TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Miikka Vilander

Kaavan pituuspeli modaalilogiikalle ja tiiviystuloksia

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2016

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
VILANDER, MIIKKA: Kaavan pituuspeli modaalilogiikalle ja tiiviystuloksia
Pro gradu -tutkielma, 42 s.
Matematiikka
Toukokuu 2016

Tiivistelmä

Tämän tutkielman aiheena on kaavan pituuspeli modaalilogiikalle ja sen käyttäminen tiiviystulosten osoittamiseen. Aluksi määritellään modaalilogiikan syntaksi ja semantiikka sekä modaalilogiikkaan ja predikaattilogiikkaan liittyviä perusasioita. Lisäksi määritellään kaavan pituuden käsite molemmille logiikoille. Tämän jälkeen määritellään kaavan pituuspeli modaalilogiikalle. Pelissä on kaksi pelaajaa, I ja II. Osoitetaan, että pelaajalla I on peliin voittostrategia, jos ja vain jos annetut pistemalliluokat voidaan erottaa kaavalla, joka on korkeintaan annetun pituinen.

Kaavan pituuspelin sovelluksena osoitetaan ensin, että julkisen tiedon logiikka on eksponentiaalisesti tiiviimpi kuin modaalilogiikka. Annetaan siis parametrin n suhteen määritelty ominaisuus, joka voidaan ilmaista julkisen tiedon logiikassa luvun n suhteen lineaarisen mittaisella kaavalla, ja osoitetaan kaavan pituuspelin avulla, että saman ominaisuuden ilmaiseminen modaalilogiikassa vaatii kaavan, jonka pituus on vähintään 2^n.

Lopuksi osoitetaan toisena kaavan pituuspelin sovelluksena, että predikaattilogiikka on epäelementaarisesti tiiviimpi kuin modaalilogiikka. Tässä määriteltävä pistemallien ominaisuus on predikaattilogiikassa ilmaistavissa kaavalla, jonka pituus on suuruusluokkaa 2^n ja vastaavan modaalilogiikan kaavan pituuden osoitetaan olevan suurempi kuin eksponenttitorni, jonka korkeus on $n - 1$. Sopivien malliluokkien konstruoinnissa käytetään joukko-opin kumulatiivista hierarkiaa ja pelin aikana säilyvä invariantti löydetään graafiteorian väritysluvun avulla.

Sisältö

1 Johdanto

Logiikan tutkimuksen perustavoitteita on tutkia eri logiikoiden ilmaisuvoimaa. Voidaan kysyä, millaisia ominaisuuksia eli mallien luokkia kukin logiikka pystyy määrittelemään. Uudempi tutkimuksen ala on logiikoiden tiiviys (*succinctness*). Jos jokin ominaisuus voidaan määritellä kahdessa eri logiikassa, voidaan kysyä, kumpi logiikka olisi tehokkaampi valinta ominaisuuden käsittelyyn. Luonnollinen ajatus on, että olisi parempi valita logiikka, jossa ominaisuuden määrittelevä kaava on lyhyempi. Lisäksi oikean valinnan tärkeys korostuu, kun ero tarvittavien kaavojen pituuksissa eri logiikoiden välillä on suuri.

Logiikoiden välisiä tiiviystuloksia todistettaessa pyritään näyttämään, että on olemassa ominaisuus, joka voidaan ilmaista jossakin logiikassa lyhyesti, mutta toisessa logiikassa saman ominaisuuden ilmaisuun vaaditaan huomattavasti pidempi kaava. Usein kyseinen ominaisuus on määritelty parametrin $n \in \mathbb{N}$ suhteen. Tällöin pyritään osoittamaan, esimerkiksi tämän tutkielman luvun 4 tapauksessa, että julkisten ilmoitusten logiikassa tietyn ominaisuuden eli malliluokan määrittelyyn riittää parametrin n suhteen lineaarinen kaava, kun taas modaalilogiikassa vaaditaan eksponentiaalisen mittainen kaava. Täten on olemassa ominaisuuksia, jotka voi ilmaista julkisten ilmoituksen logiikassa eksponentiaalisesti tiiviimmin kuin modaalilogiikassa, ja sanotaan, että julkisen tiedon logiikka on eksponentiaalisesti tiiviimpi kuin modaalilogiiikka.

Tiiviystulosten todistamisessa käytetään malliluokkien erottamisen käsitettä. Kaava φ erottaa malliluokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, jos se on tosi jokaisessa $\mathbb{A}$:n mallissa ja epätosi jokaisessa $\mathbb{B}$:n mallissa. Tällöin siis malliluokka $\mathbb{A}$ sisältyy kaavan φ määrittelemään malliluokkaan ja $\mathbb{B}$ sen komplementtiin. Olennainen havainto on, että jos φ määrittelee jonkin ominaisuuden, niin se erottaa kaikki sellaiset mallijoukot, joista toisen malleilla on ominaisuus ja toisen malleilla ei ole. Siis todistettaessa, että ominaisuuden määrittelyyn tarvitaan pitkä kaava, riittää usein tarkastella erittäin rajoitettujen mallijoukkojen erottamista.

Mallijoukkojen erottamiseen tiiviystodistuksissa on käytetty pääasiassa kahta todistustekniikkaa. Ensimmäinen on Adler-Immerman peli [1], jossa pelaajat I ja II ovat vastakkain. Pelaajalle I annetaan kaksi mallijoukkoa, $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, sekä luonnollinen luku n. Pelaajan I tehtävänä on osoittaa, että malliluokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ voidaan erottaa kaavalla, jonka pituus on korkeintaan n. Pelaaja II puolestaan yrittää näyttää, ettei tämä ole mahdollista. Pelin aikana pelaajat rakentavat malliluokat erottavan kaavan syntaksipuuta. Pelaaja I voittaa, jos valmiissa puussa on korkeintaan n solmua. Muutoin pelaaja II voittaa.

Adler-Immerman pelin valitettava piirre on, että pelaajalla II on helppo, kaikki pelit kattava ja optimaalinen strategia. Riittää valita jokaisella siirrolla maksimaalinen mallijoukko, jolloin puusta tulee maksimaalisen kokoinen. Näin ollen pelaaja II voidaan eliminoida pelistä kokonaan ja määritellä yhden pelaajan peli (ks. esim. [7]). Adler-Immerman peli ei siis ole aito kahden pelaajan peli. Tämä ajatus vielä pidemmälle vietynä johtaa laajennettujen syntaksipuiden menetelmään (*extended syntax trees*).

Grohe ja Schweikardt esittelivät laajennetut syntaksipuut lähteessä [8]. Tässä menetelmässä luovutaan kokonaan pelin ajatuksesta ja tarkastellaan mallijoukot erottavan kaavan syntaksipuuta staattisena objektina. Tällöin todistuksissa argumentoidaan usein siitä, millaisia solmuja kyseessä olevan kaavan ja mallijoukkojen laajennetussa syntaksipuussa on pakko olla ja toisaalta millaisia solmuja siinä ei voi olla. Näin saadaan riittävästi tietoa laajennetun syntaksipuun koosta. Laajennettu syntaksipuu on kuitenkin oleellisesti samanlainen kuin pelaajan I voittostrategian muodostama puu Adler-Immerman pelissä, joten näiden kahden vastaavan menetelmän väliltä voidaan valita tapauskohtaisesti.

Hella ja Väänänen esittelivät artikkelissaan [9] kolmannen näkökulman tiiviystodistuksiin. He määrittelivät lauselogiikalle ja predikaattilogiikalle kaavan pituuspelit, jotka ovat aitoja kahden pelaajan pelejä. Kun pelissä tapahtuu jakosiirto, pelaaja I ilmoittaa paljonko resursseja hän jakaa kullekin puun haaralle, ja pelaaja II puolestaan päättää kumpaan haaraan peliä jatketaan. Näin vältytään käymästä yhdessä pelierässä koko kaavan syntaksipuuta läpi.

Tiiviystuloksen todistaminen helpottuu huomattavasti, jos löydetään kyseessä olevalle kaavan pituuspelille sopiva invariantti. Tässä invariantilla tarkoitetaan jotakin ehtoa, joka takaa pelaajalle II voiton, ja jonka pelaaja II pystyy oikealla strategialla säilyttämään pelaajan I siirroista riippumatta. Hella ja Väänänen ovat hyödyntäneet omissa todistuksissaan lauselogiikalle ja predikaattilogiikalle sopivia invariantteja.

