



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

**Niilo Sointu**

**GEOMETRISEN ALGEBRAN SOVELTAMINEN SUPPEASSA  
SUHTEELLISUUSTEORIASSA**

Diplomityö

Tarkastajat: professori Sirkka-Liisa  
Eriksson ja professori Tapio Rantala  
Tarkastaja ja aihe hyväksytty  
Luonnontieteiden tiedekunnan tiede-  
kuntaneuvoston  
kokouksessa 13.8.2014

# TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

**NILO SOINTU: Geometrisen algebran soveltaminen suppeassa suhteellisuusteoriassa**

Diplomityö, 87 sivua

Lokakuu 2014

Pääaine: Matematiikka

Tarkastajat: professori Sirkka-Liisa Eriksson ja professori Tapio Rantala

Avainsanat: geometrisen algebra, suppea suhteellisuusteoria, aika-avaruuden algebra, itseisfysiikka, Lorentz-muunnokset

Geometrisen algebran kehitti William Clifford vuonna 1878 tarkoituksenaan yhdistää Grassmannin ulkotulo-algebra sekä Hamiltonin kvaternit. Suppean suhteellisuusteorian esitteli puolestaan Albert Einstein vuonna 1905. On kuitenkin syytä mainita myös Hendrik Lorentzin sekä Henri Poincarén saavutukset. David Hestenes yhdisti nämä teoriat aika-avaruuden algebraksi (eng. Space-Time Algebra [21]) vuonna 1966.

Tämän työn ensimmäisessä osassa määritellään geometrisen algebra. Geometrisen algebra on vektoriavaruus, jonka alkioiden välille on määritelty tulo-operaatio. Tämä tulo-operaatio on Cliffordin geometrisen tulo. Erotuksena yleiseen Cliffordin algebraan geometrisen algebran lähtökohta on nimensä mukaisesti geometrisen. Tässä työssä olennaista on kiertojen ja peilausten esitys geometrisen algebran keinoin, mikä on vastaavaa matriisiesitystä intuitiivisempi.

Tämän työn toisessa osassa tarkastellaan suppeaa suhteellisuusteoriaa, ja sen kuvaamista geometrisella algebralla. Suppea suhteellisuusteoria vastaa kysymykseen, miltä eri kappaleiden liikkeet näyttävät eri inertiaalisten havaitsijoiden näkökulmista. Työssä tutustutaan David Hestenesin muotoilemaan aika-avaruuden algebraan sekä itseisfysiikaksi (eng. proper physics) kutsuttuun suhteellisuusteorian esitystapaan. Lisäksi geometrista algebraa hyödynnetään Lorentzin muunnosten kuvamiiseen eräänlaisten Minkowskin aika-avaruuden peilausten ja kiertojen yhdistelminä.

Tämän työn tarkoitus on lisätä suomenkielisen geometrisen algebran kirjallisuuden tarjontaa. Erityisesti aika-avaruuden algebraa käsittelevää suomenkielistä työtä ei kirjoitushetkellä löytynyt. Työn esitys on looginen kokonaisuus, ja se soveltuu lukijalle, jolla ei ole aiempaa tietoa geometrisesta algebrasta. Aiheen rajauksen takia työssä ei käsitellä kaikkia mielenkiintoisia ja mahdollisia sovelluskohteita kuten kvanttimekaniikkaa tai relativistista kvanttikenttäteoriaa.

## ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Science and Engineering

**NIILO SOINTU : The Application of Geometric Algebra to Special Relativity**

Master of Science Thesis, 87 pages

October 2014

Major: Mathematics

Examiners: professor Sirkka-Liisa Eriksson and professor Tapio Rantala

Keywords: geometric algebra, special relativity, space-time algebra, proper physics, Lorentz transformations

Geometric algebra was developed by William Clifford in 1878 in order to unify Grassmann's exterior algebra and Hamilton's quaternions. Special relativity was introduced by Albert Einstein in 1905. However, it is appropriate to acknowledge the contributions to the subject made by two other physicist, namely Hendrik Lorentz and Henri Poincaré. It was not until 1966 when these two theories were merged in to Space-Time Algebra [21] by David Hestenes.

The first part of this thesis addresses the geometric algebra. Geometric algebra is a vector space, where the product operation is defined. This product operation is Clifford's geometric product. Geometric algebra differs from the more formal Clifford algebra only by its emphasis on geometric meaning. In this thesis, we study in length the representation of reflection and rotation by the methods of geometric algebra, which are more intuitive than the corresponding matrix representation.

In the second part of this thesis, we apply geometric algebra to special relativity. Special relativity answers the question, how the motion of different objects is seen by inertial observers. A special interest in this thesis is the space-time algebra and the proper physics formulation of special relativity by David Hestenes. In addition, geometric algebra is used to describe Lorentz transformations as combinations of some sort of reflections and rotations in Minkowski space-time.

The purpose of this thesis is to contribute to the scarce Finnish literature of geometric algebra. Particularly, no Finnish work on the space-time algebra was available while writing this thesis. The representation of this thesis proceeds logically and it is well suited for a reader with no former experience in geometric algebra. Due to the restriction of the subject, in this thesis, we will not consider such interesting topics as quantum mechanics and relativistic quantum field theory.

## ALKUSANAT

Tämä diplomityö sai alkunsa keväällä 2013. Työtä voi verrata isäni vanhaan Mer-suun. Käynnistyksen jälkeen dieselmotor lämpenee hitaasti, mutta edes avaimen poistaminen ei saa sitä pysähtymään. Vastaavasti tämä työ eteni alkuun hiljaisuudessa, mutta kirjoittamisvaihe eteni vauhdikkaasti ja välillä oli vaikeaa saada ajatustyö loppumaan.

Ensimmäisenä haluan kiittää työn ohjaajaa professori Sirkka-Liisa Erikssonia neuvoista matemaattisen täsmällisyyden saavuttamisessa. Yhtä suuri kiitos kuuluu työn toiselle ohjaajalle professori Tapio Rantalalle, joka ehdotti kyseistä aihetta minulle. Molempien kanssa käydyt keskustelut ja yhteispalaverit ovat lisänneet ymmärrystäni työn aihepiiristä sekä akateemisesta maailmasta.

Isääni Markku Sointua haluan kiittää innostuksestani matematiikkaan sekä Juho Virpirantaa oikoluvusta ja lukuisista matemaattisista keskusteluista.

Kiitokset myös laajalle perheelleni. Erityiskiitos avopuolisolleni Liina-Kaisalle ja tyttärelleni Huldalle. Ilman teitä sulkeutuisin omaan matemaattiseen mielikuviin maailmaani, enkä näkisi ympärilläni.

Tampereella 6.9.2014

Niilo Sointu

# SISÄLLYS

1. Johdanto . . . . .	1
2. Historiaa . . . . .	3
2.1 Suhteellisuusteoria . . . . .	3
2.2 Geometrisen algebran taustaa . . . . .	9
3. Geometrinen algebra . . . . .	13
3.1 Vektoriavaruudesta algebraan . . . . .	13
3.2 Geometrinen tulo . . . . .	16
3.3 Algebran kanta . . . . .	19
3.4 Yleinen sisä- ja ulkotulo . . . . .	24
3.5 Involuutiot . . . . .	32
3.6 Pseudoskaalari ja duaali . . . . .	33
4. Peilaukset ja kierrot . . . . .	35
4.1 Lineaarialgebraa . . . . .	35
4.1.1 Lineaarikuvauksen laajentaminen ja determinantti . . . . .	36
4.1.2 Adjungaatti ja käänteiskuvaus . . . . .	37
4.2 Ortogonaalikuvaus . . . . .	42
4.3 Peilaus . . . . .	44
4.4 Kierto . . . . .	47
4.5 Ortogonaali- ja Spin( $n$ )-ryhmä . . . . .	50
5. Minkowskin aika-avaruuden algebrallinen rakenne – Space-time algebra . . . . .	56
5.1 Aika-avaruuden jako ja itseisfysiikka . . . . .	60
5.2 Aika-avaruuden käyrät, itseisaika ja -nopeus . . . . .	60
5.3 Suhteelliset vektorit . . . . .	64
5.4 Suhteellinen nopeus . . . . .	66
5.5 Liikemäärä ja aaltovektori . . . . .	68
5.6 Itseiskiihtyvyys . . . . .	68
5.7 Yhteys Diracin ja Paulin matriiseihin . . . . .	69
6. Lorentz-muunnokset . . . . .	71
6.1 Nopeuksien yhteenlasku . . . . .	73
6.2 Doppler-ilmiö ja aberraatio . . . . .	74
6.3 Ajan dilataatio ja Lorentzin lyheneminen . . . . .	77
6.4 Lorentz-muunnosten ryhmä . . . . .	78
6.5 Pusku . . . . .	80
6.6 Aika-avaruuden roottorin jako . . . . .	81
7. Yhteenveto . . . . .	84
Lähteet . . . . .	86

## MERKINNÄT

$c$	valonnopeus
$\beta$	$\frac{v}{c}$ eli nopeus ilmaistuna valonnopeuden yksiköissä
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	skalaareita
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	vektoreita
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	vektoreita
$\mathbf{1}$	vektoriavaruuden tai algebran ykkösalkio
$\mathbf{0}$	vektoriavaruuden tai algebran nolla-alkio
$a, b,$	vektoreita
$x, y, z$	vektoreita
$\mathbb{K}$	kunta
$\mathbb{R}$	reaalilukujen kunta tai joukko
$\mathbb{C}$	kompleksilukujen kunta
$\mathbb{H}$	kvaternien kunta
$\text{Mat}(n, \mathbb{K})$	$n \times n$ -matriisien, joiden alkiot kuuluvat kuntaan $\mathbb{K}$ , joukko
$\varphi$	kuvaus
$\wedge$	ulkotulo
$\cdot$	sisätulo
$\ a\ $	vektorin $a$ normi
$A, B, C, \dots$	multivektoreita
$\sum_{(k_1, \dots, k_r) \in S}$	summa yli indeksien $(1, \dots, r)$ kaikkien permutaatioiden
$(k_1, \dots, k_r)$	indeksien $(1, \dots, r)$ permutaatio
$S$	indeksien $(1, \dots, r)$ kaikkien permutaatioiden joukko
$(-1)^\epsilon$	permutaation etumerkki, joka on positiivinen, jos permutaatio on parillinen, ja negatiivinen, jos permutaatio on pariton

$\langle A \rangle_r$	projektio-operaattori, joka palauttaa multivektorin $A$ astetta $r$ olevan osan
$\langle A \rangle$	palauttaa nolla-asteen osan eli skalaarin
$A_r$	homogeeninen multivektori joka sisältää ainoastaa $r$ -asteen termejä
$\det$	matriisin determinantti tai lineaarikuvauksen determinantti
$e_1, \dots, e_r$	vektoreita
$G_n$	geometrinen algebra, jonka generoivan vektoriavaruuden ulottuvuus on $n = p + q$ , missä $p + q$ on geometrisen algebran merkki
$G_n^+$	geometrisen algebran $G_n$ parillinen alialgebra
$G_n^-$	vektoriavaruuden $G_n$ pariton aliavaruus
$\check{e}_k$	tulosta puuttuva tekijä
$A \times B$	multivektoreiden $A$ ja $B$ kommutaattori-tulo
$A * B$	multivektoreiden $A$ ja $B$ skalaaritulo
$A'$	pääinvoluutio
$A^\dagger$	reversio
$\bar{A}$	Clifford-konjugaatti
$ A $	multivektorin suuruus
$I$	yksikköseudoskalaari
$a \times b$	vektoreiden $a$ ja $b$ ristitulo
$T : V \rightarrow V$	lineaarikuvaus
$\underline{T} : G_n \rightarrow G_n$	multilineaarikuvaus
$\bar{T}$	lineaarikuvauksen adjungaatti
$P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	lineaarikuvaus peilaus
$R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	lineaarikuvaus kierto
$R$	roottori
$\Gamma_{p,q}$	Lipschitzin ryhmä

$\text{Pin}(p, q)$	Pin-ryhmä
$\text{Spin}(p, q)$	Spin-ryhmä
$\text{Spin}_+(p, q)$	Roottoriryhmä
$O(p, q)$	pseudo-ortogonaaliryhmä
$SO(p, q)$	erityinen pseudo-ortogonaaliryhmä
$O(1, 3)$	Lorentzin ryhmä
$SO(1, 3)$	erityinen Lorentzin ryhmä
$SO(1, 3^+$	rajoitettu Lorentzin ryhmä
$\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$	Minkowskin avaruuden ortonormaalikanta
$\nu_{\gamma\eta}$	Minkowskin avaruuden metriikka
$\{e^i\}$	kannan $\{e_i\}$ duaalikanta
$x^\mu$	kannan $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ , $\mu = 0, 1, 2, 3$
$M$	aika-avaruuden algebran multivektori
$\tau$	itseisaika
$v, u$	ajanlaatuisia vektoreita, itseisnopeuksia
$\boldsymbol{x}$	suhteellinen vektori, joka on bivektori
$\{\boldsymbol{\sigma}_i\}$	suhteellisten vektoreiden kanta
$\boldsymbol{u}$	suhteellinen nopeus, joka on bivektori
$\gamma$	Lorentz-kerroin



# 1. JOHDANTO

Algebra on matematiikan osa-alue, mutta se tarkoittaa myös tiettyä matemaattista rakennetta. Algebra on tunnetumpaa vektoriavaruutta monipuolisempi rakenne, koska sen alkioden välille on määritelty tulo-operaatio. Olennaista on siis, että kahden algebran alkion tulo on uusi alkio, joka edelleen kuuluu kyseiseen algebraan.

Tässä työssä keskitytään geometriseen algebraan, johon päädytään esimerkiksi avaruuden  $\mathbb{R}^n$  ortonormaalin kannan avulla. Näiden ortonormaalien kantavektoreiden tulot ovat uusia geometrisen algebran alkioita. Näin syntyvien uusien alkioden lineaarikombinaatiot muodostavat koko geometrisen algebran.

Geometrisia algebroja hyödynnetään monella alalla. Esimerkiksi tietokonegrafiikassa voidaan käyttää geometrista algebraa esitettäessä peilauksia ja kiertoja [29]. Fysiikassa Maxwellin yhtälöt saadaan tiivistettyä yhteen kaavaan normaalin neljän sijaan ja kvanttimekaniikassa muun muassa spinoreiden merkitys selkeytyy geometrisen algebran merkinnöillä [8]. David Hestenes julkaisi vuonna 1966 teoksen Space-Time Algebra. Valitettavasti kyseinen teos ei ollut saatavilla tämän työn tekijälle, mutta Hestenes käsittelee aihetta muissa teksteissään [19; 20; 22]. Kyseinen teoria on tämä työn aihe, ja siitä käytetään tässä nimeä aika-avaruuden algebra.

Geometrisesta algebrasta on saatavilla niukasti suomenkielistä kirjallisuutta, ja erityisesti sen soveltamisesta suppeaan suhteellisuusteoriaan ei yrityksistä huolimatta löytynyt kattavaa suomenkielistä tekstiä. Työn tavoitteena on siis tarjota suomenkielinen teos aika-avaruuden algebrasta. Englanninkielistä kirjallisuutta aiheeseen on olemassa runsaasti. Tämä työ perustuu monelta osin Doranin kirjaan [8]. Muita työn kannalta tärkeitä teoksia ovat Hestenesin kirjat [23] ja [19]. Suomessa geometrisia ja Cliffordin algebroja ovat tutkineet muun muassa Pertti Lounesto sekä Sirkka-Liisa Eriksson [24; 12]. Aiheen rajauksessa on käytetty apuna Kari Enqvistin kirjaa aiheesta [11].

Tämän työn toinen tavoite on esittää geometrinen algebra sellaisella tavalla, että sen voi ymmärtää ilman aiempaa tietoa aiheesta, mutta muistaen kuitenkin matemaattisen täsmällisyyden. Työ soveltuu siis luettavaksi sekä matemaatikolle että fyysikolle. Lisäksi geometrisen algebran käyttökelpoisuutta soveltamisessa suppeaan suhteellisuusteoriaan pyritään arvioimaan työn rajauksen puitteissa.

Työn rakenne on seuraava. Luvussa 2 tutustutaan suppean suhteellisuusteorian ja geometrisen algebran taustoihin. Luku 3 alkaa tutulla vektoriavaruuden käsitteel-

lä, joka laajennetaan lopulta geometriseksi algebraksi. Lopuksi käsitellään geometrisen algebran ominaisuuksia. Luvussa 4 tutkitaan ensin lineaarialgebran muotoilua geometrisen algebran esitystavalla, jonka jälkeen edetään pääasiaan eli peilausten ja kiertojen ilmaisuun geometrisina tuloina. Luvussa 5 sovelletaan saatuja tuloksia Minkowskin aika-avaruuden algebrallisen rakenteen kuvaamiseen sekä esitellään käsite itseisfysiikka. Luvussa 6 kuvataan Lorentzin muunnokset analogisesti kolmiulotteisen avaruuden peilausten ja kiertojen kanssa geometrista algebraa käyttäen. Luvussa 7 kootaan tulokset yhteen sekä analysoidaan geometrisen algebran käyttökelpoisuutta suppeassa suhteellisuusteoriassa. Lisäksi pohditaan mahdollisia jatkotutkimuskohteita.

## 2. HISTORIAA

Tässä työssä on tarkoitus muotoilla suppea suhteellisuusteoria käyttäen geometrisen algebran ytimekästä ilmaisua. Geometrisen algebran kehitti William Kingdon Clifford vuonna 1878 ja suppean suhteellisuusteorian Albert Einstein 1905. Vaikka molemmat keksittiin ajallisesti lähekkäin, vasta 1960-luvulla David Hestenes esitti nämä yhdistävän aika-avaruuden algebran (eng. Space-Time Algebra). Clifford ja Einstein olivat kenties tärkeimmät teorioidensa syntyyn vaikuttaneet henkilöt. Kummassakin tapauksessa on kuitenkin hyvä mainita myös muita kehitykseen vaikuttaneita henkilöitä sekä tarkastella syitä siihen, miksi teoriat syntyivät.

### 2.1 Suhteellisuusteoria

1800-luvun lopulla fyysikoiden maailmankuva oli lähes valmis. Newtonin liikelait kuvasivat luonnonlait hyvin, tai näin ainakin luultiin. Newtonilaisessa maailmankuvassa liike oli suhteellista, mutta maailmankaikkeuden mittakaavassa ajateltiin olevan olemassa absoluuttinen lepokoordinaatisto. Kappaleen absoluuttinen liike ja lepo saatettiin määrittää tämän suhteen. Toisin kuin antiikin kreikkalaiset Newton ajatteli, että nimenomaan liike oli kappaleelle ominainen tila. Ennen Newtonia vallinneen aristotelelaisen näkemyksen mukaan liikkuvalla kappaleella oli *impetusta*, jonkinlaista liike-energiaa, jonka loputtua kappale palasi luonnolliseen tilaansa eli lepoon. [11]

Koordinaatistoa, joka ei ole kiihtyvässä liikkeessä, kutsutaan inertiaalikoordinaatistoksi. Toinen tapa ilmaista tämä on sanoa, että inertiaalikoordinaatisto on koordinaatisto, jossa Newtonin toinen laki on voimassa [25]. Absoluuttisen avaruuskoordinaatiston rinnalla newtonilaisessa mekaniikassa aika on absoluuttista ja kaikkialla sama. Näin ollen absoluuttisen koordinaatiston  $K$  pisteen  $(x, y, z, t)$  koordinaatit liikkeessä olevassa koordinaatistossa saadaan Galilein muunnosten avulla.

Olkoon  $K$  absoluuttinen koordinaatisto ja  $K'$  tämän suhteen tasaisesti liikkuva koordinaatisto. Oletetaan lisäksi, että koordinaatisto  $K'$  liikkuu nopeudella  $v$  koordinaatiston  $K$   $x$ -akselin positiiviseen suuntaan ja ajanhetkellä  $t = 0$  koordinaatistot ovat päällekkäin. Tällöin koordinaatiston  $K'$  koordinaatit  $(x', y', z', t')$  ovat koordinaatein  $(x, y, z, t)$  ilmaistuna

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}$$

Suhteellisuusteoriassa nämä muunnoskaavat ovat voimassa ainoastaan selvästi valonnopeutta pienemmillä nopeuksilla. Syynä tähän on se, että suhteellisuusteorian mukaan ei ole absoluuttista lepoa ja ennen kaikkea ei ole olemassa universaalia aikaa. [11]

Suppea suhteellisuusteoria kertoo, miltä kappaleiden liikkeet näyttävät eri havait-sijoiden silmin; yleinen suhteellisuusteoria ottaa lisäksi huomioon toistensa suhteen kiihtyvässä liikkeessä olevien havaitsijoiden näkökulmat [11]. Einstein esitteli sup-pean eli erityisen suhteellisuusteorian periaatteet vuonna 1905 julkaisussaan *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*[10] (suom. *Liikkuvien kappaleiden sähködynamiikka*). Suhteellisuusteorian syntyyn voidaan katsoa vaikuttaneen Einsteinin ohella lukuisa joukko muita aikansa fyysikoita [6].

James Clerk Maxwell esitti vuonna 1864 matemaattisen perustan sähkömagne-tismille. Maxwellin yhtälöissä sähkö, magnetismi ja valo ovat kaikki saman perusil-miön eri puolia. Koska sähkömagnetismi on aaltoliikettä, keskeiseksi kysymykseksi 1800-luvun lopulla nousi, millaisessa väliaineessa sähkömagneettiset aallot liikkuvat. Aivan kuten ääniaallot etenevät ilmassa väliaineen häiriönä, pääteltiin, että sähkö-magneettisten aaltojen on aiheutettava häiriöitä jossakin väliaineessa. Valon väliai-neeksi valikoitui niin kutsuttu eetteri. Eetterin ajateltiin täyttävän koko avaruus ja olevan lisäksi absoluuttisessa levossa. Se siis toimi myös newtonilaisessa mekaniikas-sa vaadittuna muuttumattomana taustana, jonka suhteen absoluuttinen liike ja lepo saatettiin määrittää. [11]

Maxwellin yhtälöiden kannalta tämä tarkoittaa sitä, että niiden on oltava voi-massa eetterin määrittämässä absoluuttisessa koordinaatistossa. Tällöin yhtälöissä esiintyvä parametri  $c$  kuvaa valon nopeutta eetterissä. Näin rakennetun teorian pe-rusteella pyrittiin useissa kokeissa määrittämään Maan nopeus suhteessa kuviteltuun eetteriin. Näistä kuuluisin lienee ensimmäisen kerran vuonna 1887 tehty Michelsonin ja Morleyn kokeena tunnettu interferometrikoe. [11]

Kokeen tulokseksi saatiin kuitenkin nolla – Maa ei liikkunut eetterin suhteen. Hollantilainen Hendrik A. Lorentz ja itsenäisesti irlantilainen George FitzGerald esittivät tähän ongelmaan ratkaisuksi pituuksien lyhenemistä liikkeen suunnassa. Heidän mukaansa lyhenemistä kuvaa kerroin  $\kappa\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , missä kerroin  $\kappa$  jäi vielä tuossa vaiheessa selvittämättä. Lorentz perusteli asiaa molekyylien välisten sähkö-

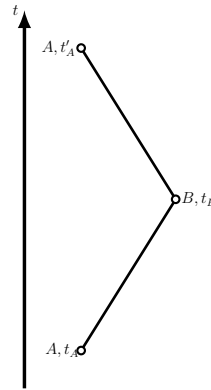
magneettisten voimien muutoksella liikkuvassa systeemissä, ja ilmiö tunnetaan nimellä Lorentzin kontraktio eli lyheneminen. Lorentz pohti myös, voisiko elektronien koko muuttua liikkeessä. [11; 27]

Ongelma oli siis se, että Maxwellin yhtälöt eivät säilytä muotoaan Galilein muunnoksissa, mutta kokeellisesti tästä ei saatu viitteitä. Aluksi ajateltiin, että Maxwellin kuvaus sähkömagnetismista oli virheellinen; olihan se varsin uusi keksintö verrattuna Newtonin liikelakeihin, jotka olivat kuvanneet fysiikan ilmiöt suurella tarkkuudella siihen asti. Seurauksena ilmeni erinäisiä yrityksiä muokata Maxwellin yhtälöitä. Näistä Maxwellin yhtälöiden muunnelmista osa selitti muun muassa Michelsonin ja Morleyn kokeen tuloksen sekä muita kokeellisesti havaittuja valon ominaisuuksia. Useat kokeelliset havainnot jäivät tästä huolimatta selittämättä tai olivat ristiriidassa näiden emissio-teorioiksi kutsuttujen mallien kanssa. [27]

Ongelman ratkaisu on korvata yksinkertaiset Galilein muunnokset hieman monimutkaisemmilla koordinaattimuunnoksilla. Nämä muunnokset tunnetaan nykyään Lorentzin muunnoksina, vaikka ensimmäisenä niitä käytti Joseph Larmor. Alkuun muunnoksia käytettiin matemaattisena temppuna, eikä niiden fysikaalista merkitystä ymmärretty. Lorentz oli ensimmäinen, joka osoitti, että Maxwellin yhtälöt säilyttävät muotonsa Lorentz-muunnoksessa. Lisäksi Lorentzin teoria selitti, miksi Maan nopeuden mittaukset olivat epäonnistuneet. Lorentz teki kuitenkin virheitä johtaessaan muunnoksia, ja näitä virheitä korjasi ranskalainen Henri Poincaré. Poincaré oletti Maxwellin yhtälöiden olevan oikein sekä, että niin kutsuttu suhteellisuusperiaate on yleisesti ja tarkasti tosi. Hän päätyi Lorentzin muunnoksiin päättelemällä, että tällaisten muunnosten on muodostettava ryhmä. Suhteellisuusperiaate on oikeastaan peräisin jo Galileilta, ja se esitellään tarkemmin edempänä. Lorentzille suhteellisuusperiaate ei ollut selvä asia, ja hän yritti ymmärtää esimerkiksi pituuden lyhenemistä kausaalisesti. [27]

Einsteinin artikkeli kokosi yhteen useiden tutkijoiden havaintoja ja päätelmiä. Tärkeimpinä Einsteinia edeltäneistä tutkijoista voidaan pitää edellä mainittuja Lorentzia ja Poincaréa. Usein ainoastaan Einsteinin saavutukset mainitaan puhuttaessa suhteellisuusteorian synnystä. Tähän on tietty oikeutus, kunhan muiden Einsteinin työtä edeltäneiden fyysikoiden ottamia askeleita ei jätetä huomiotta; Darrigol esittää [6], että suuri osa Einsteinin vuoden 1905 tekstistä oli esitetty aiemmin, mutta Einstein oli ensimmäinen, joka kyseenalaisti vallitsevan näkemyksen ajan ja avaruuden luonteesta. Lisäksi Einstein pystyi johtamaan Lorentzin muunnokset ainoastaan kahdesta postulaatista. Lyhyesti sanottuna Einstein osoitti selvästi aiempaa syvempää ymmärrystä koko aiheesta ja Lorentz-muunnosten fysikaalisesta merkityksestä.

Lyhyenä johdatuksena suppeaan suhteellisuusteoriaan voidaan tarkastella tiivistysti Einsteinin artikkeleita [9; 10]. Einstein aloittaa määrittelemällä, mitä tarkoi-



Kuva 2.1: Kellojen synkronointi

tetaan synkronoiduilla eli samanaikaistetuilla kelloilla, joiden avulla ymmärretään käsite tapahtumien samanaikaisuus.

Oletetaan, että avaruuden paikassa  $A$  on kello, joka mittaa aikaa tämän paikan välittömässä läheisyydessä. Olkoon etäällä tästä paikassa  $B$  toinen kello, joka mittaa aikaa paikan  $B$  välittömässä läheisyydessä. Ilman lisäoletuksia näiden kellojen välillä ei voida tehdä päätelmiä niiden näyttämien aikojen suhteesta.

Lähetetään nyt valonsäde kellosta  $A$  tämän näyttäessä aikaa  $t_A$  kelloon  $B$ . Säde heijastetaan välittömästi takaisin sen saavutettua kelloon  $B$ . Tätä ajanhetkeä kuvataan kelloon  $B$  ajalla  $t_B$ . Säde palaa takaisin kelloon  $A$  ajanhetkellä  $t'_A$ . Kellojen sanotaan olevan synkronoidut, jos niiden näyttämille ajoille on voimassa ehto

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Kuva 2.1 esittää tilanteen havainnollisesti. Toimiakseen määritelmä vaatii, että valolta kuluu sama aika kulkea matkat  $AB$  ja  $BA$ , mikä tarkoittaa, että valon on kuljettava vakionopeudella

$$c = \frac{2AB}{t'_A - t_A}.$$

Tämä universaali vakionopeus  $c$  on valonnopeus tyhjiössä. Kyseinen oletus valon nopeuden vakioisuudesta on sopusoinnussa kokeiden kanssa. Määritelmästä seuraa, että samanaikaisuus on suhteellista, sillä se riippuu koordinaatistosta; tietyssä inertiaalikordinaatistossa samanaikaiset tapahtumat eivät välttämättä ole samanaikaiset toisessa inertiaalikoordinaatistossa.

Tästä eteenpäin Einstein perustaa päätelmänsä kahteen postulaattiin:

### Suhteellisuusperiaate

Kaikki inertiaalijärjestelmät ovat samanarvoisia fysikaalisten ilmiöiden kuvailussa.

### Valonnopeuden vakioisuus

Valonnopeus on sama kaikissa inertiaalijärjestelmissä.

Postulaatit on muotoiltu Enqvistin [11] mukaisesti, ja olennaisesti ne ovat samat kuin alkuperäiset Einstein olettamien postulaatit. Lorentzin kontraktion voidaan nyt nähdä seuraavan näistä postulaateista. Lisäksi absoluuttisen ajan käsite joudutaan hylkäämään, sillä eri inertiaalikoordinaatistojen kellot mittaavat aikaa eri tavoilla. Ilmiötä kutsutaan aikadilataatioksi. Näitä tarkastellaan paremmin luvussa 6.

