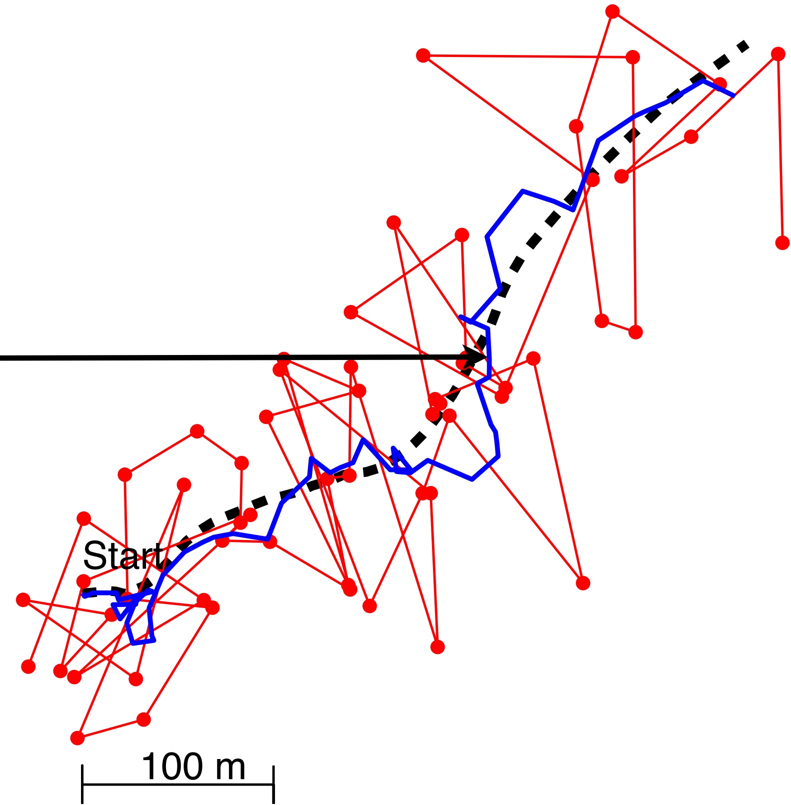
Paikka- ja virhe-estimaatin laskenta-algoritmit

25.8.2011 Paikannusteknologiat nyt ja tulevaisuudessa

Simo Ali-Löytty, TTY, matematiikan laitos

- Mallinnus
- Pienimmän neliösumman menetelmä
  - Lineaarinen
  - Epälineaarinen
  - Suljetun muodon ratkaisuja
- Suodatus (aika-sarja)
  - Bayesin menetelmä
  - Kalmanin suodatin
  - Epälineaariset suodattimet



Hyvä mallinnus on kaiken perusta
(ja vaikein asia)

$$\overset{\text{Mittaukset}}{y} = \overset{\text{Mittausmalli}}{h}(\overset{\text{Tila}}{x}) + \overset{\text{Virhe}}{v}$$

Hyvä mallinnus on kaiken perusta
(ja vaikein asia)

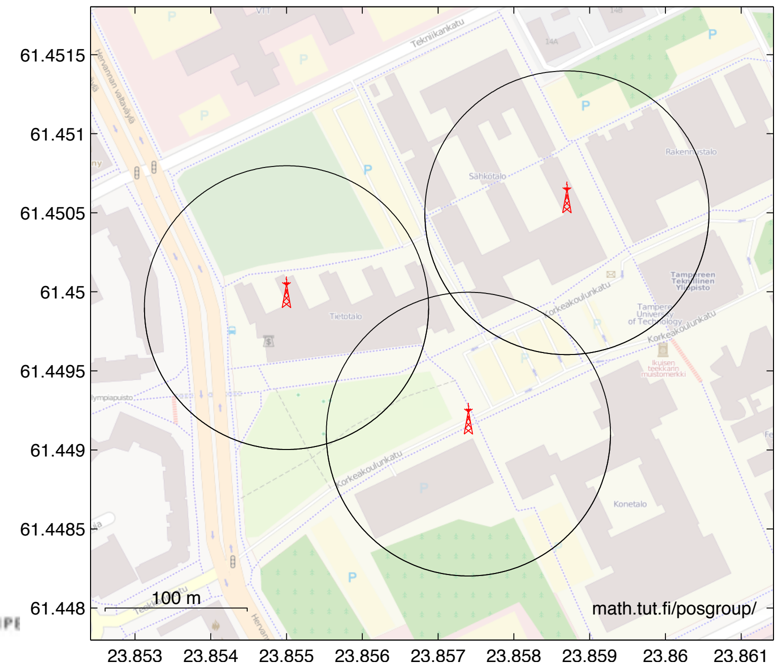
$$\overset{\text{Mittaukset}}{y} = \overset{\text{Mittausmalli}}{h}(\overset{\text{Tila}}{x}) + \overset{\text{Virhe}}{v}$$

Mittaukset: ovat esimerkiksi paikka-, alue-, (pseudo) etäisyys-, nopeus-, kiihtyvyys-, kuva- ym. mittauksia.
Tila: sisältää (yleensä) paikan (2D tai 3D), nopeuden ja muut tarvittavat muuttujat.
Virhe: mallinnetaan usein (Gaussiseksi) satunnaismuuttujaksi.

Hyvä mallinnus on kaiken perusta
(ja vaikein asia)

Mittaukset Mittausmalli Tila Virhe

$$y = h(x) + v$$



$$\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x - x_{bs1}\| \\ \|x - x_{bs2}\| \\ \|x - x_{bs3}\| \end{bmatrix} + v$$

Hyvä mallinnus on kaiken perusta
(ja vaikein asia)

Mittaukset Mittausmalli Tila Virhe

$$y = h(x) + v$$

Lineaarinen

Linearisoituva

Aika-sarja

$$y = \mathrm{H}x + v$$

$$y \approx h(\hat{x}) + h'(\hat{x})(x - \hat{x}) + v$$

$$\begin{aligned} &x_0 \\ x_k &= f_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1} \\ y_k &= h(x_k) + v_k \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän $\mathrm{H}x = y$ pienimmän neliösumman ratkaisu on

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_x \|y - \mathrm{H}x\|^2 = (\mathrm{H}^T\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^T y$$

mikäli matriisin H pystyrivit ovat lineaarisesti riippumattomia eli $\mathrm{H}x = 0 \Rightarrow x = 0$

Yhtälöryhmän $\mathrm{H}x = y$ pienimmän neliösumman ratkaisu on

$$\hat{x} = \mathrm{argmin}_x \|y - \mathrm{H}x\|^2 = (\mathrm{H}^T\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^T y$$

mikäli matriisin H pystyrivit ovat lineaarisesti riippumattomia eli $\mathrm{H}x = 0 \Rightarrow x = 0$

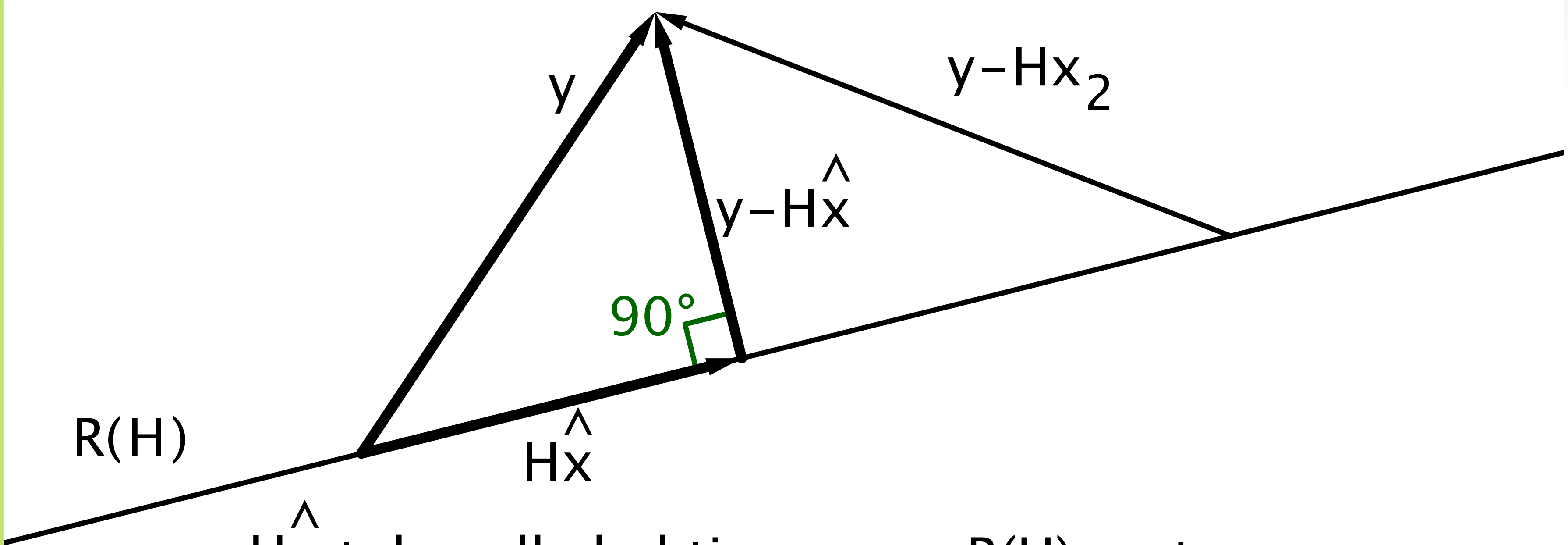
$$\|y - \mathrm{H}x\|^2 = \|y - \mathrm{H}(\mathrm{H}^T\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^T y\|^2 + \|\mathrm{H}[(\mathrm{H}^T\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^T y - x]\|^2$$