Tässä tutkielmassa esitellään aito kahden pelaajan kaavan pituuspeli modaalilogiikalle. Esimerkkinä pelin käytöstä osoitetaan uudelleen artikkelin [4] tulos julkisen tiedon logiikan tiiviydestä. Tämän tuloksen todistuksessa ei ole löydetty samanlaista ns. globaalia invarianttia kuin Hellan ja Väänäsen työssä, mutta huomataan, että tiettyjen mallien läsnäolo pelitilanteessa toimii lokaalin invariantin tavoin. Lisäksi osoitetaan uusi tulos, jonka mukaan predikaattilogiikka on epäelementaarisesti tiiviimpi kuin modaalilogiikka. Tämän todistukseen tarvittavat malliluokat konstruoidaan joukko-opin kumulatiivisen hierarkian avulla ja globaali invariantti löydetään hyödyntäen graafin väritysluvun käsitettä.

Tämän tutkielman rakenne on seuraavanlainen. Luvussa 2 käsitellään modaalilogiikan ja predikaattilogiikan perusasioita. Määritellään modaalilogiikassa keskeisiä käsitteitä, kuten bisimulaatio ja generoitu alimalli. Lisäksi käydään läpi tunnettuja tuloksia modaalilogiikan ja predikaattilogiikan välisestä yhteydestä ja määritellään tiiviystulosten kannalta tärkeät kaavan pituuden käsitteet näille logiikoille. Peruskäsitteiden määritelmissä seurataan modaalilogiikan suhteen oppikirjaa [2] ja predikaattilogiikan perusteet jätetään lukijan luettavaksi kirjasta [5].

Luvussa 3 määritellään tutkielman päätyökalu, kaavan pituuspeli modaalilogiikalle. Lisäksi osoitetaan pelin toimivan kaavan pituuden suhteen halutulla tavalla. Lopuksi käsitellään yksinkertainen esimerkki pelin kulusta. Peli on uusi muunnos Hellan ja Väänäsen vastaavista peleistä [9].

Luvussa 4 osoitetaan, että julkisen tiedon logiikka on eksponentiaalisesti tiiviimpi kuin modaalilogiikka. Ensin määritellään julkisen tiedon logiikka ja osoitetaan sen ilmaisuvoima samaksi kuin modaalilogiikalla. Seuraavaksi määritellään sopiva ominaisuus ja malliluokat tiiviyden tarkasteluun ja osoitetaan kaavan pituuspelin avulla, että ominaisuuden määrittely modaalilogiikassa vaatii eksponentiaalisen pituisen kaavan. Julkisen tiedon logiikka on määritelty Plazan artikkelissa [11] ja tiiviystulos on todistettu Ditmarschin, Fanin, van der Hoekin ja Ilievin kirjoituksessa [4] laajennettujen syntaksipuiden menetelmällä.

Viimeisessä luvussa 5 osoitetaan, että predikaattilogiikka on epäelementaarisesti tiiviimpi kuin modaalilogiikka. Ensin määritellään tarkasteltava ominaisuus. Sopivat mallijoukot konstruoidaan joukko-opillisin menetelmin ja itse todistuksessa hyödynnetään graafiteoriaa. Joukko-opin käsitteet löytyvät kirjasta [6] ja graafiteorian perusteet kirjasta [12]. Itse tiiviystulos on uusi, joskaan ei odottamaton.

Lukijalta odotetaan predikaattilogiikan peruskäsitteiden hallintaa ja yleistä logiikan alan käsitteiden ja notaation tuntemusta. Modaalilogiikka esitellään syntaksista ja semantiikasta lähtien, mutta sen aiempi tuntemus on tutkielman lukemisessa eduksi. Lisäksi todistuksissa käytettäviä graafiteoreettisia menetelmiä varten oletetaan, että lukija tuntee graafin käsitteen.

Haluan kiittää ennen kaikkea ohjaajaani Lauri Hellaa tuesta ja kärsivällisyydestä pitkällisen työni kanssa. Kiitos kuuluu myös toisena tarkastajana toimineelle Kerkko Luostolle tarkastustyöstä sekä laitoksen käytävillä annetuista vinkeistä. Lopuksi haluan kiittää opiskelutoveriani Raine Rönnholmia työhöni kohdistuneesta kiinnostuksesta ja oikolukutyöstä.

2 Perusteita

Tässä luvussa määritellään modaalilogiikan syntaksi ja semantiikka pistemalleille sekä jatkon kannalta tärkeitä peruskäsitteitä, kuten bisimulaatio ja kaavan pituus. Käsitteiden määrittelyssä noudatetaan pitkälti Blackburnin, de Rijken ja Veneman kirjaa [2] ja joidenkin tunnettujen tulosten todistukset sivuutetaan.

2.1 Modaalilogiikka

Modaalilogiikka perustuu rakenteille, joita kutsutaan *Kripke-malleiksi*. Kripkemalli koostuu perusjoukosta eli universumista W, sen kaksipaikkaisesta saavutettavuusrelaatiosta R ja valuaatiosta V. Universumin alkiot voi ajatella esimerkiksi mahdollisina maailmoina tai asiaintiloina. Tällöin saavutettavuusrelaatio kertoo, mitkä maailmat tai asiaintilat ovat saavutettavissa toisista ja valuaatio kertoo propositioiden totuusarvot maailmoissa. Tämän tutkielman kannalta oleellisia ovat *pistemallit*, joissa Kripke-mallista on yksilöity jokin maailma.

Määritelmä 2.1. Olkoon Φ joukko propositiosymboleja. Jos $\mathcal{M} = (W, R, V)$, missä W on joukko, $R \subseteq W \times W$ ja $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$, niin rakennetta $\mathcal{M}$ kutsutaan (Φ-)*Kripke-malliksi*. Jos lisäksi $w \in W$, niin paria $(\mathcal{M}, w)$ kutsutaan (Φ-)*pistemalliksi*. Käytämme jatkossa joukolle W merkintää $\mathrm{dom}(\mathcal{M})$ ja relaatiolle R merkintää $R^{\mathcal{M}}$.

Olkoon $(\mathcal{M}, w)$ pistemalli. Merkitään

$$\Box(\mathcal{M}, w) := \{(\mathcal{M}, v) \mid wR^{\mathcal{M}}v\}.$$

Jos $\mathbb{A}$ on joukko pistemalleja, merkitään

$$\Box\mathbb{A} := \bigcup_{(\mathcal{M},w)\in\mathbb{A}} \Box(\mathcal{M}, w).$$

Lisäksi, jos $f : \mathbb{A} \to \Box\mathbb{A}$ on sellainen kuvaus, että $f(\mathcal{M}, w) \in \Box(\mathcal{M}, w)$ kaikilla $(\mathcal{M}, w) \in \mathbb{A}$, niin merkitään

$$\Diamond_f \mathbb{A} = f[\mathbb{A}] = \{f(\mathcal{A}, w) \mid (\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}\}.$$

Määritellään myös oma merkintä uusien pistemallien rakentamiselle yhdistämällä joukko pistemalleja yhteiseen juureen.

Merkintä 2.2. Olkoon $\mathbb{A}$ joukko erillisiä pistemalleja ja $w \notin \mathrm{dom}(\mathcal{A})$ kaikilla $(\mathcal{A}, v) \in \mathbb{A}$. Merkitään

$$\triangle\mathbb{A} := (\mathcal{M}, w),$$

missä

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{w\} \cup \bigcup \{\mathrm{dom}(\mathcal{A}) \mid (\mathcal{A}, v) \in \mathbb{A}\},\\
&R^{\mathcal{M}} = \{(w, v) \mid (\mathcal{A}, v) \in \mathbb{A}\} \cup \bigcup \{R^{\mathcal{A}} \mid (\mathcal{A}, v) \in \mathbb{A}\}\\
&\text{ja } V^{\mathcal{M}}(p) = \bigcup \{V^{\mathcal{A}}(p) \mid (\mathcal{A}, v) \in \mathbb{A}\}.
\end{aligned}$$

Kun $p \in \Phi$, niin merkitään $\triangle_p \mathbb{A}$ vastaavaa pistemallia $(\mathcal{M}, w)$, jolle lisäksi $w \in V(p)$. Merkitään myös $\triangle_{\neg p}$ pistemallia $(\mathcal{M}, w)$, jolle $w \notin V(p)$.

Huomaa, että tässä uuden mallin juuri w on mikä tahansa piste, joka ei esiinny liitettävien mallien universumeissa. Piste w voitaisiin määritellä joukko-opillisesti, mutta koska pisteen w identiteetti on epäoleellista, tyydytään tässä tietoon siitä, että minkä tahansa joukon ulkopuolelta löydetään piste. Lisäksi valuaation V käyttäytyminen pisteen w suhteen jätetään melko avoimeksi, sillä merkintää käytetään tässä tutkielmassa vain tapauksissa $\Phi = \emptyset$ ja $\Phi = \{p\}$.

