsutaan *Killingin vektorikentiksi*.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ isometriaryhmä on *euklidinen ryhmä* $\mathrm{E}(n)$, joka on monistona diffeomorfinen moniston $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ kanssa (Lee 2013, s. 168). Euklidinen ryhmä voidaan jakaa sekä peilaukset että rotaatiot sisältävään matriisiryhmään $\mathrm{O}(n)$ ja translaatiot sisältävään Abelin ryhmään $\mathrm{T}(n) = (\mathbb{R}^n, +)$. Tarkastellaan seuraavaksi erikseen näitä kahta ryhmää ja niiden momenttikuvauksia. Ryhmän $\mathrm{O}(n)$ tapauksessa rajoitutaan identiteetin sisältävään yhtenäiseen komponenttiin $\mathrm{SO}(n)$, sillä ainoastaan siihen kuuluvat kuvaukset voivat syntyä vektorikenttien virtauksina.

Translaatioiden Lien ryhmällä $\mathrm{T}(n)$ on vektoriavaruuden rakenne, joten se voidaan samaistaa Lien algebran $\mathfrak{T}(n) = \mathrm{T}_0(\mathbb{R}^n)$ kanssa vektoriavaruuksien isomorfismilla (2.1). Tällöin myös sileän kuvauksen derivaatta samaistetaan sen komponenttimatriisiin ja avaruuteen $(\mathbb{R}^n)^*$ kuuluvat kovektorit esitetään sisätulon $\langle u, v\rangle = \sum u^i v^i$ avulla vektoreina.

Translaatioryhmän toiminta avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(n) \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (u, q) &\mapsto q + u. \end{aligned}$$

Valitsemalla kiinteä $q \in \mathbb{R}^n$ saadaan kuvaus

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(n) &\to \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto q + u, \end{aligned}$$

jonka derivaatta identiteetissä $0 \in \mathrm{T}(n)$ on identiteettimatriisi. Näin ollen Lien algebran alkio $\xi \in \mathfrak{T}(n)$ määrää Killingin vektorikentän $v_\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, jonka arvo pisteessä $q \in \mathbb{R}^n$ on kaavan (7.2) perusteella

$$\left(v_\xi\right)_q = \xi.$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa translaatioryhmä on mekaanisen systeemin symmetriaryhmä. Faasiavaruus $T^*(\mathbb{R}^n)$ voidaan samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^{2n}$ kanssa, jolloin systeemin tila voidaan ilmaista vektorina

$$(q, p) = \left(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n\right).$$

Ryhmän $\mathrm{T}(n)$ toiminta monistolla $\mathbb{R}^n$ määrää symplektisen toiminnan monistolle $T^*(\mathbb{R}^n)$, jolla on eksakti symplektinen muoto

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}r^i \wedge \mathrm{d}r^{n+i}.$$

Lauseen 7.9 perusteella toiminta on hamiltonilainen ja sen momenttikuvaus saa pisteessä $(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ alkiolla $\xi \in \mathfrak{T}(n)$ arvon

$$\mu_{(q,p)}(\xi) = \left\langle p, \left(v_\xi\right)_q \right\rangle = \langle p, \xi \rangle = \sum p_i \xi^i.$$

Havaitaan siis, että jos mekaaninen systeemi on symmetrinen translaatioiden suhteen, niin liikemäärävektori $p = (p_1, \ldots, p_n)$ on systeemin liikevakio.

Tarkastellaan seuraavaksi matriisiryhmää $\mathrm{SO}(n)$. Monisto $\mathbb{R}^{n\times n}$ ja sen tangenttiavaruudet samaistetaan keskenään isomorfismilla

$$\left(A^{ij}\right) \mapsto \sum A^{ij} \left.\frac{\partial}{\partial r^{ij}}\right|_B, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

PROPOSITIO 7.11. *Matriisiryhmä* $\mathrm{SO}(n)$ *on Lien ryhmä, ja sen Lien algebra* $\mathfrak{so}(n)$ *on kanonisesti isomorfinen antisymmetristen* $n \times n$ *-matriisien vektoriavaruuden kanssa.*

Todistus (Tu 2011, s. 166–167, 179). Osoitetaan aluksi, että $\mathrm{O}(n)$ ja $\mathrm{SO}(n)$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^{n\times n}$ alimonistoja. Olkoon $S \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisistä matriiseista koostuva aliavaruus. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to S$ kaavalla

$$f(A) = A^{\mathrm{T}} A.$$

Kanonisia isomorfismeja $T_A\mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $T_{f(A)}S \simeq S$ käyttäen kuvauksen f derivaatta voidaan esittää kuvauksena $T_A f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to S$.