Seuraavassa poiketaan Einsteinin tavasta johtaa Lorentzin muunnosten kaavat ja esitetään johdon idea lähteen [27] mukaisesti. Tarkastellaan, miten valo etenee kahdessa inertiaalijärjestelmässä. Koordinaatiston  $K$  origossa välähtää valo ajanhetkellä  $t = 0$ , ja se etenee pallomaisesti laajentuen avaruuden joka suuntaan. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että koordinaatisto  $K'$  liikkuu edellisen suhteen vakionopeudella  $v$   $x$ -akselin positiiviseen suuntaan ja, että koordinaatistot ovat päällekkäin ajanhetkellä  $t = t' = 0$ . Valonnopeus on vakio, joten koordinaatiston  $K'$  mukana liikkuva havainnoitsija näkee valon etenevän pallomaisesti laajentuen. Jos näin ei olisi, valonnopeus riippuisi lähteen ja havaitsijan suhteellisesta nopeudesta. Koordinaatistossa  $K$  valon etenemistä kuvaa origokeskisen pallopinnan yhtälö

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0, \quad (2.1)$$

missä  $ct$  on pallon säde. Vastaavasti voidaan kirjoittaa pallopinnan yhtälö koordinaatistossa  $K'$ :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0.$$

Koordinaatistojen  $K$  ja  $K'$  koordinaatit yhdistävä muunnos on lineaarinen, mikä ei ole itsestään selvää, mutta tässä kohtaa asian tarkempi osoitus ei ole tarpeellinen. Asiaa voidaan kuitenkin perustella sillä, että tasainen suoraviivainen liike koordinaatistossa  $K$  on samoin tasaista ja suoraviivaista koordinaatistossa  $K'$ . Näin ollen saadaan yhteys

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = \kappa(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2), \quad (2.2)$$

missä kerroin  $\kappa = \kappa(v)$  on vakio, joka riippuu nopeudesta, ja se kuvaa muunnosta liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa. Voidaan osoittaa, että tästä seuraavat Lorentzin muunnokset. Tarkka osoitus on tekninen, eikä lisää ymmärrystä asiasta,

joten tyydytään esittämään suoraan Lorentzin muunnokset kaavoilla

$$\begin{aligned}x' &= \kappa \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\y' &= \kappa y, \\z' &= \kappa z, \\t' &= \kappa \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}},\end{aligned}\tag{2.3}$$

missä  $v$  on nopeus ja  $\beta = v/c$ . Suure  $\beta$  kuvaa siis nopeuden valonnopeuden yksiköissä. Sijoittamalla kaavat (2.3) yhtälön (2.2) vasemmalle puolelle voidaan suoraan viivaisesti tarkistaa, että muunnokset (2.3) ovat voimassa.

Osoitettavaksi jää vielä, että kerroin  $\kappa = 1$ . Oletetaan, että kolmas koordinaatisto  $K''$  liikkuu koordinaatiston  $K'$  suhteen vakionopeudella  $-v$ . Tilanteen symmetrisyyden nojalla koordinaatistot  $K$  ja  $K''$  ovat näin ollen samat. Tekemällä Lorentzin muunnoksen toistamiseen, mutta vastakkaiseen suuntaan saadaan

$$\begin{aligned}x'' &= \kappa(-v) \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\y'' &= \kappa(-v)y', \\z'' &= \kappa(-v)z', \\t'' &= \kappa(-v) \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}},\end{aligned}$$

mistä seuraa kohdan (2.3) perusteella

$$\begin{aligned}x'' &= \kappa(v)\kappa(-v)x, \\y'' &= \kappa(v)\kappa(-v)y, \\z'' &= \kappa(v)\kappa(-v)z, \\t'' &= \kappa(v)\kappa(-v)t.\end{aligned}$$

Koska koordinaatistot  $K$  ja  $K''$  ovat samat, kertoimelle  $\kappa$  on voimassa ehto

$$\kappa(v)\kappa(-v) = 1.$$

Kerroin  $\kappa$  kuvaa muunnosta liikettä vastaan poikittaisessa suunnassa, joten sen on sama riippumatta nopeuden suunnasta. Kertoimen on siis oltava symmetrinen eli  $\kappa(v) = \kappa(-v)$ . Lisäksi kerroin on positiivinen, sillä muuten liikkuvat kappaleet näyttäisivät kääntyvän ylösalaisin. Nämä ehdot yhdistämällä voidaan kertoimen arvoksi asettaa  $\kappa = 1$ .



Poincaré puolestaan päätteli kertoimen  $\kappa$  arvon tarkastelemalla kaikkia sellaisia lineaarikuvauksia, joissa yhtälön (2.1) muoto säilyy. Nämä kuvaukset muodostavat ryhmän, jonka Poincaré nimesi Lorentz-ryhmäksi. Myös nimitys Lorentz-muunnos on peräisin häneltä. Tätä ryhmää käsitellään tarkemmin alaluvussa 6.4.

Lorentzin munnoksista seuraa muun muassa pituuden lyheneminen liikkeen suunnassa eli Lorentz-kontraktio sekä ajan suhteellinen hidastuminen liikkuvassa koordinaatistossa eli aikadilataatio. Muita tässä työssä tarkasteltavia seurauksia ovat nopeuksien yhteenlasku, Doppler-ilmiö ja aberratio. Näitä ilmiöitä voidaan tarkastella geometrista algebraa hyödyntäen. Tutustutaan seuraavaksi tämän matematiikan alan taustoihin.

## 2.2 Geometrisen algebran taustaa

Kirjallisuudessa käytetään käsitteitä Clifford-algebra ja geometrinen algebra enemmän tai vähemmän synonyymeinä. Usein erotuksena on jälkimmäisen rajoittuminen geometriseen tulkintaan ja fysiikan sovelluksiin, kun taas Clifford-algebra tarkoittaa abstraktia matemaattista rakennetta. Tässä työssä geometrinen tulkinta on pääosassa tarkasteltaessa suppean suhteellisuusteorian ilmiöitä. Erityisesti hyödynnetään geometrisen algebran ytimekästä kiertojen ja peilausten esitystapaa Lorentzin muunnoksia tutkittaessa. Luku perustuu lähteisiin [8] ja [19].

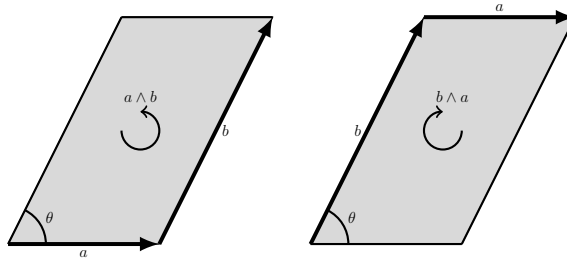
Ymmärryksen lisäämiseksi lienee järkevää käydä läpi geometrisen algebran ja sen matemaattisen kielen Clifford-algebran kehitystä. Cliffordin (1845–1879) ohella geometrisen algebran alkuaskeleisiin vaikuttivat olennaisesti irlantilainen Rowan Hamilton (1805–1865) sekä saksalainen Hermann Grassmann (1809–1877).

1800-luvun alkupuolella matemaatikot ja fyysikot käyttivät kompleksilukuja tutkiessaan tason pisteitä. Esitys edelsi vektoreiden nykymuotoista muotoilua. Jean Robert Argandin ja Caspar Wesselin omilla tahoillaan luomat kompleksiluvut mahdollistivat tason pisteiden välisen kertolaskun, joka voitiin tulkita kierroksi. Ominaisuus haluttiin luonnollisesti yleistää kolmiulotteiseen avaruuteen. Muun muassa Hamilton pohti, miten kolmiulotteisen avaruuden pisteitä kuvaavia kolmikoita voisi kertoa keskenään. Hamilton onnistui tekemään tämän vuonna 1843, mutta joutui ottamaan käyttöön yhden ylimääräisen ulottuvuuden luoden näin neliulotteisen algebran, kvaternit. Lisäksi Hamiltonin oli luovuttava kertolaskun vaihdannaisuudesta. Hamilton otti niin ikään käyttöön käsitteen assosiatiivisuus eli liitännäisyys todistaessaan tämän ominaisuuden olevan voimassa kvaternien kertolaskulle.

Hermann Grassmann esitti vuonna 1844 oman käsityksensä siitä, miten janat ja luvut yhdistyvät toisiinsa: janat ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos toinen saadaan siirtämällä toista. Tämä ennusti nykymuotoista vektorin käsitettä. Grassmann määritteli näille suunnatuille luvuilleen kaksi tuloa. Sisätulon määritelmän pohjana oli halu esittää tietoa vektoreiden suhteellisista suunnista, ja se on oiva apu tutkittaessa

vektoreiden kohtisuoruutta. Sisätulo ei kuitenkaan ole riittävä kuvaamaan kahden ei-yhdensuuntaisen vektorin synnyttämää tasoa.

Sisätulon ohella tarvittiin toinenkin tulo, jonka Grassmann määritteli ilmaistakseen kahden vektorin muodostaman suunnikkaan ominaisuudet. Tulolle annettiin nimi ulkotulo, ja sitä merkitään nykyään  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , jossa  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  ovat vektoreita. Merkintä luetaan: "a kiila b" (eng. wedge). Ulkotulosta seuraa uusi, kaksiulotteinen suunnattu luku, joka ei ole skalaari eikä vektori. Tätä lukua kutsutaan 2- eli bivektoriksi. Bivektori  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  voidaan kuvata suunnattuna suunnikkaana, jonka suunta saadaan kulkemalla suunnikkaan piiriä ensin vektoria  $\mathbf{a}$  pitkin ja sen jälkeen vektoria  $\mathbf{b}$  pitkin. Bivektorin suuruus on vastaavan suunnikkaan ala. Kuva 2.2 havainnollistaa tilannetta ja määrittelee, mitä tarkoitetaan bivektorin suuntauksella.



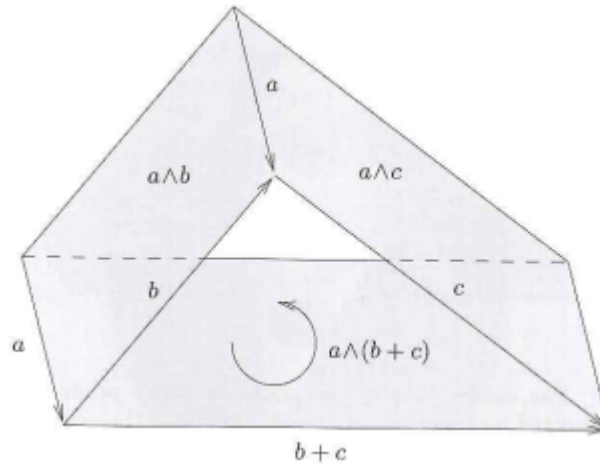
Kuva 2.2: Ulkotulo  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  voidaan visualisoida esimerkiksi suunnattuna suunnikkaana. Syntyvän bivektorin suunta määritetään oikein käden säännön mukaisesti, kulkemalla piiriä ensin vektorin  $\mathbf{a}$  suuntaan ja sitten vektorin  $\mathbf{b}$  suuntaan. Bivektorin suuruus on vastaavan suunnikkaan ala eli  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$  kuvan merkinnöin.

Tarkastelemalla Kuvaa 2.2 huomataan, että ulkotulo ei ole vaihdannainen eli tulon tekijöiden järjestys vaikuttaa tulokseen. Edelleen huomataan, että bivektoreiden  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  ja  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$  välillä on selkeä yhteys:  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ . Ulkotulo on antikommutoiava eli tekijöiden järjestyksen vaihtaminen aiheuttaa etumerkin muutoksen. Antikommutoinnista seuraa välittömästi  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ , mikä on sopusoinnussa geometrisen tulkinnan kanssa: yhdensuuntaisten vektoreiden väliin jäävän alueen ala on nolla.

Kuvasta 2.3 nähdään, että ulkotulolle on voimassa osittelulaki vektoreiden yhteenlaskun suhteen eli  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$ . Itse asiassa bivektorit muodostavat Määritelmän 3.1.1 mukaisen vektoriaruuden. Määritelmän 3.1.1 kaikki ominaisuudet voidaan todentaa geometrisesti kaksi- ja kolmeulotteisissa tapauksissa. Ulkotulon havainnollistaminen suunnattuna suunnikkaana helpottaa muun muassa bivektoreiden yhteenlaskun geometrista hahmottamista. Ulkotulon määritelmä ei kuitenkaan sisällä tietoa, minkälainen bivektoria kuvaava pinta tulisi olla. Esimerkiksi bivektori  $\mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  voidaan kirjoittaa määrittelemällä toinen vektori  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ . Nyt saadaan

$$\mathbf{a}' \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

Huomataan siis, että ulkotulo ei määrittele yksikäsitteistä suunnikasta, joten sitä



Kuva 2.3: Bivektoreiden yhteenlaskun havainnollistus. [8]

voitaisiin kuvata minkä tahansa muotoiselle pinnalla, jolla on oikea suunta ja pinta-ala. Ulkotulon havainnollistaminen esimerkiksi ympyrällä antaisi paremman kuvan suuntauksesta, mutta hankaloittaisi bivektoreiden yhteenlaskun kuvaamista.

Ulkotulo voidaan määritellä myös useammalle kuin kahdelle vektorille. Kolmessa ulottuvuudessa lineaarisesti riippumattomien vektorien ulkotulo muodostaa suunnatun suuntaissärmiön, trivektorin. Tästä eteenpäin syntyviä suunnattuja hypertilavuuksia nimitetään  $n$ -vektoreiksi, jossa  $n$  on hypertilavuuden muodostavien vektoreiden lukumäärä eli ulotteisuus.

Grassmannin työ jäi huomiotta. Yksi syy tähän oli se, että Grassmann oli aikaansa edellä abstraktilla esitystavallaan. Toinen syy oli suuren suosion saanut Gibbsin ja Heavisiden vektorialgebra, joka koettiin helpommaksi ymmärtää. William Clifford oli ensimmäinen, joka ymmärsi Grassmannin työn arvon. Clifford loi algebransa Grassmannin ulkotuloalgebran pohjalta. Cliffordin tarkoitus oli yleistää kompleksiluvut ja kvaternit niin sanotuiksi hyperkompleksiluvuiksi. Cliffordin oivallus oli yhdistää sisätulo ja Grassmannin ulkotulo uudeksi tuloksi  $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , jota hän nimitti geometriseksi tuloksi. Vastaavasti hän nimitti algebraansa geometriseksi algebraksi. Geometriseen tuloon ja algebraan tutustutaan tarkemmin Luvussa 3.

Vuonna 1880 eli kaksi vuotta Cliffordin jälkeen Rudolf Lipschitz keksi uudeen Cliffordin algebran. Vuonna 1886 ilmestyneessä kirjassaan Lipschitz huomioi Cliffordin edeltävät saavutukset. Lipschitz tutki kiertojen yleistämistä avaruuteen  $\mathbb{R}^n$ . Kompleksiluvuillahan voidaan esittää tason ja kvaterneilla kolmi- ja neliulotteisen avaruuden kierrot. Lipschitz oli näin ollen ensimmäinen, joka antoi Cliffordin algebralle uuden geometrisen tulkinnan. Työssään Lipschitz perehtyi Cliffordin algebran alkioiden muodostamaan ryhmään, joka koostui kaikista geometrisen tulon suhteen kääntyvistä alkioista. Kyseistä ryhmää kutsutaan usein Cliffordin ryhmäksi vaikka Clifford ei itse käsitellyt asiaa työssään. [24]

Nimitys on peräisin Claude Chevalleyta, joka puolestaan määritteli Cliffordin algebran tensorialgebran tekijäalgebrana. Määritelmän etuna on sen yleisyys; algebra voidaan muodostaa kunnan sijaan myös kommutatiivisen renkaan yli. Geometrinen tulkinta kuitenkin hämärtyy tässä tapauksessa, ja pedagogisesti onkin järkevämpää lähestyä Cliffordin algebraa vektoreiden välisen tulon kautta. [24]

### 3. GEOMETRINEN ALGEBRA

Geometrinen algebra voidaan määritellä usealla tavalla. Hestenes [23] määrittelee geometrisen algebran sen yleisten alkioiden eli multivektoreiden välisen tulon avulla asettamalla tälle tulolle sopivat ehdot. Abstraktimpi lähestymistapa on esittää Clifford-algebra tensorialgebran avulla (kts. esim. [16]).

Tässä luvussa määritellään Cliffordin geometrinen algebra aksiomaattisesti vektoreiden välisen geometrisen tulon avulla. Tämä tulo laajennetaan lineaarisesti, jolloin voidaan yleisesti kertoa  $n$ -kappaletta vektoreita keskenään. Näin syntyy uusia geometrisesti tulkittavia lukuja, joilla on suuruus ja suunta. Luvussa mukailaan lähteiden [8], [19] ja [12] esityksiä.

#### 3.1 Vektoriavaruudesta algebraan

Matematiikassa ja erityisesti algebrassa tutkitaan erilaisia rakenteita. Matemaattisten rakenteiden avulla voidaan esimerkiksi esittää tietoa joukkojen alkioiden ominaisuuksista tiiviissä muodossa. Muistin virkistämiseksi käydään seuraavassa läpi eräs perusrakenne, jota hyödynnetään useilla matematiikan aloilla.

**Määritelmä 3.1.1.** *Olkoon  $\mathbb{K}$  kunta. Joukko  $V$  on vektoriavaruus, jos sen alkiolle on määritelty summa  $+$  ja kunnan  $\mathbb{K}$  alkiolla kertominen, joille seuraavat ominaisuudet ovat voimassa jokaiselle alkiolla  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  ja jokaiselle kunnan  $\mathbb{K}$  alkiolla  $\alpha$  ja  $\beta$ :*

- (1) *Yhteenlasku on hyvin määritelty eli  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  kuuluu joukkoon  $V$  kaikilla joukon  $V$  alkiolla  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$ .*
- (2) *Yhteenlasku on liitännäinen eli  $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ .*
- (3) *Joukkoon  $V$  kuuluu yhteenlaskun neutraalialkio  $\mathbf{0}$ , jolle pätee  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$  jokaisella joukon  $V$  alkiolla  $\mathbf{x}$ .*
- (4) *Jokaiselle joukon  $V$  alkiolle  $\mathbf{x}$  on olemassa joukkoon  $V$  kuuluva vasta-alkio  $\mathbf{y}$ , joka toteuttaa ehdon  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ .*
- (5) *Yhteenlasku on vaihdannainen eli  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ .*
- (6) *Skalaarilla kertomiselle on voimassa osittelulaki vektoreiden yhteenlaskun suhteen eli  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ .*

- (7) Skalaarilla kertomiselle on voimassa osittelulaki kunnan alkioiden yhteenlaskun suhteen eli  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ .
- (8) Skalaarilla kertominen ja kunnan  $\mathbb{K}$  kertolasku ovat yhteensopivat eli  $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ .
- (9) On olemassa skalaarilla kertomisen identiteettialkio 1, jolle on voimassa  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

Vektoriavaruuden alkioita kutsutaan vektoreiksi, mikä voi joissakin tapauksissa olla harhaanjohtavaa, sillä alkioit eivät välttämättä ole tulkittavissa suunnatuiksi janoiksi (tai tarkemmin niiden ekvivalenssiluokiksi). Esimerkiksi Luvussa 2 esitellyt bivektorit muodostavat vektoriavaruuden. Kuntaa  $\mathbb{K}$  kutsutaan vektoriavaruuden  $V$  kerroinkunnaksi, ja sen alkioita kutsutaan skalaareiksi. Usein tarkastellaan reaalisia vektoriavaruuksia, joissa kerroinkuntana on reaalilukujen kunta  $\mathbb{R}$ . Esimerkiksi  $n$ -ulotteisen euklidisen vektoriavaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektori  $\mathbf{x}$  on komponenttimuodossa  $(x_1, \dots, x_n)$ , missä  $x_i$  on reaaliluku kaikilla indeksin  $i$  arvoilla. Toinen yleinen tarkastelun kohde on kompleksinen vektoriavaruus eli vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on kompleksilukujen kunta  $\mathbb{C}$ .

Määritelmässä 3.1.1 on käytetty yhteenlaskun merkinä samaa merkkiä kuin kunnan alkioiden välisessä yhteenlaskussa. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että laskutoimitukset olisivat samat, vaan vektoreiden yhteenlasku määritellään totuttuun tapaan komponenteittain eli muodossa

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Skalaarilla  $\alpha$  kertominen määritellään:  $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ . **Vektoriavaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektoreita merkitään tästä eteenpäin lihavoimattomilla kirjaimilla ilman ongelmia ja reaalilukuja kreikkalaisilla aakkosilla, jos sekaantumisen vaaraa ei ole. Tarvittaessa asiasta huomautetaan erikseen mahdollisissa ongelmatilanteissa.**

Edetään määrittelemällä vektoreiden välinen tulo-operaatio. Vaatimalla, että tulo on bilineaarinen eli lineaarinen molempien tekijöiden suhteen, muodostetaan rakenne, jota kutsutaan algebraksi.

**Määritelmä 3.1.2.** *Olko  $A$  vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on  $\mathbb{K}$ , ja kuvaus  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(x, y) \rightarrow xy$ , bilineaarinen eli kuvaukset*

$$(1) L_x y = xy,$$

$$(2) R_y x = xy,$$

ovat lineaarisia jokaisella kiinteällä  $x \in A$  ja  $y \in A$ . Vektoriavaruus  $A$  ja bilineaari-kuvaus, jota kutsutaan tuloksi, muodostavat algebran, jonka kerroinkunta on  $\mathbb{K}$ , eli lyhyemmin  $\mathbb{K}$ -algebran.

Muokataan Määritelmän 3.1.2 bilineaarisuus käyttökelpoisempaan muotoon.

**Propositio 3.1.3.** *Kuvaus  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(x, y) \rightarrow xy$  on bilineaarinen, jos ja vain jos seuraavat ominaisuudet ovat voimassa*

$$(1) \quad x(\lambda y + \gamma z) = \lambda(xy) + \gamma(xz),$$

$$(2) \quad (\lambda x + \gamma z)y = \lambda(xy) + \gamma(zx).$$

*Todistus.* Todistetaan ensin suunta "  $\implies$  ". Olkoon kuvaus  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(x, y) \rightarrow xy$ , bilineaarinen, siis  $L_x y = xy$  ja  $S_y x = xy$  ovat lineaarisia kaikilla kiinteillä  $x \in A$  ja  $y \in A$  vastaavasti. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} x(\lambda y + \gamma z) &= L_x(\lambda y + \gamma z) = \lambda L_x y + \gamma L_x z = \lambda(xy) + \gamma(xz), \\ (\lambda x + \gamma z)y &= S_y(\lambda x + \gamma z) = \lambda S_y x + \gamma S_y z = \lambda(xy) + \gamma(zx), \end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. Toinen suunta nähdään edellisestä.  $\square$

Algebra  $A$  on assosiatiivinen, jos sen tulo-operaatio on assosiatiivinen, ja ykkösellinen, jos sillä on tulon identiteettialkio  $1 \in A$ , joka toteuttaa ehdon  $1a = a1 = a$ . Algebran osajoukko on alialgebra, mikäli se on suljettu tulo-operaation suhteen. Määritellään tämä alirakenne tarkemmin.

**Määritelmä 3.1.4.** *Joukkoa  $B$  kutsutaan  $\mathbb{K}$ -algebran  $A$  alialgebraksi, jos*

$$(1) \quad B \text{ on vektoriavaruuden } A \text{ aliavaruus,}$$

$$(2) \quad B \text{ on } \mathbb{K}\text{-algebra saman tulo-operaation suhteen kuin } \mathbb{K}\text{-algebra } A,$$

$$(3) \quad \text{tulo } ab \text{ kuuluu joukkoon } B \text{ kaikille joukon } B \text{ alkioille } a \text{ ja } b.$$

**Määritelmä 3.1.5.**  $\mathbb{K}$ -Algebrat  $A$  ja  $B$  ovat isomorfiset, jos on olemassa sellainen bijektiivinen kuvaus  $\varphi : A \rightarrow B$ , joka toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \varphi(sa + rb) &= s\varphi(a) + r\varphi(b), \\ \varphi(ab) &= \varphi(a)\varphi(b), \end{aligned}$$

jokaiselle  $a, b \in A$  ja  $s, t \in \mathbb{K}$ . Kuvausta  $\varphi$  kutsutaan (algebran) isomorfismiksi.

Jos isomorfiset algebrat  $A$  ja  $B$  ovat samat, isomorfismia kutsutaan automorfismiksi. Heikompi yhteys kahden algebran välille saadaan, kun korvataan kuvauksen  $\varphi$  bijektiivisyys surjektiivisuudella. Tällöin kuvaus on algebran homomorfismi.

## 3.2 Geometrinen tulo

Pyritään määrittelemään vektoriavaruuden alkioiden välille tulo, jolla olisi hyväksi koettuja ominaisuuksia ja mahdollisesti geometrinen tulkinta. Haluttu tulo on alun perin William Cliffordin kehittämä geometrinen tulo eli Cliffordin tulo. Näin saadaan uusi rakenne, jota kutsutaan geometriseksi algebraksi.

**Määritelmä 3.2.1.** *Geometrinen algebra on assosiatiivinen, ykkösellinen ja reaalinen algebra, joka sisältää avaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektorit, ja jokaiselle vektorille  $a$  on voimassa ehto*

$$a^2 \in \mathbb{R},$$

missä reaalilukujen joukko  $\mathbb{R}$  samaistetaan joukon  $\{r1 \mid r \in \mathbb{R}\}$  kanssa.

Geometrisen algebran tuloa kutsutaan geometriseksi tuloksi, joka on assosiatiivinen ja distributiivinen algebran määritelmän perusteella. Edellä asetettu ehto vektorin neliölle erottaa sen yleisestä assosiatiivisesta algebrasta. On huomattava, että vektorin neliö ei välttämättä ole positiivinen, mikä mahdollistaa esimerkiksi Minkowskin aika-avaruuden esittämisen geometrisen algebran keinoin. Näin ollen vektorin  $a$  normi  $\|a\|$  määritellään

$$\|a\|^2 = |a^2|,$$

missä  $|a^2|$  tarkoittaa itseisarvoa.

Tutkitaan, mitä ominaisuuksia geometriselle tulolle seuraa sille asetetuista ehdoista. Muodostetaan vektorin  $a + b$  neliö:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba.$$

Vektorin neliö on reaaliluku, joten  $a^2$ ,  $b^2$  sekä  $(a + b)^2$  ovat reaalilukuja. Näin ollen myös summan  $ab + ba$  on oltava reaaliluku. Jaetaan tulo  $ab$  tämän avulla symmetriseen ja antisymmetriseen osaan:

$$ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba), \quad (3.1)$$

missä symmetrinen osa  $\frac{1}{2}(ab + ba)$  on piste- eli sisätulo ja antisymmetrinen osa  $\frac{1}{2}(ab - ba)$  on Luvussa 2 esitelty Grassmannin ulkotulo.

**Määritelmä 3.2.2.** *Vektoreiden  $a$  ja  $b$  sisätulo  $a \cdot b$  ja ulkotulo  $a \wedge b$  määritellään*

$$(1) \ a \cdot b := \frac{1}{2}(ab + ba)$$

$$(2) \ a \wedge b := \frac{1}{2}(ab - ba)$$

Oletetaan, että  $a$  ja  $b$  ovat vektoreita sellaisessa geometrisessa algebran, missä jokaisen vektorin neliö on aidosti nolaa suurempi. Sisätulon halutaan tässä tapauksessa vastaavan tuttua sisätuloa, joten määritellään vektoreiden  $a$  ja  $b$ , välisen kulman



$\theta$  kosini kaavalla [23]

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta. \quad (3.2)$$

Nyt ulkotulon avulla saadaan uudenlainen olio, joka ei ole skalaari eikä vektori, koska

$$\begin{aligned} (a \wedge b)(a \wedge b) &= -(a \wedge b)(b \wedge a) \\ &= -(ab - a \cdot b)(ba - a \cdot b) \\ &= -(abba + (a \cdot b)^2 - a \cdot b(ab + ba)) \\ &= -(a^2b^2 + (a \cdot b)^2 - 2(a \cdot b)^2) \\ &= (a \cdot b)^2 - a^2b^2 \\ &= |a|^2|b|^2 \cos^2 \theta - |a|^2|b|^2 \\ &= -|a|^2|b|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tämä on negatiivinen reaaliluku, joten  $a \wedge b$  ei ole reaaliluku. Oletuksen mukaan jokaisen vektorin neliö on nollaa suurempi, joten  $a \wedge b$  ei ole myöskään vektori. Uusi olio on nimeltään bivektori, ja sitä voidaan kuvata suunnattuna suunnikkaana. Suunnikkaan ala kuvaa bivektorin suuruutta. Bivektorit muodostavat vektoreiden tapaan vektoriavaruuden, joskin tässä tapauksessa nimitys vektoriavaruus on harhaanjohtava. Määritelmä siis vastaa Grassmannin bivektorin määritelmää.

Varmistetaan vielä, että ulkotulo on todellakin antisymmetrinen eli antikommutatiivinen. Suoraviivaisesti päätellään seuraavasti

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) = -\frac{1}{2}(ba - ab) = -b \wedge a.$$

Antisymmetrisyydestä seuraa välittömästi, että vektorin ulkotulo itsensä kanssa on aina nolla eli  $a \wedge a = 0$ . Sisä- ja ulkotulo määrittelevät kahden vektorin suhteellisen asennon. Nämä ominaisuudet on koottu seuraaviin kahteen lauseeseen.

**Lause 3.2.3.** *Geometrisen algebran vektoreille  $a$  ja  $b$  seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä*

$$(i) \quad ab = -ba,$$

$$(ii) \quad a \cdot b = 0,$$

$$(iii) \quad ab = a \wedge b.$$

*Lisäksi, jos  $a$  ja  $b$  kuuluvat geometriseen algebraan, jonka jokaisen vektorin neliö on nollaa suurempi, niin vektoreiden voidaan sanoa olevan kohtisuorassa toisiaan vasten eli niiden välinen kulma on  $\frac{\pi}{2}$ .*

*Todistus.* Oletetaan, että vektorit  $a$  ja  $b$  antikommutoivat geometrisen tulon suhteen eli  $ab = -ba$ . Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että geometrisen tulon  $ab = \frac{1}{2}(ab +$

$ba) + \frac{1}{2}(ab - ba)$  symmetrinen osa on nolla:

$$\frac{1}{2}(ab + ba) = a \cdot b = 0.$$

Edelleen nähdään geometrisen tulon hajotelman (3.1) perusteella, että kohta (ii) on yhtäpitävä kohdan (iii) kanssa. Kohtisuoruus seuraa kaavasta (3.2).  $\square$

**Lause 3.2.4.** *Geometrisen algebran vektoreille  $a$  ja  $b$  seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä*

$$(i) \quad ab = ba,$$

$$(ii) \quad a \wedge b = 0,$$

$$(iii) \quad ab = a \cdot b.$$

*Jos  $a$  ja  $b$  kuuluvat geometriseen algebraan, jonka jokaisen vektorin neliö on nollaa suurempi, niin vektoreiden voidaan sanoa olevan yhdensuuntaiset eli  $a = \lambda b$ , missä  $\lambda$  kuuluu joukkoon  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .*

*Todistus.* Todistus on samankaltainen kuin Lauseen 3.2.3 todistus. Oletetaan, että  $a \neq 0$  ja  $b \neq 0$  ovat sellaisen geometrisen algebran vektoreita, missä jokaisen vektorin neliö on nollaa suurempi. Oletetaan lisäksi, että vektoreille  $a$  ja  $b$  on voimassa ehto  $ab = a \cdot b$ . Koska vektorin  $b$  neliö on nollaa suurempi, voidaan muodostaa

$$ab \frac{b}{b^2} = a \cdot b \frac{b}{b^2},$$

mistä seuraa

$$a = \frac{a \cdot b}{b^2} b.$$

Jos  $a \cdot b$  on nolla, niin  $a$  tai  $b$  on nollavektori tai vektorit  $a$  ja  $b$  ovat Lauseen 3.2.3 perusteella ortogonaaliset. Molemmat vaihtoehdot ovat ristiriidassa oletusten kanssa, joten  $\frac{a \cdot b}{b^2}$  on nollasta poikkeava reaaliluku. Vektorit  $a$  ja  $b$  ovat siis yhdensuuntaiset.  $\square$

Kertomalla peräkkäin vektoreita muodostetaan geometrinen algebra, jonka yleisiä alkioita kutsutaan multivektoreiksi. Multivektoreita merkitään tässä työssä yleisen käytännön mukaisesti kursivoituilla suuraakkosilla  $A, B$  ja niin edelleen. Multivektorit muodostavat niin ikään reaalisen vektoriavaruuden, eli jos  $A$  ja  $B$  ovat multivektoreita ja  $\lambda$  ja  $\mu$  reaalilukuja, niin  $\lambda A + \mu B$  on multivektori. Kaikki multivektorit saadaan siis vektoreiden geometrysten tulojen summina. Geometrinen tulo

on voimassa multivektoreille, ja lineaarisuuden nojalla se on assosiattiivinen ja distributiivinen. Toisin sanoen on

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C, \\ A(B + C) &= AB + AC. \end{aligned}$$

### 3.3 Algebran kanta

Määritellään seuraavaksi yleisesti  $n$ :n vektorin ulkotulo geometrisen tulon avulla.