Mallinnus

Pienimmän neliösumman menetelmä

Lineaarinen, todistus 2

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_x \|y - \mathrm{H}x\|^2 = (\mathrm{H}^T\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^T y$$



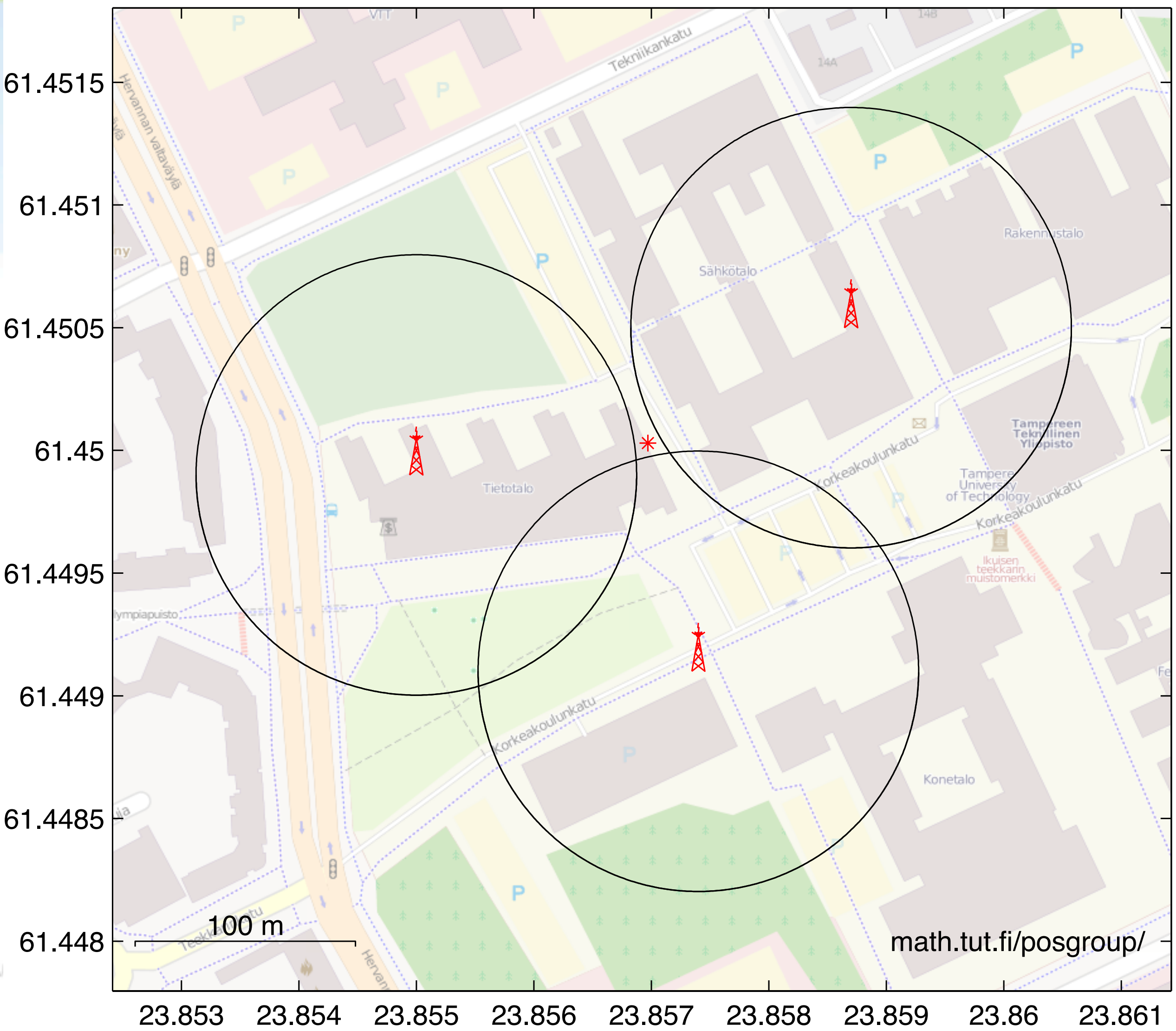
$y-H\hat{x}$ tulee olla kohtisuorassa $R(H)$ vasten, joten sen tulee kuulua matriisin H^T nolla-avaruuteen.

Siis $H^T(y-H\hat{x})=0$ joten $\hat{x}=(H^TH)^{-1}H^Ty$.

Pienimmän neliösumman menetelmä

- ☑ Lineaarinen
- ☐ Epälineaarinen

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_x \|y - h(x)\|^2$$



TAMPEREEN TEKNIL

Pienimmän neliösumman menetelmä

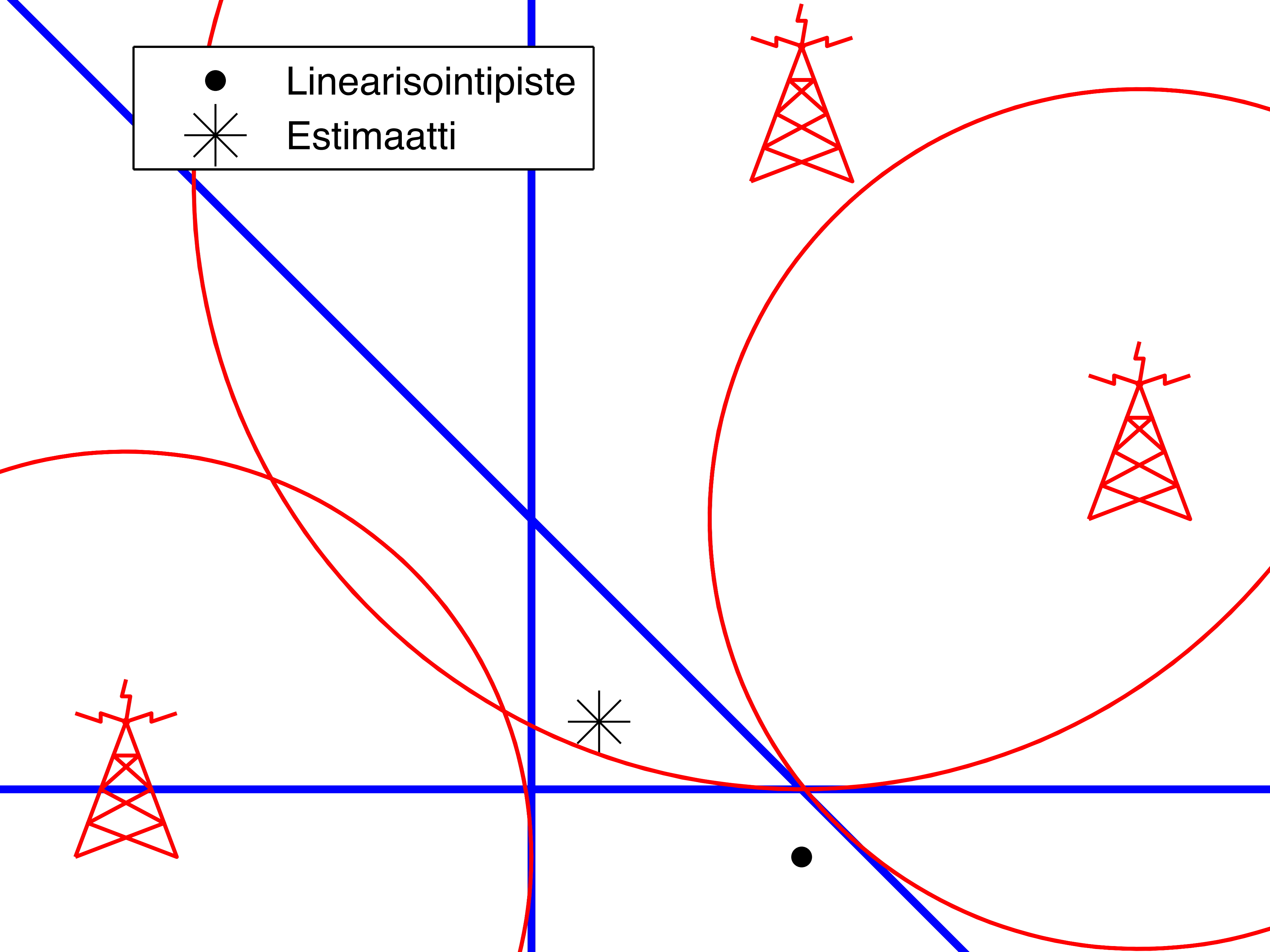
- [x] Lineaarinen
- [ ] Epälineaarinen

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_x \|y - h(x)\|^2$$

Algoritmi 1 Gauss-Newtonin menetelmä (Iterative Least Squares)

1. Valitse alkuarvaus $\mathbf{x}_0$ ja lopetustoleranssi δ. Aseta $k = 0$.
2. Laske $\mathrm{J}_k = \mathbf{h}'(\mathbf{x}_k)$.
3. Askel: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k$, jossa $\Delta\mathbf{x}_k = -\mathrm{J}_k \backslash (\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y})$
4. Jos lopetusehto $\|\Delta\mathbf{x}_k\| < \delta$ ei toteudu, kasvata k:ta ja toista kohdasta 2.