Määritellään käyrä $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ kaavalla

$$C(t) = A + tV, \quad A, V \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Tällöin $C(0) = A$ ja $C'(0) = V$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} T_A f(V) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ C \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} C^{\mathrm{T}} C \end{aligned}$$

$$= C'(0)^{\mathrm{T}} C(0) + C(0)^{\mathrm{T}} C'(0)$$
$$= V^{\mathrm{T}} A + A^{\mathrm{T}} V.$$

Määritellään joukko $\mathrm{O}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ alkukuvajoukkona $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(\{I\})$, missä I on identiteettimatriisi. Tällöin siis $Q \in \mathrm{O}(n)$, jos ja vain jos $Q^{\mathrm{T}} Q = I$. Jotta $\mathrm{O}(n)$ olisi alimonisto, täytyy derivaatan $\mathrm{T}_Q f$ olla surjektiivinen jokaisessa pisteessä $Q \in \mathrm{O}(n)$. Vaaditaan siis, että jokaisella $B \in S$ ja $Q \in \mathrm{O}(n)$ on olemassa $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jolla

$$B = \mathrm{T}_Q f(V) = V^{\mathrm{T}} Q + Q^{\mathrm{T}} V.$$

Koska $B = B^{\mathrm{T}}$ ja $\left(V^{\mathrm{T}} Q\right)^{\mathrm{T}} = Q^{\mathrm{T}} V$, edellinen yhtälö saadaan muotoon

$$Q^{\mathrm{T}} V = \frac{1}{2} B, \quad \text{eli} \quad V = \frac{1}{2}\left(Q^{\mathrm{T}}\right)^{-1} B = \frac{1}{2} Q B.$$

Näin ollen $\operatorname{rk} \mathrm{T}_Q f = \dim S$ jokaisella $Q \in \mathrm{O}(n)$. Symmetristen matriisien aliavaruuden dimensio on

$$\dim S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Lauseen 2.16 perusteella $\mathrm{O}(n)$ on $\mathbb{R}^{n\times n}$:n alimonisto, ja sen dimensio on

$$\dim \mathrm{O}(n) = n^2 - \dim S = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Ehdon $Q^{\mathrm{T}} Q = I$ perusteella nähdään, että $\det(Q) = \pm 1$ jokaisella $Q \in \mathrm{O}(n)$. Koska determinantti on jatkuva funktio, positiivisella determinantilla varustettujen matriisien joukko $U = \det^{-1}(\mathbb{R}_+)$ on avoin. Alimonisto $\mathrm{SO}(n)$ saadaan leikkauksena $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap U$.

Monisto $\mathrm{SO}(n)$ muodostaa ryhmän, sillä se on selvästi suljettu matriisikertolaskun ja matriisin kääntämisen suhteen. Ryhmäoperaatiot ovat lisäksi sileitä avoimella alimonistolla $\mathrm{GL}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Lähteessä (Lee 2013, s. 113) on osoitettu, että edellisen perusteella ryhmäoperaatiot ovat sileitä myös alimonistolla $\mathrm{SO}(n)$. Näin ollen $\mathrm{SO}(n)$ on Lien ryhmä.

Tutkitaan seuraavaksi Lien algebran $\mathfrak{so}(n) = \mathrm{T}_I \mathrm{SO}(n)$ rakennetta. Olkoon $C\colon I \to \mathrm{SO}(n)$ identiteetistä alkava sileä käyrä. Merkitään lisäksi $C'(0) = V$. Koska $C(t) \in \mathrm{SO}(n)$ jokaisella $t \in \mathbb{R}$, toteuttaa se ehdon

$$C(t)^{\mathrm{T}} C(t) = I.$$

Derivoimalla edellinen yhtälö saadaan

$$C'(t)^{\mathrm{T}} C(t) + C(t)^{\mathrm{T}} C'(t) = 0.$$

Sijoittamalla $t = 0$ saadaan

$$V^{\mathrm{T}} I + IV = 0, \quad \text{eli} \quad V = -V^{\mathrm{T}}.$$

Havaitaan siis, että algebraan $\mathfrak{so}(n)$ kuuluvat matriisit ovat antisymmetrisia. Toisaalta antisymmetristen matriisien aliavaruudelle $K \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ saadaan

$$\dim K = 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{n^2 - n}{2} = \dim \mathrm{SO}(n).$$