**Määritelmä 3.3.1.** *Geometrisen algebran vektoreiden  $a_1, \dots, a_r$  ulkotulo  $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$  määritellään kaikkien geometrysten tulojen täysin antisymmetrisenä summana:*

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_r = \frac{1}{r!} \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in S} (-1)^\epsilon a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_r},$$

missä  $S$  on alkuioiden  $(1, \dots, r)$  kaikkien permutaatioiden joukko ja permutaation etumerkin määrittävät ehdot

$$\begin{aligned} (-1)^\epsilon &= +1, & \text{jos } k_1 \dots k_r \text{ on lukujen } 1, \dots, r \text{ parillinen permutaatio.} \\ (-1)^\epsilon &= -1, & \text{jos } k_1 \dots k_r \text{ on lukujen } 1, \dots, r \text{ pariton permutaatio.} \end{aligned}$$

**Esimerkki 3.3.2.** *Käyttäen Määritelmää 3.3.1 saadaan kahden vektorin ulkotuloksi*

$$a_1 \wedge a_2 = \frac{1}{2}(a_1 a_2 - a_2 a_1),$$

mikä vastaa aiemmin aksiomista johdettua ulkotuloa.

Kuten edellä huomattiin vektorin ulkotulo itsensä kanssa on nolla antisymmetrisyyden nojalla, ja näin on myös yleisessä tapauksessa. Jos ulkotulossa  $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$  kaksi vektoria ovat samat, Määritelmän 3.3.1 oikean puolen summassa termit kumoavat toisensa.

Nimittäin olkoon jokin parillinen permutaatio muotoa

$$a_{k_1} \dots a \dots a \dots a_{k_r},$$

jossa on kaksi samaa vektoria. Tästä saadaan muodostettua toinen permutaatio vaihtamalla vektoreiden  $a$  ja  $a$  paikat, jolloin permutaatiosta tulee pariton. Näin ollen saadaan termi

$$-a_{k_1} \dots a \dots a \dots a_{k_r},$$

joten termit kumoavat toisensa. Koska tämä pätee kaikille Määritelmän 3.3.1 summan termeille, summasta tulee nolla. Sama pätee myös, jos ulkotulossa vektorit ovat lineaarisesti riippuvia, sillä siinä tapauksessa yksi vektoreista voidaan kirjoittaa muiden vektoreiden lineaarikombinaationa.

Näin ollen ulkotulo ilmaisee, mikä on syntyvän hypertilavuuden ulotteisuus. Multivektori  $A$  on  $r$ -terä (eng. blade), jos se voidaan esittää  $r$ :n nollastapoikkeavan vektorin ulkotulona eli tulona  $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ . Kokonaislukua  $r$  kutsutaan terän asteeksi. Multivektoria, joka saadaan  $r$ -terien lineaarikombinaationa, kutsutaan vastaavasti  $r$ -vektoriksi. Tällaista multivektoria kutsutaan homogeeniseksi. Nolla-asteen termit ovat skalaareita, ja 1-vektorit tavallisia vektoreita. 2- ja 3-vektoreista käytetään nimityksiä bivektori ja trivektori vastaavasti. Geometrisen algebran multivektori  $A$  voidaan esittää hajotelmana

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \dots = \sum_r \langle A \rangle_r,$$

missä projektio-operaattori  $\langle \rangle_r$  palauttaa multivektorin astetta  $r$  olevan osan. Homogeeninen multivektori sisältää ainoastaan yhtä astetta olevia termejä, joten homogeeniselle multivektorille  $A$  voidaan kirjoittaa

$$A = \langle A \rangle_r = A_r.$$

Nolla-asteen termin eli skalaarin palauttavaa projektiota merkitään

$$\langle A \rangle_0 = \langle A \rangle.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen  $r$ -terä voidaan esittää  $r : n$  vektorin geometrisena tulona.

**Lause 3.3.3.** *Jokainen terä voidaan esittää ortogonaalisten, antikommutoivien vektoreiden geometrisena tulona*

*Todistus.* Todistetaan lause yleisesti vektoriavaruuksille, joissa vektorin neliö on joko positiivinen tai negatiivinen. Täydennetään lähteiden [8] ja [4] todistuksia.

Olkoon  $a_1, \dots, a_r$  lineaarisesti riippumattomia vektoreita, joista muodostetaan symmetrinen  $r \times r$  matriisi  $M$  siten, että

$$M_{ij} = a_i \cdot a_j.$$

Koska  $M$  on symmetrinen, se voidaan diagonalisoida ortogonaalisen matriisin  $R$  avulla

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r R_{ik} \Lambda_{kl} R_{lj}^t = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r R_{ik} R_{jl} \Lambda_{kl}, \quad (3.4)$$

missä  $\Lambda$  on lävistäjämatriisi, jonka lävistäjäalkiot  $\Lambda_{ii}$  ovat matriisin  $M$  ominaisarvot. Matriisin  $R$  sarakevektorit ovat puolestaan matriisin  $M$  ominaisarvoihin liittyviä ominaisvektoreita. [30]

Matriisia  $R_{ij}$  käyttäen määritellään uudet vektorit  $\{e_i\}$  kaavalla

$$a_i = \sum_{j=1}^r R_{ij} e_j.$$

Käyttäen tätä määritelmää kirjoitetaan matriisi  $M$  muotoon

$$\begin{aligned} M_{ij} &= a_i \cdot a_j \\ &= \sum_{k=1}^r R_{ik} e_k \cdot \sum_{l=1}^r R_{jl} e_l \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r R_{ik} R_{jl} e_k \cdot e_l. \end{aligned}$$

Vertaamalla tätä yhtälöön (3.4) huomataan, että vektoreille  $\{e_i\}$  pätee ehto

$$e_k \cdot e_l = \Lambda_{kl}.$$

Vektorit  $e_1, \dots, e_r$  ovat siis ortogonaalisia, joten ne antikommutoivat Lauseen 3.2.3 nojalla. Niiden geometrinen tulo on näin ollen täysin antisymmetrinen, joten Määritelmän 3.3.1 perusteella on

$$\begin{aligned} e_1 \wedge \dots \wedge e_r &= \frac{1}{r!} \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in P} (-1)^\epsilon e_{k_1} e_{k_2} \dots e_{k_r} \\ &= e_1 \dots e_r, \end{aligned} \tag{3.5}$$

koska antisymmetrisyyden nojalla jokainen tulo  $e_{k_1} e_{k_2} \dots e_{k_r}$  voidaan järjestää muotoon  $e_1 \dots e_r$  noudattaen etumerkin vaihdossa sääntöä

$$e_{k_1} e_{k_2} \dots e_{k_r} = (-1)^\epsilon e_1 \dots e_r. \tag{3.6}$$

Matriisin  $A_{n \times n}$  determinantti määritellään

$$\det(A_{n \times n}) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in S} (-1)^\epsilon A_{1k_1} A_{2k_2} \dots A_{nk_n},$$

missä  $S$  on lukujen  $1, \dots, n$  kaikkien permutaatioiden joukko. Etumerkki määräytyy samalla tavalla kuin ulkotulon määritelmässä, eli  $(-1)^\epsilon = 1$ , jos permutaatio on parillinen, ja  $(-1)^\epsilon = -1$ , jos permutaatio on pariton. [30]

Matriisin determinantin määritelmä muistuttaa Määritelmää 3.3.1, joten kirjoitetaan

$$\begin{aligned} a_1 \wedge \cdots \wedge a_r &= \left( \sum_{i_1=1}^r R_{1i_1} e_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{i_r=1}^r R_{ri_r} e_{i_r} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_r} R_{1i_1} \cdots R_{ri_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Viimeinen summa muodostuu summasta kaikkien indeksien  $1, \dots, r$  permutaatioiden yli sekä termeistä, joissa tulossa  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$  on kahdesta  $r$ :ään samaa vektoria. Nämä tulot ovat nolla Määritelmän 3.3.1 perusteella, joten jatketaan yhtälöketju (3.7) muotoon

$$\begin{aligned} a_1 \wedge \cdots \wedge a_r &= \sum_{i_1, \dots, i_r} R_{1i_1} \cdots R_{ri_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \\ &= \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in S} (-1)^\epsilon (-1)^\epsilon R_{1k_1} \cdots R_{rk_r} e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_r} \\ &= \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in S} (-1)^\epsilon R_{1k_1} \cdots R_{rk_r} e_1 \cdots e_r \\ &= \det(R) e_1 \cdots e_r, \end{aligned}$$

missä kolmas yhtäsuuruus saadaan kohdan (3.6) nojalla.

Matriisi  $R$  on ortogonaalinen, joten sen determinantti on  $\pm 1$ . Valitsemalla vektoreiden  $e_i$  järjestys sopivasti saadaan determinantti  $\det(R) = 1$ , ja näin ollen on aina olemassa joukko  $\{e_i\}$  vektoreita siten, että

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_r = e_1 \cdots e_r.$$

□

**Määritelmä 3.3.4.** *Olkoon  $V$  vektoriavaruus ja joukko  $\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$  sen ortonormaali kanta. Geometrinen algebra  $G_{p,q}$  on reaalinen, assosiativinen ja ykkösellinen algebra, jonka generoivat vektorit  $e_1, \dots, e_{p+q}$ , joille on voimassa ominaisuudet*

$$\begin{aligned} e_i e_j + e_j e_i &= 0, \text{ jos } i \neq j, \\ e_i^2 &= 1, \text{ jos } 1 \leq i \leq p, \\ e_i^2 &= -1, \text{ jos } p < i \leq p+q = n, \end{aligned}$$

ja sen kanta on

$$\{e_\nu = e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_k} \mid 1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k \leq n\} \cup \{1\}.$$

Geometrisen algebran merkki on lukupari  $(p, q)$ , jossa  $p$  on niiden kantavektoreiden lukumäärä, joiden neliö on positiivinen, ja  $q$  niiden, joiden neliö on negatiivinen. Esimerkiksi euklidisen kolmiulotteisen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kantavektoreiden virittämän geometrisen algebran merkki on  $(3,0)$ . Tällaisissa tapauksissa merkitään usein lyhyemmin  $G_{n,0} = G_n$ . Degeneroituneessa tapauksessa vektoriavaruuden kantavektoreina voi olla nollavektoreita, joiden neliöt ovat niin ikään nolliä. Tässä työssä keskitytään ainoastaan ei-degeneroituneisiin geometrisiin algebriin. Geometrinen algebra  $G_n$  on määritelmän mukaan vektoriavaruus, jonka kanta on sama kuin geometrisen algebran kanta.

**Esimerkki 3.3.5.** *Euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}_3$  kantavektorit  $e_1, e_2$  ja  $e_3$  muodostavat geometrisen algebran  $G_3$ , jonka kannan muodostavat multivektorit:*

$$\begin{aligned} &1, \\ &e_1, \quad e_2, \quad e_3, \\ &e_1e_2, \quad e_2e_3, \quad e_1e_3, \\ &e_1e_2e_3. \end{aligned}$$

Geometrisen algebran luonnollisia aliavaruuksia ovat astetta  $r$  olevien kantamultivektoreiden virittämät aliavaruudet. Tällaista aliavaruutta merkitään  $G_n^r$ , ja sen ulottuvuus on  $\dim(G_n^r) = \binom{n}{r}$ . Koko algebran ulottuvuus on siis  $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$ . Selvästi geometrinen algebra  $G_n$  voidaan esittää suorana summana

$$G_n = G_n^+ \oplus G_n^-,$$

missä  $G_n^+$  ja  $G_n^-$  ovat parillinen ja pariton vektorialiavaruus:

$$G_n^+ = \{A \in G_n \mid A = \sum_{2k} \langle A \rangle_{2k}, k \in \mathbb{N}_0\}, \quad (3.8)$$

$$G_n^- = \{A \in G_n \mid A = \sum_{2k-1} \langle A \rangle_{2k-1}, k \in \mathbb{N}\}. \quad (3.9)$$

Vektorialiavaruus  $G_n^+$  sisältää siis multivektorit, jotka muodostuvat parillista astetta olevista termeistä, ja vektorialiavaruus  $G_n^-$  koostuu vastaavasti ainoastaan parittomia termejä sisältävistä multivektoreista. Helposti nähdään esimerkiksi tarkastelemalla multivektorin esitystä kantavektoreiden  $e_i$  geometrinen tulojen summina, että kahden parillisen multivektorin tulo on parillinen. Täten parillinen vektorialiavaruus  $G_n^+$  muodostaa geometrisen tulo suhteen algebran  $G_n$  alialgebran. Kahden parittoman multivektorin tulo on parillinen, joten pariton vektorialiavaruus ei muodosta alialgebraa. Parillisen ja parittoman multivektorin tulo on pariton.

### 3.4 Yleinen sisä- ja ulkotulo

Kaavaa (3.1) vastaava hajotelma on olemassa vektorin ja homogeenisen multivektorin geometriselle tulolle. Tätä varten sisä- ja ulkotulo pitää määritellä sopivasti.

**Määritelmä 3.4.1.** *Vektorin  $a$  ja homogeenisen multivektorin  $A_r$  sisätulo määritellään kaavalla*

$$a \cdot A_r = \frac{1}{2}(aA_r - (-1)^r A_r a).$$

Määritelmä on sopiva, koska se palautuu Määritelmän 3.2.2 sisätuloksi, jos  $A_r$  on vektori. Määritellään vastaava myös ulkotulolle.

**Määritelmä 3.4.2.** *Vektorin  $a$  ja homogeenisen multivektorin  $A_r$  ulkotulo määritellään kaavalla*

$$a \wedge A_r = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^r A_r a).$$

Jotta Määritelmä 3.4.2 olisi järkevä, se ei saa olla ristiriidassa Määritelmän 3.3.1 kanssa. Tämä tarkoittaa, että Määritelmän 3.4.2 tulee palautua Määritelmään 3.3.1, jos  $A_r$  on terä  $a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$ . Osoitetaan tämä seuraavassa lauseessa.

**Lause 3.4.3.** *Olkoon  $a$  geometrisen algebran vektori ja  $A_r = a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$  terä. Nyt on voimassa*

$$\frac{1}{2}(a(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) + (-1)^r(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r)a) = a \wedge a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r.$$

*Todistus.* Täydennetään lähteen [8] todistusta. Koska  $A_r$  on terä se voidaan kirjoittaa ortogonaalisten vektoreiden  $e_i$  geometrisena tulona. Täten todistettavaksi jää väite

$$\frac{1}{2}(ae_1 \cdots e_r + (-1)^r e_1 \cdots e_r a) = a \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r. \quad (3.10)$$

Todistusta varten tarvitaan aputulos. Kahden vektorin  $a$  ja  $b$  sisätulon määritelmäs-  
tä seuraa kaava

$$ab = 2a \cdot b - ba. \quad (3.11)$$

Olkoon  $a, a_1, \dots, a_r$  geometrisen algebran  $G_n$  vektoreita. Hyödyntämällä toistuvasti kaavaa (3.11) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} aa_1 a_2 \cdots a_r &= 2a \cdot a_1 a_2 \cdots a_r - a_1 a a_2 \cdots a_r \\ &= 2a \cdot a_1 a_2 \cdots a_r - 2a \cdot a_2 a_1 a_3 \cdots a_r + a_1 a_2 a a_3 \cdots a_r \\ &= 2 \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \cdot a_k a_1 a_2 \cdots \check{a}_k \cdots a_r + (-1)^r a_1 a_2 \cdots a_r a, \end{aligned} \quad (3.12)$$

missä merkintä  $\check{a}_k$  tarkoittaa sitä, että vektori  $a_k$  puuttuu tulosta. Todistetaan väite induktiolla. Jos aste on  $r = 1$ , väite on tosi Määritelmän 3.2.2 nojalla. Jos aste on



suurempi kuin yksi, Määritelmästä 3.3.1 seuraa yhtälöketju

$$\begin{aligned} & a \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r \\ &= \frac{1}{r+1} a e_1 \cdots e_r + \frac{1}{r+1} \sum_{k=1}^r (-1)^k e_k (a \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \check{e}_k \wedge \cdots \wedge e_r), \end{aligned} \quad (3.13)$$

missä  $\check{e}_k$  tarkoittaa puuttuvaa tekijää, järjestelemällä Määritelmän 3.3.1 summan ne termit yhteen, joiden ensimmäinen vektori on sama.

Tehdään induktio-oletus, ja oletetaan, että kaava (3.10) on voimassa terälle, jonka aste on  $r-1$ . Induktio-oletuksen perusteella on

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^r (-1)^k e_k (a \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \check{e}_k \wedge \cdots \wedge e_r) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (-1)^k e_k (a e_1 \cdots \check{e}_k \cdots e_r + (-1)^{r-1} e_1 \cdots \check{e}_k \cdots e_r a) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (-1)^k e_k a e_1 \cdots \check{e}_k \cdots e_r + \frac{r}{2} (-1)^r e_1 \cdots e_r a, \end{aligned}$$

mistä seuraa kohdan (3.11) perusteella

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (-1)^k 2(e_k \cdot a) e_1 \cdots \check{e}_k \cdots e_r - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r ((-1)^k a e_k e_1 \cdots e_r) + \frac{r}{2} (-1)^r e_1 \cdots e_r a \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (-1)^k 2(e_k \cdot a) e_1 \cdots \check{e}_k \cdots e_r \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r ((-1)^k (-1)^{-1} a e_1 \cdots e_r) + \frac{r}{2} (-1)^r e_1 \cdots e_r a \\ &= \sum_{k=1}^r ((-1)^k (e_k \cdot a) e_1 \cdots \check{e}_k \cdots e_r) + \frac{r}{2} (a e_1 \cdots e_r + (-1)^r e_1 \cdots e_r a) \\ &= \frac{r-1}{2} a e_1 \cdots e_r + \frac{r+1}{2} (-1)^r e_1 \cdots e_r a, \end{aligned} \quad (3.14)$$

missä viimeinen kohta saadaan kaavalla (3.12). Sijoittamalla tulos (3.14) yhtälöketjuun (3.13) todistaa väitteen (3.10) terälle, jonka aste on  $r$ . Koska väite on voimassa tapauksessa  $r=1$ , niin induktioperiaatteen mukaan väite (3.10) on voimassa kaikilla asteen  $r$  arvoilla.  $\square$

Määritelmästä 3.4.2 seuraa, että osittelulaki on voimassa ulkotulolle, koska se on voimassa geometriselle tulolle. Määritelmät 3.4.1 ja 3.4.2 ovat haluttua muotoa,

koska yhdistämällä nämä saadaan geometrinen tulo kirjoitettua muodossa

$$aA_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r. \quad (3.15)$$

Määritelmistä seuraavat kommutointiominaisuudet

$$a \cdot A_r = \frac{1}{2}(aA_r - (-1)^r A_r a) = \frac{1}{2}(-1)^{r+1}(A_r a - (-1)^r aA_r) = (-1)^{r+1} A_r \cdot a, \quad (3.16)$$

$$a \wedge A_r = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^r A_r a) = \frac{1}{2}(-1)^r(A_r a + (-1)^r aA_r) = (-1)^r A_r \wedge a, \quad (3.17)$$

mistä huomataan, että sisä- ja ulkotulon symmetrisyys ja antisymmetrisyys vaihtelevat multivektorin  $A_r$  asteen mukaan. Lisäksi Määritelmästä 3.4.2 seuraa, että Määritelmän 3.3.1 ulkotulo on liitännäinen.

**Lause 3.4.4.** *Määritelmän 3.3.1 on liitännäinen, eli jokaisella vektorilla  $a_1$ ,  $a_2$  ja  $a_3$  pätee*

$$a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3) = (a_1 \wedge a_2) \wedge a_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3.$$

*Todistus.* Täydennetään lähteen [12] todistusta. Koska  $a_3 a_1 + a_1 a_3 = a_3 \cdot a_1$  on reaaliluku, vektoreille  $a_1$ ,  $a_2$  ja  $a_3$  pätee

$$\begin{aligned} a_3 a_1 a_2 - a_2 a_1 a_3 &= a_3 a_1 a_2 - a_2 a_1 a_3 + a_2(a_3 a_1 + a_1 a_3) - (a_3 a_1 + a_1 a_3)a_2 \\ &= a_3 a_1 a_2 - a_2 a_1 a_3 + a_2 a_3 a_1 + a_2 a_1 a_3 - a_3 a_1 a_2 - a_1 a_3 a_2 \\ &= a_2 a_3 a_1 - a_1 a_3 a_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 - a_3 a_2 a_1 &= a_1 a_2 a_3 - a_3 a_2 a_1 + a_3(a_2 a_1 + a_1 a_2) - (a_2 a_1 + a_1 a_2)a_3 \\ &= a_1 a_2 a_3 - a_3 a_2 a_1 + a_3 a_2 a_1 + a_3 a_1 a_2 - a_2 a_1 a_3 - a_1 a_3 a_2 \\ &= a_3 a_1 a_2 - a_2 a_1 a_3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Määritelmistä 3.4.2 ja 3.3.1 sekä kohdista (3.18) ja (3.19) seuraa

$$\begin{aligned} a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3) &= \frac{1}{2}(a_1(a_2 \wedge a_3) + (a_2 \wedge a_3)a_1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_1(a_2 a_3 - a_3 a_2) + \frac{1}{2}(a_2 a_3 - a_3 a_2)a_1\right) \\ &= \frac{1}{4}(a_1 a_2 a_3 - a_1 a_3 a_2 + a_2 a_3 a_1 - a_3 a_2 a_1) \\ &= \frac{1}{2}(a_1 a_2 a_3 - a_3 a_2 a_1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Samanlaisella päättelyllä saadaan yhteys

$$\begin{aligned}
(a_1 \wedge a_2) \wedge a_3 &= a_3 \wedge (a_1 \wedge a_2) \\
&= \frac{1}{2} (a_3(a_1 \wedge a_2) + (a_1 \wedge a_2)a_3) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} a_3(a_1 a_2 - a_2 a_1) + \frac{1}{2} (a_1 a_2 - a_2 a_1) a_3 \right) \\
&= \frac{1}{4} (a_3 a_1 a_2 - a_3 a_2 a_1 + a_1 a_2 a_3 - a_2 a_1 a_3) \\
&= \frac{1}{2} (a_1 a_2 a_3 - a_3 a_2 a_1), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

missä ensimmäinen yhtäsuuruus pätee ulkotulon kommutointiominaisuuden (3.17) perusteella. Päätetään todistus laskemalla ulkotulo  $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$  Määritelmän 3.3.1 mukaisesti. Käyttäen kohtia (3.18) ja (3.19) kyseinen tulo saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 &= \frac{1}{6} (a_1 a_2 a_3 - a_1 a_3 a_2 + a_2 a_1 a_3 - a_2 a_3 a_1 + a_3 a_2 a_1 - a_3 a_1 a_2) \\
&= \frac{1}{2} (a_1 a_2 a_3 - a_3 a_1 a_2). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Yhdistämällä kohdat (3.20), (3.21) ja (3.22) todistetaan väite

$$a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3) = (a_1 \wedge a_2) \wedge a_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3.$$

□

Tarkastellaan sisätuloa  $a \cdot A_r$ , missä  $A_r$  on terä eli se voidaan esittää ortogonaalisten vektoreiden  $a_i$  geometrisena tulona  $a_1 \cdots a_r$ . Ilmaistaan vektori  $a$  lineaarikombinaationa

$$a = b + \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i,$$

missä  $\lambda_i$  on reaaliluku ja  $b$  on vektorin  $a$  se osa, joka on ortogonaalinen vektoreiden  $a_i$  kanssa. Määritelmästä 3.4.1 seuraa

$$a \cdot (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) = \frac{1}{2} \left( (b + \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i)(a_1 \cdots a_r) - (-1)^r (a_1 \cdots a_r)(b + \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i) \right). \tag{3.23}$$

Koska  $b$  on ortogonaalinen vektoreiden  $a_i$  kanssa, niin

$$b(a_1 \cdots a_r) = (-1)^r (a_1 \cdots a_r)b,$$

ja kyseiset termit kumoavat toisensa kohdassa (3.23). Jäljelle jäävien termien

$$a_i(a_1 \cdots a_r)$$

aste on  $r - 1$ , ja niille on voimassa kommutointisääntö

$$a_i(a_1 \cdots a_r) = (-1)^{r-1}(a_1 \cdots a_r)a_i,$$

eli ne eivät kumoa toisiaan summassa (3.23). Lineaarisuuden nojalla tulos yleistyy homogeeniselle multivektorille  $A_r$ . Näin ollen sisätulo  $a \cdot A_r$  laskee multivektorin  $A_r$  astetta yhdellä, ja vastaavanlaiselle tarkastelulla voidaan osoittaa, että ulkotulo  $a \wedge A_r$  korottaa astetta yhdellä. Tämä ilmaistaan kirjoittamalla identiteetit

$$\begin{aligned} a \cdot A_r &= \langle aA_r \rangle_{r-1}, \\ a \wedge A_r &= \langle aA_r \rangle_{r+1}. \end{aligned}$$

Geometrisen algebran määritelmän perusteella jokainen multivektori voidaan esittää terien summana, ja Lauseen 3.3.3 nojalla jokainen terä voidaan esittää antikommutoivien vektoreiden geometrisena tulona. Homogeeninen multivektori  $A_r$  voidaan siis kirjoittaa antikommutoivien vektoreiden geometristen tulojen summana. Nämä geometriset tulot ovat muotoa

$$a_{k_1} \cdots a_{k_r}, \tag{3.24}$$

missä vektorit  $a_1, \dots, a_r$  antikommutoivat geometrisen tulon suhteen. Vastaavasti homogeenisen multivektorin  $B_s$  termit ovat muotoa

$$b_{l_1} \cdots b_{l_s}. \tag{3.25}$$

Näin ollen geometrinen tulo  $A_r B_s$  muodostuu termeistä, jotka ovat muotoa

$$a_{k_1} \cdots a_{k_r} b_{l_1} \cdots b_{l_s},$$

Käyttäen hajotelmaa (3.15) huomataan, että kahden homogeenisen multivektorin geometrisessa tulossa on tiettyä astetta olevia termejä. Termin aste riippuu siitä, kuinka monta lineaarisesti riippuvaa vektoria tuloissa (3.24) ja (3.25) on. Termin aste on  $r + s$ , jos tuloissa kaikki vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Jos tuloissa on kaksi lineaarisesti riippuvaa vektoria, kyseisen termin aste on  $r + s - 2$ . Enimmillään lineaarisesti riippuvia vektoreita on pienemmän luvun  $r$  tai  $s$  verran. Toisin sanoen tulon  $A_r B_s$  termien alin aste on  $|r - s|$ . Yhdistämällä edeltävä päättely

huomataan, että tulo  $A_r B_s$  voidaan esittää hajotelmana

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \cdots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s}. \quad (3.26)$$

Sisätulolla tarkoitetaan tämän hajotelman alimman asteen termiä. Vastaavasti ulkotulolla tarkoitetaan hajotelman korkeimman asteen termiä. Lyhyemmin sanottuna kahdelle homogeeniselle multivektorille määritellään:

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|}, \quad (3.27)$$

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s}. \quad (3.28)$$

Tämä ulkotulon määritelmä on sopuinnussa Määritelmän 3.3.1 kanssa. Lisäksi on helppo osoittaa, että ulkotulo on liitännäinen:

$$\begin{aligned} (A_r \wedge B_s) \wedge C_t &= \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \wedge C_t \\ &= \langle \langle A_r B_s \rangle C_t \rangle_{r+s+t}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nimittäin käyttäen kohtaa (3.26) saadaan

$$\begin{aligned} (A_r B_s) C_t &= \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} C_t + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} C_t + \cdots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s} C_t \\ &= \langle \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} C_t \rangle_{||r-s|-t|} + \cdots + \langle \langle A_r B_s \rangle_{r+s} C_t \rangle_{|r-s|+t} + \cdots \\ &\quad + \langle \langle A_r B_s \rangle_{r+s} C_t \rangle_{|(r+s)-t|} + \cdots + \langle \langle A_r B_s \rangle_{r+s} C_t \rangle_{r+s+t}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

missä ainoastaan viimeinen termi on astetta  $r + s + t$ . Tästä ominaisuudesta seuraa yhtälöketju

$$\begin{aligned} (A_r \wedge B_s) \wedge C_t &= \langle \langle A_r B_s \rangle_{r+s} C_t \rangle_{r+s+t} \\ &= \langle (A_r B_s) C_t \rangle_{r+s+t} \\ &= \langle A_r (B_s C_t) \rangle_{r+s+t} \\ &= A_r \wedge (B_s \wedge C_t), \end{aligned}$$

missä kolmas yhtäsuuruus on voimassa geometrisen tulon liitännäisyyden perusteella. Sisätulo ei ole liitännäinen, mutta homogeenisille multivektoreille voidaan osoittaa lievempi tulos [23].