Simo Ali-Löytty, Jussi Collin, and Niilo Sirola.
MAT-45800 Paikannuksen matematiikka. Lecture notes,
Tampere University of Technology, 2010. (Sivu 27)
http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201012101379


Linearisointipiste
Estimaatti

Pienimmän neliösumman menetelmä

- ☑ Lineaarinen
- ☐ Epälineaarinen $\hat{x} = \text{argmin}_x \|\Sigma^{-\frac{1}{2}}(y - h(x))\|^2$

Algoritmi 2 Painotettu Gauss-Newtonin menetelmä (Iterative Weighted Least Squares)

1. Valitse alkuarvaus $\mathbf{x}_0$ ja lopetustoleranssi δ. Lisäksi tarvitaan mittauskovarianssimatriisi $\Sigma = \text{cov}(\mathbf{v})$. Aseta $k = 0$.
2. Laske $J_k = \mathbf{h}'(\mathbf{x}_k)$
3. Askel: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k$, jossa $\Delta\mathbf{x}_k = -(\Sigma^{-\frac{1}{2}} J_k) \backslash \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y})\right)$
4. Jos lopetusehto $\|\Delta\mathbf{x}_k\| < \delta$ ei toteudu, kasvata k:ta ja toista kohdasta 2.

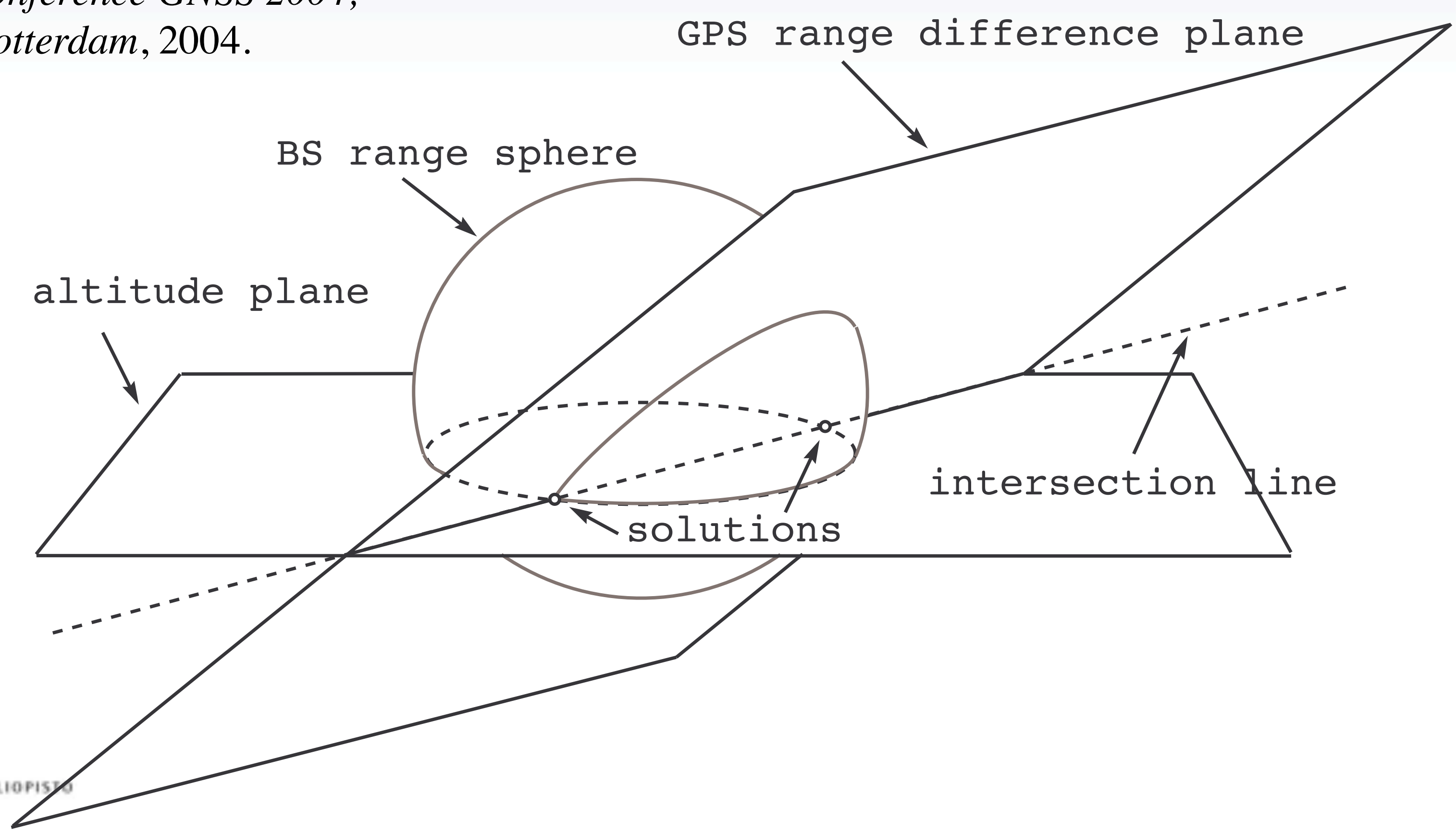
Simo Ali-Löytty, Jussi Collin, and Niilo Sirola.
MAT-45800 Paikannuksen matematiikka. Lecture notes,
Tampere University of Technology, 2010. (Sivu 27)
http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201012101379

- [x] Epälineaarinen
- [ ] Suljetun muodon ratkaisuja

Joissakin tapauksissa on mahdollista löytää suljetun muodon ratkaisu(t) yhtälölle $y = h(x)$

Niilo Sirola. A versatile algorithm for local positioning in closed form. In *Proceedings of the 8th European Navigation Conference GNSS 2004, May 16-19, Rotterdam*, 2004.

Niilo Sirola. *Mathematical Methods for Personal Positioning and Navigation*. PhD thesis, Tampere University of Technology, August 2007.



Usein iteratiivinen menetelmä on yhtä hyvä kuin suljetun muodon menetelmät.

Niilo Sirola. Closed-form algorithms in mobile positioning: Myths and misconceptions. In *Proceedings of the 7th Workshop on Positioning, Navigation and Communication 2010 (WPNC'10)*, pages 38-44, Dresden Germany, March 2010.

Algorithm 6 Regularised Gauss–Newton

1) Choose initial guess x_0 and stopping tolerance δ. Set $k = 0$.
2) Compute

$$J_k(x) = \begin{bmatrix} \frac{s_1 - x}{\|s_1 - x\|}^T \\ \vdots \\ \frac{s_n - x}{\|s_n - x\|}^T \end{bmatrix}$$

3) Set $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$, where

$$\Delta x_k = -(\Sigma^{-\frac{1}{2}} J_k + cI) \backslash \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} (h(x_k) - r) + c(x - x_r) \right)$$

4) If stopping condition $\|\Delta x_k\| < \delta$ is not satisfied and $k \le k_{\max}$, increment k and repeat from Step 2.

VII. Conclusions

Even with this fairly limited choice of problem, with simple noise assumptions chosen to favour closed-form algorithms, iterative least squares algorithm was found to be a competitive solution. A rather rudimentary regularisation term removes the divergence problem previously seen especially if using unrealistic high noise levels.