Näin ollen $\mathfrak{so}(n) \simeq K$. □

Ryhmän $\mathrm{SO}(n)$ toiminta avaruuden $\mathbb{R}^n$ origon suhteen on

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (Q, q) &\mapsto Qq. \end{aligned}$$

Valitsemalla kiinteä $q \in \mathbb{R}^n$ saadaan kuvaus

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &\to \mathbb{R}^n \\ Q &\mapsto Qq. \end{aligned}$$

Kyseisen kuvauksen derivaatta identiteetissä on q. Kaavaa (7.2) käyttäen antisymmetrisen matriisin $A \in \mathfrak{so}(n)$ määräämälle Killingin vektorikentälle $v_A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ saadaan pisteessä $q \in \mathbb{R}^n$ kaava

$$(v_A)_q = Aq.$$

Tapauksessa $n = 3$ havaitaan, että

$$Aq = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 q^3 - \xi_3 q^2 \\ \xi_3 q^1 - \xi_1 q^3 \\ \xi_1 q^2 - \xi_2 q^1 \end{pmatrix} = \xi \times q,$$

missä $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ja $\xi \times q$ on vektorien ξ ja q ristitulo. Näin ollen Lien algebran $\mathfrak{so}(3)$ alkiot voidaan samaistaa $\mathbb{R}^3$:n vektorien kanssa, jolloin vektorin $\xi \in \mathfrak{so}(3)$ määräämä vektorikenttä saadaan kaavalla

$$\left(v_\xi\right)_q = \xi \times q.$$

Seuraavaksi tätä tulosta sovelletaan pistemäisen kappaleen liikkeeseen kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Kuten aiemmin, faasiavaruus $\mathrm{T}^*\left(\mathbb{R}^3\right)$ samaistetaan avaruuden $\mathbb{R}^6$ kanssa, jolloin sen pisteet ovat vektoreita

$$(q, p) = \left(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3\right).$$

Ryhmän $\mathrm{SO}(3)$ toiminta monistolla $\mathbb{R}^3$ määrää faasiavaruudelle $\mathrm{T}^*\left(\mathbb{R}^3\right)$ hamiltonilaisen toiminnan. Lauseen 7.9 perusteella momenttikuvaus saa pisteessä

$(q, p) \in \mathrm{T}^*(\mathbb{R}^3)$ alkiolla $\xi \in \mathfrak{so}(3)$ arvon

$$\mu_{(q,p)}(\xi) = \left\langle p, \left(v_\xi\right)_q \right\rangle = \langle p, \xi \times q \rangle .$$

Skalaarikolmitulon termien järjestystä vaihtamalla momenttikuvaukselle saadaan kaava

$$\mu_{(q,p)}(\xi) = \langle \xi, q \times p \rangle .$$

Näin saatu vektori

$$L = q \times p$$

tunnetaan fysiikassa nimellä *pyörimismäärä*. Kolmiulotteisen mekaanisen systeemin symmetrisyys ryhmän $\mathrm{SO}(3)$ suhteen johtaa siis pyörimismäärän säilymiseen.

8 Yhteenveto

Tässä diplomityössä Hamiltonin mekaniikkaa tarkasteltiin modernin differentiaaligeometrian työkaluja käyttäen. Kerrataan lyhyesti teorian geometrinen sisältö. Hamiltonilaisen systeemin määrittelyssä käytetty geometrinen rakenne on symplektinen muoto eli 2-differentiaalimuoto, jonka vaaditaan olevan ei-singulaarinen ja suljettu. Symplektisen muodon ei-singulaarisuus takaa, että jokaista sileän funktion differentiaalia vastaa yksikäsitteinen hamiltonilainen vektorikenttä. Symplektisen muodon antisymmetrisyyden vuoksi tällaisen vektorikentän integraalikäyrät asettuvat kentän synnyttävän funktion tasa-arvopinnoille, mikä johtaa mekaanisten systeemien tapauksessa kokonaisenergian säilymiseen. Lisäksi koska symplektinen muoto on suljettu, hamiltonilaisen vektorikentän virtaus säilyttää symplektisen rakenteen. Tästä seuraa muun muassa Liouvillen lause faasiavaruuden tilavuuden muuttumattomuudesta.