**Apulause 3.4.5.** *Olkoon  $A_r$ ,  $B_s$  ja  $C_t$  homogeenisia multivektoreita. Seuraavat laskusäännöt ovat voimassa*

$$(1) \quad A_r \cdot (B_s \cdot C_t) = (A_r \wedge B_s) \cdot C_t, \text{ kun } r + s \leq t \text{ ja } r, s > 0,$$

$$(2) \quad A_r \cdot (B_s \cdot C_t) = (A_r \cdot B_s) \cdot C_t, \text{ kun } r + t \leq s,$$

$$(3) (A_r \cdot B_s) \cdot C_t = A_r \cdot (B_s \wedge C_t), \text{ kun } s + t \leq r.$$

*Todistus.* Täydennetään lähteen [23] todistuksia. Todistetaan ensin kohta (1). Olkoon asteille voimassa ehdot  $r + s \leq t$  ja  $r, s > 0$ . Käyttäen Määritelmiä 3.27 ja 3.28 ja geometrisen tulon liitännäisyyttä kirjoitetaan

$$\begin{aligned} A_r \cdot (B_s \cdot C_t) &= A_r \cdot \langle B_s C_t \rangle_{t-s} \\ &= \langle A_r (B_s C_t) \rangle_{(t-s)-r} \\ &= \langle (A_r B_s) C_t \rangle_{t-(r+s)} \\ &= \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \cdot C_t \\ &= (A_r \wedge B_s) \cdot C_t, \end{aligned}$$

missä toinen ja neljäs yhtäsuuruus seuraa kohdan (3.30) tarkastelusta. Kohta (2) todistetaan vastaavasti. Olkoon asteille voimassa ehto  $r + t \leq s$ . Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} A_r \cdot (B_s \cdot C_t) &= A_r \cdot \langle B_s C_t \rangle_{s-t} \\ &= \langle A_r (B_s C_t) \rangle_{(s-t)-r} \\ &= \langle (A_r B_s) C_t \rangle_{(s-r)-t} \\ &= \langle A_r B_s \rangle_{s-r} \cdot C_t \\ &= (A_r \cdot B_s) \cdot C_t, \end{aligned}$$

missä toinen ja neljäs yhtäsuuruus seuraa kohdan (3.30) tarkastelusta. Tarkastellaan vielä kohta (3), joten olkoon asteille voimassa ehto  $s + t \leq r$ . Nyt saadaan tulos

$$\begin{aligned} (A_r \cdot B_s) \cdot C_t &= \langle A_r B_s \rangle_{r-s} \cdot C_t \\ &= \langle (A_r B_s) C_t \rangle_{(r-s)-t} \\ &= \langle A_r (B_s C_t) \rangle_{r-(s+t)} \\ &= A_r \cdot \langle B_s \rangle_{s+t} \cdot C_t \\ &= A_r \cdot (B_s \wedge C_t), \end{aligned}$$

missä toinen ja neljäs yhtäsuuruus seuraa kohdan (3.30) tarkastelusta.  $\square$

Yleisesti kahden multivektorin geometrinen tulo ei siis voida esittää hajotelmana

$$AB = A \cdot B + A \wedge B.$$

Esimerkiksi kahden bivektorin  $A_2$  ja  $B_2$  geometrinen tulo on

$$A_2 B_2 = \langle A_2 B_2 \rangle_0 + \langle A_2 B_2 \rangle_2 + \langle A_2 B_2 \rangle_4.$$

Muotoillaan seuraavaksi hyödyllinen tulos, jota tarvitaan seuraavassa luvussa.

**Apulause 3.4.6.** *Geometrisen algebran  $G_n$  vektoreille  $a, a_1, a_2, \dots, a_r$  on voimassa yhtäsuuruus*

$$a \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \cdot a_k a_1 \wedge \dots \wedge \check{a}_k \wedge \dots \wedge a_r,$$

missä merkintä  $\check{a}_k$  tarkoittaa sitä, että vektori  $a_k$  puuttuu ulkotulosta.

*Todistus.* Olkoon  $a, a_1, \dots, a_r$  geometrisen algebran  $G_n$  vektoreita. Näille voidaan kirjoittaa yleisen ulkotulon määrittelevän kaavan (3.28) perusteella

$$a \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_r) = a \cdot \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_r.$$

Kaavan (3.26) mukaan tulo  $a_1 a_2 \dots a_r$  sisältää termejä, joiden asteet voivat olla  $r, r-2, \dots, 0$ . Näin ollen kirjoitetaan käyttäen kohtaa (3.12) ja Määritelmää 3.4.1

$$\frac{1}{2}(aa_1 a_2 \dots a_r - (-1)^r a_1 a_2 \dots a_r a) = a \cdot \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_r + a \cdot \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_{r-2} + \dots \quad (3.31)$$

Koska sisätulo vektorin  $a$  kanssa laskee terän  $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$  astetta yhdellä, niin

$$a \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_r) = \frac{1}{2} \langle aa_1 a_2 \dots a_r - (-1)^r a_1 a_2 \dots a_r a \rangle_{r-1}. \quad (3.32)$$

Soveltamalla kaavaa (3.11) projektio-operaattorin sisällä yhtälössä (3.32) osoitetaan väite todeksi:

$$\begin{aligned} & a \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_r) \\ &= \frac{1}{2} \langle 2 \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \cdot a_k a_1 \dots \check{a}_k \dots a_r + (-1)^r a_1 a_2 \dots a_r a - (-1)^r a_1 a_2 \dots a_r a \rangle_{r-1} \\ &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \cdot a_k \langle a_1 \dots \check{a}_k \dots a_r \rangle_{r-1} \\ &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \cdot a_k a_1 \wedge \dots \wedge \check{a}_k \wedge \dots \wedge a_r, \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus on seurausta kaavasta (3.28). □

Esitellään vielä kaksi multivektoreiden välistä tuloa, jotka määritellään geometrisen tulon avulla

**Määritelmä 3.4.7.** *Kahden multivektorin  $A$  ja  $B$  kommutaattori-tulo  $\times$  määritellään kaavalla*

$$A \times B = \frac{1}{2}(AB - BA).$$

Nimitys kommutaattori johtuu siitä, että multivektoreiden  $A$  ja  $B$  kommutaattori-tulo on nolla, jos multivektorit  $A$  ja  $B$  kommutoivat. On syytä huomata, että kerroin  $\frac{1}{2}$  erottaa geometrisen algebran kommutaattori-tulon kvanttimekaniikassa käytetystä kommutaattorista.

Skalaaritulolla tarkoitetaan nimensä mukaisesti geometrisen tulon skalaariosaa. Sitä merkitään joskus merkillä  $*$ :

$$A * B = \langle AB \rangle.$$

### 3.5 Involuutiot

Involuutiolla tarkoitetaan kuvausta, joka on itsensä käänteiskuvaus. Geometrisessa algebrassa  $G_n$  määritellään seuraava involuutio.

**Määritelmä 3.5.1.** *Pääinvoluutio on kuvaus  $' : G_n \rightarrow G_n$ ,*

$$e'_i = -e_i,$$

*jokaisella  $i = 1, \dots, n$ .*

Pääinvoluutio vaihtaa siis kaikkien aliavaruuden  $G_n^1$  vektoreiden etumerkit. Lisäksi määritellään kaksi anti-involuutiota.

**Määritelmä 3.5.2.** *Reversio on kuvaus  $\dagger : G_n \rightarrow G_n$ , joka kääntää geometrisen tulon vektoreiden järjestyksen:*

$$(e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_k})^\dagger = e_{\nu_k} \cdots e_{\nu_1}.$$

**Määritelmä 3.5.3.** *(Clifford) konjugaatti on kuvaus  $\bar{\phantom{x}} : G_n \rightarrow G_n$ , joka on yhdistetty kuvaus pääinvoluutiosta ja reversiosta*

$$\overline{e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_k}} = ((e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_k})')^\dagger.$$

Nämä laajennetaan lineaarisesti koko algebraan.

**Seuraus 3.5.4.** *Multivektorin  $A$  pää-involuutio ja reversio ovat*

$$\begin{aligned} A' &= \langle A \rangle - \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + \cdots + \langle A \rangle_{2k} - \langle A \rangle_{2k+1} + \cdots, \\ A^\dagger &= \langle A \rangle + \langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4 - \cdots + \langle A \rangle_{4k} - \langle A \rangle_{4k+1} + \cdots. \end{aligned}$$

Jos multivektori voidaan esittää tulona  $A = a_1 \cdots a_r$ , sille pätee

$$\langle A^\dagger A \rangle = A^\dagger A = a_1^2 \cdots a_r^2. \quad (3.33)$$



Näin ollen voidaan määritellä multivektorin suuruus  $|A|$ .

**Määritelmä 3.5.5.** *Olkoon  $A = a_1 \cdots a_r$  geometrisen algebran  $G_n$  multivektori. Multivektorin  $A$  suuruus  $|A|$  on*

$$|A| = \sqrt{|\langle A^\dagger A \rangle|}.$$

Lisäksi tällaisen multivektorin, joka voidaan esittää  $r$ :n vektorin geometrisena tulona, käänteismultivektori on

$$A^{-1} = (-1)^q \frac{A^\dagger}{|A|^2} = \frac{A^\dagger}{A^2},$$

missä  $q$  on tulon (3.33) niiden vektoreiden, joiden neliö on negatiivinen, lukumäärä.[23]

### 3.6 Pseudoskaalari ja duaali

Geometrisen algebran  $G_n$  korkeimman asteen termi on yksikäsitteinen lukuunottamatta sen suuruutta. Näin ollen kaikkia  $n$ :n lineaarisesti riippumattoman vektorin ulkotuloja kutsutaan *pseudoskalaareiksi*. Nimitys johtuu siitä, että vektoriavaruuden  $G_n$  aliavaruuksien  $G_n^0$  ja  $G_n^n$  ulottuvuudet ovat samat. Geometrisen algebran  $G_n$  yksikköpseudoskaalari on

$$I = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = e_1 \cdots e_n,$$

missä vektorit  $\{e_i\}$  muodostavat ortonormaalin joukon. Yksikköpseudoskaalarin suuruus on nimensä mukaisesti yksi, koska suuruuden neliö on

$$|I|^2 = |\langle e_n \cdots e_1 e_1 \cdots e_n \rangle| = |e_1^2 \cdots e_n^2| = 1.$$

Lauseen 3.3.3 todistuksen perusteella jokainen  $r$ -terä voidaan esittää  $r$ :n ortogonaalisen vektorin geometrisena tulona. Erityisesti geometrisen algebran  $G_n$  korkeimman asteen termi on

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = \det(R) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \det(R) I,$$

eli kaikki pseudoskaalarit voidaan esittää yksikköpseudoskaalarin  $I$  kerrannaisina.

Vektoriavaruuden ulottuvuus ja geometrisen algebran merkki määräävät yksikköpseudoskaalarin neliön  $I^2$  etumerkin. Esimerkiksi kaksi- ja kolmeulotteisten euklidisten avaruuksien ja Minkowskin aika-avaruuden yksikköpseudoskaalarin neliöt ovat  $-1$ . Yksikköpseudoskalaaria merkitään kirjallisuudessa ajoittain pienaakkosella  $i$ . Tämä ilmaisee toisaalta hyvin yksikköpseudoskaalarin yhteyden imaginaariyk-

sikköön, toisaalta merkintä saattaa aiheuttaa virheellisen käsityksen yksikköpseudoskalaarin kommutointiominaisuuksista.

Tarkastellaan yksikköpseudoskalaarin kommutointiominaisuuksia.  $A_r$  on homogeeninen multivektori eli se voidaan esittää muodossa

$$A_r = \sum \alpha_\nu e_\nu,$$

missä  $e_\nu = e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_r}$  ja  $1 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_r \leq n$ , joten yksikköpseudoskalaarin kommutointiominaisuudet saadaan kaavalla

$$I\alpha_\nu e_\nu = e_1 \cdots e_n e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_r} = (-1)^{r(n-1)} e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_r} e_1 \cdots e_n = (-1)^{r(r-1)} \alpha_\nu e_\nu I. \quad (3.34)$$

Tämä nähdään seuraavasti. Koska vektorit  $\{e_i\}$  antikommutoivat, niiden etumerkki vaihtuu aina vierekkäisten vektoreiden  $e_i$  ja  $e_j$  järjestystä vaihtaessa. Jos vierekkäiset vektorit  $e_i$  ja  $e_j$  ovat samat, vaihtoa ei tarvitse tehdä. Näin ollen kohdan (3.34) tulosta  $e_1 \cdots e_n e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_r}$  päästään tuloon  $e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_r} e_1 \cdots e_n$  tekemällä  $r(n-1)$  vaihtoa. Lineaarisuuden nojalla homogeeniselle multivektorille pätee

$$IA_r = (-1)^{r(n-1)} A_r I. \quad (3.35)$$

Toisin sanoen avaruuksissa, joiden ulottuvuus on pariton, pseudoskalaarit kommutoivat kaikkien vektoreiden kanssa, joten ne edelleen kommutoivat kaikkien multivektoreiden kanssa. Ulottuvuuden ollessa parillinen pseudoskalaarit antikommutoivat kaikkien paritonta astetta olevien multivektoreiden kanssa. Kaikissa tapauksissa pseudoskalaarit kommutoivat parillista astetta olevien multivektoreiden kanssa.

Lisäksi yksikköpseudoskalaari ilmaisee  $n:n$  vektorin järjestetyn joukon  $(a_1, \dots, a_n)$  suuntauksen. Jos näiden vektoreiden ulkotulolla on sama etumerkki kuin yksikköpseudoskalaarilla, niiden suuntaus on positiivinen. Etumerkin ollessa vastakkainen järjestetyn vektorijoukon suuntaus on negatiivinen. Kolmiulotteisessa avaruudessa yksikköpseudoskalaari valitaan siten, että positiivinen suuntaus vastaa oikeakätistä vektorijoukkoa.

Duaalilla tarkoitetaan homogeenisen multivektorin  $A_r$  kertomista yksikköpseudoskalaarilla  $I$ , minkä tuloksena on  $n - r$ -asteen homogeeninen multivektori. Jos multivektori  $A_r$  on terä, tulo  $IA_r$  on multivektorin  $A_r$  ortogonaalikomplementti. Näin saadaan muodostettua yhteys ulko- ja ristitulon välille kolmiulotteisessa avaruudessa [19] kaavalla

$$a \wedge b = Ia \times b.$$

Duaalin avulla saadaan niin ikään sisä- ja ulkotulon välille yhteys [19]

$$a \wedge (Ib) = (a \cdot b)I.$$

## 4. PEILAUKSET JA KIERROT

Geometrisen algebran käyttökelpoisuus havaitaan, kun tutkitaan peilauksia hyper-tason suhteen sekä tason suhteen tapahtuvia kiertoja. Näitä on tarkoitus tarkastella tässä luvussa, mutta ennen kuin päästään itse asiaan, käydään läpi lineaarialgebran tuloksia sekä siirrytään geometrisen algebran kattavaan multilineaarialgebraan. Luvussa mukailaan lähteitä [19] ja [8].

### 4.1 Lineaarialgebraa

Lineaarikuvauksella tarkoitetaan kuvausta, joka säilyttää yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen.

**Määritelmä 4.1.1.** *Olkoon  $x$  ja  $y$  vektoriavaruuden  $V$  alkioita. Kuvaus  $T : V \rightarrow V$  on lineaarikuvaus, jos se toteuttaa ehdot*

1.  $T(x + y) = T(x) + T(y)$ ,
2.  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ .

Lineaarikuvausta  $T$  kutsutaan myös lineaarioperaattoriksi, ja usein argumentin ympäriltä voidaan jättää sulkeet pois  $T(x) = T x$ , mikä havainnollistaa ajatusta, että lineaarikuvaus  $T$  operoi vektoriavaruuden  $V$  alkioon  $x$ . Operaattori on siten osuva nimitys. Lineaarioperaattoreiden  $T$  ja  $S$  yhdistetty kuvaus  $T \circ S$  voidaan kirjoittaa useassa eri muodossa:

$$T(S(x)) = T(S x) = T S(x) = T S x,$$

missä kaksi viimeistä merkintää oikeuttavat sen, että yhdistettyä kuvausta kutsutaan tässä tapauksessa lineaarioperaattoreiden  $T$  ja  $S$  tuloksi.

**Lause 4.1.2.** *Olkoon  $T : V \rightarrow V$  ja  $S : V \rightarrow V$  lineaarikuvauksia. Sekä yhdistetty kuvaus  $T \circ S$  että summa  $T + S$  ovat lineaarikuvauksia.*

*Todistus.* Olkoon  $T : V \rightarrow V$  ja  $S : V \rightarrow V$  lineaarikuvauksia ja  $x$  ja  $y$  vektoriavaruuden  $V$  alkioita. Osoitetaan ensin, että tulo on lineaarikuvaus:

$$T S(x + y) = T(S(x + y)) = T(S x + S y) = T S x + T S y,$$

missä toinen yhtäsuuruus seuraa operaattorin  $S$  lineaarisuudesta ja kolmas yhtäsuuruus seuraa operaattorin  $T$  lineaarisuudesta. Lisäksi skalaarilla  $\alpha$  kerrottaessa on voimassa

$$T S(\alpha x) = T(S(\alpha x)) = T(\alpha S x) = \alpha T S x,$$

mikä seuraa operaattoreiden  $S$  ja  $T$  lineaarisuudesta. Yhteenlaskulle pätee

$$(T + S)(x + y) = T(x + y) + S(x + y) = T x + T y + S x + S y = (T + S)x + (T + S)y.$$

Skalaarilla kertominen voidaan osoittaa vastaavasti yhtälökettjulla

$$(T + S)(\alpha x) = T(\alpha x) + S(\alpha x) = \alpha T x + \alpha S x = \alpha(T + S)x.$$

□

Määritelmässä 4.1.1 ei ole tarkennettu, minkälainen vektoriavaruus on kyseessä. Yleensä tarkastelun kohteena on euklidinen avaruus  $\mathbb{R}^n$ , jonka alkiot perinteisesti tulkitaan suunnattuina janoina, joiden lineaarikuvaukset saadaan kertomalla vektoria matriisilla. Lineaarikuvaus on geometrisesti vektorin jonkinlainen kääntö ja venytys. Se kuvaa siis vektorin toiseksi vektoriksi. Geometrisessa algebrassa lineaarikuvauksen käsite voidaan laajentaa multilineaarikuvaukseksi.

### 4.1.1 Lineaarikuvauksen laajentaminen ja determinantti

Edellä lineaarioperaattorilla  $T$  operoitiin vektoriin. Laajennetaan lineaarioperaattorin käsitettä bivektoreihin ja edelleen koko geometriseen algebraan.

**Määritelmä 4.1.3.** *Olkoon  $T : V \rightarrow V$  lineaarioperaattori ja  $x, y, z$  ja  $w$  vektoriavaruuden  $V$  alkioita. Lineaarikuvaus  $T$  laajennetaan geometrisen algebran multilineaarikuvaukseksi  $\underline{T} : G_n \rightarrow G_n$  seuraavasti*

$$(1) \quad \underline{T}(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$$

$$(2) \quad \underline{T}(x \wedge y + z \wedge w) = T(x \wedge y) + T(z \wedge w).$$

Ensimmäistä kohdasta ja ulkotulon distributiivisuudesta seuraa, että skalaarilla kertomiselle pätee yhtäsuuruus  $\underline{T}(\alpha x \wedge y) = \alpha \underline{T}(x \wedge y)$ . Näin ollen kuvaus  $\underline{T}$  on lineaarinen sen operoidessa bivektoreihin. Lineaarioperaattori  $T$  saadaan laajennettua tähän tapaan mielivaltaiselle terälle:

$$\underline{T}(a \wedge b \wedge \cdots \wedge c) = T(a) \wedge T(b) \wedge \cdots \wedge T(c). \quad (4.1)$$

Määritellään, että skalaari säilyy kuvauksessa eli

$$\underline{T}(\alpha) = \alpha,$$

joten kuvaus  $\underline{T}$  voidaan laajentaa lineaarisesti koko geometriseen algebraan: geometrisen algebran jokaiselle multivektorille  $A$  ja  $B$  ja skalaarille  $\alpha$  ja  $\beta$  pätee

$$\underline{T}(\alpha A + \beta B) = \alpha \underline{T}(A) + \beta \underline{T}(B).$$

Lineaarikuvaus  $\underline{T}$  säilyttää multivektorin asteen. Toisin sanoen homogeeniselle multivektorille  $A_r$  voidaan kirjoittaa

$$\underline{T}(A_r) = \langle \underline{T}(A_r) \rangle_r.$$

Koska lisäksi jokaisen geometrisen algebran  $G_n$  pseudoskalaari on yksikköpseudoskalaarin  $I$  kerrannainen, voidaan määritellä lineaarikuvauksen  $\underline{T}$  determinantti.

**Määritelmä 4.1.4.** *Lineaarikuvauksen  $\underline{T}$  determinantti määritellään kaavalla*

$$\underline{T}(I) = \det(\underline{T})I,$$

missä  $I$  on yksikköpseudoskalaari.

Determinantti on skalaari, joka kuvaa sitä, miten kuvaus skaalaa operoitavaa multivektoria. Jos determinantti on negatiivinen, kuvaus muuttaa multivektorin suuruuden lisäksi sen suunnan. Kahden lineaarikuvauksen tulon determinantti on determinanttien tulo. Tämä tulos on tuttu matriisilaskennasta, mutta sen todistus on siistimpi geometrisen algebran avulla.

**Lause 4.1.5.** *Olkoon  $\underline{T}$  ja  $\underline{S}$  lineaarikuvauksia. Yhdistetyn funktion determinantille on voimassa laskusääntö*

$$\det(\underline{T}\underline{S}) = \det(\underline{T})\det(\underline{S}).$$

*Todistus.* Kuvauksen  $\underline{S}$  lineaarisuuden nojalla kirjoitetaan

$$\det(\underline{T}\underline{S})I = \underline{T}\underline{S}(I) = \underline{T}(\underline{S}(I)) = \underline{T}(\det(\underline{S})I) = \det(\underline{S})\underline{T}(I) = \det(\underline{S})\det(\underline{T})I.$$

□

## 4.1.2 Adjungaatti ja käänteiskuvaus

Tässä alaluvussa määritellään lineaarikuvauksen adjungaatti sekä käänteiskuvaus, jotka vastaavat matriisialgebran käsitteitä transpoosi ja käänteismatriisi.

**Määritelmä 4.1.6.** *Lineaarikuvauksen  $T : V \rightarrow V$  adjungaatti eli transpoosi  $\bar{T}$  määritellään kaavalla*

$$a \cdot \bar{T}(b) = T(a) \cdot b,$$

missä  $a, b$  ovat vektoriavaruuden  $V$  vektoreita.

Lineaarikuvauksen adjungaatin voidaan osoittaa olevan lineaarikuvaus.

**Lause 4.1.7.** *Lineaarikuvauksen  $T$  adjungaatti  $\bar{T}$  on lineaarikuvaus.*

*Todistus.* On osoitettava, että adjungaatille on voimassa  $\bar{T}(a + b) = \bar{T}(a) + \bar{T}(b)$  jokaisella vektorilla  $a$  ja  $b$ . Olkoon  $c$  vektori. Käyttäen Määritelmää 4.1.6, sisätulon distributiivisuutta sekä kuvauksen  $T$  lineaarisuutta saadaan tulos

$$\begin{aligned}\bar{T}(a + b) \cdot c &= (a + b) \cdot T(c) \\ &= a \cdot T(c) + b \cdot T(c) \\ &= \bar{T}(a) \cdot c + \bar{T}(b) \cdot c \\ &= (\bar{T}(a) + \bar{T}(b)) \cdot c,\end{aligned}$$

mistä seuraa yhtäsuuruus  $\bar{T}(a + b) = \bar{T}(a) + \bar{T}(b)$ . Osoitetaan vielä Määritelmän 4.1.1 toinen ehto. Olkoon  $\alpha$  skalaari sekä  $a$  ja  $c$  vektoreita. Nyt skalaarikertoimelle pätee laskusääntö

$$\begin{aligned}\bar{T}(\alpha a) \cdot c &= \alpha a \cdot T(c) \\ &= \alpha(a \cdot T(c)) \\ &= \alpha \bar{T}(a) \cdot c,\end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\bar{T}(\alpha a) = \alpha \bar{T}(a).$$

□

Lineaarikuvauksen  $T$  adjungaatti laajennetaan kohdan (4.1) tavalla koko geometriseen algebraan

$$\underline{T}(a \wedge b \cdots \wedge c) = \bar{T}(a) \wedge \bar{T}(b) \wedge \cdots \wedge \bar{T}(c),$$

missä multilineaarikuvauksen  $\underline{T}$  alaviiva jätetään selkeyden vuoksi merkitsemättä. Näin ollen laajennettu adjungaatti on lineaarinen koko geometrisessa algebrassa. Multivektorin adjungaatille on voimassa seuraava tulos.

**Apulause 4.1.8.** *Olkoon  $A_r$  ja  $B_s$  homogeenisia multivektoreita. Lineaarikuvaukselle  $T$  ja sen adjungaatille  $\bar{T}$  pätee*

- (1)  $A_r \cdot \bar{T}(B_s) = \bar{T}(T(A_r) \cdot B_s)$ , kun  $r \leq s$ ,
- (2)  $T(A_r) \cdot B_s = T(A_r \cdot \bar{T}(B_s))$ , kun  $r \geq s$ .

*Todistus.* Aloitetaan osoittamalla ensimmäinen kohta tapauksessa, jossa multivektori  $A_r$  on astetta  $r = 1$  ja homogeeninen multivektori  $B_s$  on terä. Nyt voidaan merkitä multivektori  $A_r$  vektorina  $a$  ja terä  $B_s$  tulona  $B_s = b_1 \wedge \cdots \wedge b_s$ . Käyttämällä Apulausetta 3.4.6, adjungoitiin  $\bar{T}$  lineaarisuutta, Määritelmää 4.1.6 sekä uudelleen Apulausetta 3.4.6 kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
a \cdot \bar{T}(B_s) &= \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} a \cdot \bar{T}(b_k) \bar{T}(b_1 \wedge \cdots \wedge \check{b}_k \wedge \cdots \wedge b_s) \\
&= \bar{T}\left(\sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} a \cdot \bar{T}(b_k) b_1 \wedge \cdots \wedge \check{b}_k \wedge \cdots \wedge b_s\right) \\
&= \bar{T}\left(\sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} T(a) \cdot b_k b_1 \wedge \cdots \wedge \check{b}_k \wedge \cdots \wedge b_s\right) \\
&= \bar{T}(T(a) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s)) \\
&= \bar{T}(T(a) \cdot B_s). \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Multivektori voidaan kirjoittaa  $r$ -terien summana, joten sisätulon distributiivisuuden nojalla tulos on voimassa yleisessä tapauksessa. Väitteen ensimmäinen kohta voidaan nyt osoittaa päteväksi. Olkoon  $A_r$  terä siten, että sen aste on korkeintaan multivektorin  $B_s$  aste. Terä  $A_r$  voidaan kirjoittaa muodossa  $A_r = a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$ . Käyttämällä vuorotellen Apulauseen 3.4.5 kohtaa (1) ja tulosta (4.2) kirjoitetaan yhtälöketti

$$\begin{aligned}
A_r \cdot \bar{T}(B_s) &= ((a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \wedge a_r) \cdot \bar{T}(B_s) \\
&= a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1} \cdot (a_r \cdot \bar{T}(B_s)) \\
&= a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1} \cdot (\bar{T}(T(a_r) \cdot B_s)) \\
&= a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-2} \cdot [a_{r-1} \cdot \bar{T}(T(a_r) \cdot B_s)] \\
&= a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-2} \cdot [\bar{T}(T(a_{r-1}) \cdot (T(a_r) \cdot B_s))] \\
&= a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-2} \cdot \bar{T}(T(a_{r-1} \wedge a_r) \cdot B_s). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Jatkamalla tähän tapaan saadaan lopulta haluttu muoto:

$$A_r \cdot \bar{T}(B_s) = \bar{T}(T(A_r) \cdot B_s),$$

missä  $A_r$  on terä, jonka asteelle pätee ehto  $r \leq s$ . Sisätulon distributiivisuuden nojalla tulos on voimassa myös yleisesti homogeeniselle multivektoreille  $A_r$ .

Väitteen toinen kohta todistetaan vastaavalla tavalla. Olkoon multivektori  $B_s$  vektori  $b$  ja multivektori  $A_r$  terä, joiden asteille on voimassa ehto  $r \geq s$ . Nyt voidaan

kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{T}}(A_r) \cdot b &= (-1)^{r+1} b \cdot \underline{\mathbb{T}}(A_r) \\
&= (-1)^{r+1} \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} b \cdot \mathbb{T}(a_k) \underline{\mathbb{T}}(a_1 \wedge \cdots \wedge \check{a}_k \wedge \cdots \wedge a_r) \\
&= (-1)^{r+1} \underline{\mathbb{T}}\left(\sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} b \cdot \mathbb{T}(a_k) b_1 \wedge \cdots \wedge \check{a}_k \wedge \cdots \wedge a_r\right) \\
&= (-1)^{r+1} \underline{\mathbb{T}}\left(\sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} \overline{\mathbb{T}}(b) \cdot a_k a_1 \wedge \cdots \wedge \check{a}_k \wedge \cdots \wedge a_r\right) \\
&= (-1)^{r+1} \underline{\mathbb{T}}(\overline{\mathbb{T}}(b) \cdot (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r)) \\
&= (-1)^{r+1} \underline{\mathbb{T}}(\overline{\mathbb{T}}(b) \cdot A_r) \\
&= \underline{\mathbb{T}}(A_r \cdot \overline{\mathbb{T}}(b)), \tag{4.4}
\end{aligned}$$

missä ensimmäinen ja viimeinen yhtäsuuruus saadaan sisätulon kommutointiominaisuuksien (3.16) perusteella. Sisätulon distributiivisuuden nojalla tulos pätee myös yleiselle homogeeniselle multivektorille  $A_r$ . Olkoon nyt  $B_s$  terä siten, että sen aste on pienempi kuin multivektorin  $A_r$  aste. Kirjoitetaan käyttäen vuorotellen Apulauseen 3.4.5 kohtaa (3) ja tulosta (4.4) yhtälöketju

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{T}}(A_r) \cdot B_s &= \underline{\mathbb{T}}(A_r) \cdot (b_1 \wedge (b_2 \wedge \cdots \wedge b_s)) \\
&= (\underline{\mathbb{T}}(A_r) \cdot b_1) \cdot (b_2 \wedge \cdots \wedge b_s) \\
&= \underline{\mathbb{T}}(A_r \cdot \overline{\mathbb{T}}(b_1)) \cdot (b_2 \wedge \cdots \wedge b_s) \\
&= [\underline{\mathbb{T}}(A_r \cdot \overline{\mathbb{T}}(b_1)) \cdot b_2] \cdot (b_3 \wedge \cdots \wedge b_s) \\
&= \underline{\mathbb{T}}[(A_r \cdot \overline{\mathbb{T}}(b_1)) \cdot \overline{\mathbb{T}}(b_2)] \cdot (b_3 \wedge \cdots \wedge b_s) \\
&= \underline{\mathbb{T}}(A_r \cdot \overline{\mathbb{T}}(b_1 \wedge b_2)) \cdot (b_3 \wedge \cdots \wedge b_s). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Jatkamalla näin saadaan lopulta tulos terälle  $B_s$

$$\underline{\mathbb{T}}(A_r) \cdot B_s = \underline{\mathbb{T}}(A_r \cdot \overline{\mathbb{T}}(B_s)).$$

Sisätulon distributiivisuudesta johtuen tulos on itse asiassa voimassa myös yleiselle homogeeniselle multivektorille  $B_s$ .  $\square$

Adjungaatin determinantille pätee vastaava tulos kuin matriisin transpoosin determinantille.