This study also highlights the importance of using mature and numerically stable subroutines instead of complicated ad-hockery. Especially when coupled with limited testing and

Pienimmän neliösumman menetelmä

Kuinka hyvä ratkaisu on?

$$y = \mathrm{H}x + v$$

Jos $v \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 \mathrm{I})$

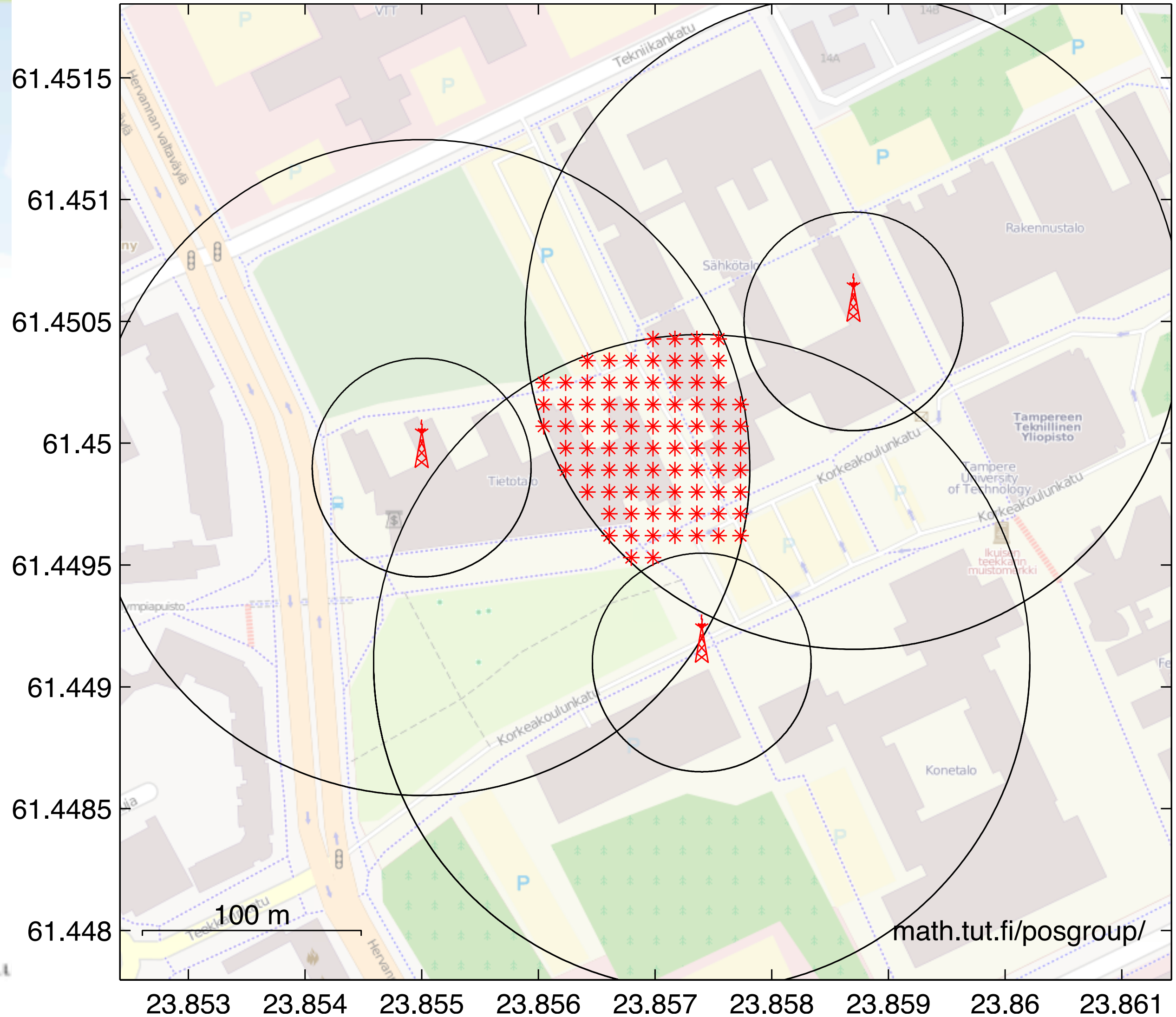
niin $\hat{x} = (\mathrm{H}^T\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^T y \sim \mathrm{N}(x, \sigma^2(\mathrm{H}^T\mathrm{H})^{-1})$

Huom: tässä oletetaan, että tila x ei ole satunnaismuuttuja ja estimaattorin satunnaisuus "johtuu" mittausvirheen satunnaisuudesta

Pienimmän neliösumman menetelmä

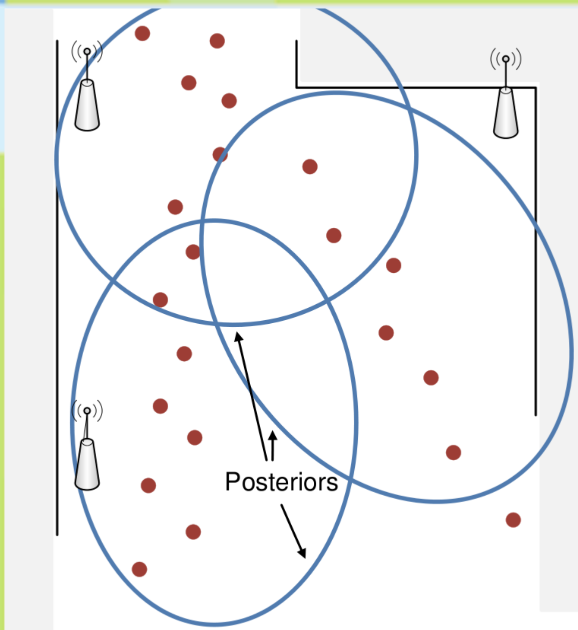
Kuinka hyvä ratkaisu on?

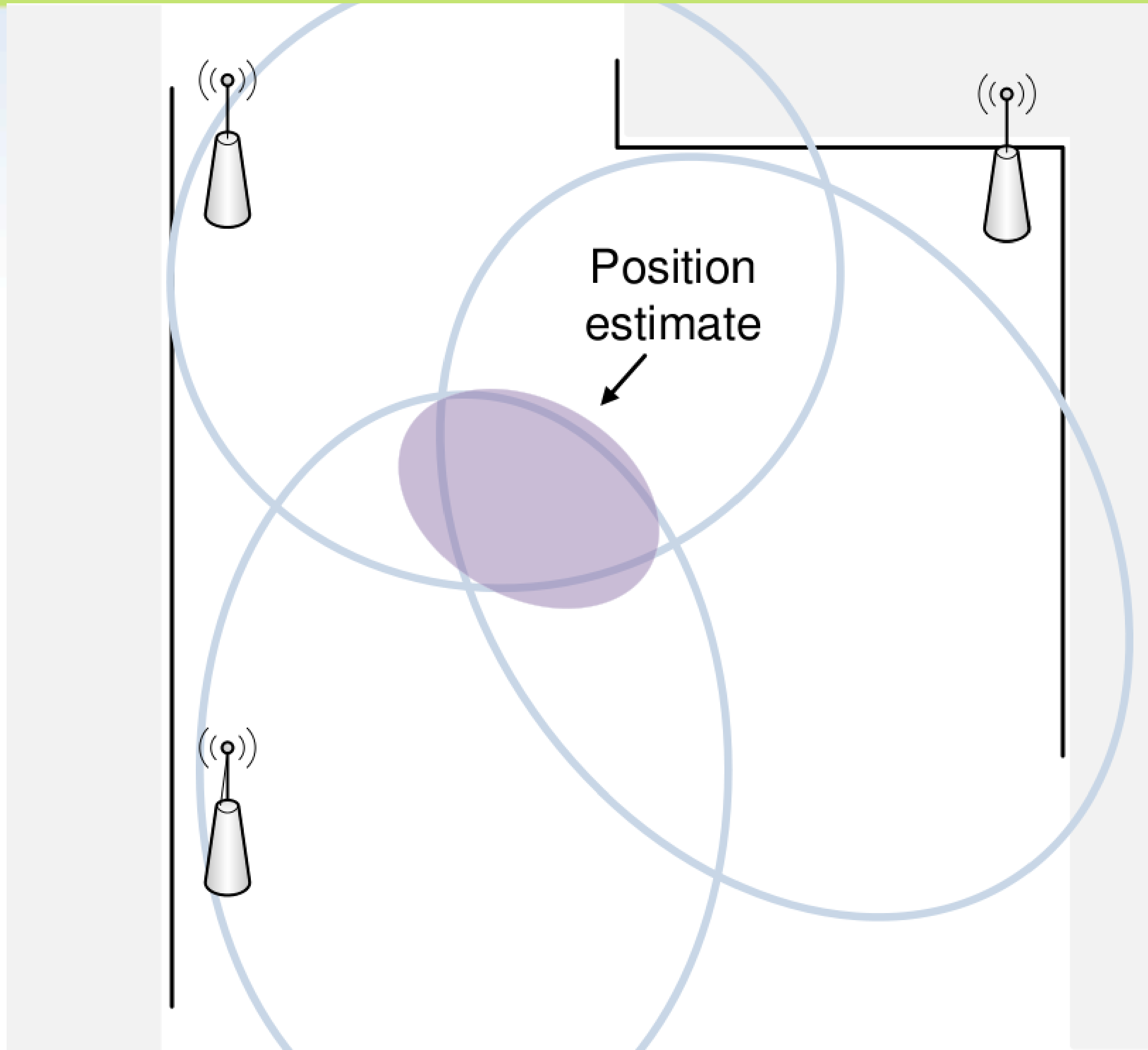
Jos mittausvirheet ovat alle 50 m, niin alue jolla ollaan on:



Kuuluvuusaluepaikannus (WLAN)

Kuuluvuusalueet on estimoitu raportoitujen paikkojen avulla





Laura Koski, Tommi Perälä, and Robert Piché. Indoor positioning using WLAN coverage area estimates. In *2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, Zurich, Switzerland, September 2010. saatavilla: http://math.tut.fi/posgroup/