Modernien menetelmien tehokkuudesta viestii se, että esimerkiksi historiallisesti merkittävien Liouvillen ja Noetherin lauseiden todistukset ovat triviaaleja symplektisessä kontekstissa. Kun fysiikkaan liittyvät matemaattiset rakenteet määritellään huolellisesti koordinaatistosta riippumattomalla tavalla, saadaan usein helposti tuloksia, joiden näkeminen klassisilla menetelmillä on huomattavasti suuremman työn takana.

Monien fysiikan ongelmien ratkaisut perustuvat säilymislakien ja liikevakioiden tunnistamiseen. Tämän työn päämääränä oli tarkastella, milloin hamiltonilaisen systeemin symmetriaryhmä määrää liikevakion. Yleisten hamiltonilaisten systeemien tapauksessa osoitettiin, että symmetriaryhmään liittyy liikevakio, jos sen infinitesimaaliset symmetriat ovat hamiltonilaisia vektorikenttiä. Tällöin symmetrian määräävää G-toimintaa kutsutaan hamiltonilaiseksi toiminnaksi. Tulos on Noetherin lauseen yleistys yksiparametrisilta symmetriaryhmiltä yleisille Lien ryhmille.

Faasiavaruudessa määriteltyjen systeemien tapauksessa näytettiin, että jokainen konfiguraatioavaruuden G-toiminta määrää faasiavaruudelle hamiltonilaisen G-toiminnan. Esimerkiksi Riemannin moniston isometriaryhmään liittyy aina geodeesisysteemin liikevakio. Euklidisen ryhmän tapauksessa liikevakioiksi saatiin liikemäärä ja pyörimismäärä.

Lähteet

ABRAHAM, R., MARSDEN, J.E., *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Addison–Wesley, Redwood, California, 1978.

ARNOLD, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, New York, 1989.

BERNDT, R., *An Introduction to Symplectic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

CANNAS DA SILVA, A., *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer, Berlin, 2001.

HALMOS, P.R., *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer, New York, 1987.

KOBAYASHI, S., *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer, Berlin, 1995.

LEE, J.M., *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009.

LEE, J.M., *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Springer, New York, 2013.

MAC LANE, S., *Mathematics: Form and Function*, Springer, New York, 1986.

PUGH, C.C., *Real Mathematical Analysis*, Springer, New York, 2002.

SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I*, 3rd ed., Publish or Perish, Houston, Texas, 2005.

TU, L.W., *An Introduction to Manifolds*, 2nd ed., Springer, New York, 2011.

A Topologia

MÄÄRITELMÄ A.1. *Topologinen avaruus koostuu joukosta X ja osajoukkojen $U_\lambda \subset X$ kokoelmasta $\mathcal{T}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

1 *Tyhjä joukko $\varnothing$ ja koko avaruus X kuuluvat kokoelmaan $\mathcal{T}$.*

2 *Jos $U_\lambda \in \mathcal{T}$ jokaisella $\lambda \in \Lambda$, niin $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$.*

3 *Jos $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{T}$, niin $U_\alpha \cap U_\beta \in \mathcal{T}$.*

Kokoelmaa $\mathcal{T}$ kutsutaan joukon X *topologiaksi* ja joukkoja U_λ *avoimiksi joukoiksi*. Joukko on *suljettu*, jos sen komplementti on avoin. Avoin joukko, joka sisältää pisteen $x \in X$, on kyseisen pisteen *avoin ympäristö*.

PROPOSITIO A.2. *Joukko $S \subset X$ on avoin, jos ja vain jos jokaisella pisteellä $x \in S$ on avoin ympäristö $U \subset S$.*

Todistus. Oletetaan, että jokaisella pisteellä $x \in S$ on avoin ympäristö $U_x \subset S$. Tällöin

$$\bigcup_{x \in S} U_x \subset S = \bigcup_{x \in S} \{x\} \subset \bigcup_{x \in S} U_x \quad \text{eli} \quad S = \bigcup_{x \in S} U_x,$$

ja näin ollen S on avoin.