**Lause 4.1.9.** *Lineaarikuvauksen  $\underline{\mathbb{T}}$  ja adjungaatin  $\overline{\mathbb{T}}$  determinantit ovat samat.*

*Todistus.* Olkoon  $\underline{\mathbb{T}}$  lineaarikuvaus ja  $\overline{\mathbb{T}}$  sen adjungaatti. Determinantin määritel-



män perusteella determinantille voidaan kirjoittaa lauseke

$$\det(\underline{\mathbb{T}}) = \underline{\mathbb{T}}(I)I^{-1}, \quad (4.6)$$

missä  $I^{-1}$  on yksikköpseudoskalaarin  $I$  käänteisalkio eli niille on voimassa ehto  $I^{-1}I = II^{-1} = 1$ . Geometrisen algebran  $G_n$  yksikköpseudoskalaari  $I$  voidaan esittää  $n$  ortogonaalisen vektorin geometrisina tulona  $e_1 \cdots e_n$ . Näin ollen huomataan, että käänteisalkion on oltava  $I^{-1} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} I$ . Koska multivektorit  $\underline{\mathbb{T}}(I)$  ja  $I^{-1}$  ovat korkeinta astetta, niiden tulo sisältää ainoastaan sisätulo-osan. Siksi merkitään lyhyemmin  $\underline{\mathbb{T}}(I) \cdot I^{-1} = \underline{\mathbb{T}}(I)I^{-1}$ . Kohtaan (4.6) voidaan soveltaa Apulausetta 4.1.8, mistä seuraa

$$\det(\underline{\mathbb{T}}) = \underline{\mathbb{T}}(I\overline{\mathbb{T}}(I^{-1})). \quad (4.7)$$

Tulo  $I\overline{\mathbb{T}}(I^{-1})$  on reaaliluku, joka säilyy samana lineaarikuvauksessa, joten kohta (4.7) voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin:

$$\det(\underline{\mathbb{T}}) = I\overline{\mathbb{T}}(I^{-1}), \quad (4.8)$$

mikä edellä mainitun nojalla saadaan muotoon

$$\det(\underline{\mathbb{T}}) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} I^{-1}\overline{\mathbb{T}}((-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} I). \quad (4.9)$$

Väite seuraa kohdasta (4.9) adjungaatin lineaarisuuden perusteella:

$$\det(\underline{\mathbb{T}}) = I^{-1}\overline{\mathbb{T}}(I) = \det(\overline{\mathbb{T}}). \quad (4.10)$$

□

Adjungaatin avulla ilmaistaan lineaarikuvauksen  $\underline{\mathbb{T}}$  käänteiskuvaus  $\underline{\mathbb{T}}^{-1}$ , jonka määrittelee ehto  $\underline{\mathbb{T}}\underline{\mathbb{T}}^{-1} = \underline{\mathbb{T}}^{-1}\underline{\mathbb{T}} = \text{Id}$ , missä  $\text{Id}$  on identiteettioperaattori.

**Lause 4.1.10.** *Lineaarikuvauksen  $\underline{\mathbb{T}}$  käänteiskuvaus  $\underline{\mathbb{T}}^{-1}$  saadaan kaavalla*

$$\underline{\mathbb{T}}^{-1}(A) = \frac{I\overline{\mathbb{T}}(I^{-1}A)}{\det \underline{\mathbb{T}}}.$$

*Todistus.* Olkoon  $G_n$  geometrinen algebra, jonka yksikköpseudoskalaari on  $I$ , ja  $B$  kyseisen geometrisen algebran multivektori. Tulot  $IB$  ja  $\underline{\mathbb{T}}(I)B$  sisältävät ainoastaan sisätulo-osat, joten sisätulo voidaan merkitä lyhyemmin geometrisena tulona,  $\underline{\mathbb{T}}(I) \cdot B = \underline{\mathbb{T}}(I)B$ . Determinantin määritelmää sekä Apulausetta 4.1.8 käyttäen voidaan

kirjoittaa

$$\begin{aligned}
 \det(\underline{\mathbb{T}})IB &= \underline{\mathbb{T}}(I)B \\
 &= \underline{\mathbb{T}}(I)(\langle B \rangle_0 + \cdots + \langle B \rangle_n) \\
 &= \underline{\mathbb{T}}(I)\langle B \rangle_0 + \cdots + \underline{\mathbb{T}}(I)\langle B \rangle_n \\
 &= \underline{\mathbb{T}}(I\bar{\mathbb{T}}\langle B \rangle_0) + \cdots + \underline{\mathbb{T}}(I\bar{\mathbb{T}}\langle B \rangle_n) \\
 &= \underline{\mathbb{T}}(I\bar{\mathbb{T}}\langle B \rangle_0) + \cdots + I\bar{\mathbb{T}}\langle B \rangle_n \\
 &= \underline{\mathbb{T}}(I(\bar{\mathbb{T}}\langle B \rangle_0 + \cdots + \bar{\mathbb{T}}\langle B \rangle_n)) \\
 &= \underline{\mathbb{T}}(I\bar{\mathbb{T}}(B)),
 \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa adjungaatin lineaarisuudesta. Merkitsemällä tuloa  $IB$  multivektorina  $A$  kirjoitetaan

$$\det(\underline{\mathbb{T}})A = \underline{\mathbb{T}}(I\bar{\mathbb{T}}(I^{-1}A)).$$

Jakamalla determinantilla  $\det(\underline{\mathbb{T}})$  saadaan yhtäsuuruus

$$\frac{1}{\det(\underline{\mathbb{T}})} \underline{\mathbb{T}}(I\bar{\mathbb{T}}(I^{-1}A)) = A,$$

mistä seuraa, että käänteiskuvaus  $\underline{\mathbb{T}}^{-1}$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$\underline{\mathbb{T}}^{-1}(A) = \frac{I\bar{\mathbb{T}}(I^{-1}A)}{\det(\underline{\mathbb{T}})}.$$

□

Lineaarikuvausta, jonka determinantti ei ole nolla sanotaan ei-singulaariseksi. Lauseesta 4.1.10 huomataan, että ainoastaan ei-singulaarisella kuvauksella on käänteiskuvaus.

## 4.2 Ortogonaalikuvaus

Lineaarikuvauksia voidaan jaotella sen perusteella, mitkä vektoreiden väliset relaatiot säilyvät kuvauksessa eli ovat invariantteja kuvauksen suhteen. Tässä työssä tärkeä invariantti on sisätulon säilyminen.

**Määritelmä 4.2.1.** *Lineaarikuvaus  $\mathbb{T}$  on ortogonaalinen, jos se säilyttää sisätulon. Toisin sanoen jokaisella vektorilla  $a$  ja  $b$  on voimassa yhtäsuuruus*

$$(\mathbb{T}a) \cdot (\mathbb{T}b) = a \cdot b$$

Lineaarikuvaus operoi vektoriin muuttaen sen pituutta ja suuntaa. Ortogonaalikuvaus on lineaarikuvaus, jossa vektorin pituus säilyy samana. Vektorin  $a$  pituuden neliö on  $\|a\|^2 = |a^2|$ , joten ortogonaalikuvauksessa vektorin pituudelle pätee

$$(\mathbb{T} a)^2 = (\mathbb{T} a)(\mathbb{T} a) = (\mathbb{T} a) \cdot (\mathbb{T} a) = a \cdot a = a^2.$$

**Lause 4.2.2.** *Lineaarikuvaus  $\mathbb{T}$  on ortogonaalikuvaus, jos ja vain jos sen käänteiskuvaus ja adjungaatti ovat samat,  $\mathbb{T}^{-1} = \overline{\mathbb{T}}$ .*

*Todistus.* Adjungaatin määritelmän 4.1.6 perusteella voidaan kirjoittaa

$$(\mathbb{T} a) \cdot (\mathbb{T} b) = a \cdot \overline{\mathbb{T}}(\mathbb{T} b) = a \cdot (\overline{\mathbb{T}} \mathbb{T} b),$$

mikä on yhtäpitävää Määritelmän 4.2.1 kanssa, jos ja vain jos kuvauksen  $\mathbb{T}$  käänteiskuvaus ja sen adjungaatti ovat samat:

$$\overline{\mathbb{T}} = \mathbb{T}^{-1}.$$

□

Ortogonaalikuvaus on näin ollen ei-singulaarinen kuvaus, jonka käänteiskuvaus ja adjungaatti ovat samat. Lisäksi voidaan osoittaa ehto  $\det(\mathbb{T}) = \pm 1$  ortogonaalikuvaukselle  $\mathbb{T}$ .

**Lause 4.2.3.** *Ortogonaalikuvauksen  $\mathbb{T}$  determinantille pätee  $\det(\mathbb{T}) = \pm 1$ .*

*Todistus.* Olkoon  $\mathbb{T}$  ortogonaalikuvaus. Käytetään Lauseita 4.2.2, 4.1.5 sekä 4.1.9 ja kirjoitetaan

$$\det(\text{Id}) = \det(\overline{\mathbb{T}} \mathbb{T}) = \det(\overline{\mathbb{T}}) \det(\mathbb{T}) = \det(\mathbb{T}) \det(\mathbb{T}) = 1,$$

mistä seuraa

$$\det(\mathbb{T}) = \pm 1.$$

□

Lause 4.2.3 jakaa ortogonaalikuvaukset kahteen tyyppiin determinantin etumerkin mukaan. Kuvausta, jonka determinantti on  $-1$ , kutsutaan epäaidoksi (eng. improper) kuvaukseksi. Jos determinantti on  $1$ , kuvausta kutsutaan aidoksi (eng. proper). Determinantti kuvaa sitä, miten lineaarikuvaus skaalaa operoitavaa vektoria, joten ortogonaalikuvauksen determinantin itseisarvo  $1$  on järkevä ottaen huomioon, että ortogonaalikuvauksessa vektorin pituus säilyy ennallaan.

Ortogonaalikuvauksien tulo on ortogonaalikuvaus, mikä on oleellinen tulos lopuluvun kannalta.

**Lause 4.2.4.** *Kahden ortogonaalikuvauksen  $S$  ja  $T$  tulo on ortogonaalikuvauks.*

*Todistus.* Olkoon  $S$  ja  $T$  ortogonaalikuvauksia, joten niiden tulolle pätee

$$(S T a) \cdot (S T b) = (T a) \cdot (T b) = a \cdot b.$$

□

### 4.3 Peilaus

Geometrisen algebran avulla peilaukset ja kierrot voidaan esittää ytimekkäästi  $n$ -ulotteisessa avaruudessa. Alaluvun on tarkoitus tarjota vertailukohta kierron ja peilauksen käsitteille Minkowskin-avaruudessa.

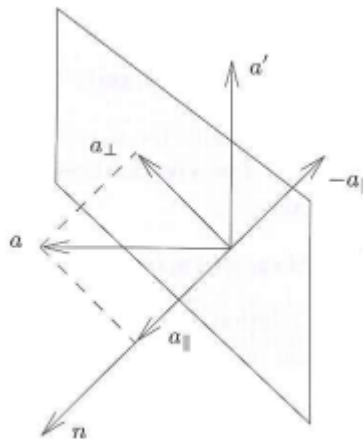
Aloitetaan tarkastelemalla peilauksen käsitettä yleisesti  $n$ -ulotteisessa avaruudessa.

**Määritelmä 4.3.1.** *Vektorin  $a$  peilaus yksikkönormaalien  $n$  määrittämän (hyper)tason suhteen on*

$$a' = a_{\perp} - a_{\parallel},$$

missä  $a_{\parallel}$  on vektorin  $a$  vektorin  $n$  kanssa yhdensuuntainen osa ja  $a_{\perp}$  vektorin  $a$  vektoria  $n$  vastaan kohtisuorassa oleva osa.

Peilaus jättää vektoria  $n$  vastaan kohtisuorat vektorit ennalleen ja muuttaa sen kanssa yhdensuuntaisten vektoreiden etumerkin. Kuva 4.1 havainnollistaa tätä kolmiulotteisessa tapauksessa.



Kuva 4.1: Vektori  $a$  peilataan normaalivektorin  $n$  määräämän hypertasonsuhteen. Peilauksen tulos  $a'$  saadaan muuttamalla vektorin  $a_{\parallel}$  etumerkki. [8]

Geometrisen tulon avulla peilaus saadaan yksinkertaiseen muotoon.

**Lause 4.3.2.** *Vektorin  $a$  peilaus yksikkövektorin  $n$  määräämän hypertason suhteen on*

$$P_n a = -nan.$$

*Todistus.* Vektori  $a$  voidaan jakaa vektorin  $n$  kanssa yhdensuuntaiseen ja tätä vastaan kohtisuoraan osaan,  $a_{\parallel}$  ja  $a_{\perp}$ . Käyttämällä yksikkönormaalin ehtoa  $n^2 = 1$  kirjoitetaan

$$\begin{aligned} a &= 1a \\ &= n^2 a \\ &= n(n \cdot a + n \wedge a) \\ &= a_{\parallel} + nn \wedge a. \end{aligned}$$

Termi  $n \cdot an = a_{\parallel}$  on selvästi yhdensuuntainen yksikkönormaalien  $n$  kanssa. Tarkistetaan, että jäljelle jäävä termi  $nn \wedge a$  on kohtisuorassa yksikkönormaalien  $n$  vastaan. Tämä nähdään yksinkertaisesti kirjoittamalla

$$\langle nnn \wedge a \rangle = \langle n \wedge a \rangle = 0.$$

Määritelmän 4.3.1 mukainen peilaus saadaan nyt ilmaistua kauniisti geometrisena tulona:

$$\begin{aligned} a' &= a_{\perp} - a_{\parallel} \\ &= nn \wedge a - n \cdot an \\ &= -n \cdot an - n \wedge an \\ &= -nan. \end{aligned}$$

□

Tarkastellaan seuraavaksi, miten yleinen multivektori  $A$  käyttäytyy peilauksessa.

**Lause 4.3.3.** *Yleisen multivektorin  $A$  peilaus vektorin  $n$  määräämän hypertason suhteen saadaan kaavalla*

$$P_n A = nA'n,$$

missä  $A'$  on multivektorin  $A$  pääinvolutio.

*Todistus.* Todistetaan lause ensin terälle  $A_r = a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$ . Laajennetaan peilaus

$P_n$  kohdan (4.1) tapaan:

$$\begin{aligned}
P_n(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) &= P_n(a_1) \wedge \cdots \wedge P_n(a_r) \\
&= (-na_1n) \wedge \cdots \wedge (-na_rn) \\
&= (-1)^r \frac{1}{r!} \sum (-1)^\epsilon na_{k_1}n \cdots na_{k_r}n \\
&= (-1)^r \frac{1}{r!} \sum (-1)^\epsilon na_{k_1} \cdots a_{k_r}n \\
&= (-1)^r \frac{1}{r!} n \left( \sum (-1)^\epsilon a_{k_1} \cdots a_{k_r} \right) n \\
&= (-1)^r n(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r)n \\
&= (-1)^r nA_rn,
\end{aligned}$$

missä on käytetty ulkotulon määritelmää 3.3.1. Geometrisen tulon distributiivisuuden nojalla tulos pätee homogeeniselle multivektorille  $A_r$ . Pääinvoluution määritelmästä 3.5.1 huomataan, että homogeeniselle vektorille pätee  $A'_r = (-1)^r$ , joten yleisen multivektorin  $A$  peilaus hypertason suhteen ilmaistaan kaavalla

$$P_n A = nA'n.$$

□

Peilauksen määritelmästä huomataan, että se jättää vektoreiden pituudet ennalleen. Peilaus on itse asiassa ortogonaalikuvaus.

**Lause 4.3.4.** *Peilaus  $P_n a = -nan$  on ortogonaalikuvaus, ja sen determinantti on  $-1$ .*

Peilaus on selvästi lineaarinen, koska geometrinen tulo on distributiivinen ja skalaari kommutoi kaikkien multivektoreiden kanssa. Ortogonaalisuus nähdään seuraavasti:

$$\begin{aligned}
P_n(a) \cdot P_n(b) &= (-nan) \cdot (-nbn) \\
&= \frac{1}{2}(nannbn + nbnnan) \\
&= \frac{1}{2}(nabn + nban) \\
&= \frac{1}{2}n(ab + ba)n \\
&= n(a \cdot b)n \\
&= (a \cdot b)n^2 \\
&= a \cdot b,
\end{aligned}$$

missä on käytetty sisätulon määritelmää 3.2.2.

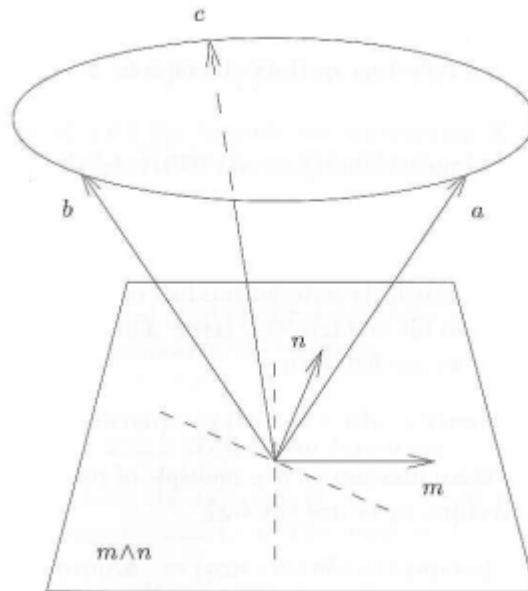
Lasketaan vielä determinantin arvo. Seurauksen 3.5.4 sekä yksikköpeudoskalaa-  
rin  $I$  ominaisuuden (3.35) nojalla on

$$P_n(I) = nI'n = -nnI = -I, \quad (4.11)$$

mistä seuraa determinantin määritelmän perusteella, että peilauksen determinantti on  $\det(P_n) = -1$ .

#### 4.4 Kierto

Cartanin ja Dieudonnen teoreemasta seuraa, että yksikkövektoreiden  $n$  ja  $m$  määräämän tason kierto voidaan esittää kahden peilauksen avulla [12], [17]. Kuva 4.2 havainnollistaa tilannetta.



Kuva 4.2: Vektori  $b$  saadaan peilaamalla vektoria yksikkönormaalien  $m$  määräämän tason suhteen, ja vektori  $c$  saadaan peilaamalla vektori  $b$  yksikkönormaalien  $n$  määräämän tason suhteen. [8]

Tarkastellaan siis kahden peilauksen  $P_n$  ja  $P_m$  tuloa

$$P_n P_m a = -n(-mam)m = nmam.$$

Kierto  $R = P_n P_m$  voidaan näin ollen esittää muodossa

$$R a = R a R^\dagger.$$

missä multivektoria  $R$  kutsutaan roottoriksi. Roottori voidaan esittää muodossa,

joka ilmaisee kierron suuruuden.

**Lause 4.4.1.** *Roottori  $R = nm$  voidaan esittää muodossa*

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - B \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) := e^{-B\theta/2},$$

missä  $B^2 = -1$  on ja  $\theta$  on vektoreiden  $n$  ja  $m$  välinen kulma.

*Todistus.* Kosinin määritelmän (3.2) mukaan  $a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos(\theta)$ . Kohdan (3.3) perusteella määritellään yksikköbivektori [28]

$$B = \frac{m \wedge n}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

minkä neliö on  $B^2 = -1$ . Roottorille saadaan esitys

$$\begin{aligned} R &= nm \\ &= n \cdot m + n \wedge m \\ &= n \cdot m + \frac{m \wedge n}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - B \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &:= e^{-B\frac{\theta}{2}}, \end{aligned}$$

missä eksponenttifunktio määritellään vastaavalla tavalla, kuin kompleksilukujen tapauksessa.  $\square$

Roottorin reversio on  $R^\dagger = mn = n \cdot m - n \wedge m = e^{B\theta/2}$ . Kierro kirjoitetaan käyttäen eksponenttiesitystä muodossa  $Ra = e^{-B\theta/2}ae^{B\theta/2}$ , mikä tarkoittaa vektorin kiertoa bivektorin  $B$  määräämässä tasossa kulman  $\theta$  verran.

Geometrisessä algebrassa, jonka merkki on positiivisesti definiitti, yksikkövektoreiden neliöt ovat positiivisia, joten roottorille on voimassa tulos

$$RR^\dagger = nmmn = 1 = mnmm = R^\dagger R.$$

Kierrettyä vektoria  $R_1 a R_1^\dagger$  voidaan kiertää uudelleen, jolloin saadaan uusi vektori. Tämän takia määritellään roottori yleisesti muodossa

$$R = lk \cdots nm,$$

missä geometrinen tulo sisältää parillisen määrän vektoreita. Roottori kuuluu siten parilliseen alialgebraan  $G_n^+$ . Kahden roottorin tulo on edelleen parillinen, ja roottorit



muodostavat ryhmän, jota kutsutaan roottoriryhmäksi. Tällä tavalla määriteltynä roottori on edelleen normeerattu, koska tulo  $RR^\dagger$  on

$$RR^\dagger = lk \cdots nmmn \cdots kl = 1 = R^\dagger R. \quad (4.12)$$

Tarkkaan ottaen tulos on voimassa suoraan ainoastaan euklidisissa avaruuksissa. Minkowski-avaruudessa kohta (4.12) asetetaan roottorille ehdoksi.

Edellä havaittiin, että peilaus yleistyy multivektoreille. Niin ikään multivektoreita voidaan kiertää.

**Lause 4.4.2.** *Multivektorin  $A$  kierto on*

$$R A = R A R^\dagger.$$

*Todistus.* Laajennetaan kierto tutulla tavalla:  $R(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) = R(a_1) \wedge \cdots \wedge R(a_r)$ . Määritelmän 3.3.1 mukaan terä  $A_r = a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$  on geometrinen tulojen täysin antisymmetrinen summa. Näin ollen, jos jokaista vektoria  $a_i$  kierretään geometrisessa tulossa, saadaan multivektori

$$(R a_1 R^\dagger) \cdots (R a_r R^\dagger) = R a_1 \cdots a_r R^\dagger.$$

Tämä pätee jokaiselle tulolle Määritelmän 3.3.1 antisymmetrisessä summassa, joten terän  $A_r$  kierto on

$$R A_r = R A_r R^\dagger.$$

Tulos yleistyy multivektoreille geometrisen tulon distributiivisuuden nojalla.  $\square$

**Lause 4.4.3.** *Kierto  $R$  on ortogonaalikuvaus, ja sen determinantti on 1.*

*Todistus.* Kierto on kahden lineaarikuvauksen yhdiste, joten se on Lauseen 4.1.2 nojalla lineaarikuvaus. Ortogonaalisuus nähdään yhtälökettjulla

$$\begin{aligned} R(a) \cdot R(b) &= \frac{1}{2}(R a R^\dagger R b R^\dagger + R b R^\dagger R a R^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}(R a b R^\dagger + R b a R^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}R(a b + b a)R^\dagger \\ &= R(a \cdot b)R^\dagger \\ &= a \cdot b. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Lasketaan vielä kierron  $R$  determinantti. Kohdan (3.35) mukaan yksikköseudoskalaari kommutoi kaikkien parillisten multivektoreiden kanssa, joten kirjoitetaan

yhtälöketju

$$\det(\mathbf{R})I = \mathbf{R}I = \mathbf{R}I\mathbf{R}^\dagger = \mathbf{R}I\mathbf{R}^\dagger = I. \quad (4.14)$$

Kierron determinantti on tämän perusteella  $\det(\mathbf{R}) = 1$ .  $\square$

## 4.5 Ortogonaali- ja Spin( $n$ )-ryhmä

Tässä alaluvussa on tarkoitus tarkastella ortogonaalikuvausten, roottoreiden ja kierrojen ryhmärakennetta, joten aloitetaan määrittelemällä ryhmä.

**Määritelmä 4.5.1.** *Olkoon  $S$  joukko, jonka alkioiden välille on määritelty tulo-operaattori  $\otimes$ . Yhdessä nämä muodostavat ryhmän, mikäli joukon  $S$  jokaiselle alkioille  $a, b$  ja  $c$  pätevät ehdot*

- (1) *Jokaisella joukon  $S$  alkioilla  $a$  ja  $b$  tulo  $a \otimes b$  kuuluu joukkoon  $S$ .*
- (2) *Tulo on liitännäinen eli jokaisella joukon  $S$  alkioilla  $a, b$  ja  $c$  pätee  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ .*
- (3) *On olemassa tulon identiteettialkio  $\mathbf{1}$ , jolle on voimassa  $a \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes a = a$  jokaisella joukon  $S$  alkiolla  $a$ .*
- (4) *Jokaisella alkiolla  $a$  on olemassa käänteisalkio  $a^{-1}$ , jolle pätee  $a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = \mathbf{1}$ .*

Luvussa 3.1 määriteltiin algebran homomorfismi, joka säilyttää algebran rakenteen. Homomorfismi kuvaa tässä tapauksessa kahden algebran ominaisuuksien samanlaisuutta. Yhdenmukaisesti määritellään ryhmän homomorfismi, joka säilyttää ryhmän rakenteen. Alaluku perustuu lähteen [23] esitykseen.

**Määritelmä 4.5.2.** *Olkoon  $G$  ja  $H$  ryhmiä, joissa on määritelty tulo-operaattorit  $\otimes$  ja  $\odot$  vastaavasti. Kuvaus  $f : G \rightarrow H$  on homomorfismi, jos se säilyttää tulon jokaisella  $g_1, g_2 \in G$ :*

$$f(g_1 \otimes g_2) = f(g_1) \odot f(g_2).$$

Jos homomorfismi  $f$  on bijektiivinen, se on isomorfismi, ja ryhmiä kutsutaan isomorfisiksi. Määritelmästä huomataan, että homomorfismi kuvaa ryhmän  $G$  identiteettialkion  $\mathbf{1}_G$  ryhmän  $H$  identiteettialkioksi  $\mathbf{1}_H$ . Homomorfismin ydin kuvaa sitä, kuinka lähellä homomorfismi on isomorfismia.

**Määritelmä 4.5.3.** *Homomorfismin  $f$  ydin  $\ker(f)$  on joukko*

$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = \mathbf{1}_H\}.$$

Edellä mainitun Cartanin ja Dieudonnen teoreeman mukaan jokainen ortogonaalikuvaus voidaan esittää korkeintaan  $n = p + q$  peilauksen yhdisteenä eli tulona [17]. Ortogonaalikuvaus voidaan siis esittää korkeintaan  $n$  vektorin  $u_1, u_2, \dots, u_k$  geometrisen tulon avulla:

$$U a = (-1)^k u_k \cdots u_1 a u_1^{-1} \cdots u_k^{-1}, \quad (4.15)$$

missä  $u_i^{-1}$  tarkoittaa vektorin  $u_i$  käänteisalkiota. Yhtäpitävästi voitaisiin kirjoittaa käyttäen yksikkövektoreita  $\hat{u}_i = u/|u|$ , koska vektorin pituus ei vaikuta kuvaukseen. Tässä on kuitenkin tavoiteltu mahdollisimman yleistä ilmaisutapaa. Merkitsemällä  $U = u_1 \cdots u_k$  voidaan jokainen ortogonaalikuvaus kirjoittaa muodossa

$$U a = (-1)^k U a U^{-1}. \quad (4.16)$$

Multivektoreita, jotka voidaan esittää vektoreiden geometrisena tulona, kutsutaan versoreiksi [23]. Kaavasta (4.16) huomataan, että multivektorin  $U$  on oltava kääntyvä versori. Kääntyvät versorit muodostavat ryhmän  $\Gamma_{p,q}$ , jota kutsutaan Lipschitzin ryhmäksi keksijänsä mukaan [24]:

$$\Gamma_{p,q} = \{M \in G_{p,q}^+ \cup G_{p,q}^- \mid \forall a \in \mathbb{R}^{p,q}, M a M^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q}\}. \quad (4.17)$$

Lipschitzin ryhmä tunnetaan yleisesti myös nimellä Cliffordin ryhmä. Nimityksen otti käyttöön Chevalley, vaikka Clifford ei työssään käsitellyt kyseistä ryhmää lainkaan. Lipschitzin ryhmän aliryhmät muodostavat tämän työn kannalta mielenkiintoisen kokonaisuuden [24]. Valitsemalla Lipschitzin ryhmästä ainoastaan ne alkiot, joiden suuruus on yksi, saadaan Pin-ryhmä:

$$\text{Pin}(p, q) = \{M \in \Gamma_{p,q} \mid M M^\dagger = \pm 1\}. \quad (4.18)$$

Spin-ryhmä muodostuu Pin-ryhmän niistä versoreista, jotka kuuluvat parilliseen alialgebraan

$$\text{Spin}(p, q) = \text{Pin}(p, q) \cap G_{p,q}^+. \quad (4.19)$$

Hestenes [23] kutsuu tällaisia versoreita spinoreiksi. Spin-ryhmällä on edelleen aliryhmä

$$\text{Spin}_+(p, q) = \{M \in \text{Spin}(p, q) \mid M M^\dagger = 1\}. \quad (4.20)$$

Ryhmä  $\text{Spin}_+(p, q)$  on edellisessä luvussa mainittu roottoriryhmä. Ryhmät  $\text{Spin}(p, q)$  ja  $\text{Spin}_+(p, q)$  ovat samat, jos geometrisen algebran merkki on definiitti eli jompi kumpi luvuista  $p$  tai  $q$  on nolla. Silloin merkitään totuttuun tapaan  $\text{Spin}(n, 0) = \text{Spin}(n)$ .

Vektoriavaruuden  $V$  ortogonaalikuvaukset muodostavat ryhmän kuvauksen yh-

disteen suhteen. Tätä ryhmää kutsutaan ortogonaaliryhmäksi, ja sitä merkitään  $O(V)$ . Seuraavassa halutaan esitellä ortogonaaliryhmän ja edellisten Pin- ja Spin-ryhmien yhteyttä sekä yhteyttä matriisialgebraan. Tätä varten esitetään ortogonaaliryhmän määritelmä matriisien avulla.

**Määritelmä 4.5.4.** *Reaaliset matriisit  $A_{n \times n}$ , joille on voimassa ehto*

$$A^t A = A A^t = I_{n \times n},$$

missä  $A^t$  on matriisin transpoosi ja  $I_{n \times n}$  identiteettimatriisi, muodostavat ortogonaaliryhmän  $O(n)$ , jonka tulo-operaatio on matriisitulo.

Määritelmän ehdon  $A^t A = A A^t = I_{n \times n}$  toteuttavia matriiseja kutsutaan ortogonaalisiksi, koska niiden sarakevektorit muodostavat ortonormaalien joukon. Edellä Pin- ja Spin-ryhmät määriteltiin yleisesti indefiniitille geometrisen algebran merkille, joten määritellään lisäksi indefiniitti- eli pseudo-ortogonaaliryhmä.

**Määritelmä 4.5.5.** *Pseudo-ortogonaaliryhmän  $O(p, q)$  muodostavat matriisitulon suhteen reaaliset matriisit  $A_{n \times n}$ , joille on voimassa ehto*

$$A^t I_{p,q} A = A I_{p,q} A^t = I_{p,q},$$

missä matriisi  $I_{p,q}$  on

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_{p \times p} & 0 \\ 0 & -I_{q \times q} \end{bmatrix}.$$

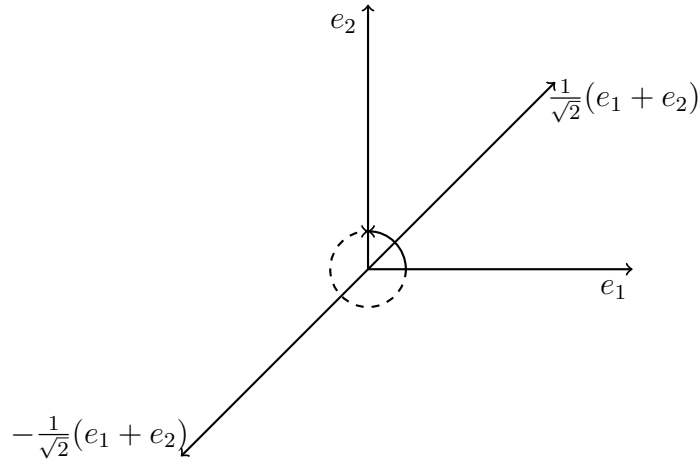
Ortogonaalisen matriisin determinantti on  $\pm 1$ , mistä huomataan matriisiesityksen yhteys geometrisen algebran esitykseen. Ortogonaalikuvauksista, jonka determinantti on 1 kutsutaan erityisortogonaalikuvaukseksi, jotka muodostavat ortogonaaliryhmän aliryhmän  $SO(p, q)$  (tai  $S(n)$ , jos geometrisen algebran merkki on positiivisesti definiitti).[18]

Roottorit eivät vastaa yksi yhteen kiertoja, sillä kohdasta (4.16) nähdään, että kuvaukset  $U$  ja  $-U$  määrittävät saman ortogonaalikuvauksen, ja siten saman ortogonaalimatriisin. Esimerkki 4.5.6 havainnollistaa asiaa.