☑ Pienimmän neliösumman menetelmä

☐ **Bayesin menetelmä**

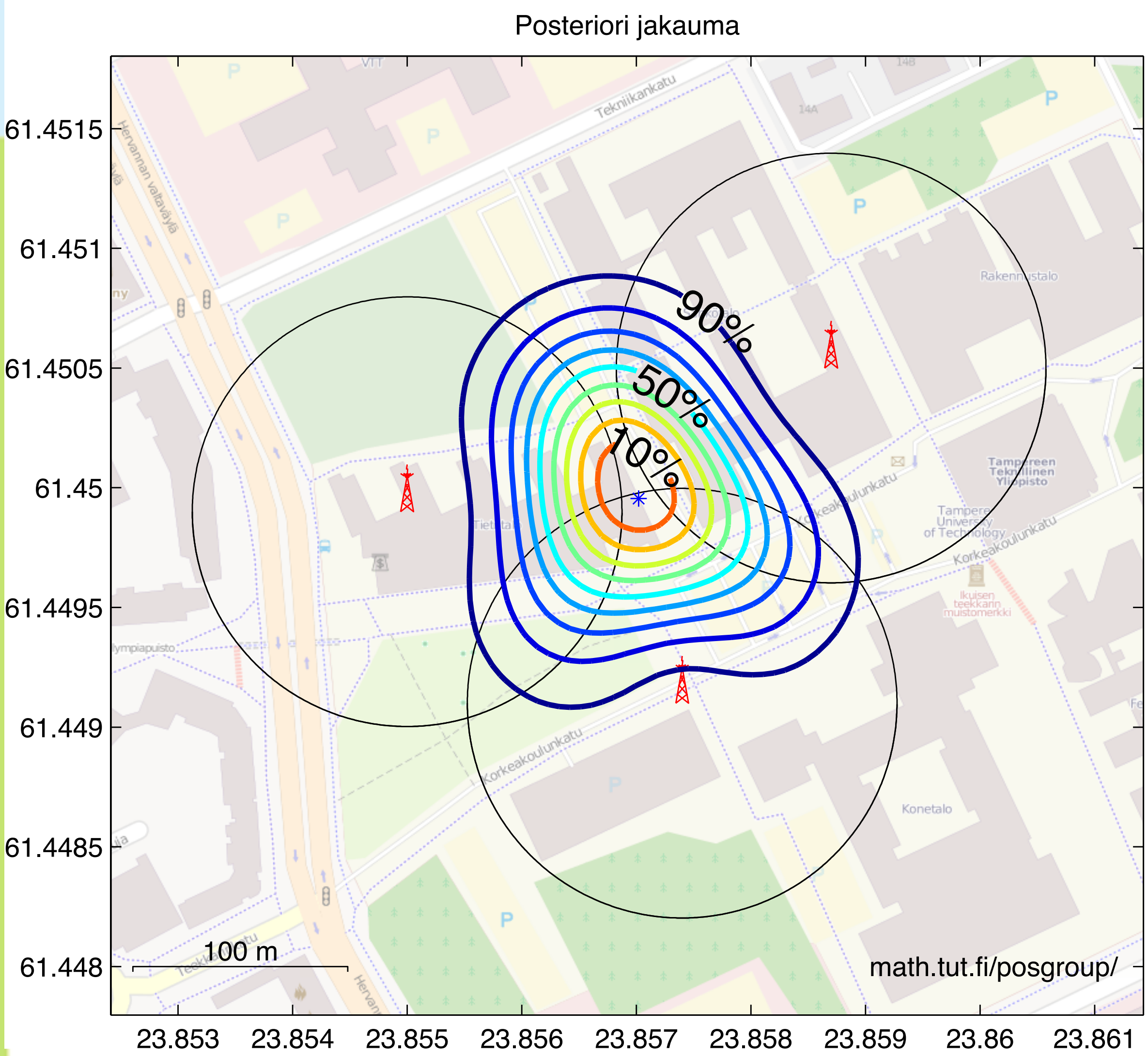
Tilaa mallinnetaan satunnaismuuttujaksi ja ratkaistaan tilan ehdollinen jakauma ehdolla mittaukset

$$p(x|y)$$

☑ Pienimmän neliösumman menetelmä

☐ Bayesin menetelmä

Tilaa mallinnetaan satunnaismuuttujaksi ja ratkaistaan tilan ehdollinen jakauma ehdolla mittaukset



$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$$

Suodatuksessa ongelmana on ratkaista tilan ehdollinen jakauma ehdolla kaikki nykyiset ja aikaisemmat mittaukset.

x_0	Alkutila
$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1}$	Tilamalli
$y_k = h(x_k) + v_k$	Mittausmalli

Suodatin

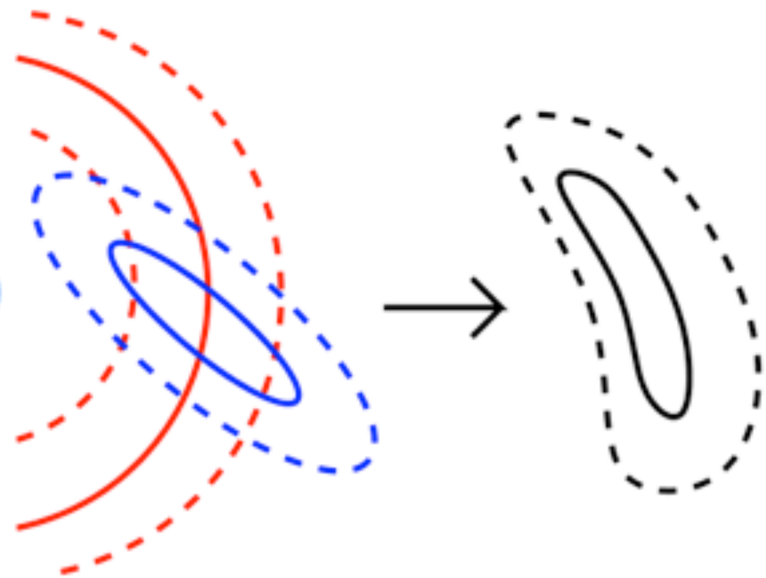
Ennustus-askel:

$$\underbrace{p(x_k \mid y_{1:k-1})}_{\text{priori}} = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{p(x_k \mid x_{k-1})}_{\text{tilamalli}} \underbrace{p(x_{k-1} \mid y_{1:k-1})}_{\text{edellinen posteriori}} \mathrm{d}x_{k-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & x_0 \\ & x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1} \\ & y_k = h(x_k) + v_k \end{aligned}}$$

Päivitys-askel:

$$\underbrace{p(x_k \mid y_{1:k})}_{\text{posteriori}} \propto \underbrace{p(y_k \mid x_k)}_{\text{uskottavuus}} p(x_k \mid y_{1:k-1})$$



☑ Bayesin menetelmä
☐ Kalmanin suodatin

R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, 82 (Series D):35–45, 1960.

Algoritmi B.1 (Kalmanin suodatin).

Alkuehto	$\mathbf{x}_0 \sim \mathrm{N}_{n_x}(x_0, \mathrm{P}_0)$
Tilamalli	$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathrm{N}_{n_x}(\mathbf{0}, \mathrm{Q}_k)$
Mittausmalli	$\mathbf{y}_k = \mathrm{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathrm{N}_{n_y}(\mathbf{0}, \mathrm{R}_k)$
Priori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}$
Priori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{\mathrm{P}}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \mathrm{Q}_{k-1}$
Posteriori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \mathrm{K}_k(y_k - \mathrm{H}_k \hat{x}_k^-)$
Posteriori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k \mathrm{H}_k) \hat{\mathrm{P}}_k^-$
Kalmanin vahvistus	$\mathrm{K}_k = \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T (\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}$

Simo Ali-Löytty. *Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa*. M.Sc. thesis, Tampere University of Technology, December 2004. (Sivu 88)
http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201012141388

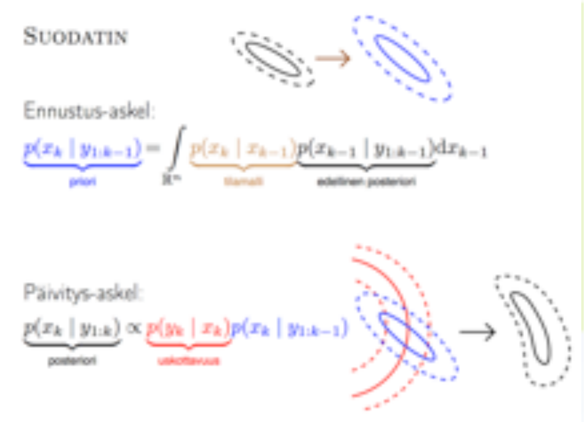
Kalmanin suodatin ratkaisee lineaarisen ongelman

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{y}_k = \mathrm{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