Todistus käänteiseen suuntaan on selvä, sillä avoin joukko S on jokaisen pisteensä avoin ympäristö ja $S \subset S$. □

MÄÄRITELMÄ A.3. *Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on Hausdorffin avaruus, jos jokaisella eri pisteellä x ja y on olemassa avoimet ympäristöt U_x ja U_y, joilla $U_x \cap U_y = \varnothing$.*

MÄÄRITELMÄ A.4. *Topologinen avaruus X on yhtenäinen, jos ainoat osajoukot, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja, ovat X ja $\varnothing$.*

MÄÄRITELMÄ A.5. *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva pisteessä $x \in X$, jos jokaisella pisteen $f(x) \in Y$ avoimella ympäristöllä $V \subset Y$ on olemassa pisteen x avoin ympäristö $U \subset X$, jolla $f(U) \subset V$. Kuvaus on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä.*

Seuraava propositio antaa jatkuvuudelle edellistä elegantimman kriteerin:

PROPOSITIO A.6. *Kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon $V \subset Y$ alkukuvajoukko $f^{-1}(V) \subset X$ on avoin.*

Todistus (Tu 2011, s. 328). Oletetaan, että f on jatkuva ja $V \subset Y$ on avoin. Jos $f^{-1}(V) = \varnothing$, se on avoin. Oletataan siis, että $f^{-1}(V) \neq \varnothing$ ja $x \in f^{-1}(V)$, jolloin $f(x) \in V$. Koska f on jatkuva, pisteellä x on avoin ympäristö U, jolla $f(U) \subset V$. Näin ollen mielivaltaisellla pisteellä $x \in f^{-1}(V)$ on olemassa avoin ympäristö $U \subset f^{-1}(V)$, joten $f^{-1}(V)$ on avoin joukko.

Oletetaan seuraavaksi, että $f^{-1}(V)$ on avoin, jos $V \subset Y$ on avoin. Olkoon V pisteen $f(x)$ avoin ympäristö, jolloin $U = f^{-1}(V)$ on pisteen x avoin ympäristö. Nyt $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$, joten f on jatkuva pisteessä x. □

Bijektiivinen kuvaus $f : X \to Y$ on *homeomorfismi*, jos sekä f että f^{-1} ovat jatkuvia. Topologisten avaruuksien X ja Y sanotaan olevan keskenään homeomorfisia, jos niiden välillä on homeomorfismi. Vaatimus käänteiskuvauksen jatkuvuudesta on välttämätön, sillä se ei seuraa kuvauksen jatkuvuudesta.

Jos avaruuden topologia $\mathcal{T}$ voidaan esittää pienemmän joukkokokoelman $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ jäsenten unioneina, niin kokoelmaa $\mathcal{B}$ kutsutaan avaruuden *kannaksi*. Esimerkiksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$ *avoimet pallot*

$$\mathrm{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$$

muodostavat topologian kannan. Topologisella avaruudella on *numeroituva kanta*, jos sillä on kanta, joka koostuu numeroituvasta määrästä avoimia joukkoja. Esimerkiksi $\mathbb{R}^n$:lle voidaan muodostaa numeroituva kanta rationaalilukukeskeisistä ja -säteisistä avoimista palloista.

MÄÄRITELMÄ A.7. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $S \subset X$. Osajoukosta S saadaan topologinen avaruus $(S, \mathcal{T}_S)$ määräämällä aliavaruustopologia*

$$\mathcal{T}_S = \{U \cap S \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Joukko on siis avoin aliavaruustopologiassa $\mathcal{T}_S$, jos se voidaan esittää jonkin topologiaan $\mathcal{T}$ kuuluvan avoimen joukon ja joukon S leikkauksena. Tarkastellaan esimerkin vuoksi joukkoa $V = (-1, 1) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Tämä joukko ei ole avoin $\mathbb{R}^2$:n tavallisen topologian suhteen, mutta se on avoin x-akselin eli osajoukon $S = \mathbb{R} \times \{0\}$ aliavaruustopologiassa, sillä $V = S \cap \mathrm{B}((0,0), 1)$.

PROPOSITIO A.8. *Aliavaruustopologille saadaan seuraavat tulokset:*

1 *Jos X on Hausdorffin avaruus ja $S \subset X$, niin topologinen aliavaruus S on Hausdorffin avaruus.*

2 *Jos topologisella avaruudella X on numeroituva kanta ja $S \subset X$, niin topologi-*

sella aliavaruudella S on numeroituva kanta.

Todistus. Katso (Tu 2011, s. 324, 326).