Määritelmä 2.3. Olkoon $\mathcal{M} = (W, R, V)$ Kripke-malli sekä $w \in W$. *Pisteen w generoima mallin $\mathcal{M}$ alipistemalli* on pienin pistemalli $(\mathcal{M}', w)$, missä $\mathcal{M}' = (W', R', V')$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $w \in W' \subseteq W$,
2. kaikilla $u, v \in W$ pätee: jos $u \in W'$ ja uRv, niin $v \in W'$,
3. $R_w = R \cap (W' \times W')$,
4. kaikilla $p \in \Phi$ pätee $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Vastaavasti määritellään pisteen w generoima kehyksen $\mathcal{F}$ alipistekehys.

Pisteen w generoimaan alipistemalliin kuuluvat siis täsmälleen ne mallin $\mathcal{M}$ pisteet, joihin päästään pisteestä w jollakin määrällä saavutettavuusrelaation R askelia. Alipistemallin saavutettavuusrelaatio ja valuaatio saadaan rajoittamalla alkuperäisiä tähän uuteen universumiin.

Määritellään nyt modaalilogiikan syntaksi ja semantiikka pistemalleille.

Määritelmä 2.4. Olkoon Φ joukko propositiosymboleja. *Modaalilogiikan kaavojen joukko* $\mathrm{ML}(\Phi)$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

(1) Vakiot $\top$ ja $\bot$ ovat kaavoja.

(2) Jos $p \in \Phi$, niin p on kaava.

(3) Jos φ on kaava, niin $\neg\varphi$ on kaava.

(4) Jos φ ja ψ ovat kaavoja, niin $(\varphi \vee \psi)$ ja $(\varphi \wedge \psi)$ ovat kaavoja.

(5) Jos φ on kaava, niin $\Diamond\varphi$ ja $\Box\varphi$ ovat kaavoja.

Kaavoja $\top$, $\bot$, p ja $\neg p$, missä $p \in \Phi$, kutsutaan *literaaleiksi.*

Modaalilogiikka on siis tavallinen lauselogiikka laajennettuna modaalioperaattoreilla $\Diamond$ ja $\Box$. Jätetään jatkossa kirjoittamatta sulkeet disjunktion ja konjunktion ympäriltä, kunhan tämä ei aiheuta sekaannusta. Määritellään seuraavaksi miten modaalilogiikan kaavoja tulkitaan pistemalleissa.

Määritelmä 2.5. Olkoon Φ joukko propositiosymboleja. Pistemallien $(\mathcal{M}, w)$, missä $\mathcal{M} = (W, R, V)$, ja ML(Φ)-kaavojen φ välinen totuusrelaatio $(\mathcal{M}, w) \vDash \varphi$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

(1) $(\mathcal{M}, w) \vDash \top$ ja $(\mathcal{M}, w) \nvDash \bot$,

(2) $(\mathcal{M}, w) \vDash p \Leftrightarrow w \in V(p)$,

(3) $(\mathcal{M}, w) \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \nvDash \varphi$,

(4) $(\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi$ tai $(\mathcal{M}, w) \vDash \psi$,

(5) $(\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi$ ja $(\mathcal{M}, w) \vDash \psi$,

(6) $(\mathcal{M}, w) \vDash \Diamond\varphi \Leftrightarrow$ on olemassa sellainen $(\mathcal{M}, v) \in \Box(\mathcal{M}, w)$, että $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$,

(7) $(\mathcal{M}, w) \vDash \Box\varphi \Leftrightarrow$ kaikilla $(\mathcal{M}, v) \in \Box(\mathcal{M}, w)$ pätee $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$.

Lisäksi, jos $\mathbb{A}$ on luokka pistemalleja, niin

$$\mathbb{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \text{ kaikilla } (\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A} \text{ pätee } (\mathcal{A}, w) \vDash \varphi.$$

Modaalioperaattorin $\Diamond$ merkitys on siis, että kaava $\Diamond\varphi$ on totta nykyisessä maailmassa, jos on olemassa toinen maailma, johon nykyisestä maailmasta pääsee, ja jossa on totta φ. Vastaavasti $\Box\varphi$ on totta nykyisessä maailmassa, mikäli kaikissa maailmoissa, joihin nykyisestä maailmasta pääsee, on totta φ.

Määritellään seuraavaksi modaalilogiikan kannalta tärkeä peruskäsite bisimulaatio pistemalleille.

Määritelmä 2.6. Kaksi pistemallia $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{M}', w')$ ovat *bisimilaariset*, merkitään $(\mathcal{M}, w) \leftrightarroweq (\mathcal{M}', w')$, jos on olemassa sellainen kaksipaikkainen joukkojen $\{(\mathcal{M}, v) \mid v \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})\}$ ja $\{(\mathcal{M}', v') \mid v' \in \mathrm{dom}(\mathcal{M}')\}$ välinen relaatio Z, että

(1) $(\mathcal{M}, w)Z(\mathcal{M}', w')$,

(2) jos $(\mathcal{M}, v)Z(\mathcal{M}', v')$, niin kaikilla $p \in \Phi$ pätee $(\mathcal{M}, v) \vDash p \Leftrightarrow (\mathcal{M}', v') \vDash p$,

(3) jos $(\mathcal{M}, v)Z(\mathcal{M}', v')$ ja $(\mathcal{M}, u) \in \Box(\mathcal{M}, v)$, niin on olemassa sellainen $(\mathcal{M}', u') \in \Box(\mathcal{M}', v')$, että $(\mathcal{M}, u)Z(\mathcal{M}', u')$,

(4) jos $(\mathcal{M}, v)Z(\mathcal{M}', v')$ ja $(\mathcal{M}', u') \in \Box(\mathcal{M}', v')$, niin on olemassa sellainen $(\mathcal{M}, u) \in \Box(\mathcal{M}, v)$, että $(\mathcal{M}, u)Z(\mathcal{M}', u')$.

Kaksi pistemallia ovat siis bisimilaariset, jos niiden yksilöidyt pisteet ovat propositioiden suhteen ekvivalentit ja jokaista toisessa mallissa tehtyä siirtymää kohden voidaan tehdä vastaava siirtymä toisessa, joka säilyttää bisimilaarisuuden. Seuraava tunnettu lause selittää bisimulaation tärkeän roolin modaalilogiikan tutkimuksessa.

Lause 2.7. *Jos kaksi Φ-pistemallia $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{M}', w')$ ovat bisimilaariset, niin ne toteuttavat täsmälleen samat* $\mathrm{ML}(\Phi)$ *kaavat.*

Todistus. Ks. [2]. □

Huomautus 2.8. Lauseen 2.7 nojalla voidaan myöhemmissä tarkasteluissa samastaa bisimilaarisia pistemalleja. Esimerkiksi jos $(\mathcal{M}, w) = \bigtriangleup\{(\mathcal{M}', w')\}$, niin selvästi pistemallit $(\mathcal{M}, w')$ ja $(\mathcal{M}', w')$ ovat bisimilaarisia, joten voidaan tarkastella yksinkertaisempaa pistemallia $(\mathcal{M}', w')$.

Myöhempien tarkastelujen kannalta on hyödyllistä määritellä bisimulaatiosta myös rajoitettu versio, n-bisimulaatio.

Määritelmä 2.9. Kaksi pistemallia $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{M}', w')$ ovat *n-bisimilaariset*, $(\mathcal{M}, w) \leftrightarroweq_n (\mathcal{M}', w')$, jos on olemassa sellainen jono kaksipaikkaisia joukkojen $\{(\mathcal{M}, v) \mid v \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})\}$ ja $\{(\mathcal{M}', v') \mid v' \in \mathrm{dom}(\mathcal{M}')\}$ välisiä relaatioita $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0$, että kaikilla $0 \leq i \leq n-1$ pätee

(1) $(\mathcal{M}, w) Z_n (\mathcal{M}', w')$,

(2) jos $(\mathcal{M}, v) Z_0 (\mathcal{M}', v')$, niin kaikilla $p \in \Phi$ pätee $(\mathcal{M}, v) \vDash p \Leftrightarrow (\mathcal{M}', v') \vDash p$,

(3) jos $(\mathcal{M}, v) Z_{i+1} (\mathcal{M}', v')$ ja $(\mathcal{M}, u) \in \Box(\mathcal{M}, v)$, niin on olemassa sellainen $(\mathcal{M}', u') \in \Box(\mathcal{M}', v')$, että $(\mathcal{M}, u) Z_i (\mathcal{M}', u')$,

(4) jos $(\mathcal{M}, v) Z_{i+1} (\mathcal{M}', v')$ ja $(\mathcal{M}', u') \in \Box(\mathcal{M}', v')$, niin on olemassa sellainen $(\mathcal{M}, u) \in \Box(\mathcal{M}, v)$, että $(\mathcal{M}, u) Z_i (\mathcal{M}', u')$.