- Deterministisessä mielessä
  - $\operatorname{argmin}_{\hat{\mathbf{x}}_{1:k}} \|\hat{\mathbf{x}}_0 - \hat{x}_0\|^2_{\mathrm{P}_0^{-1}} + \sum_{n=0}^{k-1}\|\mathbf{w}_n\|^2_{\mathrm{Q}_n^{-1}} + \sum_{n=1}^{k}\|\mathbf{v}_n\|^2_{\mathrm{R}_n^{-1}}$
- BLUE-mielessä
  - $\operatorname{argmin}_{\hat{\mathbf{x}}_{1:k}} \mathrm{E}\left((\mathbf{x}_{1:k} - \hat{\mathbf{x}}_{1:k})^T(\mathbf{x}_{1:k} - \hat{\mathbf{x}}_{1:k})\right), \hat{\mathbf{x}}_{1:k} = \mathrm{A}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_{1:k}\end{bmatrix}$
- ”Kaikilla tavoin”, jos virheet Gaussisia! ja riippumattomia.
  - $\operatorname{argmin}_{\hat{\mathbf{x}}_{1:k}} \mathrm{E}\left(L(\mathbf{x}_{1:k} - \hat{\mathbf{x}}_{1:k})\right)$, missä L on ”mielekäs” kustannusfunktio

☑ Kalmanin suodatin

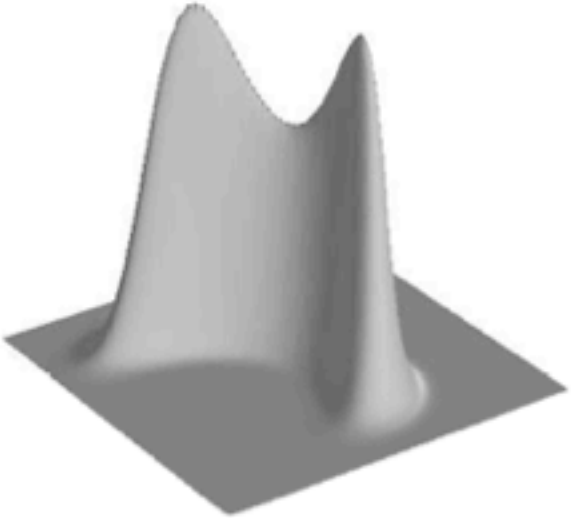
☐ **Epälineaariset suodattimet**

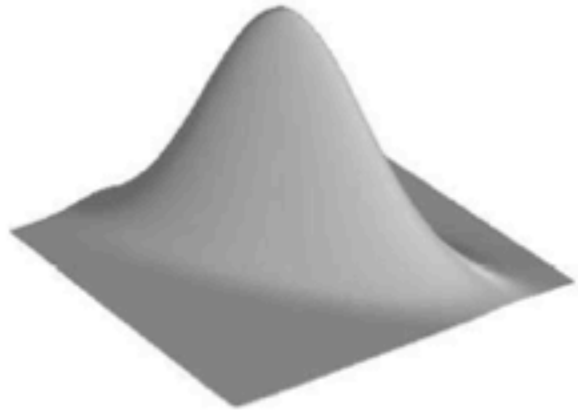


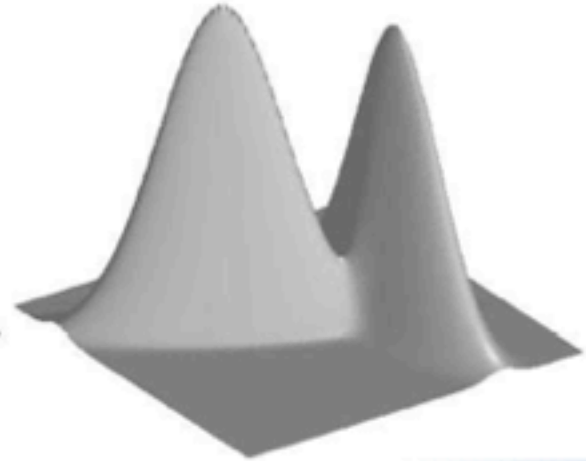
Usein analyyttistä ratkaisua ei ole vaan turvaudutaan approksimaatioihin:

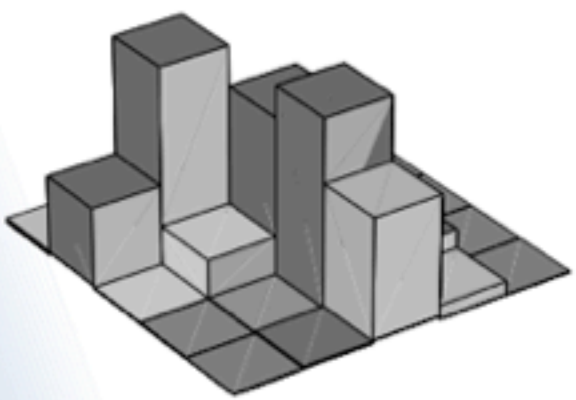
- Yksihuippuiset suodattimet
  - Laajennettu Kalmanin suodatin (EKF)
  - Toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin (EKF2)
  - Hajuton Kalmanin suodatin (UKF)
- Gaussin mikstuurisuodattimet (GMF)
- Piste- ja hilamassasuodattimet (PMF)
- Partikkelisuodattimet (PF)

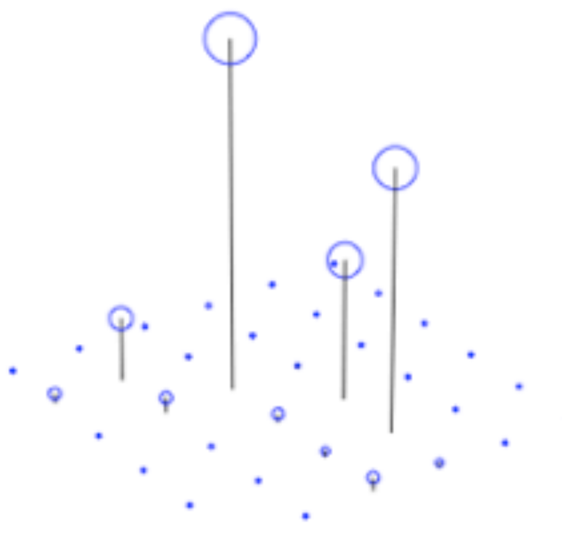
Tiheysfunktio erilaisia approksimaatioita (suodattimia)