MÄÄRITELMÄ A.9. *Jos $(X, \mathcal{T}_X)$ ja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ovat topologisia avaruuksia, niin joukosta $X \times Y$ saadaan topologinen avaruus määrittelemällä tulotopologia, jonka kanta on*

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ ja } V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Tulotopologian määritelmän mukainen kanta avaruudelle $\mathbb{R}^2$ koostuu siis avoimista suorakulmioista $(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$. On helppoa osoittaa, että sekä tulotopologian määräämä kanta että $\mathbb{R}^2$:n avoimista palloista koostuva kanta indusoivat saman topologian.

PROPOSITIO A.10. *Tulotopologialle saadaan seuraavat tulokset:*

1 *Jos X ja Y ovat Hausdorffin avaruuksia, niin topologinen avaruus $X \times Y$ on Hausdorffin avaruus.*

2 *Jos topologisilla avaruuksilla X ja Y on numeroituva kanta, niin topologisella avaruudella $X \times Y$ on numeroituva kanta.*

Todistus. Katso (Tu 2011, s. 326–327).

B Algebra

MÄÄRITELMÄ B.1. *Joukko G ja binäärilaskutoimitus*

$$
\begin{aligned}
G \times G &\to G \\
(g, h) &\mapsto g \circ h
\end{aligned}
$$

muodostavat ryhmän, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1 *On olemassa neutraalialkio $e \in G$, jolla $e \circ g = g \circ e = g$ jokaisella $g \in G$.*

2 *Jokaisella $g \in G$ on olemassa käänteisalkio $g^{-1} \in G$, jolla $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$.*

3 *Laskutoimitus on assosiatiivinen, eli*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad \textit{jokaisella } f, g, h \in G.$$

Jos ryhmän laskutoimitus on *kommutatiivinen* eli jos

$$g \circ h = h \circ g \quad \text{jokaisella } g, h \in G,$$

ryhmää kutsutaan *Abelin ryhmäksi*. Tällöin identiteettialkiota merkitään yleensä 0:lla, alkion a käänteisalkiota $-a$:lla ja ryhmäoperaatiota $+$:lla.

MÄÄRITELMÄ B.2. *Abelin ryhmä $(R, +)$ ja sillä määritelty binäärioperaatio*

$$
\begin{aligned}
R \times R &\to R \\
(a, b) &\mapsto ab
\end{aligned}
$$

muodostavat renkaan, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1 *On olemassa neutraalialkio $1 \in R$, jolla $1a = a1 = a$ jokaisella $a \in R$.*

2 *Jokaisella $a, b, c \in R$ toteutuu*

$$(ab)\,c = a\,(bc)\,, \quad a\,(b + c) = (ab) + (ac) \quad \textit{ja} \quad (a + b)\,c = (ac) + (bc)\,.$$

MÄÄRITELMÄ B.3. *Renkaan R yli määritelty moduli eli R-moduli koostuu Abelin ryhmästä $(M, +)$ ja binäärioperaatiosta*

$$
\begin{aligned}
R \times M &\to M \\
(a, u) &\mapsto au,
\end{aligned}
$$

jotka toteuttavat jokaisella $a, b \in R$ ja $u, v \in M$ sekä distributiivisuuslait

$$a(u+v) = au + av \quad \text{ja} \quad (a+b)u = au + bu$$

että yhteensopivuusehdot

$$(ab)u = a(bu) \quad \text{ja} \quad 1u = u.$$

Rengas F on *kunta*, jos kertolasku on kommutatiivinen ja jokaisella nollasta poikkeavalla $a \in F$ on käänteisalkio kertolaskun suhteen. Kun modulin määritelmän rengas korvataan kunnalla F, modulista saadaan F*-vektoriavaruus*.

Kuvauksia, jotka säilyttävät tarkasteltavan algebrallisen rakenteen, kutsutaan *homomorfismeiksi*. Esimerkiksi vektoriavaruuksien U ja V välinen homomorfismi eli *lineaarikuvaus* on kuvaus $A\colon U \to V$, jolla

$$A(au + bv) = aA(u) + bA(v)$$

jokaisella $a, b \in F$ ja $u, v \in U$. Bijektiivinen homomorfismi on *isomorfismi*.

Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti $\mathbb{R}$-vektoriavaruuksien keskeisiä ominaisuuksia. Tarkemmin aihetta on käsitelty esimerkiksi kirjassa (Halmos 1987).