**Esimerkki 4.5.6.** *Tarkastellaan kiertoa kaksiulotteisessa tapauksessa. Kierretään kantavektori  $e_1$  kantavektoriksi  $e_2$ . Tällöin tehdään kulman  $\theta = \frac{\pi}{2}$  suuruisen kierto origon suhteen. Kyseistä kiertoa vastaa roottori*

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)e_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e_2 e_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e_1 e_2), \end{aligned}$$

minkä merkinnät selviävät kuvasta 4.3.



Kuva 4.3: Vektorin  $e_1$  kierto vektoriksi  $e_2$  voi tapahtua kahteen vastakkaiseen suuntaan.

Jos kierto suoritetaan vastakkaiseen suuntaan kulman  $\theta = -\frac{3\pi}{2}$  suuruisena, saadaan lopputulokseksi sama vektori. Kuten kuvasta 4.3 selviää, tässä tapauksessa roottori on

$$R\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) = -R\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (4.21)$$

Roottorit  $R$  ja  $-R$  vastaavat lopputulokseltaan samaa kiertoa, mutta niiden suunnat ovat vastakkaiset.

Jatketaan edelleen kahdessa ulottuvuudessa. Kierretään kantavektoria  $e_1$  uudeksi vektoriksi  $s$ :

$$s = R_1 e_1 R_1^\dagger.$$

Kierretään syntynyttä vektoria kokonainen kierros, jolloin palataan takaisin kantavektoriin  $e_1$ . Lauseen 4.4.1 mukaan tätä kiertoa vastaa roottori  $R = e^{-B\pi} R_1 = -R_1$ . Roottorin etumerkki vaihtuu kulman  $2\pi$  suuruisessa kierrossa. Tulos tunnetaan myös kvanttimekaniikassa, jossa fermioneja kuvataan spinoreilla. [8]

Jokaista ortogonaalikuvausta vastaa siis kaksi kohdan(4.16) muotoista kuvausta  $U$ , joista jokainen on ortogonaalikuvaus. Näin ollen on olemassa surjektiivinen homomorfismi  $f$ , joka liittää jokaisen ryhmän  $\text{Pin}(p, q)$  alkion ryhmän  $O(p, q)$  alkioon. Homomorfismin  $f$  ydin on

$$\ker(f) = \{1, -1\}.$$

Ortogonaaliryhmän ja sen aliryhmien yhteys vastaavaan  $\text{Pin}$ -ryhmään ja sen aliryhmiin ilmaistaan isomorfismien avulla. Ryhmien ensimmäisen isomorfismlauseen

nojalla on voimassa yhteydet [24]

$$O(p, q) \simeq \text{Pin}(p, q)/\{1, -1\}, \quad (4.22)$$

$$SO(p, q) \simeq \text{Spin}(p, q)/\{1, -1\}, \quad (4.23)$$

$$SO^+(p, q) \simeq \text{Spin}^+(p, q)/\{1, -1\}, \quad (4.24)$$

missä merkintä / tarkoittaa tekijäryhmää.<sup>1</sup> Tekijäryhmä on ryhmä, jonka alkiot ovat joukkoja. Jokainen tällainen joukko koostuu kahdesta versorista  $U$  ja  $-U$ . Tekijäryhmä siis ikään kuin niputtaa yhteen nämä kaksi versoria, jolloin saadaan yksi yhteen vastaavuus ortogonaalikuvausten kanssa.

Edellä on käsitelty geometrisen algebran yhteyttä lineaarialgebraan sekä ortogonaalikuvauksiin, jotka usein esitetään matriiseilla. Peilauksia ja kiertoja esitetään kaksiulotteisessa avaruudessa kompleksiluvuilla. Kolmi- ja nelikulotteisessa avaruudessa peilaukset ja kierrot saadaan kuvatuksi kvaternien algebralla. Geometrinen algebra sisältää komplekilukujen sekä kvaternien algebrat mutta lisäksi yleistää peilaukset ja kierrot  $n$ -ulotteiseen avaruuteen. Seuraavassa on esitelty tämän työn kannalta tärkeimpien geometrinen algebrojen yhteydet kenties tutumpiin algebriin [12; 24]:

$$\begin{aligned} G_{0,0} &\simeq \mathbb{R}, \\ G_{0,1} &\simeq G_2^+ \simeq \mathbb{C}, \\ G_{0,2} &\simeq G_3^+ \simeq \mathbb{H}, \\ G_3 &\simeq G_{3,1}^+ \simeq \text{Mat}(2, \mathbb{C}), \\ G_{1,3} &\simeq \text{Mat}(2, \mathbb{H}), \\ G_{3,1} &\simeq \text{Mat}(4, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

missä merkintä  $\text{Mat}(n, \mathbb{A})$  tarkoittaa  $n \times n$ -matriiseja, joiden alkiot ovat kunnan  $\mathbb{A}$  alkioita. Merkinnät  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ja  $\mathbb{H}$  tarkoittavat reaalilukujen, kompleksilukujen ja kvaternien kuntia vastaavasti. On syytä huomata, että algebrat  $G(1, 3)$  ja  $G(3, 1)$  eivät ole isomorfiset algebrat, vaikka ne kuvaavat Minkowskin aika-avaruuden rakennetta eri geometrisen algebran merkeillä [24]. Näihin perehdytään tarkemmin seuraavassa luvussa.

Yhteenvetona geometrisen algebran esitystavan suhteesta kiertojen ja peilausten matriisiesitykseen voidaan sanoa, että se sisältää enemmän tietoa kyseisestä kuvauk-

<sup>1</sup>Tässä työssä ei ole tarkoitus perehtyä ryhmäteoriaan, joten käydään tekijäryhmän käsite läpi lyhyesti. Vasen sivuluokka on joukko  $gH = \{gh \mid h \in H\}$ , missä  $H$  on ryhmän  $G$  aliryhmä ja  $g$  kuuluu ryhmään  $G$ . Vastaavasti määritellään oikea sivuluokka  $Hg$ . Ryhmän  $G$  aliryhmä  $N$  on normaali, jos sen vasen ja oikea sivuluokka ovat samat jokaisella alkiolla  $g \in G$ :  $gN = Ng$ . Määritellään normaalin ryhmän  $N$  kaikkien vasempien sivuluokkien joukko  $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ , joka muodostaa yhdessä sivuluokkien tulon  $(aH)(bH) = (ab)H$  kanssa tekijäryhmän. [15]

sesta. Geometrisessa algebrassa huomioidaan kuvauksen kätisyys, mikä mahdollistaa esimerkiksi kvanttimekaniikan spinoreiden esittämisen.

## 5. MINKOWSKIN AIKA-AVARUUDEN ALGEBRALLINEN RAKENNE – SPACE-TIME ALGEBRA

Kuten luvussa 2 esiteltiin, suppean suhteellisuusteorian lähtökohtana on kaksi Einsteinin tekemää postulaattia: suhteellisuusperiaate ja valonnopeuden vakioisuus. Näistä huomattiin seuraavan se, että kaksi havaitsijaa saattavat olla eri mieltä kahden tapahtuman samanaikaisuudesta. Lisäksi Lorentzin muunnosten kaavoista (2.3) huomataan, että paikka- ja aikakoordinaatit sekoittuvat toisiinsa. Einsteinin opettaja Hermann Minkowski esitti vuonna 1907 tärkeän tulkinnan. Hän yhdisti avaruuden ja ajan yhdeksi kokonaisuudeksi, jossa molemmat ovat yhdenvertaisia. Tämä neliulotteinen ajan ja avaruuden yhteensulauma tunnetaan nimellä Minkowskin avaruus.[11]

Fysiikan eräs keskeinen ongelma on todellisten fysikaalisten tapahtumien avaruudellisen ja ajallisen paikan määrittäminen sekä näiden tapahtumien keskenäisten suhteiden tutkiminen. Minkowskin avaruudessa näiden tapahtumien välille voidaan määritellä etäisyys, jota tässä tapauksessa kutsutaan intervalliksi erotuksena avaruudelliseen etäisyyteen. Kolmiulotteisen avaruuden pisteellä tarkoitetaan idealisaatioita, jonka ulottuvuus on nolla eli sillä ei ole avaruudellista ulottuvuutta. Vastaavasti Minkowskin avaruuden tapahtumat ovat idealisaatioita, joilla ei ole avaruudellista eikä ajallista ulottuvuutta. Tapahtuma voi kuvata esimerkiksi hiukkasen hetkellistä avaruudellista ja ajallista sijaintia. Hiukkasen *maailmanviiva* kuvaa sen historiaa Minkowskin avaruudessa, ja se muodostuu jatkuvasta jonosta hiukkasen hetkellisiä tapahtumia. [26]

Jokainen havaitsija määrittelee oman karteesisen lepokoordinaatistonsa ja liittää tiettyyn tapahtumaan aika- ja paikkakoordinaatit suhteessa omaan sijaintiinsa. Yksinkertaisuuden vuoksi valitaan, että havaitsija on lepokoordinaatistonsa origossa. Jotta havaitsijat voivat kommunikoida heidän kellonsa täytyy synkronoida Luvussa 2 esitetyllä tavalla. Koska valonnopeus on vakio, havaitsijat voivat mitata aikaa etäisyyden yksiköissä. Usein valinta tehdään siten, että valonnopeus on 1. [26]

Tämän intuitiivisen kuvauksen jälkeen määritellään Minkowskin avaruus matemaattisemmin.

**Määritelmä 5.0.7.** *Minkowskin avaruus on neliulotteinen reaalin vektorivaruus  $\mathcal{M}$ , jossa on määritelty sisätulo  $g : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , jonka merkki on  $(1, 3)$  [26].*



Minkowskin avaruuden alkioita kutsutaan tapahtumiksi ja sisätuloa  $g$  Lorentzin sisätuloksi. Usein Minkowskin avaruuden alkioita kutsutaan nelivektoreiksi, koska ne muodostuvat neljästä komponentista. Kyseistä nimitystä ei käytetä tässä työssä, koska se voi sekaantua geometrisen algebran termiin nelivektori, joka tarkoittaa nelilotteista hypertilavuutta. Minkowskin avaruuden ortonormaalin kannan muodostavat vektorit  $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ , jotka toteuttavat ehdot

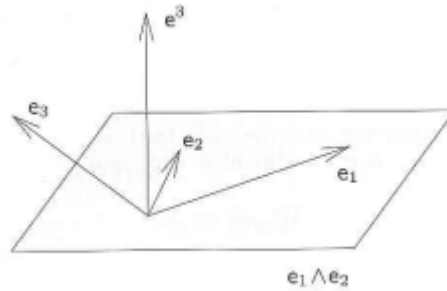
$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (5.1)$$

missä  $\eta_{\mu\nu}$  on Minkowskin avaruuden metriikka. Fysiikan lait voidaan esittää yhtäpitävästi valitsemalla metriikaksi  $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , jota käytetään usein yleisessä suhteellisuusteoriassa. Indeksoinnissa käytetään yleisen käytännön mukaisesti kreikkalaisia aakkosia, kun indeksit ovat  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Avaruudellisia komponentteja merkitään latinalaisilla aakkosilla  $i = 1, 2, 3$ . [8]

Vektoriavaruuden  $V$  kannan  $\{\mathbf{e}_i\}$  *duaalikannan* (eng. reciprocal frame)  $\{\mathbf{e}^i\}$  vektorit toteuttavat ehdon

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i, \quad (5.2)$$

jokaisella  $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ . Kroneckerin deltafunktion  $\delta_j^i$  arvo on yksi, jos  $i = j$ , ja muuten nolla. Kuvassa 5.1 havainnollistetaan duaalikantaa.



Kuva 5.1: Vektorit  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  ja  $\mathbf{e}_3$  muodostavat kolmiulotteisen avaruuden ei-ortonormaalin kannan. Vektori  $\mathbf{e}^3$  saadaan muodostamalla taso  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ , ja valitsemalla tätä tasoa vastaan kohtisuora vektori. Pituuden määrää ehto  $\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ . [8]

Minkowskin avaruuden kannan  $\{\gamma_\mu\}$  duaalikannan vektoreille pätevät näin ollen ehdot  $\gamma^0 = \gamma_0$  ja  $\gamma^i = \gamma_i$ . Avaruuden  $V$  jokainen alkio  $a$  voidaan kirjoittaa joko kannan tai käänteiskannan vektoreiden lineaarikombinaationa:

$$a = \alpha^i \mathbf{e}_i = \alpha_i \mathbf{e}^i,$$

missä on käytetty Einsteinin summasääntöä, jossa summamerkintä jätetään kir-

joittamatta ja toistuvien indeksien yli summataan eli  $\sum_i \alpha^i \mathbf{e}_i := \alpha^i \mathbf{e}_i$ . Reaaliluvut  $\alpha^0, \dots, \alpha^n$  ovat vektorin  $a$  koordinaatit kannassa  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Vastaavasti käänteiskannan  $\{\mathbf{e}^i\}$  koordinaatit merkitään alaindekseillä:  $a_0, \dots, a_n$ . Koordinaatit saadaan yhtälöketjuilla

$$\begin{aligned} a \cdot \mathbf{e}^i &= a^j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = a^j \delta_j^i = a^i \\ a \cdot \mathbf{e}_i &= a_j \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = a_j \delta_j^i = a_i, \end{aligned}$$

missä on käytetty summaussääntöä. [8]

Minkowskin avaruuden jokainen tapahtuma  $x$  voidaan niin ikään esittää lineaarikombinaationa

$$x = x^\mu \gamma_\mu = ct\gamma_0 + x^i \gamma_i, \quad (5.3)$$

missä aika- ja etäisyyskoordinaatit on ilmaistu samoissa pituuden yksiköissä. Tästä eteenpäin valitaan nämä yksiköt siten, että valonnopeus on  $c = 1$ . [8]

Kohdan (5.3) neliö on

$$\begin{aligned} x^2 &= (t\gamma_0 + x^i \gamma_i)^2 \\ &= t^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

ja sitä kutsutaan *intervallin* neliöksi [13]. Luvussa 2 osoitettiin, että intervallin neliö on invariantti suure koordinaatistomuunnoksessa. Kohdasta (5.4) huomataan, että Minkowskin avaruuden vektorin neliö voi olla positiivinen, negatiivinen tai nolla, joten vektorin pituudelle pätee

$$|a| = \pm a^2.$$

Luvun 3 geometrisen algebran aksiomaattinen kehittäminen on suurimmalta osin voimassa tästä Minkowskin avaruuden erityispiirteestä huolimatta [8]. Johtuen indefiniitistä merkistä Minkowskin avaruudessa vektori ei välttämättä ole nollavektori, vaikka sen neliö olisi nolla. Esimerkiksi vektorin  $\gamma_0 + \gamma_1 \neq 0$  neliö on

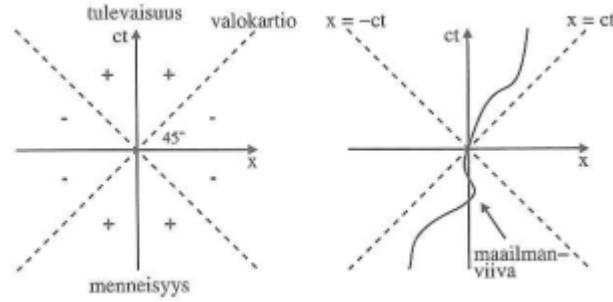
$$(\gamma_0 + \gamma_1)^2 = \gamma_0^2 + \gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 + \gamma_1^2 = 1 + \gamma_0\gamma_1 - \gamma_0\gamma_1 - 1 = 0.$$

Tarkastelemalla intervallin neliötä (5.4) huomataan, että tapahtuman, jonka aikakoordinaatti  $t$  on nolla, intervallin neliö on negatiivinen. Tällaisella tapahtumalla on ainoastaan avaruudellista etäisyyttä. Näin ollen intervaleja, joiden neliö on negatiivinen, kutsutaan *paikanlaatuiseksi*. Vastaavasti, jos kaksi tapahtumaa sijoittuvat samaa paikkaa avaruudellisesti, eli niitä erottaa ainoastaan aika, intervallin neliö on positiivinen, ja sitä kutsutaan *ajanlaatuiseksi*. Jos intervallin neliö on nolla, tilanteen fyysikaalinen merkitys selviää tarkastelemalla valonvälähdyistä origossa. Kolmiulotteisessa avaruudessa fotonit leviävät joka suuntaan, ja ajan  $t$  kuluttua ne toteuttavat

pallopinnan yhtälön

$$t^2 = ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2).$$

Jos kyseinen yhtälö on kuvataan  $(t, z, y)$ -aika-avaruudessa ajan  $t$  funktiona, saadaan kartio. Kaikkien edellä mainitun valonvälähdyksen fotonien maailmanviivat ovat tällä kartiolla, joten sitä kutsutaan valokartioksi. Kuva 5.2 havainnollistaa maailmanviivojen jakoa kolmeen tyyppiin. Vastaavasti intervallia, jonka neliö on nolla, kutsutaan valonlaatuiseksi. [3; 13]



Kuva 5.2: Aika-avaruusdiagrammi, jossa ajanlaatuiset tapahtumat on merkitty plussalla, paikalaatuiset miinuksella, Valokartio (tässä projisoituna yhteen ulottuvuuteen) määrittää valonlaatuiset tapahtumat. Massiivisten kappaleiden tapahtumat ovat aina ajanlaatuisia. [11]

Minkowskin avaruuden kannan  $\{\gamma_\mu\}$  vektoreilla muodostetaan geometrinen algebra  $G_{1,3}$ . Tämän aika-avaruuden algebran (eng. Spacetime Algebra) kanta muodostuu skalaarista, neljästä vektorista, kuudesta bivektorista, neljästä trivektorista ja pseudoskalaarista:

$$1, \quad \{\gamma_\mu\}, \quad \{\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu\}, \quad \{I\gamma_\mu\}, \quad I.$$

Aika-avaruuden algebran yleinen alkio voidaan kirjoittaa muodossa

$$M = \alpha + a + B + Ib + I\beta,$$

missä  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat skalaareita,  $a$  ja  $b$  ovat vektoreita ja  $B$  on bivektori. Aika-avaruuden algebran multivektorin reversio on

$$M^\dagger = \alpha + a - B - Ib + I\beta, \quad (5.5)$$

missä reversiota on merkitty merkillä  $\dagger$ , kuten luvussa 3. Tavallisesti aika-avaruuden algebran reversiota merkitään  $\tilde{M}$ , koska  $\dagger$ -merkkiä käytetään toisessa merkityksessä relativistisessa kvanttimekaniikassa. Tässä työssä tämä ei ole tarpeen, joten pidetään luvun 3 merkinnöissä. [8]

## 5.1 Aika-avaruuden jako ja itseisfysiikka

Aika-avaruuden algebra mahdollistaa relativistisen fysiikan muotoilun ja käsitteilyn ilman viittauksia koordinaatistojärjestelmään, joten Hestenes [20; 22] kutsuu kyseistä lähestymistapaa nimellä *itseisfysiikka* (eng. proper physics). Tätä nimeä Hestenes perustelee sillä, että itseisfysiikan kannalta tarkasteltuna käsite relativisten mekaniikka on harhaanjohtava, koska kyseinen teoria on vähemmän suhteellinen kuin ei-relativistiseksi kutsuttu Newtonin mekaniikka. Tässä suomennos on tehty aiemman suomenkielisen kirjallisuuden puuttuessa perustuen käsitteen *proper time* suomennokseen *itseisaika* [11]. Newtonin mekaniikassa hiukkasta kuvaavat kaavat riippuvat sen liikkeestä, kun taas Einsteinin mekaniikassa näin ei ole. Einstein esitti mekaniikkansa alun perin suhteellisilla muuttujilla, joita ovat esimerkiksi hiukkasen paikka ja nopeus. Suhteellisuusperiaate vaatii, että kaavojen muoto ei muutu eli on kovariantti, kun tehdään koordinaatistomuunnos suhteellisille muuttujille inertiaalisesta koordinaatistosta toiseen [11]. Invariantti suure puolestaan säilyy samana tehtäessä koordinaatistomuutos, joten esimerkiksi valonnopeus on invariantti [11]. Minkowskin kovariantti muotoilu suhteellisuusteoriasta korvasi tietyn inertiaalisen havaitsijan suhteen suhteelliset muuttujat komponenteilla suhteessa mielivaltaiseen koordinaatistosysteemiin. Itseisfysiikkamuotoilu, joka esitellään seuraavassa, on vielä yksi askel kovarianssista invarianssiin, koska se liittää hiukkasten liikkeen suoraan Minkowskin absoluuttiseen aika-avaruuteen ilman viittausta mihinkään koordinaatistosysteemiin. [20]

## 5.2 Aika-avaruuden käyrät, itseisaika ja -nopeus

Seuraavassa täydennetään lähteen [8] esitystä lähteiden [3; 14; 1] avulla. Oletetaan, että  $x = x(\lambda)$  on Minkowskin aika-avaruuden parametrisoitu käyrä, missä  $\lambda$  on mielivaltainen monotonisesti kasvava parametri, joka kuuluu välille  $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \mathbb{R}$ . Parametrisoitu käyrä on määritelmän mukaan jatkuva. Lisäksi oletetaan, että parametrisoitu käyrä on derivoituva, joten sen tangenttivektori on

$$x' = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}.$$

Käyrän jälki eli lyhyesti käyrä on kuvajoukko

$$C = x([\lambda_1, \lambda_2]) = \{x(\lambda) \mid \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]\}.$$

Käyrä voidaan parametrisoida usealla eri tavalla, joten muodostetaan käyrälle  $C$

toinen parametrisointi  $\hat{x}(\varphi(\lambda))$ , jolloin uusi tangenttivektori saadaan ketjusäännöllä:

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d\hat{x}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Korotetaan tämä puolittain toiseen potenssiin, jolloin saadaan

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{d\hat{x}}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2. \quad (5.6)$$

Koska  $\phi(\lambda)$  on reaaliarvoinen funktio, sen neliö on positiivinen, joten yhtälöstä (5.6) nähdään että, tangenttivektorin neliön etumerkki ei riipu käyrän parametrisoinnista. Tangenttivektorin neliö voi olla joko positiivinen, negatiivinen tai nolla, joten tangenttivektorit jaetaan kolmeen tyyppiin:

$$\begin{aligned} \text{jos } (x')^2 > 0, & \quad x' \text{ on ajanlaatuinen vektori,} \\ \text{jos } (x')^2 < 0, & \quad x' \text{ on paikanlaatuinen vektori,} \\ \text{jos } (x')^2 = 0, & \quad x' \text{ on valonlaatuinen vektori.} \end{aligned}$$

Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitaudutaan sellaisiin käyriin, joiden tangenttivektorin etumerkki on kaikkialla sama. Näitä käyriä kutsutaan vastaavasti ajan-, paikan- tai valonlaatuiseksi käyriksi. [8]

Callahanin [3] mukaan massallisen hiukkasen maailmanviivaa kuvaa ajanlaatuinen käyrä, jonka pituutta kutsutaan itseisajaksi  $\tau$ . Differentiaalisesti ilmaistuna käyrän pituus on

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)} = \sqrt{dx^2},$$

Itseisaika vastaa euklidisen kolmiulotteisen avaruuden käyrän kaaripituutta, joka saadaan integroimalla differentiaalia  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ . Olkoon  $x_a$  ja  $x_b$  kaksi tapahtumaa, jotka ovat ajanlaatuksella käyrällä  $x(\lambda)$  siten, että  $x(\lambda_a) = x_a$  ja  $x(\lambda_b) = x_b$ . Näiden välinen itseisaika intervalli on

$$\Delta\tau = \int_{x_a}^{x_b} d\tau = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{dx^2} = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} |x'(\lambda)| d\lambda.$$

Fysikaalisesti itseisaika on aika, jonka havaitsija mittaa (pituusyksiköissä) lepo-koordinaatistossaan; itseisaika kuvaa hiukkasen sisäistä ominaisuutta, mikä selittää termin *itseis*[20]. Parametrin  $\lambda$  suhteen ilmaistuna itseisaika alkaen parametrin ar-

vosta  $\lambda_0$  muuttuvaan parametrin arvoon  $\lambda$  on[3]

$$\tau(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} |x'(\lambda)| d\lambda. \quad (5.7)$$

Itseisaika kuvaa aika-avaruuden käyrän pituutta, ja se on riippumaton parametrin valinnasta. Toisin sanoen kaksi inertiaalista havaitsijaa, jotka tarkastelevat samaa hiukkaste, ovat samaa mieltä tämän maailmanviivan pituudesta. Itseisaika on siis invariantti suure.

**Lause 5.2.1.** *Olkoon  $x(\lambda)$  ja  $\hat{x}(\kappa)$  hiukkasen maailmanviivat kahden eri inertiaalisen havaitsijan näkemänä. Lisäksi tapahtumille  $x_a$  ja  $x_b$  pätee  $x_a = x(\lambda_a) = \hat{x}(\kappa_a)$  ja  $x_b = x(\lambda_b) = \hat{x}(\kappa_b)$ . Itseisajalle pätee[3]*

$$\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} |x'(\lambda)| d\lambda = \Delta\tau = \int_{\kappa_a}^{\kappa_b} |\hat{x}'(\kappa)| d\kappa.$$

*Todistus.* Lähteissä [3] ja [14] väite todistetaan avaruuden  $\mathbb{R}^n$  käyrille. Sovelletaan näitä todistuksia Minkowskin avaruuteen. Parametrisoidut käyrät  $x(\lambda)$  ja  $\hat{x}(\kappa)$  kuvaavat samaa Minkowskin avaruuden käyrää, mikä tarkoittaa sitä, että on olemassa aidosti kasvava funktio  $\varphi([\lambda_a, \lambda_b]) = [\kappa_a, \kappa_b]$  siten, että  $x(\lambda) = \hat{x}(\varphi(\lambda))$ . Ajanlaatuinen parametrisoitu käyrä on injektiivinen kuvaus, koska jos se ei olisi, niin käyrä leikkaisi itseään. Tämä tarkoittaisi, että hiukkanen liikkuisi ajassa taaksepäin. Näin olle ajanlaatuaisella parametrisoidulla käyrällä on käänteiskuvaus, joka on määritelty sitä vastaavalla käyrällä. Ajanlaatuaisen käyrän tangenttivektoreiden neliöt ovat nollaa suuremmat, joten parametrisoidun käyrän  $\hat{x}(x(\lambda))$  derivaatalle pätee  $\hat{x}'(\varphi(\lambda)) \neq 0$  jokaisella parametrin arvolla  $\lambda \in (\lambda_a, \lambda_b)$ , joten käänteiskuvauslauseen nojalla funktio  $\phi(\lambda) = \hat{x}^{-1}(x(\lambda))$  on derivoituva.

Ketjusäännöllä saadaan

$$x'(\lambda) = \hat{x}'(\varphi(\lambda))\varphi'(\lambda) \neq 0, \quad (5.8)$$

joten erityisesti pätee  $\varphi'(\lambda) \neq 0$  jokaisella parametrin arvolla  $\lambda \in (\lambda_a, \lambda_b)$ . Koska funktio  $\varphi : [\lambda_a, \lambda_b] \rightarrow \mathbb{R}$  on aidosti kasvava ja  $\varphi'(\lambda) \neq 0$ , niin sen derivaatta on  $\varphi'(\lambda) > 0$  jokaisella parametrin arvolla  $\lambda \in (\lambda_a, \lambda_b)$ . Muuttujan vaihdolla saadaan

laskettua integraali

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_a}^{\kappa_b} |\hat{x}'(\kappa)| d\kappa &= \int_{\varphi(\lambda_a)}^{\varphi(\lambda_b)} |\hat{x}'(\kappa)| d\kappa \\ &= \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} |\hat{x}'(\varphi(\lambda))| |\varphi'(\lambda)| d\lambda \\ &= \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} |x'(\lambda)| d\lambda \\ &= \Delta\tau, \end{aligned}$$

missä kolmas yhtäsuuruus seuraa kohdasta (5.8). □

Itseisajan avulla käyrälle voidaan muodostaa niin kutsuttu luonnollinen parametrisointi, jolloin käyrän tangenttivektori on yksikkövektori. Luonnollisen tästä parametrisoinnista tekee se, että aina kun parametri kasvaa yhden yksikön hiukkanen etenee käyrällä yhden yksikön. Näin ollen parametrin arvo ilmoittaa sen, kuinka pitkän matkan hiukkanen on kulkenut käyrällä. Osoitetaan, että itseisaika määrittelee luonnollisen parametrisoinnin.