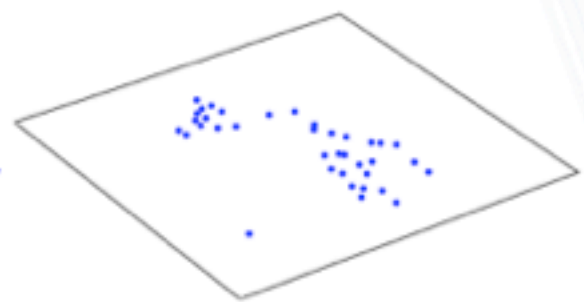

Oikea


Gaussinen


Gaussin Mixture


Hila massa

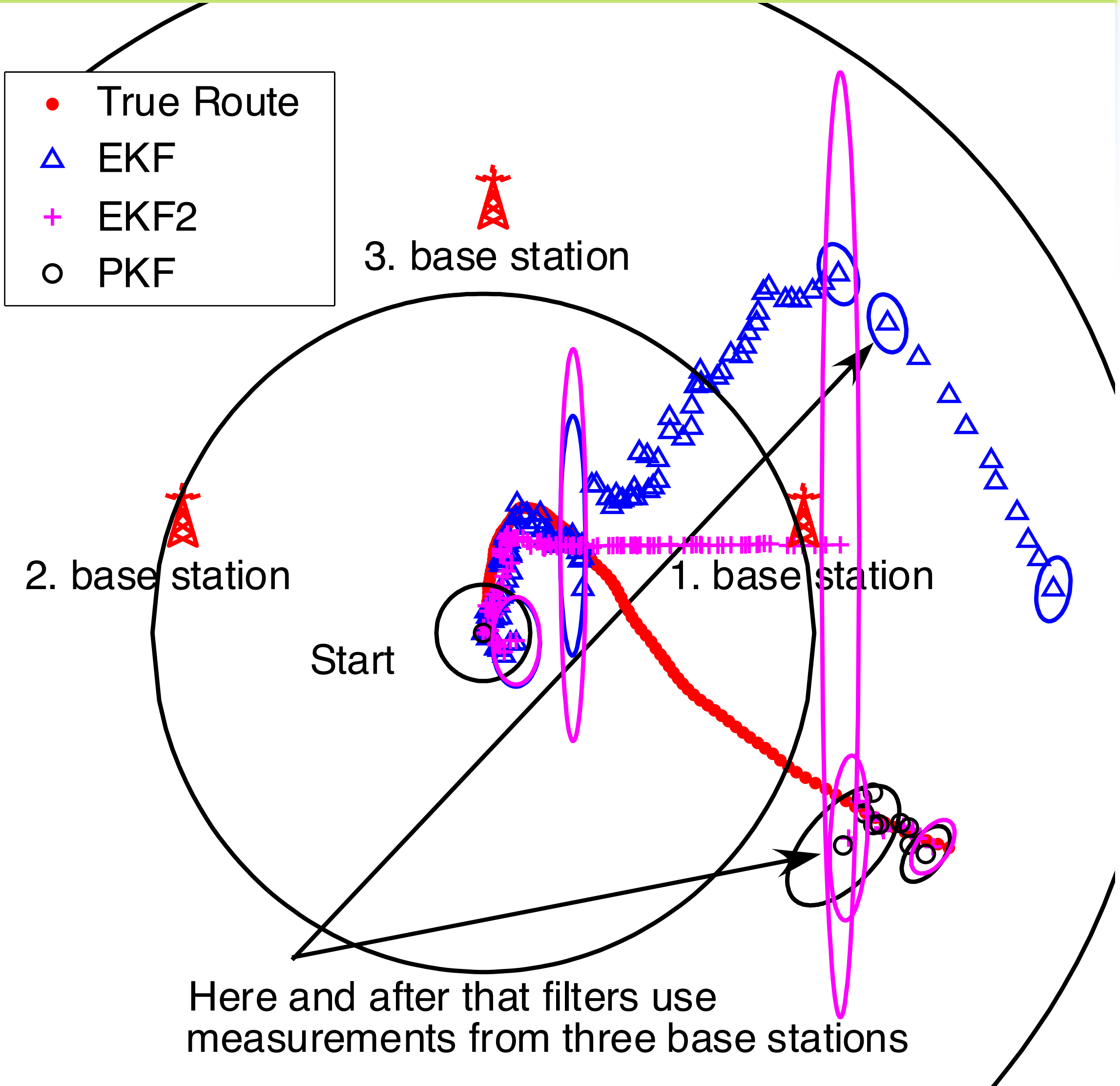

Piste massa

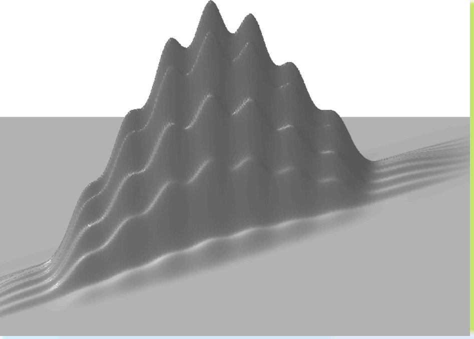

Monte Carlo

Yksihuippuiset suodattimet

Simo Ali-Löytty, Niilo Sirola, and Robert Piché. Consistency of three Kalman filter extensions in hybrid navigation. In *Proceedings of the European Navigation Conference GNSS 2005, July 19-22, 2005, Munchen*, 2005.

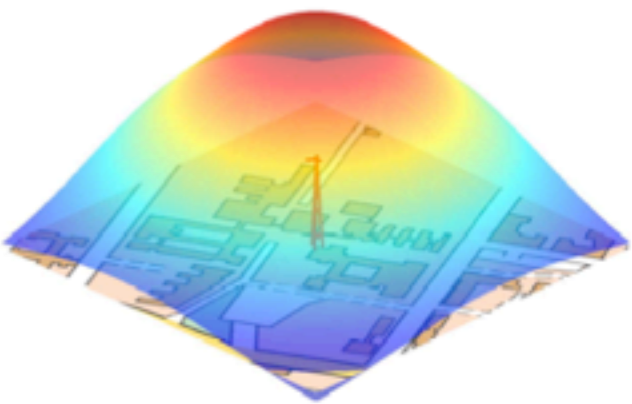
Henri Pesonen and Robert Piché. Cubature-based Kalman filters for positioning. In *Proceedings of the 7th Workshop on Positioning, Navigation and Communication 2010 (WPNC'10)*, pages 45-49, Dresden Germany, March 2010.



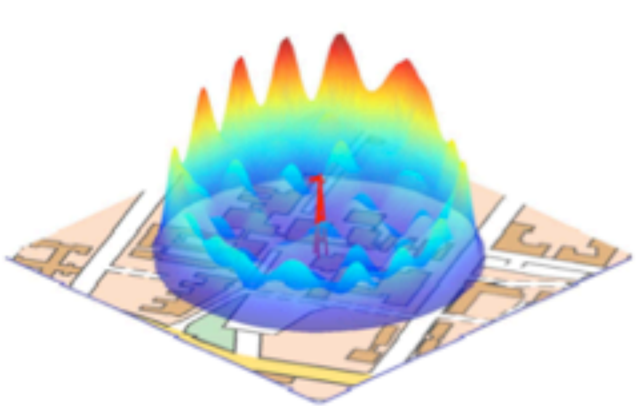


Gaussin mikstuuri-suodattimet (GMF)

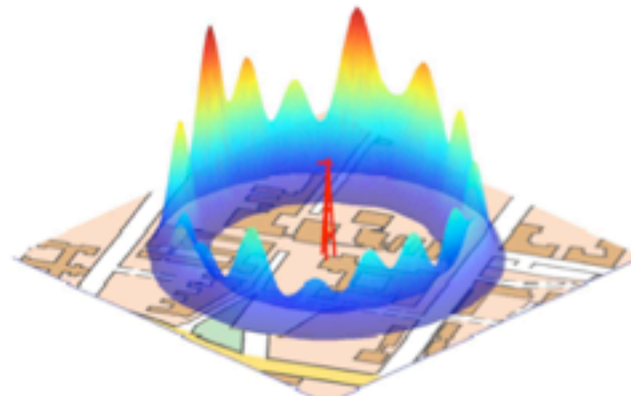
Simo Ali-Löytty. *Gaussian Mixture Filters in Hybrid Positioning*. PhD thesis, Tampere University of Technology, August 2009. http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-200905191055.