Pistemallit ovat siis n-bisimilaariset, mikäli mallien siirtymiä voidaan jäljitellä toisessa mallissa n kertaa kuten bisimulaatiossa. Myös n-bisimulaatiolle tunnetaan Lauseen 2.7 vastine. Tätä lausetta varten tarvitaan modaalilogiikan kaavoille modaalisyvyyden käsite, joka kertoo montako sisäkkäistä modaalioperaattoria kaavassa on.

Määritelmä 2.10. Olkoon Φ joukko propositiosymboleja. Kaavan $\varphi \in \mathrm{ML}$ *modaalisyvyys* $\mathrm{md}(\varphi)$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

(1) $\mathrm{md}(\top) = \mathrm{md}(\bot) = \mathrm{md}(p) = 0$, kun $p \in \Phi$,

(2) $\mathrm{md}(\neg\varphi) = \mathrm{md}(\varphi)$,

(3) $\mathrm{md}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{md}(\varphi \wedge \psi) = \max(\mathrm{md}(\varphi), \mathrm{md}(\psi))$,

(4) $\mathrm{md}(\Diamond\varphi) = \mathrm{md}(\Box\varphi) = \mathrm{md}(\varphi) + 1$.

Nyt voidaan kirjoittaa Lauseen 2.7 vastine n-bisimulaatiolle.

Lause 2.11. *Olkoon Φ äärellinen joukko propositiosymboleja. Kaksi Φ-pistemallia $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{M}', w')$ ovat n-bisimilaariset, jos ja vain jos ne toteuttavat samat kaavat $\varphi \in \mathrm{ML}(\Phi)$, joille $\mathrm{md}(\varphi) \leq n$.*

Todistus. Ks. [2]. $\square$

Tehdään vielä yksinkertainen havainto bisimulaation ja n-bisimulaation välisestä yhteydestä.

Lemma 2.12. *Jos pistemallit $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{M}', w')$ ovat bisimilaariset, niin ne ovat n-bisimilaariset kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon Z pistemallien $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{M}', w')$ bisimilaarisuuden osoittava kaksipaikkainen relaatio. Asetetaan $Z_0 = \cdots = Z_n = Z$. Bisimilaarisuuden määritelmän nojalla tämä jono relaatioita toteuttaa n-bisimilaarisuuden määritelmän ehdot, joten $(\mathcal{M}, w) \leftrightarrows_n (\mathcal{M}', w')$. $\square$

2.2 Predikaattilogiikka

Predikaattilogiikan FO syntaksi ja semantiikka määritellään tavalliseen tapaan, ks. esimerkiksi [5]. Olkoon $(\mathcal{M}, w)$ Φ-pistemalli ja olkoon $\tau = R \cup \{U_p \mid p \in \Phi\}$. Olkoon lisäksi $\psi(x) \in \mathrm{FO}(\tau)$. Mallia $\mathcal{M}$ vastaava predikaattilogiikan malli on τ-malli $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$, jolle $\mathrm{dom}(\mathcal{M}_{FO}) = \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, $R^{\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}} = R^{\mathcal{M}}$ ja $U_p^{\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}} = V(p)$. Merkitään $\mathcal{M} \vDash \psi[w/x]$, jos kaava $\psi(x)$ toteutuu mallissa $\mathcal{M}_{\mathrm{FO}}$, kun vapaa muuttuja x on tulkittu pistemallin erotetuksi pisteeksi w.

Jos $\varphi \in \mathrm{ML}$, niin merkitään kaavan φ määrittelemää pistemallien luokkaa

$$\mathrm{Mod}(\varphi) := \{(\mathcal{M}, w) \mid (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi\}.$$

Vastaavasti jos $\psi(x) \in \mathrm{FO}$, niin merkitään

$$\mathrm{Mod}(\psi) := \{(\mathcal{M}, w) \mid \mathcal{M} \vDash \psi[w/x]\}.$$

Kaavat $\varphi \in \mathrm{ML}$ ja $\psi(x) \in \mathrm{FO}$ ovat *ekvivalentit*, $\varphi \equiv \psi$, jos $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\psi)$. Jatkossa samastetaan pistemallien ominaisuudet niiden pistemallien luokkaan, joilla on kyseinen ominaisuus.

Modaalilogiikan ja predikaattilogiikan välistä yhteyttä tutkittaessa tärkeää on bisimulaatioinvariantin ominaisuuden käsite.

Määritelmä 2.13. Pistemallien luokka $\mathbb{A}$ on *bisimulaatioinvariantti*, jos kaikilla pistemalleilla $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{M}', w')$ pätee

$$\text{jos } (\mathcal{M}, w) \leftrightarrows (\mathcal{M}', w') \text{ ja } (\mathcal{M}, w) \in \mathbb{A}, \text{ niin } (\mathcal{M}', w') \in \mathbb{A}.$$

Vastaavasti määritellään n-bisimulaatioinvariantti luokka. Kaava $\psi(x) \in \mathrm{FO}$ on (n-)bisimulaatioinvariantti, jos $\mathrm{Mod}(\psi)$ on (n-)bisimulaatioinvariantti.

Pistemallien ominaisuus on siis bisimulaatioinvariantti, mikäli keskenään bisimilaarisilla malleilla aina joko molemmilla on ominaisuus tai kummallakaan ei ole. Lemman 2.12 seurauksena saadaan, että bisimulaatioinvarianssia tarkasteltaessa riittää tarkastella n-bisimulaatioinvarianssia.

Seuraus 2.14. *Jos kaava $\psi(x) \in \mathrm{FO}$ on n-bisimulaatioinvariantti jollakin $n \in \mathbb{N}$, niin se on myös bisimulaatioinvariantti.*

Todistus. Olkoon ψ n-bisimulaatioinvariantti ja olkoot pistemallit $(\mathcal{M}, w)$ ja $(\mathcal{M}', w')$ bisimilaarisia ja $(\mathcal{M}, w) \in \mathrm{Mod}(\psi)$. Tällöin pistemallit ovat myös n-bisimilaarisia, joten invarianttiuden nojalla saadaan $(\mathcal{M}', w') \in \mathrm{Mod}(\psi)$. Siis ψ on bisimulaatioinvariantti. $\square$

Seuraava tunnettu lause karakterisoi modaalilogiikan ja predikaattilogiikan välisen yhteyden bisimulaation avulla.

Lause 2.15 (van Benthemin karakterisaatiolause)**.** *Predikaattilogiikan kaava $\psi(x)$ on ekvivalentti jonkin modaalilogiikan kaavan kanssa, jos ja vain jos ominaisuus $\mathrm{Mod}(\psi)$ on bisimulaatioinvariantti.*

Todistus. Ks. [2]. $\square$

Lisäksi voidaan todistaa induktiolla, että jokainen modaalilogiikan kaava on ekvivalentti bisimulaatioinvariantin predikaattilogiikan kaavan kanssa. Predikaattilogiikan bisimulaatioinvariantti osa on siis ekvivalentti modaalilogiikan kanssa. Toisaalta on olemassa myös predikaattilogiikan kaavoja, jotka eivät ole bisimulaatioinvariantteja, joten predikaattilogiikan ilmaisuvoima on suurempi kuin modaalilogiikan. Kun luvussa 5 tarkastellaan predikaattilogiikan ja modaalilogiikan välistä tiiviyssuhdetta, on siis valittava tarkasteltavaksi bisimulaatioinvariantti ominaisuus.

2.3 Kaavan pituus

Logiikoiden ilmaisujen tiiviyden tarkastelemiseksi tarvitaan ensin määritelmä kaavan pituudelle. Määritellään modaalilogiikalle ensin kaksi erillistä pituuden mittaa, modaalipituus ja konnektiivipituus.

Määritelmä 2.16. Kaavan $\varphi \in \mathrm{ML}$ *modaalipituus* $\mathrm{ms}(\varphi)$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

(1) Jos φ on literaali, niin $\mathrm{ms}(\varphi) = 0$.

(2) Jos $\varphi = \neg\psi$, niin $\mathrm{ms}(\varphi) = \mathrm{ms}(\psi)$.

(3) Jos $\varphi = \psi \vee \vartheta$ tai $\varphi = \psi \wedge \vartheta$, niin $\mathrm{ms}(\varphi) = \mathrm{ms}(\psi) + \mathrm{ms}(\vartheta)$.

(4) Jos $\varphi = \Diamond\psi$ tai $\varphi = \Box\psi$, niin $\mathrm{ms}(\varphi) = \mathrm{ms}(\psi) + 1$.

Määritelmä 2.17. Kaavan $\varphi \in \mathrm{ML}$ *konnektiivipituus* $\mathrm{cs}(\varphi)$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

(1) Jos φ on literaali, niin $\mathrm{cs}(\varphi) = 0$.