**Lause 5.2.2.** *Inertiaalisessa koordinaatistossa jokainen maailmanviiva voidaan parametrisoida itseisajalla  $\tau$ . Tämän itseisaikaparametrisoidun käyrän  $y(\tau)$  tangenttivektorin pituus on yksi:  $|y(\tau)| = 1$ . [3]*

*Todistus.* Seurataan lähteen [3] todistusta. Analyysin ensimmäisen peruslauseen nojalla kohdan (5.7) derivaatta on

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = |x'(\lambda)| > 0.$$

Funktiolla  $\tau = \tau(\lambda)$  on näin ollen käänteisfunktio, jota merkitään  $\lambda = \lambda(\tau)$ . Muodostetaan käyrän  $x$  uusi parametrisointi  $y(\tau) = x(\lambda(\tau))$ , jota kutsutaan käyrän itseisaika-parametrisoinniksi. Käyttäen derivoinnin ketjusääntöä ja käänteiskuvauslausetta kirjoitetaan

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dx}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{dx}{d\lambda} \frac{1}{d\tau/d\lambda} = \frac{x'(\lambda)}{|x'(\lambda)|},$$

joten

$$\left| \frac{dy}{d\tau} \right| = \frac{|x'(\lambda)|}{|x'(\lambda)|} = 1.$$

□

Tämän johdosta määritellään itseisnopeus  $v$ ,

$$v = \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \dot{x},$$

jolle pätee

$$v^2 = 1. \quad (5.9)$$

Itseisnopeus on ajanlaatuinen vektori ja määrittelee hetkellisen lepokoordinaatiston[8]. Hestenes käyttää käsitettä itseisnopeus nelinopeuden sijasta sekaannuksen välttämiseksi, ja lisäksi itseisnopeus kuvaa hiukkasen sisäistä ominaisuutta, joten nimi on tässäkin mielessä perusteltu. Aiemman suomennoksen puuttuessa tässä työssä suomennos perustuu suomennokseen itseisaika, kuten edellä mainittiin. Derivoimalla itseisnopeus itseisajan suhteen saadaan itseiskiihtyvyys. Ominaisuuden (5.9) nojalla Itseisnopeuden ja -kiihtyvyyden tulolle pätee

$$\dot{v}v = \frac{dv}{d\tau}v = \frac{dvv}{d\tau} - v\frac{dv}{d\tau} = -v\dot{v},$$

eli Lauseen 3.2.3 perusteella itseisnopeus ja -kiihtyvyys ovat ortogonaaliset. Havait-sijan liike on inertiaalista, jos sen itseiskiihtyvyys on nolla.[20]

Valonlaatuiselle käyrälle tangenttivektorin neliö on nolla. Valonlaatuiselle käyräl-le tällaista luonnollista parametria ei ole, vaan itseisaika (tai itseisetäisyys) on nolla. Fotoneilla on tästä huolimatta sisäinen kello, jonka niiden taajuus määrittelee. Pai-kanlaatuiselle käyrälle puolestaan voidaan määritellä itseisaikaa vastaava luonnolli-nen parametri itseisetäisyys, jonka neliö on  $-1$ . Kuten aiemmin mainittiin tapah-tumat, joita erottaa paikanlaatuinen intervalli, eivät voi olla syy-seuraussuhteessa toisiinsa. [8]

### 5.3 Suhteelliset vektorit

Ylempänä määriteltiin havaitsijan itseisaika ja -nopeus, jotka kuvaavat havaitsijan ominaisuuksia sen omassa koordinaatistossa. Miltä tämän havaitsijan liike näyttää toisen havaitsijan silmin, ja miten tämä jakaa liikkeen aika- ja paikkaosaan? Esi-merkiksi tietty havaitsija liittyy johonkin tapahtumaan paikkavektorin, mutta toi-selle havaitsijalle kyseisen tapahtuman paikkavektori on eri Geometrinen algebra mahdollistaa asian esittämisen kätevästi aika-avaruuden jakoina (eng. space-time split)[22; 20]. Luvun tulokset perustuvat siihen, että avaruuden  $\mathbb{R}^3$  (suhteelliset) paikkavektorit voidaan samaistaa aika-avaruuden algebran tiettyjen bivektoreiden kanssa. Tarkemmin sanottuna aika-avaruuden parillinen alialgebra on isomorfinen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  muodostaman geometrisen algebran kanssa[8].

Mukaillaan lähteen [8] esitystä ja aloitetaan tarkastelu inertiaalisella havaitsijalla, jonka itseisnopeus on vakio  $v$ . Itseisnopeus on ajanlaatuinen, joten se voidaan valita



havaitisijan koordinaatiston  $\{\mathbf{e}_\mu\}$  vektoriksi  $\mathbf{e}_0 = v$ . Koordinaatiston muut vektorit valitaan siten, että ne toteuttavat ehdon

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}.$$

Tämän koordinaatiston avulla havaitisija liittää jokaiseen aika-avaruuden tapahtumaan omat koordinaattinsa. Tarkastellaan seuraavaksi, miltä tapahtuma  $x$  näyttää havaitisijan  $v$  silmin. Jaetaan tapahtuma  $x$  yksikkötangentin  $v$  suuntaiseen ja sen kanssa ortogonaaliseen osaan:

$$x = xv = (x \cdot v + x \wedge v)v = x \cdot vv + x \wedge vv,$$

missä  $x \cdot vv$  on selvästi yhdensuuntainen tangenttivektorin  $v$  kanssa. Termi  $x \wedge vv$  on ortogonaalinen tangenttivektorin  $v$  kanssa, sillä

$$v \cdot (x \wedge vv) = \langle (x \wedge vv)v \rangle = \langle x \wedge v \rangle = 0.$$

Vertaamalla tätä kohtaan (5.3) huomataan, että havaitisijan näkemä aikakoordinaatti on

$$t = x \cdot v.$$

Termi  $x \wedge vv$  on tapahtuman  $x$  paikkavektori havaitisijan  $v$  koordinaatistossa:

$$x^i \mathbf{e}_i = x \cdot \mathbf{e}^\mu \mathbf{e}_\mu - x \cdot \mathbf{e}^0 \mathbf{e}_0 = x - x \cdot vv = xv - x \cdot vv = x \wedge vv,$$

joten otetaan käyttöön *suhteellinen vektori*

$$\boldsymbol{x} = x \wedge v.$$

Suhteelliset vektorit ovat todellisuudessa aika-avaruuden bivektoreita, ja niitä merkitään lihavoiduilla kirjaimilla. Näillä merkinnöillä saadaan ilmaistua havaitisijan  $v$  määrittämä *aika-avaruuden jako* (eng. space-time split)

$$xv = x \cdot v + x \wedge v = t + \boldsymbol{x}. \quad (5.10)$$

Se, että näin voidaan tehdä, vaatii hieman lisäselvittelyä; jako perustuu aika-avaruuden parilliseen alialgebraan. Jokainen havaitisija näkee joukon vektoreita suhteessa omaan sijaintiinsa. Näitä suhteellisia vektoreita kuvataan geometrisessa algebrassa aika-avaruuden bivektoreilla. Suhteellisten vektoreiden kannan muodostavat bivektorit

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \gamma_0 \gamma_i,$$

jotka määrittävät joukon ajanlaatuksia tasojen kuvaavia bivektoreita. Suhteelliset vektorit voidaan samaistaa avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreiden kanssa, koska algebrat  $G_3$  ja  $G_{1,3}^+$  ovat isomorfiset. Tämä nähdään siitä, että suhteellisten vektoreiden  $\sigma_i$  neliöt ovat  $+1$ ,

$$\sigma_i^2 = \gamma_0 \gamma_i \gamma_0 \gamma_i = -\gamma_i \gamma_i \gamma_0 \gamma_0 = +1,$$

ja että suhteelliset vektorit antikommutoivat:

$$\sigma_i \sigma_j = \gamma_0 \gamma_i \gamma_0 \gamma_j = \gamma_j \gamma_i \gamma_0 \gamma_0 = -\gamma_j \gamma_0 \gamma_i \gamma_0 = \sigma_j \sigma_i.$$

Lisäksi, kun  $i \neq j$  suhteelliset vektorit toteuttavat ehdon

$$\begin{aligned} \sigma_i \cdot \sigma_j &= \frac{1}{2}(\gamma_i \gamma_0 \gamma_j \gamma_0 + \gamma_j \gamma_0 \gamma_i \gamma_0) \\ &= \frac{1}{2}(-\gamma_i \gamma_j - \gamma_j \gamma_i) = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

mikä on avaruuden  $\mathbb{R}^3$  ortonormaalikannan määrittelevä ehto[8]. Aika-avaruuden vektori voidaan ajatella tietyn ajan olemassa olevana jananana, joten paikkavektoreiden samaistaminen bivektoreihin on järkevää myös geometrisesti tulkittuna.[7]

Jaon (5.10) reversio on

$$vx = v \cdot x + v \wedge x = t - \mathbf{x},$$

joten

$$x^2 = xv vx = (t + \mathbf{x})(t - \mathbf{x}) = t^2 - \mathbf{x}^2.$$

Toinen havaitsija  $u$  jakaa tapahtuman  $x$  eri tavalla aika- ja paikkakomponentteihin, mutta intervalli  $x^2$  on sama kaikille havaitsijoille, koska se ei riipu itseisnopeudesta.[8]

## 5.4 Suhteellinen nopeus

Tarkastellaan inertiaalista havaitsijaa, mikä tarkoittaa, että sen itseisnopeus  $v$  on vakio eli  $\frac{d}{d\tau}v = 0$ [20]. Sovitaan, että käyrä  $x = x(\tau)$  kuvaa erään hiukkasen maailmanviivaa, jonka itseisaika on  $\tau$  ja itseisnopeus  $u = \frac{dx}{d\tau}$ . Halutaan selvittää, mikä on hiukkasen suhteellinen nopeus havaitsijan  $v$  koordinaatistossa. Tätä varten suoritetaan itseisnopeuden  $u$  aika-avaruuden jako, mikä saadaan derivoimalla kohta (5.10):

$$uv = \left(\frac{d}{d\tau}x\right)v = \left(\frac{d}{d\tau}x\right)v + x \frac{d}{d\tau}v = \frac{d}{d\tau}(xv) = \frac{d}{d\tau}(t + \mathbf{x}).$$

Toisaalta tulo  $uv$  on

$$uv = u \cdot v + u \wedge v,$$

joten voidaan kirjoittaa

$$\frac{dt}{d\tau} = u \cdot v, \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = u \wedge v.$$

Suhteellinen nopeus  $\mathbf{u}$  mitataan havaitsijan  $v$  koordinaatistossa, joten

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{u \wedge v}{u \cdot v},$$

mistä huomataan, että jos havaitsija  $u$  tarkastelee havaitsijan  $v$  liikettä, tämä liikkuu hänen mielestään täsmälleen samalla nopeudella mutta vastakkaiseen suuntaan.[8]

Täydentäen lähteen [8] esitystä suhteellisen nopeuden määritelmästä seuraa, että sen suuruus on

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} \rangle| &= \left| \frac{(v \wedge u)(u \wedge v)}{(v \cdot u)(u \cdot v)} \right| \\ &= \left| \frac{(vu - v \cdot u)(uv - v \cdot u)}{(u \cdot v)^2} \right| \\ &= \left| \frac{vuuv - v \cdot uvu - u \cdot vuv + (u \cdot v)^2}{(u \cdot v)^2} \right| \\ &= \left| \frac{1 - (u \cdot v)(uv + vu) + (u \cdot v)^2}{(u \cdot v)^2} \right| \\ &= \left| \frac{1 - 2(u \cdot v)(u \cdot v) + (u \cdot v)^2}{(u \cdot v)^2} \right| \\ &= \left| \frac{1 - (u \cdot v)^2}{(u \cdot v)^2} \right| \\ &= 1 - \frac{1}{(u \cdot v)^2} < 1, \end{aligned}$$

joten kaksi havaitsijaa mittaavat toistensa suhteelliseksi nopeudeksi aina vähemmän kuin valonnopeus, joka on valituissa yksiköissä 1.

Muodostetaan Lorentz-kerroin  $\gamma$  normaaliin tapaan

$$\gamma^{-2} = 1 - \mathbf{u}^2 = 1 - \left( 1 - \frac{1}{(u \cdot v)^2} \right) = (u \cdot v)^{-2},$$

joten Lorentz-kerroin on  $\gamma = u \cdot v$ . Tästä seuraa, että itseisnopeuksien  $v$  ja  $u$  välinen yhteys on

$$u = uvv = (u \cdot v + u \wedge v)v = \gamma(1 + \mathbf{u})v,$$

missä  $\gamma v$  on nopeuden  $v$  kanssa yhdensuuntainen osa nopeudesta  $u$  ja osa  $\gamma \mathbf{u}v$  on nopeuden  $v$  kanssa ortogonaalinen osa.[8]

## 5.5 Liikemäärä ja aaltovektori

Suhteellisuusteoriassa energia ja liikemäärä pitää määritellä hieman eri tavalla kuin klassisessa fysiikassa. Tutkitaan fotonia, jolla on kulmataajuus  $\omega$  ja aaltovektori  $\mathbf{k}$  ajanlaatuksen vektorin  $\gamma_0$  määräämässä koordinaatistossa. Kvanttimekaniikassa fotonin energia ja liikemäärä ovat  $\hbar\omega$  ja  $\hbar\mathbf{k}$  vastaavasti. Määritellään aaltovektori  $k$  kaavalla

$$k = \omega\gamma_0 + k^i\gamma_i,$$

jolloin fotonin energia-liikemäärävektori eli *itseisliikemäärä* on

$$p = \hbar k.$$

Havaintajan, joka liikkuu itseisnopeudella  $v$  mittaama energia ja liikemäärä ovat

$$E = p \cdot v, \quad \mathbf{p} = p \wedge v,$$

mitä voidaan pitää oikeana määritelmänä myös massallisille hiukkasille. Hiukkasen, jonka massa on  $m$  ja itseisnopeus  $u$ , itseisliikemäärä on  $p = mu$ . Havaintaja  $v$  jakaa tämän vektorin energia- ja liikemääräosaan:

$$pv = p \cdot vp \wedge v = E + \mathbf{p}.$$

Tästä määritelmästä seuraa *suhteellisen liikemäärän* ja suhteellisen nopeuden välille yhteys

$$\mathbf{p} = mu \cdot vu = \gamma m \mathbf{u},$$

missä  $\gamma$  on Lorentz-kerroin. Itseisliikemäärän määritelmästä saadaan itseis- eli lepomassa  $m$ , joka on invariantti suure, ja sen neliölle pätee

$$m^2 = p^2 = pvp = (E + \mathbf{p})(E - \mathbf{p}) = E^2 - \mathbf{p}^2.$$

Vastaavasti fotonille, jonka aaltovektori on  $k$ ,  $k^2 = 0$ , saadaan

$$0 = kvvk = (\omega + \mathbf{k})(\omega - \mathbf{k}) = \omega^2 - \mathbf{k}^2,$$

mistä seuraa yhteys  $|k| = \omega$ , joka on voimassa kaikissa koordinaatistoissa. [8]

## 5.6 Itseiskiihtyvyys

Suppean suhteellisuusteorian dynamiikassa itseiskiihtyvyys on tärkeä käsite. Vaikka tässä työssä ei käsitellä dynamiikkaa, esitellään kuitenkin seuraavassa itseiskiihtyvyyttä. Oletetaan, että hiukkasen liikettä kuvaa parametrisoitu käyrä  $x(\tau)$ , jossa  $\tau$  on

itseisaika. Hiukkasen itseisnopeus on  $v = \dot{x}$ , ja sen neliö on

$$v^2 = 1.$$

Itseiskiihtyvyys on yksinkertaisesti

$$\dot{v} = \frac{dv}{d\tau}.$$

Koska itseisnopeuden neliö on yksi, itseisnopeudelle ja -kiihtyvyydelle on voimassa tulos

$$\frac{d}{d\tau}(v^2) = 0 = 2\dot{v} \cdot v,$$

joten itseisnopeus ja -kiihtyvyys ovat ortogonaaliset. [8]

Joissakin tilanteissa on hyödyllistä käyttää kiihtyvyyks-bivektoria, joka määritellään seuraavasti

$$B_v = \dot{v} \wedge v = \dot{v}v.$$

Tämä bivektori kuvaa hetkelliseen lepokoordinaatistoon projisoitua kiihtyvyyttä. Kiihtyvyyks-bivektoria käytetään tyypillisesti esittäessä Newtonin toinen liikeyhtälö geometrisen algebran muotoilulla. Tällöin myös voima on bivektori.

Muutos käyrän parametrisoinnissa muuttaa itseisnopeusvektorin suuruutta, joten kiihtyvyyks-bivektori voidaan kirjoittaa muodossa

$$B_v = \frac{v' \wedge v}{(v \cdot v)^{3/2}},$$

mikä on riippumaton käyrän parametrisoinnista. [8]

## 5.7 Yhteys Diracin ja Paulin matriiseihin

Tarkastellaan Minkowskin avaruuden muodostavien kantavektoreiden määritelmää

$$\eta_{\mu\nu} = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad (5.11)$$

mikä näyttää tutulta ainakin kvanttifyysikolle. Diracin matriisit ovat

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä  $i$  on imaginääriyksikkö[24]. Nämä noudattavat lähes laskusääntöä (5.11): yhtälöketjun vasemmalta puolelta puuttuu ainoastaan identiteettimatriisi[8]. Nämä

matriisit generoivat matriisialgebran, jota kutsutaan Diracin algebraksi. Yleisen Diracin algebran kerroinkunta on kompleksilukujen kunta. Aika-avaruuden algebra on isomorfinen reaalisen Diracin algebran kanssa, joka on yleisen Diracin algebran alialgebra. Aika-avaruuden algebran yhteys Diracin matriiseihin selittää, miksi aika-avaruuden ortonormaalia kantaan merkittiin  $\{\gamma_\mu\}$ . [20; 8]

Edellä todettiin, että aika-avaruuden parillinen alialgebra on isomorfinen fysikaalista avaruutta kuvaavan avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kanssa. Niillä on yhteys niin ikään kvanttimekaniikassa tunnettuihin Paulin matriiseihin

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

joille pätee

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I_{2 \times 2} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k,$$

missä  $I_{2 \times 2}$  on  $2 \times 2$ -identiteettimatriisi ja  $i$  imaginääriyksikkö. Geometrisen algebran  $G_3$  muodostaville ortonormaalin kannan vektoreille  $\mathbf{e}_i$  voidaan kirjoittaa vastaava muoto [8]:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \delta_{ij} + I \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k.$$

Hestenes väittää, että geometrisen algebra lisää ymmärrystä kvanttimekaniikan geometrisesta tulkinnasta. Lisäksi geometrisen algebra avulla voidaan kirjoittaa Paulin ja Diracin algebran välille yhteys

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_3 = I = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,$$

mikä ei ole mahdollista matriisiesityksessä, jos Paulin matriisit esitetään  $2 \times 2$ -matriiseina ja Diracin matriisit  $4 \times 4$ -matriiseina. [20]

## 6. LORENTZ-MUUNNOKSET

Luvussa 2 esiteltiin Lorentz-muunnokset, jotka johdettiin Einsteinin kahden postulaatin avulla. Johdossa tarkasteltiin kahden inertiaalisen koordinaatiston  $K$  ja  $K'$  välistä koordinaatistomuutosta ja huomattiin, että Minkowskin aika-avaruuden intervallin neliö säilyy kyseisessä muutoksessa. Tässä luvussa määritetään, miten kahden inertiaalisen koordinaatiston välinen yhteys voidaan ilmaista geometrisen algebran avulla. Kahden inertiaalisen koordinaatistojärjestelmän  $K$  ja  $K'$  oletetaan olevan kaksi eri esitystä yhdestä ja samasta todellisesta aika-avaruudesta. Näin ollen on oltava yksikäsitteinen, kääntyvä funktio, joka yhdistää kummankin koordinaatiston koordinaatit toisiinsa. Ilmaistaan tämä kaavalla

$$x = L(x'),$$

missä  $x$  on aika-avaruuden tapahtuma koordinaatistossa  $K$  ja  $x'$  on kyseinen tapahtuma koordinaatistossa  $K'$ . Seuraavassa selvitetään, minkälainen kuvaus  $L$  on. [19]

Seuraavassa mukaillaan lähteen [2] esitystä. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan jälleen, että ajanhetkellä  $t = 0$  koordinaatistot  $K$  ja  $K'$  ovat päällekkäin. Kaksiulotteisessa tapauksessa Minkowskin aika-avaruuden tason vektori on

$$x = t\gamma_0 + x_1\gamma_1 = t'\gamma'_0 + x'_1\gamma'_1.$$

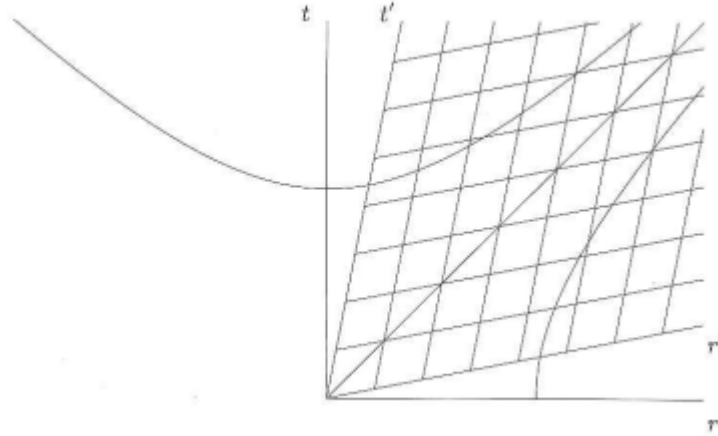
Tässä kantavektorit saadaan toisistaan kuvauksella

$$\gamma'_\mu = R\gamma_\mu R^\dagger,$$

missä indeksin arvot ovat  $\mu = 0, 1$ . Roottori  $R$  ilmaistaan hyperbolisten funktioiden avulla

$$R = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_1\gamma_0 := e^{\alpha\gamma_1\gamma_0}.$$

Kuva 6.1 havainnollistaa tilannetta.



Kuva 6.1: Lorentz-muunnos jättää vektorin pituuden ennalleen. Koska aika-avaruuden geometria ei ole euklidinen samanpituiset vektorit ovat hyperbelin kaarella ympyrän sijaan. Muunnetut akselit määrittävät uuden koordinaattiruudun. [8]

Kantavektorin  $\gamma_0$  muunnos on siis

$$\begin{aligned}
 R\gamma_0R^\dagger &= \left( \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_1\gamma_0 \right) \gamma_0 \left( \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_0\gamma_1 \right) \\
 &= \left( \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_0 + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_1 \right) \left( \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_0\gamma_1 \right) \\
 &= \cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_0 + 2\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_1 + \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_0 \\
 &= \cosh(\alpha)\gamma_0 + \sinh(\alpha)\gamma_1.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Tästä huomataan, että kantavektorin  $\gamma_0$  muunnos voidaan esittää myös muodossa

$$\begin{aligned}
 R\gamma_0R^\dagger &= \left( \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_1\gamma_0 \right) \left( \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_1\gamma_0 \right) \gamma_0 \\
 &= (\cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)\gamma_1\gamma_0)\gamma_0 = e^{\alpha\gamma_1\gamma_0}\gamma_0,
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

tai yhtäpitävästi  $R\gamma_0R^\dagger = \gamma_0e^{\alpha\gamma_1\gamma_0}$ . Kantavektorille  $\gamma_1$  saadaan

$$R\gamma_1R^\dagger = \cosh(\alpha)\gamma_1 + \sinh(\alpha)\gamma_0.$$

Oletetaan, että koordinaatisto  $K'$  liikkuu nopeudella  $\beta$  suuntaan  $\gamma_1$ . Koska koordinaatistojen oletettiin olevan päällekkäin ajanhetkellä  $t = 0$ , niin on voimassa yhtäsuuruudet  $x_1 = \beta t$  ja  $x'_1 = 0$ . Näin ollen saadaan yhtälö

$$t\gamma_0 + \beta t\gamma_1 = t'R\gamma_0R^\dagger,$$



mistä seuraa kohdan (6.1) perusteella

$$\frac{t}{t'}(\gamma_0 + \beta\gamma_1) = \cosh(\alpha)\gamma_0 + \sinh(\alpha)\gamma_1.$$

Vertaamalla tämän yhtälön vasenta ja oikeaa puolta huomataan yhteydet

$$\cosh(\alpha) = \frac{t}{t'},$$

ja

$$\sinh(\alpha) = \beta\frac{t}{t'}.$$

Näistä voidaan ratkaista argumentti  $\alpha$ , jonka hyperbolinen tangentti on

$$\tanh(\alpha) = \beta,$$

sekä aikakoordinaattien suhde

$$\frac{t}{t'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (6.3)$$

mikä on luvun 2 perusteella Lorentzin kerroin  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ . Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} t\gamma_0 + x_1\gamma_1 &= t'R\gamma_0R^\dagger + x'_1R\gamma_1R^\dagger \\ &= t'\gamma(\gamma_0 + \beta\gamma_1) + x'_1\gamma(\gamma_1 + \beta\gamma_0). \end{aligned}$$

Vertaamalla yhtälön vasemman ja oikean puolen kertoimia havaitaan

$$t = \gamma(t' + \beta x'_1), \quad (6.4)$$

$$x_1 = \gamma(x'_1 + \beta t'), \quad (6.5)$$

mitkä ovat Luvun 2 Lorentz-muunnokset. [2]

## 6.1 Nopeuksien yhteenlasku

Sovitaan, että kaksi havaitsijaa liikkuvat nopeuksilla  $v$  ja  $-v$  tietyssä koordinaatistossa. Newtonin mekaniikan mukaan nämä kaksi havaitsijaa mittaavat toistensa nopeudeksi  $2v$ . Tämä pitää paikkansa, jos nopeus  $v$  on selvästi valonnopeutta pienempi, mutta jos nopeus on tarpeeksi suuri, havaitsijat mittaisivat Newtonin mekaniikan mukaan toistensa nopeudeksi yli valonnopeuden. Näin ei voi olla, ja ratkaisu saadaan Lorentzin-muunnosten seurauksena. Tarkkaillaan kahta toisistaan poispäin lentävää kappaletta koordinaatistossa, jonka kannan muodostavat vektorit  $\{\gamma_\mu\}$ . So-

vitaan, että kappaleiden nopeudet ovat

$$v_1 = e^{\alpha_1 \gamma_1 \gamma_0 / 2} \gamma_0 e^{-\alpha_1 \gamma_1 \gamma_0 / 2},$$

ja

$$v_2 = e^{-\alpha_2 \gamma_1 \gamma_0 / 2} \gamma_0 e^{\alpha_2 \gamma_1 \gamma_0 / 2}.$$

Kohdan (6.2) perusteella, nopeudet voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} v_1 &= e^{\alpha_1 \gamma_1 \gamma_0} \gamma_0, \\ v_2 &= \gamma_0 e^{\alpha_2 \gamma_1 \gamma_0}. \end{aligned}$$

Suhteellinen nopeus on Luvun 5.4 perusteella

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{v_1 \wedge v_2}{v_1 \cdot v_2} = \frac{\langle v_1 v_2 \rangle_2}{\langle v_1 v_2 \rangle} = \frac{\langle e^{\alpha_1 \gamma_1 \gamma_0} \gamma_0 \gamma_0 e^{\alpha_2 \gamma_1 \gamma_0} \rangle_2}{\langle e^{\alpha_1 \gamma_1 \gamma_0} \gamma_0 \gamma_0 e^{\alpha_2 \gamma_1 \gamma_0} \rangle} \\ &= \frac{\langle e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \gamma_1 \gamma_0} \rangle}{\langle e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \gamma_1 \gamma_0} \rangle} = \frac{\sinh(\alpha_1 + \alpha_2) \gamma_1 \gamma_0}{\cosh(\alpha_1 + \alpha_2)}, \end{aligned}$$

joten havaittajat mittaavat suhteelliseksi nopeudeksi

$$\tanh(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tanh(\alpha_1) + \tanh(\alpha_2)}{1 + \tanh(\alpha_1) \tanh(\alpha_2)}.$$

Jos hyperboliset tangentit korvataan skalaarisilla nopeuksilla  $u = c \tanh(\alpha)$ , saadaan

$$u' = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2 / c^2},$$

mikä on nopeuksien yhteenlaskukaavan tunnetumpi muoto. [8]

## 6.2 Doppler-ilmiö ja aberraatio

Valon lähettäjän ja vastaanottajan havaitseman valon aallonpituus riippuu heidän välisestä suhteellisesta liikkeestä. Jos lähde ja vastaanottaja liikkuvat toisiaan kohti, niin aallonpituus lyhenee. Lähteen liikkeen ollessa poispäin vastaanottajasta aallonpituus kasvaa. Näitä tilanteita kutsutaan vastaavasti puna- ja sinisiirtymäksi, koska näkyvän valon alueella punaisen valon aallonpituus on lyhyempi kuin sinisen valon aallonpituus. Yleisesti ilmiö tunnetaan Dopplerin ilmiönä itävaltalaisen Johann Dopplerin mukaan, joka esitti vastaavan ilmiön tapahtuvan ääniaalloille. Useilla on arkipäiväinen kokemus Dopplerin ilmiöstä: ohi ajavan ambulanssin hälytyssireenin taajuus on korkeampi sen tullessa kohti kuin ambulanssin loitotessa. Dopplerin ilmiö tunnetaan siis jo Newtonin mekaniikassa, mutta suhteellisuusteoria tuo siihen oman lisänsä. [11]

Seuraavassa tarkastelussa edetään lähde [8] mukaillen. Fotoneiden maailmanviiva on valonlaatuinen. Tämän käyrän tangenttivektori on aaltovektori  $k$ , ja sen neliön muistetaan olevan nolla, koska se on valonlaatuinen. Oletetaan, että kaksi havaitsijaa seuraavat eri maailmanviivoja itseisnopeuksilla  $v_1$  ja  $v_2$ . Ensimmäinen havaitsija emittoi fotonin, jonka toinen havaitsija vastaanottaa. Ensimmäinen havaitsija mittaa fotonin kulmataajuudeksi

$$\omega_1 = v_1 \cdot k,$$

ja toinen saa kulmataajuudeksi

$$\omega_2 = v_2 \cdot k.$$

Näiden taajuuksien suhde kuvaa Dopplerin ilmiötä, ja se ilmaistaan usein punasiirtymän  $z$  avulla, jolle on voimassa

$$1 + z = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1 \cdot k}{v_2 \cdot k}. \quad (6.6)$$

Seuraavassa oletetaan, että lähde loittonee vastaanottajasta suuntaan  $\gamma_1$  ja vastaanottajan lepokoordinaatiston määrittää ehto  $v_2 = \gamma_0$ . Aaltovektori on siis

$$k = \omega_2(\gamma_0 + \gamma_1),$$

ja, koska kantavektorit  $\gamma_0$  ja  $\gamma_1$  antikommutoivat, sille pätee

$$k^2 = \omega_2^2(\gamma_0^2 + \gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 + \gamma_1^2) = \omega_2^2(1 - 1) = 0.$$

Lähteen itseisnopeus on edellisen luvun perusteella muotoa

$$v_1 = e^{-\alpha\gamma_1\gamma_0}\gamma_0 = (\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha)\gamma_1\gamma_0)\gamma_0 = \cosh(\alpha)\gamma_0 - \sinh(\alpha)\gamma_1,$$

joten kohdan (6.6) sisätulot ovat

$$\begin{aligned} v_1 \cdot k &= (\cosh(\alpha)\gamma_0 - \sinh(\alpha)\gamma_1) \cdot (\omega_2(\gamma_0 + \gamma_1)) \\ &= \langle (\cosh(\alpha)\gamma_0 - \sinh(\alpha)\gamma_1) (\omega_2(\gamma_0 + \gamma_1)) \rangle \\ &= \langle \omega_2(\cosh(\alpha)\gamma_0^2 + \cosh(\alpha)\gamma_0\gamma_1 - \sinh(\alpha)\gamma_1\gamma_0 - \sinh(\alpha)\gamma_1^2) \rangle \\ &= \omega_2(\cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)), \end{aligned}$$

ja

$$v_2 \cdot k = \gamma_0 \cdot k = \langle \omega_2\gamma_0(\gamma_0 + \gamma_1) \rangle = \langle \omega_2(1 + \gamma_0\gamma_1) \rangle = \omega_2.$$

Kohta (6.6) kirjoitetaan näin ollen muotoon

$$1 + z = \frac{\omega(\cosh(\alpha) + \sinh(\alpha))}{\omega} = e^\alpha.$$

Toisaalta eksponenttifunktio voidaan esittää seuraavasti

$$\begin{aligned} e^\alpha &= \left( \frac{e^\alpha}{e^{-\alpha}} \right)^{1/2} = \left( \frac{\cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha)} \right)^{1/2} = \left( \frac{\cosh(\alpha)(1 + \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)})}{\cosh(\alpha)(1 - \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)})} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1 + \tanh(\alpha)}{1 - \tanh(\alpha)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Kuten aiemmin mainittiin hyperbolinen tangentti on  $\beta = \tanh(\alpha)$ , joten kohdasta (6.6) seuraa relativistisen Dopplerin ilmiön kaava

$$\omega_2 = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \omega_1,$$

mikä pätee, jos lähde ja vastaanottaja loittonevat toisistaan nopeudella  $\beta c$ . Jos lähde ja vastaanottaja lähestyvät toisiaan, nopeuden  $\beta$  etumerkki vaihtuu, mistä seuraa vastaanottajan mittaaman kulmataajuuden kasvu eli sinisiirtymä. [8]

Aberraatiolla tarkoitetaan ilmiötä, jossa lähteen sijainti näennäisesti muuttuu johtuen lähteen ja vastaanottajan suhteellisesta liikkeestä. Klassisen mekaniikan esimerkki aberraatiosta on autolla ajaminen sateessa. Auton ollessa paikallaan sade tulee suoraan ylhäältäpäin, mutta jos auto liikkuu, sade vaikuttaa tulevan viistosti liikkeen suunnasta. Kuten Dopplerin ilmiön tapauksessa aberraation yleisessä tarkastelussa joudutaan ottamaan huomioon suhteellisuusteoria.[11]

Täydennetään lähteen [8] esitystä. Oletetaan, että havaitsijan 1 itseisnopeus on  $\gamma_0$  ja että tämä havaitsija vastaanottaa fotoneita suunnasta, joka muodostaa kulman  $\theta$  akselin  $\gamma_1$  kanssa tasossa  $\gamma_1\gamma_2$ . Fotonit etenevät näin ollen käyrää, jonka tangenttivektori on

$$n = \gamma_0 - \cos(\theta)\gamma_1 - \sin(\theta)\gamma_2.$$

Tälle pätee kantavektoreiden antikommutatiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} n^2 &= (\gamma_0 - \cos(\theta)\gamma_1 - \sin(\theta)\gamma_2)^2 \\ &= \gamma_0^2 + \cos^2(\theta)\gamma_1^2 + \sin^2(\theta)\gamma_2^2 - \cos(\theta)\gamma_0\gamma_1 - \sin(\theta)\gamma_0\gamma_2 - \cos(\theta)\gamma_1\gamma_0 \\ &\quad + \cos(\theta)\gamma_1\gamma_0 \sin(\theta)\gamma_2 - \sin(\theta)\gamma_2\gamma_0 + \sin(\theta)\gamma_2 \cos(\theta)\gamma_1 \\ &= \gamma_0^2 + \cos^2(\theta)\gamma_1^2 + \sin^2(\theta)\gamma_2^2 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Koska on voimassa yhtälöt

$$n \cdot \gamma_2 = \langle (\gamma_0 - \cos(\theta)\gamma_1 - \sin(\theta)\gamma_2)\gamma_2 \rangle = \langle \gamma_0\gamma_2 - \cos(\theta)\gamma_1\gamma_2 + \sin(\theta) \rangle = \sin(\theta),$$

ja

$$n \cdot \gamma_1 = \cos(\theta),$$

havaintsija  $\gamma_0$  määrittää kulman  $\theta$  kaavalla

$$\tan(\theta) = \frac{n \cdot \gamma_2}{n \cdot \gamma_1}.$$

Oletetaan, että toinen havaintsija liikkuu nopeudella  $\beta = \tanh(\alpha)$  suuntaan  $\gamma_1$  suhteessa ensimmäiseen havaintsijaa. Tämän havaintsijan itseisnopeus on

$$v = \gamma'_0 = \cosh(\alpha)\gamma_0 + \sinh(\alpha)\gamma_1.$$

Toisen havaintsijan lepokoordinaatiston muut kantavektorit ovat

$$\gamma'_1 = \cosh(\alpha)\gamma_1 + \sinh(\alpha)\gamma_0, \quad \gamma'_2 = \gamma_2, \quad \gamma'_3 = \gamma_3,$$

joten tämän havaintsijan mukaan fotonit saapuvat kulmassa  $\theta'$ , joka ratkaistaan kaavalla

$$\begin{aligned} \tan(\theta') &= \frac{n \cdot \gamma'_2}{n \cdot \gamma'_1} = \frac{\langle (\gamma_0 - \cos(\theta)\gamma_1 - \sin(\theta)\gamma_2)\gamma_2 \rangle}{\langle (\gamma_0 - \cos(\theta)\gamma_1 - \sin(\theta)\gamma_2)(\cosh(\alpha)\gamma_1 + \sinh(\alpha)\gamma_0) \rangle} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\cosh(\alpha)\cos(\theta) + \sinh(\alpha)}. \end{aligned}$$

Kyseinen kaava vastaa Enqvistin esittämää [11, s. 45] suhteellisuusteoreettista valon aberraation kaavaa.