Priori

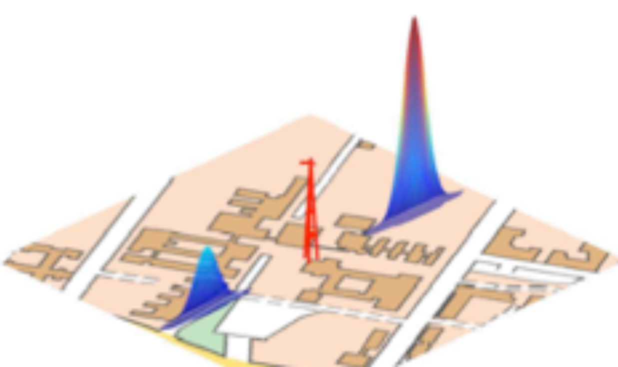


Etäisyysmittaus

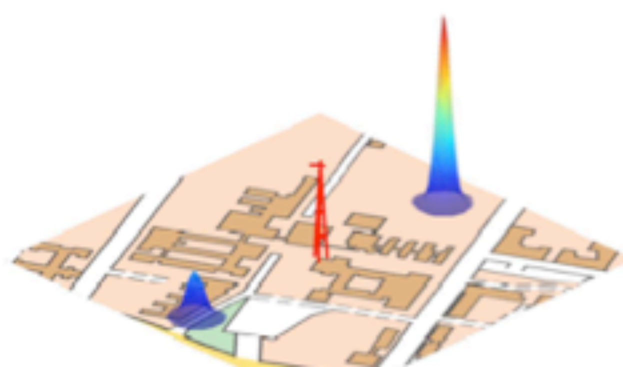


Korkeusmittaus

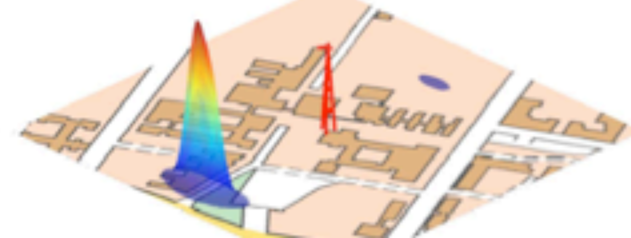
Etäisyysmittaus

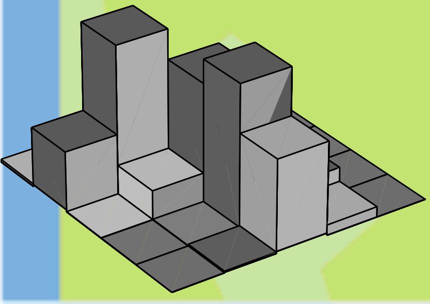


Etäisyysmittaus



Nopeusmittaus

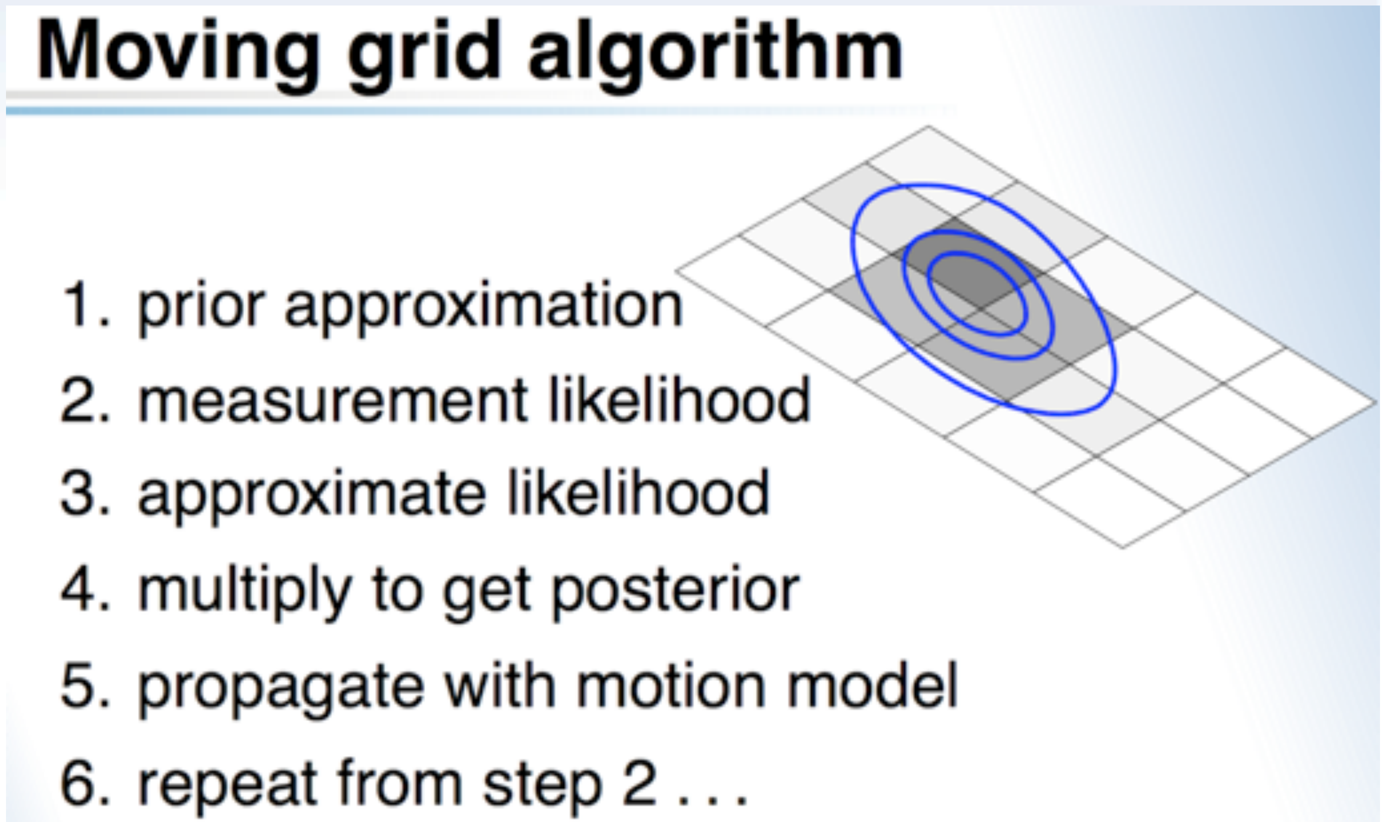




Piste- ja hilamassasuodattimet (PMF)

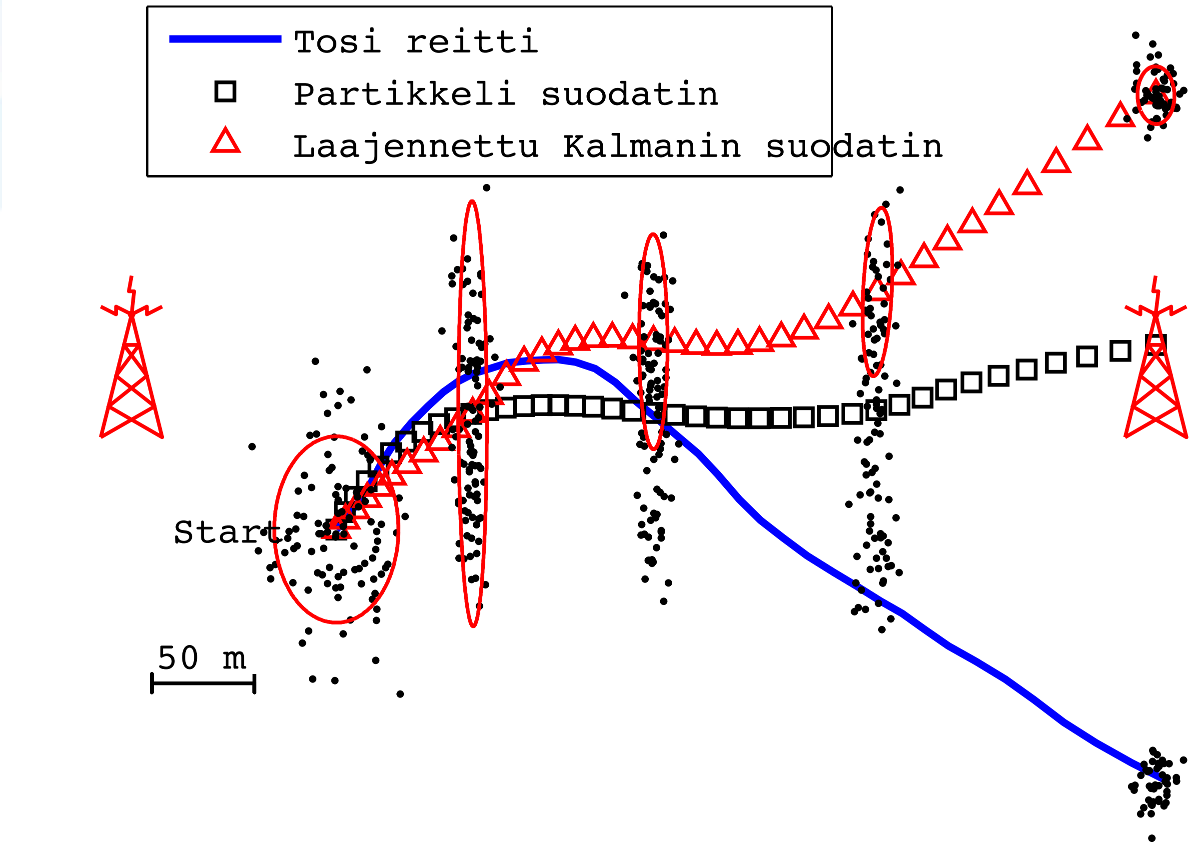
Niilo Sirola and Simo Ali-Löytty. Moving grid filter in hybrid local positioning. In *Proceedings of the ENC 2006*, Manchester, May 7-10, 2006.

Niilo Sirola and Simo Ali-Löytty. Local positioning with parallelepiped moving grid. In *Proceedings of 3rd Workshop on Positioning, Navigation and Communication 2006 (WPNC'06)*, pages 179-188, Hannover, March 16th 2006.



Partikkelisuodattimet (PF)

Kari Heine. *On the Stability of the Discrete Time Filter and the Uniform Convergence of Its Approximations*. PhD thesis, Tampere University of Technology, December 2007.



Simo Ali-Löytty, Jussi Collin, and Niilo Sirola. MAT-45800 Paikannuksen matematiikka. Lecture notes, Tampere University of Technology, 2010.

http://math.tut.fi/posgroup/orbit.html

Compute with Wolfram|Alpha

Mari Seppänen, Tommi Perälä, and Robert Piché. Autonomous satellite orbit prediction. In *2011 International Technical Meeting*, San Diego, California, January 2011.

Orbit prediction

This file contains predicted GPS satellite positions.
Coordinates are in ECEF reference frame and the unit is 1000 m
Time stamp lines begin with "*"

This page was produced at following date and time:
29-Jul-2011 10:18:13 UTC
29-Jul-2011 13:18:13 Eastern European Time (EET)

The initial time (UTC) of prediction and the initial positions of the satellites:

* 2011 7 29 9 30 0.000000
PG02 14444.006488 7916.279971 -20851.290566
PG03 -24222.744819 -9975.169751 4860.166092
PG04 7738.104914 20975.377376 -14287.543592
PG05 23049.030858 705.791189 -13286.657364
PG06 -22750.181623 -13829.344184 2079.806562

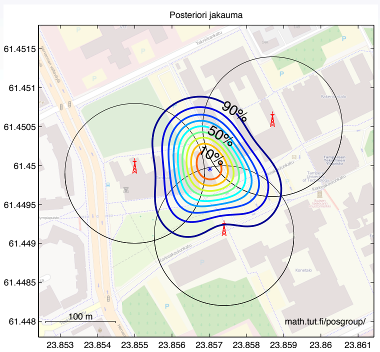
Kiitos mielenkiinnostanne!

Mahdollisuus kysymyksiin

- ☑ Mallinnus
- ☑ Pienimmän neliösumman menetelmä
  - ☑ Lineaarinen
  - ☑ Epälineaarinen
  - ☑ Suljetun muodon ratkaisuja
- ☑ Suodatus (aika-sarja)
  - ☑ Bayesin menetelmä
  - ☑ Kalmanin suodatin
  - ☑ Epälineaariset suodattimet

Mittaukset Mittausmalli Tila Virhe

$$y = h(x) + v$$



Lineaarinen

Linearisoituva

Aika-sarja

$$y = \mathrm{H}x + v$$

$$y \approx h(\hat{x}) + h'(\hat{x})(x - \hat{x}) + v$$

$$\begin{aligned} &x_0 \\ x_k &= f_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1} \\ y_k &= h(x_k) + v_k \end{aligned}$$

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

http://math.tut.fi/posgroup/