(2) Jos $\varphi = \neg\psi$, niin $\mathrm{cs}(\varphi) = \mathrm{cs}(\psi)$.

(3) Jos $\varphi = \psi \vee \vartheta$ tai $\varphi = \psi \wedge \vartheta$, niin $\mathrm{cs}(\varphi) = \mathrm{cs}(\psi) + \mathrm{cs}(\vartheta) + 1$.

(4) Jos $\varphi = \Diamond\psi$ tai $\varphi = \Box\psi$, niin $\mathrm{cs}(\varphi) = \mathrm{cs}(\psi)$.

Kaavan modaalipituus on siis kaavassa esiintyvien modaalioperaattorien määrä ja konnektiivipituus kaksipaikkaisten konnektiivien määrä. Modaalilogiikan kaavan pituus määritellään näiden kahden summana.

Määritelmä 2.18. Kaavan $\varphi \in \mathrm{ML}$ *pituus* on $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{ms}(\varphi) + \mathrm{cs}(\varphi)$.

Modaalipituuden ja konnektiivipituuden määritelmistä saadaan kaavan pituudelle seuraava rekursiivinen muoto:

(1) Jos φ on literaali, niin $\mathrm{s}(\varphi) = 0$.

(2) Jos $\varphi = \neg\psi$, niin $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi)$.

(3) Jos $\varphi = \psi \vee \vartheta$ tai $\varphi = \psi \wedge \vartheta$, niin $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi) + \mathrm{s}(\vartheta) + 1$.

(4) Jos $\varphi = \Diamond\psi$ tai $\varphi = \Box\psi$, niin $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi) + 1$.

Huomataan, että tämä pituuden määritelmä ei ota huomioon propositiosymboleja eikä negaatioita. Jotta määritelmä antaisi tarpeeksi hyvän arvion kaavan todellisesta pituudesta merkkijonona, käsittelemme vain negaationormaalimuotoisia kaavoja.

Määritelmä 2.19. Kaava $\varphi \in \mathrm{ML}$ on *negaationormaalimuodossa*, jos negaatioita on vain propositiosymbolien edessä kaavassa φ.

Seuraavassa lauseessa osoitamme, että kaikki modaalilogiikan kaavat voidaan muuntaa negaationormaalimuotoon säilyttäen kaavan pituus yllä määritellyssä mielessä.

Lause 2.20. *Jokainen kaava* $\varphi \in \mathrm{ML}$ *voidaan muuntaa negaationormaalimuotoiseksi kaavaksi* $\psi \in \mathrm{ML}$ *siten, että* $\varphi \equiv \psi$ *ja* $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi)$.

Todistus. Kaava φ muunnetaan negaationormaalimuotoon seuraavien tunnettujen ekvivalenssien avulla.

- $\neg\neg\vartheta \equiv \vartheta$
- $\neg(\vartheta \wedge \xi) \equiv \neg\vartheta \vee \neg\xi$
- $\neg(\vartheta \vee \xi) \equiv \neg\vartheta \wedge \neg\xi$

- $\neg\Box\vartheta \equiv \Diamond\neg\vartheta$
- $\neg\Diamond\vartheta \equiv \Box\neg\vartheta$

Osoitetaan, että nämä muunnokset säilyttävät kaavan pituuden:

- $s(\neg\neg\vartheta) = s(\neg\vartheta) = s(\vartheta)$
- $\mathrm{s}(\neg(\vartheta \wedge \xi)) = \mathrm{s}(\vartheta \wedge \xi) = \mathrm{s}(\vartheta) + \mathrm{s}(\xi) + 1 = \mathrm{s}(\neg\vartheta) + \mathrm{s}(\neg\xi) + 1 = \mathrm{s}(\neg\vartheta \vee \neg\xi)$,
- $\mathrm{s}(\neg(\vartheta \vee \xi)) = \mathrm{s}(\vartheta \vee \xi) = \mathrm{s}(\vartheta) + \mathrm{s}(\xi) + 1 = \mathrm{s}(\neg\vartheta) + \mathrm{s}(\neg\xi) + 1 = \mathrm{s}(\neg\vartheta \wedge \neg\xi)$,
- $\mathrm{s}(\neg\Box\vartheta) = \mathrm{s}(\Box\vartheta) = \mathrm{s}(\vartheta) + 1 = \mathrm{s}(\neg\vartheta) + 1 = \mathrm{s}(\Diamond\neg\vartheta)$,
- $\mathrm{s}(\neg\Diamond\vartheta) = \mathrm{s}(\Diamond\vartheta) = \mathrm{s}(\vartheta) + 1 = \mathrm{s}(\neg\vartheta) + 1 = \mathrm{s}(\Box\neg\vartheta)$. □

Tämän lauseen nojalla oletamme jatkossa, että kaikki modaalilogiikan kaavat ovat negaationormaalimuodossa. Tällöin negaatioiden lukumäärä kaavassa on korkeintaan propositiosymbolien esiintymien lukumäärä, joka puolestaan nähdään suoraan kaksipaikkaisten konnektiivien määrästä. Myös sulkeiden lukumäärä voidaan laskea kaksipaikkaisten konnektiivien lukumäärästä. Siis määritelty kaavan pituuden käsite antaa riittävän hyvän arvion kaavan varsinaisesta pituudesta merkkijonona.

Määritellään nyt vastaava kaavan pituuden käsite predikaattilogiikalle.

Määritelmä 2.21. Kaavan $\varphi \in \mathrm{FO}$ *pituus* $\mathrm{s}(\varphi)$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

(1) Jos φ on literaali, niin $\mathrm{s}(\varphi) = 1$.

(2) Jos $\varphi = \neg\psi$, niin $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi)$.

(3) Jos $\varphi = \psi \vee \vartheta$, niin $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi) + \mathrm{s}(\vartheta) + 1$.

(4) Jos $\varphi = \psi \wedge \vartheta$, niin $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi) + \mathrm{s}(\vartheta) + 1$.

(5) Jos $\varphi = \exists x\psi$, niin $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi) + 1$.

(6) Jos $\varphi = \forall x\psi$, niin $\mathrm{s}(\varphi) = \mathrm{s}(\psi) + 1$.

Huomattakoon, että yleisessä tapauksessa tämän määritelmän mukainen predikaattilogiikan kaavan pituus voi erota mielivaltaisen paljon kaavan pituudesta merkkijonona, sillä vaikkapa kaavan $f(f(x)) = x$ pituus on tässä määritelty nollaksi. Kuitenkin luvun 5 tarkasteluissa aakkosto koostuu vain yhdestä kaksipaikkaisesta relaatiosymbolista, joten tämä ongelma poistuu. Lisäksi vastaavasti kuin modaalilogiikassa, negaatiot voidaan työntää literaalien eteen ja niitä ei siis tarvitse erikseen laskea.

Määritellään vielä tutkielman pisimpien kaavojen tarkastelua varten eksponenttitornifunktio tower.

Määritelmä 2.22. Määritellään funktio tower : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiolla seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathrm{tower}(0) &= 1 \\ \mathrm{tower}(n+1) &= 2^{\mathrm{tower}(n)}\end{aligned}$$

Käytämme jatkossa myös merkintää log tarkoittamaan kaksikantaista logaritmifunktiota.

2.4 Pistemalliluokkien erottaminen ja tiiviys

Seuraavan luvun kaavan pituuspelin määritelmä perustuu pistemallien luokkien erottamiselle kaavoilla.

Määritelmä 2.23. Olkoot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ pistemallien luokkia.

(a) Sanotaan, että kaava $\varphi \in \mathrm{ML}$ *erottaa* luokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, jos $\mathbb{A} \vDash \varphi$ ja $\mathbb{B} \vDash \neg\varphi$.

(b) Vastaavasti kaava $\psi(x) \in \mathrm{FO}$ erottaa luokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, jos kaikilla $(\mathcal{M}, w) \in \mathbb{A}$ pätee $\mathcal{M} \vDash \psi[w/x]$ ja kaikilla $(\mathcal{M}, w) \in \mathbb{B}$ pätee $\mathcal{M} \vDash \neg\psi[w/x]$.

Toisin sanoen kaava $\varphi \in \mathrm{ML}$ erottaa luokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ mikäli $\mathbb{A} \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$ ja $\mathbb{B} \subseteq \overline{\mathrm{Mod}(\varphi)}$, missä $\overline{\mathrm{Mod}(\varphi)} = \{(\mathcal{M}, w) \mid (\mathcal{M}, w) \nvDash \varphi\}$. Sama pätee kaavalle $\psi(x) \in \mathrm{FO}$. Täten, jos luokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ ovat jokin pistemallien ominaisuus ja sen komplementti, niin näiden luokkien erottaminen kaavalla on sama asia kuin ominaisuuden $\mathbb{A}$ määrittely kaavalla.