### 6.3 Ajan dilataatio ja Lorentzin lyheneminen

Kohdasta (6.3) huomataan, että koordinaatiston  $K$  ja sen suhteen tasaisesti liikkuvan koordinaatiston  $K'$  aikakoordinaattien yhteys on

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} t' = \gamma t'.$$

Koska kertoimelle  $\gamma$  pätee  $\gamma > 1$ , niin  $t < t'$ . Toisin sanoen levossa olevan kellon näyttämä aika  $t$  on suurempi kuin vastaava liikkuvan kellon näyttämä aika  $t'$ . Tämä yhteys ilmaistaan usein sanomalla, että liikkuva kello jätättää. On kuitenkin muistettava, että liike on suhteellista, joten koordinaatistossa  $K'$  katsottuna koordinaatiston  $K$  kello näyttää jätättävän. Tämä saattaa vaikuttaa paradoksaaliselta,

mutta molemmat ovat oikeassa, sillä absoluuttista aikaa ei ole.[11; 19]

Ajan dilataation eli venymisen ohella pituudet lyhenevät liikkuvassa koordinaatistossa. Jotta pituuksista voidaan ylipäättään puhua, pitää ensin määritellä, mitä pituudella tarkoitetaan. Mittasauvan määrittävät sen alku- ja loppukoordinaatit  $x_a$  ja  $x_b$ . Oletetaan, että tällainen sauva on levossa  $x_1$ -akselin suuntaisesti koordinaatistossa  $K'$ . Tässä koordinaatistossa tarkasteltuna sauvan päiden koordinaatit eivät muutu ajan mukana, joten sauvan lepopituus on

$$l_0 = x'_l - x'_a.$$

Sovitaan, että koordinaatisto  $K'$  liikkuu koordinaatiston  $K$  suhteen nopeudella  $v$  akselin  $x_1$  suuntaan. Sauva päiden koordinaatit koordinaatistossa  $K$  riippuvat näin ollen ajasta. Sauvan pituus koordinaatistossa määritellään sen alku- ja loppukoordinaattien samanaikaisella mittaamisella. Kuten luvussa 2 todettiin tapahtumien samanaikaisuus riippuu koordinaatistosta. Sauvan pituus ilmaistuna koordinaatiston  $K$  koordinaateilla on kaavan (6.5) perusteella

$$l_0 = x'_l - x'_a = \gamma(x_l - x_a - \beta(t_l - t_a)),$$

mutta, koska sauvan päät mitattiin samalla ajan hetkellä koordinaatistossa  $K$ , ajat  $t_l$  ja  $t_a$  ovat samat. Näin ollen sauvan pituus koordinaatistossa  $K$  on

$$l = \gamma^{-1}L_0.$$

Kerroin  $\gamma^{-1}$  on pienempi kuin yksi, joten liikkuvasta koordinaatistosta katsottuna mittasauva näyttää lyhyemmältä kuin sauvan lepokoordinaatistossa katsottuna.

## 6.4 Lorentz-muunnosten ryhmä

Minkowskin aika-avaruuden intervalli (5.3) vastaa kolmiulotteisen avaruuden pisteiden välistä etäisyyttä. Aiemmin määritelty ortogonaalikuvaus on kuvaus, joka säilyttää vektoreiden välisen pistetulon, mikä tarkoittaa, että pisteiden väliset etäisyydet pysyvät muuttumattomina. Vastaavasti Minkowskin aika-avaruuden sisätulon säilyttävä kuvaus on kyseisen avaruuden ortogonaalikuvaus, jota kutsutaan Lorentz-muunnokseksi. Koska jokainen ortogonaalikuvaus voidaan esittää muodossa (4.16), päätellään, että jokainen Lorentz-muunnos voidaan esittää muodossa

$$x = L(x') = \epsilon_L Lx' L^{-1}, \quad (6.7)$$

missä  $\epsilon_L = 1$ , jos versori  $L$  on parillinen multivektori, eli se kuuluu parilliseen alialgebraan, ja  $\epsilon_L = -1$ , jos versori  $L$  on pariton. Näitä kutsutaan aidoksi ja epäaidok-

si Lorentz-muunnokseksi vastaavasti. Asetetaan versoreille  $L$  ehto  $|L| = 1$ . Kuten luvussa 4 selvisi, tämä geometrisen algebran esitystapa pelkistää kahden Lorentz-muunnoksen yhdisteen  $L_2 L_1 = L_3$  versoreiden tuloksi  $L_2 L_1 = L_3$ . [22; 23].

Luvun 4.5 perusteella Lorentz-muunnokset muodostavat ryhmän, jonka tulo-operaatio on kuvausten yhdiste. Tämä Lorentzin ryhmä on

$$O(1, 3) = \{L \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid L^t I_{1,3} L = I_{1,3}\}. \quad (6.8)$$

Matriisin  $L$  determinantti on  $\det(L) = \pm 1$ . Matriisit, joiden determinantti on positiivinen, muodostavat *erityisen Lorentzin ryhmän*  $SO(1, 3)$ . Erityisellä Lorentzin ryhmällä on kaksi komponenttia, joista tärkeämpi on komponentti, joka sisältää identiteettimatriisin  $I_{1,3}$ . Tätä ryhmää kutsutaan *rajoitetuksi Lorentzin ryhmäksi*  $SO^+(1, 3)$ . Erityisen ja rajoitetun fysikaalinen merkitys on se, että ensimmäinen säilyttää ajan ja avaruuden suunnan ja toinen kääntää sekä ajan että avaruuden suunnan. Lorentzin ryhmä  $O(1, 3)$  voidaan siis jakaa neljään komponenttiin sen mukaan, miten ajan ja avaruuden suunnat säilyvät kuvauksessa. Kuvaukset, jotka säilyttävät ajan suunnan, muodostavat ortokronisen (eng. orthocronous) Lorentzin ryhmän  $O_{\uparrow}(1, 3)$ . [24; 31]

Luvussa 4.5 esityksen perusteella näiden Lorentzin ryhmien matriisikuvaukset vastaavat kahta versorikuvausta  $L$  ja  $-L$ , jotka muodostavat ryhmät  $\text{Pin}(1, 3)$ ,  $\text{Spin}(1, 3)$  ja  $\text{Spin}_{+}(1, 3)$ . Yksinkertaisin Lorentz-muunnos on vektorin  $a$  peilaus yksikkönormaanin  $n$  määräämän hypertason suhteen, mikä määritellään kuten luvussa 4.5 kaavalla

$$P_n a = -nan^{-1},$$

ja sen determinantti on  $-1$ . Peilausta

$$P_v a = -vav,$$

ajanlaatuisen yksikkönormaanin  $v = v^{-1}$  määräämän hypertason suhteen kutsutaan ajan peilaukseksi, koska se kääntää tapahtumien aikajärjestyksen eli ajan suunnan. Vastaavasti peilaus paikanlaatuisen yksikkönormaanin määräämän hypertason suhteen säilyttää aikajärjestyksen mutta kääntää avaruuden suunnan. [8; 22]

Rajoitettua Lorentzin muunnosta kutsutaan myös Lorentzin kierroksi, ja se koostuu parillisesta määrästä peilauksia. Näin ollen Lorentzin kierron determinantti on 1. Koska rajoitettu Lorentzin muunnos säilyttää ajan suunnan, peilauksia ajan- ja paikanlaatuisten vektoreiden määrittämien hypertasojen suhteen tulee kumpiakin olla parillinen määrä. Lorentzin kierron kanoninen muoto on

$$R a = RaR^{\dagger},$$

mikä on tuttu luvusta 4. Roottorille  $R$  asetetaan ehto  $RR^\dagger = 1$ . [8; 22]

Roottori voidaan esittää muodossa

$$R = \pm(\cosh(\frac{\phi}{2}) + B \sinh(\frac{\phi}{2})) := \pm e^{B\phi/2}, \quad (6.9)$$

missä  $B$  on yksikköbivektori. Tämä esitys johdetaan seuraavasti. Olkoon roottori  $R = uv$ , missä  $u$  ja  $v$  molemmat ovat joko ajanlaatuksia tai paikanlaatuksia yksikkövektoreita. Näin ollen niille pätee ehto

$$u^2v^2 = 1.$$

Toisaalta neliöiden tulo voidaan kirjoittaa muodossa

$$u^2v^2 = uvvu = (u \cdot v + u \wedge v)(u \cdot v - u \wedge v) = (u \cdot v)^2 - (u \wedge v)^2 = 1,$$

joten valitsemalla sopiva argumentti  $\phi$  voidaan merkitä  $u \cdot v = \pm \cosh(\frac{\phi}{2})$  ja  $u \wedge v = \pm \sinh(\frac{\phi}{2})$ . Roottori  $R$  on siis

$$R = \pm(\cosh(\frac{\phi}{2}) + B \sinh(\frac{\phi}{2})) := \pm e^{B\phi/2},$$

missä  $B = \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|}$  on yksikköbivektori, jonka neliö on  $B^2 = 1$ . [4]

## 6.5 Pusku

Lorentzin kierrot voidaan jakaa kahteen perustyyppiin, ajanlaatuiseen kiertoon eli *puskuun* (eng. boost) ja paikanlaatuiseen kiertoon. Suomennos pusku esiintyy esimerkiksi Cronströmin et al. kirjassa [5]. Lorentz-muunnos  $L$  on pusku, jos se voidaan esittää muodossa

$$L(a) = LaL^\dagger,$$

missä versori  $L$  on kahden ajanlaatuksen yksikkövektorin  $v_1$  ja  $v_2$  tulo

$$L = v_2v_1.$$

Tarkistetaan, että pusku toteuttaa, sille asetetut ehdot. Versori  $L$  toteuttaa roottorin ehdon

$$LL^\dagger = v_2v_1v_1v_2 = 1.$$

Varmistetaan se, että pusku todella säilyttää ajan suunnan, tutkimalla muunnosta  $v = L\gamma_0L^\dagger$ . Ajan suunta säilyy, jos vektorin  $v$  komponentin  $\gamma_0$  suuntainen osa on positiivinen. Toisin sanoen muunnos  $L$  säilyttää ajan suunnan, jos jokaiselle ajan-



laatuiselle vektorille  $v$  on voimassa [22]

$$v \cdot L(v) > 0.$$

Kohdan (6.9) avulla ilmaistuna tämä sisätulo on

$$\begin{aligned} v \cdot L(v) &= \langle vLvL^\dagger \rangle \\ &= \langle v(\cosh(\frac{\phi}{2}) + \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|} \sinh(\frac{\phi}{2}))v(\cosh(\frac{\phi}{2}) - \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|} \sinh(\frac{\phi}{2})) \rangle \\ &= \langle (\cosh(\frac{\phi}{2}) - \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|} \sinh(\frac{\phi}{2}))vv(\cosh(\frac{\phi}{2}) - \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|} \sinh(\frac{\phi}{2})) \rangle \\ &= \langle v(\cosh^2(\frac{\phi}{2}) - 2\frac{u \wedge v}{|u \wedge v|} \sinh(\frac{\phi}{2}) \cosh(\frac{\phi}{2}) + \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|} \sinh^2(\frac{\phi}{2})) \rangle \\ &= \cosh(\alpha) > 0, \end{aligned}$$

missä toinen yhtäsuuruus seuraa ominaisuudesta

$$\begin{aligned} (u \wedge v)v &= (u \wedge v) \cdot v + (u \wedge v) \wedge v = (u \wedge v) \cdot v + u \wedge v \wedge v \\ &= (u \wedge v) \cdot v = -v \cdot (u \wedge v) = -v(u \wedge v). \end{aligned}$$

Vastaavasti paikanlaatuinen kierto on

$$U(a) = UaU^\dagger,$$

missä roottori  $U = n_2n_1$  on kahden paikanlaatuisen yksikkövektorin tulo, joka toteuttaa roottoriehdon  $UU^\dagger = 1$ . Roottoria  $L$  vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että roottori  $U$  säilyttää ajan suunnan. Huomautettakoon, että ajan- ja paikanlaatuisten vektorien tulo ei ole roottori, koska se ei säilytä ajan suuntaa. [22]

## 6.6 Aika-avaruuden roottorin jako

Aika-avaruuden roottori voidaan esittää suhteellisen paikanlaatuisten kierron sekä puskun yhdisteenä. Hestenes kutsuu tätä hajotelmaa aika-avaruuden roottorin jaoksi (eng: Spacetime rotor split) [22]. Täydennetään lähteen [8] esitystä. Ajatellaan puskua nopeudesta  $u$  nopeuteen  $v$  eli muunnosta

$$v = LuL^\dagger.$$

Tämä muunnos on bivektorin  $u \wedge v$  määräämän tason kierto. Kohdan (3.15) mukaan bivektorin  $u \wedge v$  ja vektorin  $v$  tulo on

$$\begin{aligned}(u \wedge v)u &= (u \wedge v) \cdot u + (u \wedge v) \wedge u = (u \wedge v) \cdot u + u \wedge v \wedge u \\ &= (u \wedge v) \cdot u = -u \cdot (u \wedge v) = -u(u \wedge v).\end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan osoittaa vektorille  $v$ , joten bivektori  $(u \wedge v)$  antikommutoi vektoreiden  $u$  ja  $v$  kanssa. Näin ollen kohdan (6.9) perusteella pusku kirjoitetaan muotoon

$$v = LuL^\dagger = \left(\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)u \left(\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|} \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) = L^2u,$$

mistä seuraa yhtälö

$$L^2 = vu.$$

Roottori  $L$  voidaan siis esittää vektoreiden  $u$  ja  $v$  avulla seuraavasti

$$L = \frac{1 + vu}{[2(1 + u \cdot v)]^{1/2}} = e^{\frac{\phi}{2} \frac{v \wedge u}{|v \wedge u|}},$$

missä viimeinen muoto esiteltiin edellisen luvun lopussa. Tarkistetaan, että ensimmäinen yhtäsuuruus on oikein laskemalla sen neliö

$$\begin{aligned}\left(\frac{1 + vu}{[2(1 + u \cdot v)]^{1/2}}\right)^2 &= \frac{(1 + vu)(1 + vu)}{2(1 + u \cdot v)} = \frac{1 + 2vuvvu}{2(1 + u \cdot v)} = \frac{vuuv + 2vu + vuvu}{2(1 + u \cdot v)} \\ &= \frac{vu(2 + uv + vu)}{2(1 + u \cdot v)} = \frac{vu(2 + 2(v \cdot u))}{2(1 + u \cdot v)} = vu.\end{aligned}$$

Oletetaan, että mielivaltainen roottori  $R$  määrittää muunnoksen  $v = R\gamma_0 R^\dagger$ . Edellisen perusteella tiedetään, että tämän muunnoksen puskuosa on

$$L = \frac{1 + v\gamma_0}{[2(1 + v \cdot \gamma_0)]^{1/2}} = e^{\frac{\phi}{2} \frac{v \wedge \gamma_0}{|v \wedge \gamma_0|}}.$$

Määritellään uusi roottori  $U$  kaavalla

$$U = L^\dagger R,$$

joten sille on voimassa roottoriehto

$$UU^\dagger = L^\dagger R R^\dagger L = 1.$$

Lisäksi roottorille  $U$  on voimassa

$$U\gamma_0 U^\dagger = L^\dagger v L = \gamma_0,$$

mistä seuraa ehto  $U\gamma_0 = \gamma_0 U$ . Näin ollen kantavektori  $\gamma_0$  ei ole samassa tasossa roottorin  $U$  määrittävän bivektorin kanssa. Näin ollen tämä bivektori koostuu kahdesta paikanlaatuisesta yksikkövektorista, joten roottori  $U$  vastaa paikanlaatuista kiertoa. Roottori  $R$  on voidaan siis ilmaista tulona

$$R = LU.$$

Tämä osittelu puskuun ja kiertoon on aika-avaruuden roottorin jako. On huomattava, että pusku  $L$  ja kierto  $U$  eivät yleisesti kommutoi keskenään.

## 7. YHTEENVETO

Tässä työssä johdateltiin geometriseen algebraan aloittamalla vektoriavaruuden käsitteestä. Tätä tuttua matemaattista rakennetta haluttiin rikastuttaa, jotta sitä voitaisiin hyödyntää monipuolisemmin. Ratkaisu on algebra, joka on vektoriavaruus, jonka alkioiden välille on lisäksi määritelty bilineaarinen tulo-operaatio. Algebran alkioita voidaan siis kertoa keskenään, ja tulokseksi saadaan uusi alkio, joka edelleen kuuluu kyseiseen algebraan. Valitsemalla algebran tulo-operaatioksi Cliffordin geometrinen tulo muodostetaan geometrinen algebran, joka on erityistapaus assosiativisesta algebrasta ja jonka alkioita kutsutaan multivektoreiksi. Se poikkeaa yleisestä assosiativisesta algebrasta siinä, että kahden geometrinen algebran vektorin eli asteen yksi alkion tulo on astetta nolla. Nämä nolla-asteen alkio puolestaan samaistetaan reaalilukujen kanssa.

Tässä työssä geometrinen tulo ilmaistiin Doranin tapaa noudattaen aksiomaattisesti, joista johdettiin tuloksena kahden geometriseen algebran vektorin geometrinen tulo esitys symmetrisen ja antisymmetrisen osan tulona. Symmetrisen osa on tuttu sisätulo, ja antisymmetrisen osa on Grassmannin määrittelemä ulkotulo, joka kuvaa vektoreiden määräämää suunnattua tasoa. Tämä lähestyminen eroaa yleisestä tavasta, jossa geometrinen tulo määritellään sisä- ja ulkotulon avulla. Ulko- ja sisätulo määriteltiin myös yleisemmille geometrinen algebran multivektoreille.

Täsmällinen teorian kehittäminen oli tarpeen tutkittaessa peilausten ja kiertojen esiintymistä geometrinen algebran keinoin. Näiden ortogonaalikuvausten yksityiskohtaisen tarkastelun vuoksi esitettiin lineaarialgebran tuloksia geometrisessa algebrassa, mikä tarjosi niin ikään vertailukohdan perinteisempään ja monelle tutumpaan matriisialgebraan. Monet lineaarialgebran käsitteet saivat näin selvemmän geometrinen merkityksen. Esimerkiksi determinantti kuvaa lineaarikuvauksen aiheuttamaa suuruuden muutosta. Geometrinen algebran avulla peilaukset ja kierrot saatiin yksinkertaiseen ja vastaavaa matriisiesitystä intuitiivisempaan muotoon. Tässä muotoilussa kierrot saadaan operoimalla roottorilla vektoriin, mikä on matemaattisesti kaunista, koska roottorit ja vektorit ovat saman geometrinen algebran alkioita. Matemaattisen kauneuden ohella teorian kehittäminen helpottuu, koska operaattorilla ja operoitavalla on yhteisiä ominaisuuksia.

Työn pääasiallinen tarkoitus oli tarkastella geometrinen algebran ja suppean suhteellisuusteorian yhdistämistä yhdeksi kokonaisuudeksi. Tämä esitystavan teki tun-

netuksi David Hestenes teoksessaan *Space-Time Algebra* [21]. Tässä työssä käsite suomennettiin aika-avaruuden algebraksi. Aika-avaruuden algebra osoittautui mielenkiintoiseksi formalismiksi, ja erityisesti itseisfysiikka lähestymistapana antoi uuden näkökulman Minkowskin aika-avaruuden rakenteeseen ja suppeaan suhteellisuusteoriaan. Suhteellisten suureiden kuten suhteellisen paikan samaistaminen aika-avaruuden algebran bivektoreihin havainnollisti suhteellisuuden riippuvuuden ajasta. Aika-avaruuden algebra tarjoaa myös lisäymmärrystä Paulin ja Diracin matriisien luonteesta. Lorentz-muunnosten geometrinen merkitys havainnollistaa niiden esittäminen tietynlaisina Minkowskin aika-avaruuden peilauksina ja kiertoina, mikä tässä työssä tehtiin käyttäen esitettyä geometrisen algebran tapaa.

Kaiken kaikkiaan aika-avaruuden algebra on melko haastava formalismi, koska se vaatii melko lailla perehtymistä geometriseen algebraan. Työssä on kuitenkin onnistuttu rakentamaan loogisesti etenevä johdatus geometriseen algebraan, joka tosin on lähtökohdaltaan lähes yhtä helppo ellei jopa helpompi kuin matriisilaskenta. Jos yliopistossa aloitettaisiin vaihtoehtoisesti geometrisen algebran opiskelu lineaarialgebran tilalla, esitys olisi varmaankin helppolukuisempi kuin vastaava matriisesitys. Soveltaminen suppeaan suhteellisuusteoriaan tuottaa uuden näkökulman ainakin matemaattiselta kannalta. Tällainen lähestymistapa suppeaan suhteellisuusteoriaan ei mielestäni ole soveltuva ensikertalaiselle, koska fysikaalinen ymmärrys ei geometrisen algebran myötä lisääny ainakaan tämän työn aiheen rajauksessa. Mahdollisesti geometrinen algebra ei näytä todellista Hestenesin ja Doranin lupaamaa voimaansa tämän työn puitteissa, vaan on tutkittava monimutkaisempia suppean suhteellisuusteorian ilmiöitä tai siirryttävä yleiseen suhteellisuusteoriaan.

Jatkokehityksenä voisi olla matemaattisen täsmällisyyden lisääminen Doranin ja Hestenesin esityksiin, jotka ovat erittäin hyviä intuitiivisia kuvauksia ja soveltuvat mainiosti niin vasta-alkajalle kuin edistyneemmällekin lukijalle. Toisaalta on muistettava, että jos geometrinen algebra halutaan soveltaa fysiikkaan, niin ei ole järkevää vaatia täydellistä matemaattista täsmällisyyttä, koska silloin ymmärrettävyys vähenee. Näiden välille olisikin löydettävä tasapaino. Lisäksi suomenkielistä kirjallisuutta on hyvin niukasti saatavilla. Varsinkin soveltamisesta suhteellisuusteoriaan ei vaikuta olevan tehty suomenkielistä työtä. Tämä on selkeä puute, mikä on toisaalta yllättävää sillä Suomessa tutkitaan geometrisia ja Cliffordin algebroja ja toisaalta ymmärrettävää kansainvälisen tutkimuksen vaatiessa tutkimuskieleksi pääsääntöisesti englanninkielen. Erityisen mielenkiintoista olisi saada suomenkielistä tutkimusta geometrisen algebran hyödyntämisestä kvantttimekaniikkaan, mistä on olemassa englanninkielistä kirjallisuutta. Erityisesti olisi mielenkiintoista tutkia, miten geometrinen tai Cliffordin algebra voidaan soveltaa kvanttikenttäteoriaan.

## LÄHTEET

- [1] Apostol, T.M. *Mathematical Analysis*. 2nd ed. 1974, Addison-Wesley.
- [2] Bromborsky, A. *An Introduction to Geometric Algebra and Calculus*. 2013, Army Research Lab. 199 p.
- [3] Callahan, J.J. *The Geometry of Spacetime: An Introduction to Special and General Relativity*. 2000, Springer.
- [4] Chisolm, E. *Geometric Algebra*. ArXiv e-prints (2012).
- [5] Cronström, C. & Lipas, P. *Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan*. Helsinki 2000, Limes. 234, 10 s p.
- [6] Darrigol, O. *The Genesis of the Theory of Relativity*. In: Damour, T. & Darrigol, O. & Rivasseau, V. (ed.). *Einstein, 1905-2005: Poincaré Seminar 2005*. 2006, Springer.
- [7] Doran, C. *Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics*. Dissertation. Cambridge 1994. University of Cambridge.
- [8] Doran, C. & Lasenby, A. *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge 2003, Cambridge University Press.
- [9] Einstein, A. *On the electrodynamics of moving bodies*. *Annalen der Physik* 17(1905)891, pp. 50.
- [10] Einstein, A. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. *Annalen der Physik* 322(1905)10, pp. 891-921.
- [11] Enqvist, K. *Johdatus suhteellisuusteoriaan. 2., korjattu painos* Helsinki 2011, Tähtitieteellinen yhdistys Ursa ry. 109 s.
- [12] Eriksson, S.-L. *MAT-53750 Johdatus geometrisiin algebroidiin ja niiden sovellutuksiin/MAT-53756 Introduction to Geometric Algebras and their Applications*. Tampere 2013, Tampereen teknillinen yliopisto. Opintomoniste.
- [13] Feynman, R.P., Leighton, R.B. & Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics, Volume 1. Mainly Mechanics, Radiation and Heat*. 2nd ed. Reading, MA. 1966, Addison-Wesley.
- [14] Fitzpatrick, P.M. *Advanced calculus*. 2nd ed. ed. Belmont (CA) 2006, Thomson Brooks/Cole. xviii, 590 s p.

- [15] Fraleigh, J.B. A first course in abstract algebra. 6th ed. ed. Reading (MA) 1999, Addison-Wesley. xiii, 536 s p.
- [16] Gallier, J. Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions. arXiv preprint arXiv:0805.0311 (2008).
- [17] Gallier, J. Geometric Methods and Applications : For Computer Science and Engineering. 2011, XXVIII, 680 p p.
- [18] Goodman, R. & Wallach, N.R. Symmetry, representations, and invariants. 2009, Springer.
- [19] Hestenes, D. New foundations for classical mechanics. Dordrecht 1986, Reidel.
- [20] Hestenes, D. Proper particle mechanics. Journal of Mathematical Physics 15(1974) pp. 1768.
- [21] Hestenes, D. Space-Time Algebra. New York 1966, Gordon & Breach.
- [22] Hestenes, D. Spacetime physics with geometric algebra. American Journal Of Physics 71(2003)7, pp. 691-714.
- [23] Hestenes, D. & Sobczyk, G. Clifford algebra to geometric calculus : a unified language for mathematics and physics. Dordrecht 1984, Reidel. 314 p.
- [24] Lounesto, P. Clifford algebras and spinors. 2nd ed. 2001, Cambridge University Press.
- [25] Mansfield, M. & O'Sullivan, C. Understanding Physics. 1998, John Wiley & Sons Ltd. 755 p.
- [26] Naber, G.L. The Geometry of Minkowski Spacetime : An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity. 2012, XVI, 324p.
- [27] Pauli, W. Theory of Relativity. London 1958, Pergamon. 241 p.
- [28] Riihimäki, H. Euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  konforminen malli ja sen Möbiuskuvaukset. Diplomityö. Tampere 2010. Tampereen teknillinen yliopisto, Sähkötekniikan koulutusohjelma.
- [29] Vince, J. Geometric Algebra for Computer Graphics. London 2008, Springer London.
- [30] Vujicic, M. & Sanderson, J. Linear Algebra Thoroughly Explained. Berlin, Heidelberg 2008, Springer-Verlag.

- [31] Woit, P. Quantum Mechanics for Mathematicians: Minkowski Space and the Lorentz Group. 2013, Columbia University. Lecture Notes. 10 p. Saatavissa: <http://www.math.columbia.edu/~woit/QM/lorentz.pdf>