Vektorijoukko $S \subset V$ on *lineaarisesti riippumaton*, jos sen kaikilla äärellisillä osajoukoilla $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset S$ yhtälön

$$\sum a^i v_i = 0, \quad a^i \in \mathbb{R}$$

ainoa ratkaisu on $a^1 = a^2 = \cdots = a^k = 0$. Vektoriavaruuden osajoukko on *aliavaruus*, jos se on suljettu vektorien yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun suhteen. Pienintä joukon $S \subset V$ sisältävää aliavaruutta merkitään $\operatorname{span}(S)$. Joukko E on avaruuden V *kanta*, jos $V = \operatorname{span}(E)$ ja E on lineaarisesti riippumaton. Kannan alkioiden lukumäärää kutsutaan vektoriavaruuden dimensioksi $\dim V$.

Lineaarikuvaus $A\colon U \to V$ määrää kanoniset aliavaruudet

$$\operatorname{im}(A) = A(U) \quad \text{ja} \quad \ker(A) = A^{-1}(\{0\}).$$

Kuva-avaruuden $\operatorname{im}(A) \subset V$ dimensiota kutsutaan kuvauksen *asteeksi* ja merkitään $\operatorname{rk} A$. *Nolla-avaruuden* $\ker(A) \subset U$ dimensiota merkitään $\operatorname{nl} A$. Dimensiolauseen (Halmos 1987, s. 90) mukaan

$$\dim U = \operatorname{rk} A + \operatorname{nl} A.$$

Koska $\operatorname{nl} A \geq 0$, saadaan $\operatorname{rk} A \leq \dim U$. Lisäksi $\operatorname{rk} A \leq \dim V$, sillä $\operatorname{im}(A) \subset V$. Lineaarikuvauksen $A\colon U \to V$ asteelle saadaan siis epäyhtälö

$$\operatorname{rk} A \leq \min(\dim U, \dim V).$$

Jos $\operatorname{rk} A$ saa maksimiarvonsa, kuvausta A sanotaan *täysiasteiseksi*.

Välttämätön ehto lineaarikuvauksen $A\colon U \to V$ injektiivisyydelle on, että $\dim U \leq \dim V$. Vastaavasti välttämätön ehto surjektiivisuudelle on, että $\dim U \geq \dim V$. Riittävä ehto molemmissa tapauksissa on kuvauksen täysiasteisuus. Lineaarikuvaus $A\colon U \to V$ on siis isomorfismi, jos ja vain jos

$$\operatorname{rk} A = \dim U = \dim V.$$

Olkoon S joukko ja V vektoriavaruus. Kuvauksilla $f\colon S \to V$ on vektoriavaruuden rakenne, kun vektorien f ja g laskutoimitukset määritellään säännöillä

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \quad \text{ja} \quad (af)(s) = a(f(s)), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Nyt voidaan määritellä lineaarikuvausten vektoriavaruus

$$\operatorname{Hom}(U, V) = \{A \mid A\colon U \to V \text{ on lineaarinen}\}.$$

Kun lineaarikuvausten kertolaskuksi valitaan kuvausten kompositio, saadaan *endomorfismien* rengas $\operatorname{End}(V) = \operatorname{Hom}(V, V)$ ja *automorfismien* ryhmä

$$\operatorname{Aut}(V) = \{A \in \operatorname{End}(V) \mid A \text{ on isomorfismi}\}.$$

Vektoriavaruuden V *duaaliavaruus* on $V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$. Duaaliavaruuden alkioita kutsutaan *kovektoreiksi*. Olkoon $\{e_1, \ldots, e_n\}$ avaruuden V kanta. Määritellään kovektorit $\epsilon^i \in V^*$ siten, että

$$\epsilon^i\left(e_j\right) = \delta^i_j, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

missä

$$\delta^i_j = \delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases}$$

Jokainen kovektori ω voidaan kirjoittaa muodossa

$$\omega = \sum \omega_i \epsilon^i, \quad \text{missä } \omega_i = \omega(e_i),$$

sillä jokaisella $v = \sum v^i e_i$ saadaan

$$\omega(v) = \sum v^i \omega(e_i) = \sum \omega_i \epsilon^i(v).$$

Havaitaan, että $\operatorname{span}(\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\}) = V^*$. Joukon $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\}$ lineaarinen riippumattomuus nähdään asettamalla $v = e_j$, jolloin

$$0 = \sum \omega_i \epsilon^i\left(e_j\right) = \sum \omega_i \delta^i_j = \omega_j.$$

Näin ollen $\dim V^* = \dim V$. Kantaa $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\}$ kutsutaan kannan $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *duaalikannaksi*.