Seuraavassa lemmassa huomataan odotetusti, että ekvivalentit kaavat erottavat samat pistemallien luokat.

Lemma 2.24. *Olkoot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ pistemallien luokkia. Jos kaavat $\varphi \in \mathrm{ML}$ ja $\psi(x) \in \mathrm{FO}$ ovat ekvivalentit, niin φ erottaa luokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, jos ja vain jos ψ erottaa luokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$.*

Todistus. Koska kaavat ovat ekvivalentit, niin $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\psi)$, joten

$$\mathbb{A} \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi) \text{ ja } \mathbb{B} \subseteq \overline{\mathrm{Mod}(\varphi)} \Leftrightarrow \mathbb{A} \subseteq \mathrm{Mod}(\psi) \text{ ja } \mathbb{B} \subseteq \overline{\mathrm{Mod}(\psi)}. \qquad \square$$

Todistetaan sitten, että jos luokissa on propositioiden suhteen ekvivalentit eli 0-bisimilaariset pistemallit, niin luokkia ei voi erottaa millään literaalilla.

Lemma 2.25. *Olkoot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ pistemallien luokkia. Jos on olemassa pistemallit $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$ ja $(\mathcal{B}, v) \in \mathbb{B}$, jotka ovat propositioiden suhteen ekvivalentit, niin mikään literaali $\varphi \in \mathrm{ML}$ ei erota luokkia $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$.*

Todistus. Koska $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ ovat epätyhjiä, literaalit $\top$ ja $\bot$ eivät erota luokkia $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$. Jos φ on propositiosymboli, niin oletuksen nojalla $(\mathcal{A}, w) \vDash \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{B}, v) \vDash \varphi$. Jos taas φ on proposition p negaatio, niin

$$(\mathcal{A}, w) \vDash \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}, w) \nvDash p \Leftrightarrow (\mathcal{B}, v) \nvDash p \Leftrightarrow (\mathcal{B}, v) \vDash \varphi.$$

Jos siis $\mathbb{A} \vDash \varphi$, niin $(\mathcal{A}, w) \vDash \varphi$, joten $(\mathcal{B}, v) \vDash \varphi$ ja $\mathbb{B} \nvDash \neg\varphi$. Siis φ ei erota luokkia $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$. $\square$

Esitellään lopuksi mitä tarkoitetaan, kun sanotaan jonkin logiikan olevan tiiviimpi kuin toinen logiikka. Seurataan tässä lähteen [10] määritelmää pienin muutoksin. Logiikka L_1 on *tiiviimpi* kuin logiikka L_2, jos on olemassa sellainen parametrin $n \in \mathbb{N}$ suhteen määritelty jono malliluokkia eli ominaisuuksia $\mathbb{O}_n$, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ominaisuus $\mathbb{O}_n$ voidaan määritellä logiikassa L_1 lyhyemmällä kaavalla kuin logiikassa L_2. Tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että kyseinen jono ominaisuuksia ja niiden komplementit voidaan erottaa logiikassa L_1 lyhyemmillä kaavoilla kuin logiikassa L_2. Tässä tutkielmassa esiintyvät logiikat ovat modaalilogiikka, predikaattilogiikka ja julkisen tiedon logiikka.

Mikäli tämä erottavien kaavojen välinen pituusero on parametrin n suhteen suuruusluokkaa 2^n, sanotaan, että logiikka L_1 on *eksponentiaalisesti tiiviimpi* kuin L_2. Jos taas ero on niin suuri, ettei sitä voida ilmaista elementaaristen funktioiden avulla niin sanotaan, että L_1 on *epäelementaarisesti tiiviimpi* kuin L_2. Elementaarisia funktioita ovat seuraajafunktio, summa, erotus ja tulo sekä näistä yhdistetyllä funktiolla, projektioilla, rajoitetuilla summilla ja rajoitetuilla tuloilla saatavat funktiot [3]. Tässä tutkielmassa esiintyvä esimerkki funktiosta, joka kasvaa nopeammin kuin mikään elementaarinen funktio, on eksponenttitornifunktio tower. Käytännössä merkityksellisiä ovat juuri eksponentiaaliset tai vielä suuremmat erot logiikoiden tiiviydessä. Huomataan myös, että tiiviyden määritelmä riippuu kaavan pituuden määritelmistä, jotka on syytä valita keskenään yhteensopiviksi eri logiikoille.

Tiiviyden käsitteessä huomattavaa on, että koska riittää löytää yksi jono ominaisuuksia, joka on tiiviimmin ilmaistavissa yhdessä logiikassa kuin toisessa, niin on mahdollista, että kaksi logiikkaa ovat molemmat toisiaan tiiviimpiä. Tällainen tapaus on esimerkiksi lähteessä [10] yhdisteellä ja kvantifioinnilla laajennettujen multimodaalilogiikkojen välillä. Tällöin valittaessa tehokkainta logiikkaa sovellusta varten on otettava huomioon sovelluksessa käsiteltävien ominaisuuksien luonne.

3 Kaavan pituuspeli

Tässä luvussa sovelletaan Hellan ja Väänäsen [9] määrittelemä kaavan pituuspeli modaalilogiikalle ja osoitetaan, että se karakterisoi pistemallien joukkojen erottamisen rajoitetun pituisilla modaalilogiikan kaavoilla. Kaavan pituuspeli on tutkielman päätyökalu, jota käytetään luvuissa 4 ja 5.

3.1 Pelin määritelmä

Kaavan pituuspelissä on kaksi pelaajaa, pelaaja I ja pelaaja II. Pelaaja I yrittää osoittaa, että annetut pistemallien joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ voidaan erottaa kaavalla, jonka modaalipituus on korkeintaan m ja konnektiivipituus korkeintaan k. Pelaaja II yrittää osoittaa, että näin ei ole.

Pelaajalla I on käytössään kaksi resurssia, modaaliaste m ja konnektiiviaste k. Modaaliastetta kuluu seuraajasiirroissa ja konnektiiviastetta jakosiirroissa.

Jakosiirrossa pelaaja I jakaa toisen pistemallien joukoista kahteen osaan ja jakaa jäljellä olevat resurssinsa näiden osien kesken. Pelaaja II saa valita kummasta muodostetusta tilanteesta peliä jatketaan.

Seuraajasiirrossa pelaaja I valitsee toisen joukon jokaiselle pistemallille yhden seuraajan ja muodostaa näistä uuden joukon. Vastakkaisen joukon pistemallien kaikki seuraajat tulevat mukaan jatkotilanteeseen.

Peli loppuu pelaajan I voittoon, kun pistemallien joukot voidaan erottaa jollakin literaalilla tai pelaajan II voittoon, kun pelaajalta I loppuvat resurssit. Määritellään nyt kaavan pituuspeli $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ (engl. *formula size game*) täsmällisesti.

Määritelmä 3.1. Olkoot $\mathbb{A}_0$ ja $\mathbb{B}_0$ pistemallien joukkoja ja $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$. Joukkojen $\mathbb{A}_0$ ja $\mathbb{B}_0$ välisessä kaavan pituuspelissä $\mathrm{FS}_{m_0,k_0}(\mathbb{A}_0, \mathbb{B}_0)$ on kaksi pelaajaa, pelaaja I ja pelaaja II. Luku m on pelin modaaliaste ja luku k on pelin konnektiiviaste. Pelin alkutilanne on $(m_0, k_0, \mathbb{A}_0, \mathbb{B}_0)$. Olkoon $(m, k, \mathbb{A}, \mathbb{B})$ pelin $\mathrm{FS}_{m_0,k_0}(\mathbb{A}_0, \mathbb{B}_0)$ tilanne. Pelaaja I jatkaa peliä yhdellä seuraavista neljästä siirrosta:

- *Vasen jakosiirto:* Pelaaja I valitsee sellaiset luvut $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, että $m_1 + m_2 = m$ ja $k_1 + k_2 + 1 = k$ ja sellaiset joukot $\mathbb{A}_1$ ja $\mathbb{A}_2$, että $\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}$. Pelaaja II valitsee, jatkuuko peli tilanteesta $(m_1, k_1, \mathbb{A}_1, \mathbb{B})$ vai tilanteesta $(m_2, k_2, \mathbb{A}_2, \mathbb{B})$.

- *Oikea jakosiirto:* Pelaaja I valitsee sellaiset luvut $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, että $m_1+m_2 = m$ ja $k_1+k_2+1 = k$ ja sellaiset joukot $\mathbb{B}_1$ ja $\mathbb{B}_2$, että $\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}$. Pelaaja II valitsee, jatkuuko peli tilanteesta $(m_1, k_1, \mathbb{A}, \mathbb{B}_1)$ vai tilanteesta $(m_2, k_2, \mathbb{A}, \mathbb{B}_2)$.

- *Vasen seuraajasiirto:* Pelaaja I valitsee sellaisen funktion $f : \mathbb{A} \to \Box\mathbb{A}$, että $f(\mathcal{A}, w) \in \Box(\mathcal{A}, w)$ jokaisella $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$, ja peli jatkuu tilanteesta

$(m-1, k, \Diamond_f \mathbb{A}, \Box\mathbb{B})$. (Jos $\Box(\mathcal{A}, w) = \emptyset$ jollakin $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$, niin pelaaja I ei voi tehdä tätä siirtoa.)

- *Oikea seuraajasiirto:* Pelaaja I valitsee sellaisen funktion $g : \mathbb{B} \to \Box\mathbb{B}$, että $g(\mathcal{B}, w) \in \Box(\mathcal{B}, w)$ jokaisella $(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B}$, ja peli jatkuu tilanteesta $(m-1, k, \Box\mathbb{A}, \Diamond_g \mathbb{B})$. (Jos $\Box(\mathcal{B}, w) = \emptyset$ jollakin $(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B}$, niin pelaaja I ei voi tehdä tätä siirtoa.)

Peli loppuu ja pelaaja I voittaa tilanteessa $(m, k, \mathbb{A}, \mathbb{B})$, jos on olemassa literaali $\varphi \in \mathrm{ML}$, joka erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$.

Peli loppuu ja pelaaja II voittaa tilanteessa $(m, k, \mathbb{A}, \mathbb{B})$, jos pelaaja I ei voi siirtää ja pelaaja I ei voita tässä tilanteessa.

3.2 Pelin ominaisuuksia

Tarkastetaan seuraavaksi, että kaavan pituuspeli karakterisoi halutulla tavalla pistemallijoukkojen erottamiseen vaadittavan kaavan pituuden. Lisäksi käsitellään yksinkertainen esimerkki pelikierroksesta ja todistetaan pelin soveltamisen kannalta hyödyllisiä lauseita.

Lause 3.2. *Olkoot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ pistemallien joukkoja ja $m, k \in \mathbb{N}$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

$(\mathrm{win})_{m,k}$ *Pelaajalla* I *on voittostrategia pelissä* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

$(\mathrm{sep})_{m,k}$ *On olemassa sellainen* $\varphi \in \mathrm{ML}$, *että* $\mathrm{ms}(\varphi) \leq m$, $\mathrm{cs}(\varphi) \leq k$ *ja kaava* φ *erottaa joukot* $\mathbb{A}$ *ja* $\mathbb{B}$.

Todistus. Induktiolla luvun $m + k$ suhteen. Jos $m + k = 0$, niin pelissä ei ole siirtoja. Siis jos pelaaja I voittaa pelin, niin on olemassa literaali φ, joka erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$. Tällöin $\mathrm{s}(\varphi) = 0$, joten $(\mathrm{win})_{0,0} \Rightarrow (\mathrm{sep})_{0,0}$. Jos taas on olemassa negaationormaalimuotoinen kaava φ s.e. $\mathrm{s}(\varphi) \leq 0$ ja φ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, niin φ on literaali. Siis pelaaja I voittaa pelin ja $(\mathrm{sep})_{0,0} \Rightarrow (\mathrm{win})_{0,0}$.

Oletetaan sitten, että $m + k > 0$ ja $(\mathrm{win})_{n,l} \Leftrightarrow (\mathrm{sep})_{n,l}$ kaikilla $n, l \in \mathbb{Z}_+$ s.e. $n + l < m + k$. Oletetaan ensin $(\mathrm{win})_{m,k}$. Tarkastellaan tapauksina pelaajan I ensimmäistä voittostrategian mukaista siirtoa pelissä $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

(a) Oletetaan, että pelaajan I ensimmäinen siirto on vasen jakosiirto valinnoilla $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $m_1 + m_2 = m$ ja $k_1 + k_2 + 1 = k$ sekä $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{A}$ s.e. $\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}$. Nyt mahdolliset jatkotilanteet ovat $(m_1, k_1, \mathbb{A}_1, \mathbb{B})$ ja $(m_2, k_2, \mathbb{A}_2, \mathbb{B})$, ja pelaajalla I on voittostrategia kumpaankin. Koska $m_i + k_i < m_i + k_i + 1 \leq m + k$, kun $i \in \{1, 2\}$, niin induktio-oletuksen mukaan on olemassa kaava $\psi \in \mathrm{ML}$ s.e. $\mathrm{ms}(\psi) \leq m_1$, $\mathrm{cs}(\psi) \leq k_1$ ja ψ erottaa joukot $\mathbb{A}_1$ ja $\mathbb{B}$ sekä kaava $\vartheta \in \mathrm{ML}$ s.e. $\mathrm{ms}(\vartheta) \leq m_2$, $\mathrm{cs}(\vartheta) \leq k_2$ ja ϑ erottaa joukot $\mathbb{A}_2$ ja $\mathbb{B}$. Siis $\mathbb{A}_1 \vDash \psi$ ja $\mathbb{A}_2 \vDash \vartheta$, joten $\mathbb{A} \vDash \psi \vee \vartheta$. Toisaalta $\mathbb{B} \vDash \neg\psi$ ja $\mathbb{B} \vDash \neg\vartheta$, joten $\mathbb{B} \vDash \neg(\psi \vee \vartheta)$. Siispä kaava $\psi \vee \vartheta$ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$. Lisäksi $\mathrm{ms}(\psi \vee \vartheta) = \mathrm{ms}(\psi) + \mathrm{ms}(\vartheta) \leq m_1 + m_2 = m$ ja $\mathrm{cs}(\psi \vee \vartheta) = \mathrm{cs}(\psi) + \mathrm{cs}(\vartheta) + 1 \leq k_1 + k_2 + 1 = k$, joten $(\mathrm{sep})_{m,k}$ pätee.

(b) Oletetaan, että pelaajan I ensimmäinen siirto on oikea jakosiirto valinnoilla $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $m_1 + m_2 = m$ ja $k_1 + k_2 + 1 = k$ sekä $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{B}$ s.e. $\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}$. Mahdolliset jatkotilanteet ovat $(m_1, k_1, \mathbb{A}, \mathbb{B}_1)$ ja $(m_2, k_2, \mathbb{A}, \mathbb{B}_2)$, ja pelaajalla I on voittostrategia kumpaankin. Induktio-oletuksen nojalla on siis olemassa kaava $\psi \in \mathrm{ML}$, jolle $\mathrm{ms}(\psi) \leq m_1$, $\mathrm{cs}(\psi) \leq k_1$ ja ψ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}_1$ sekä kaava $\vartheta \in \mathrm{ML}$ s.e. $\mathrm{ms}(\vartheta) \leq m_2$, $\mathrm{cs}(\vartheta) \leq k_2$ ja ϑ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}_2$. Siis $\mathbb{A} \vDash \psi$ ja $\mathbb{A} \vDash \vartheta$, joten $\mathbb{A} \vDash \psi \wedge \vartheta$. Toisaalta $\mathbb{B}_1 \vDash \neg\psi$ ja $\mathbb{B}_2 \vDash \neg\vartheta$, joten $\mathbb{B} \vDash \neg(\psi \wedge \vartheta)$. Siispä kaava $\psi \wedge \vartheta$ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$. Lisäksi $\mathrm{ms}(\psi \wedge \vartheta) = \mathrm{ms}(\psi) + \mathrm{ms}(\vartheta) \leq m_1 + m_2 = m$ ja $\mathrm{cs}(\psi \wedge \vartheta) = \mathrm{cs}(\psi) + \mathrm{cs}(\vartheta) + 1 \leq k_1 + k_2 + 1 = k$, joten $(\mathrm{sep})_{m,k}$ pätee.

(c) Oletetaan, että pelaajan I ensimmäinen siirto on vasen seuraajasiirto funktiolla $f : \mathbb{A} \to \Box\mathbb{A}$ s.e. $f(\mathcal{A}, w) \in \Box(\mathcal{A}, w)$ jokaisella $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$. Pelin jatkotilanne on $(m-1, k, \Diamond_f\mathbb{A}, \Box\mathbb{B})$ ja pelaajalla I on tästä tilanteesta voittostrategia. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa kaava $\psi \in \mathrm{ML}$ s.e. $\mathrm{ms}(\psi) \leq m-1$, $\mathrm{cs}(\psi) \leq k$ ja ψ erottaa joukot $\Diamond_f\mathbb{A}$ ja $\Box\mathbb{B}$. Nyt jos $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$, niin $f(\mathcal{A}, w) \in \Box(\mathcal{A}, w)$, ja koska $\Diamond_f\mathbb{A} \vDash \psi$, niin $f(\mathcal{A}, w) \vDash \psi$. Täten $\mathbb{A} \vDash \Diamond\psi$. Toisaalta $\Box\mathbb{B} \vDash \neg\psi$ eli jokaisella $(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B}$ ja jokaisella $(\mathcal{B}, v) \in \Box(\mathcal{B}, w)$ pätee $(\mathcal{B}, v) \vDash \neg\psi$. Siis $\mathbb{B} \vDash \Box\neg\psi$ ja täten $\mathbb{B} \vDash \neg\Diamond\psi$. Siispä kaava $\Diamond\psi$ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, ja koska kaavan $\Diamond\psi$ pituudelle lisäksi saadaan $\mathrm{ms}(\Diamond\psi) = \mathrm{ms}(\psi) + 1 \leq m - 1 + 1 = m$ ja $\mathrm{cs}(\Diamond\psi) = \mathrm{cs}(\psi) \leq k$, niin $(\mathrm{sep})_{m,k}$ pätee.

(d) Oletetaan, että pelaajan I ensimmäinen siirto on oikea seuraajasiirto funktiolla $g : \mathbb{B} \to \Box\mathbb{B}$ s.e. $g(\mathcal{B}, w) \in \Box(\mathcal{B}, w)$ jokaisella $(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B}$. Peli jatkuu tilanteesta $(m-1, k, \Box\mathbb{A}, \Diamond_g\mathbb{B})$ ja pelaajalla I on tästä tilanteesta voittostrategia. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa kaava $\psi \in \mathrm{ML}$ s.e. $\mathrm{ms}(\psi) \leq m-1$, $\mathrm{cs}(\psi) \leq k$ ja ψ erottaa joukot $\Box\mathbb{A}$ ja $\Diamond_g\mathbb{B}$. Tällöin $\Box\mathbb{A} \vDash \psi$, joten $\mathbb{A} \vDash \Box\psi$. Toisaalta $\Diamond_g\mathbb{B} \vDash \neg\psi$, joten $\mathbb{B} \vDash \Diamond\neg\psi$ ja $\mathbb{B} \vDash \neg\Box\psi$. Täten kaava $\Box\psi$ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ ja koska $\mathrm{ms}(\Box\psi) = \mathrm{ms}(\psi) + 1 \leq m - 1 + 1 = m$ ja $\mathrm{cs}(\Box\psi) = \mathrm{cs}(\psi) \leq k$, niin $(\mathrm{sep})_{m,k}$ pätee.

Oletetaan sitten $(\mathrm{sep})_{m,k}$. Pelaajan I voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ saadaan negaationormaalimuotoisen kaavan φ avulla seuraavasti:

(a) Jos φ on literaali, niin pelaaja I voittaa pelin tekemättä siirtoja.

(b) Oletetaan, että $\varphi = \psi \vee \vartheta$. Merkitään $\mathbb{A}_1 := \{(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A} \mid (\mathcal{A}, w) \vDash \psi\}$ ja $\mathbb{A}_2 := \{(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A} \mid (\mathcal{A}, w) \vDash \vartheta\}$. Koska $\mathbb{A} \vDash \varphi$, niin $\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}$. Lisäksi, koska $\mathbb{B} \vDash \neg\varphi$, niin $\mathbb{B} \vDash \neg\psi$ ja $\mathbb{B} \vDash \neg\vartheta$. Siis ψ erottaa joukot $\mathbb{A}_1$ ja $\mathbb{B}$, ja ϑ erottaa joukot $\mathbb{A}_2$ ja $\mathbb{B}$. Koska $\mathrm{ms}(\psi) + \mathrm{ms}(\vartheta) = \mathrm{ms}(\varphi) \leq m$, niin on olemassa $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, joille pätee $m_1 + m_2 = m$, $\mathrm{ms}(\psi) \leq m_1$ ja $\mathrm{ms}(\vartheta) \leq m_2$. Edelleen, koska $\mathrm{cs}(\psi) + \mathrm{cs}(\vartheta) + 1 = \mathrm{cs}(\varphi) \leq k$, niin on olemassa $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $k_1 + k_2 + 1 = k$, $\mathrm{cs}(\psi) \leq k_1$ ja $\mathrm{cs}(\vartheta) \leq k_2$. Induktio-oletuksen mukaan pelaajalla I on voittostrategia peleihin $\mathrm{FS}_{m_1,k_1}(\mathbb{A}_1, \mathbb{B})$ ja $\mathrm{FS}_{m_2,k_2}(\mathbb{A}_2, \mathbb{B})$. Koska $k \geq \mathrm{cs}(\varphi) \geq 1$, niin pelaaja I voi aloittaa pelin vasemmalla jakosiirrolla valinnoilla $m_1, m_2, k_1, k_2, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ ja voittaa jatkamalla pelin $\mathrm{FS}_{m_1,k_1}(\mathbb{A}_1, \mathbb{B})$ tai $\mathrm{FS}_{m_2,k_2}(\mathbb{A}_2, \mathbb{B})$ voittostrategian mukaisesti.

(c) Oletetaan, että $\varphi = \psi \wedge \vartheta$. Merkitään $\mathbb{B}_1 := \{(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B} \mid (\mathcal{B}, w) \vDash \neg\psi\}$ ja $\mathbb{B}_2 := \{(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B} \mid (\mathcal{B}, w) \vDash \neg\vartheta\}$. Koska $\mathbb{B} \vDash \neg\varphi$, niin $\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}$. Lisäksi, koska $\mathbb{A} \vDash \varphi$, niin $\mathbb{A} \vDash \psi$ ja $\mathbb{A} \vDash \vartheta$. Siis ψ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}_1$, ja ϑ erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}_2$. Nyt on olemassa $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $m_1 + m_2 = m$, $\mathrm{ms}(\psi) \leq m_1$ ja $\mathrm{ms}(\vartheta) \leq m_2$ sekä $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $k_1 + k_2 + 1 = k$, $\mathrm{cs}(\psi) \leq k_1$ ja $\mathrm{cs}(\vartheta) \leq k_2$. Induktio-oletuksen mukaan pelaajalla I on voittostrategia peleihin $\mathrm{FS}_{m_1,k_1}(\mathbb{A}, \mathbb{B}_1)$ ja $\mathrm{FS}_{m_2,k_2}(\mathbb{A}, \mathbb{B}_2)$. Nyt pelaaja I voittaa pelin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ aloittamalla oikealla jakosiirrolla valiten $m_1, m_2, k_1, k_2, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ ja jatkamalla sitten pelin $\mathrm{FS}_{m_1,k_1}(\mathbb{A}, \mathbb{B}_1)$ tai $\mathrm{FS}_{m_2,k_2}(\mathbb{A}, \mathbb{B}_2)$ voittostrategian mukaisesti.

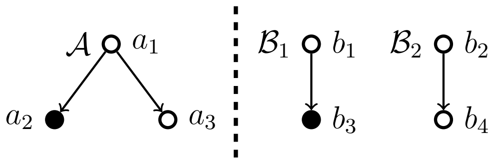
(d) Oletetaan, että $\varphi = \Diamond\psi$. Koska $\mathbb{A} \vDash \varphi$, niin jokaisella $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$ on olemassa $(\mathcal{A}, v_w) \in \Box(\mathcal{A}, w)$ s.e. $(\mathcal{A}, v_w) \vDash \psi$. Määritellään funktio $f : \mathbb{A} \to \Box\mathbb{A}$ asettamalla $f(\mathcal{A}, w) = (\mathcal{A}, v_w)$. Nyt siis $\Diamond_f \mathbb{A} \vDash \psi$. Toisaalta $\mathbb{B} \vDash \neg\varphi$, joten $\mathbb{B} \vDash \Box\neg\psi$ ja täten jokaisella $(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B}$ ja jokaisella $(\mathcal{B}, v) \in \Box(\mathcal{B}, w)$ pätee $(\mathcal{B}, v) \vDash \neg\psi$. Siis $\Box\mathbb{B} \vDash \neg\psi$ ja kaava ψ erottaa joukot $\Diamond_f \mathbb{A}$ ja $\Box\mathbb{B}$. Lisäksi, $\mathrm{ms}(\psi) = \mathrm{ms}(\varphi) - 1 \leq m - 1$ ja $\mathrm{cs}(\psi) = \mathrm{cs}(\varphi) \leq k$, joten induktiooletuksen mukaan pelaajalla I on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m-1,k}(\Diamond_f \mathbb{A}, \Box\mathbb{B})$. Koska $m \geq \mathrm{ms}(\varphi) \geq 1$, niin pelaaja I voittaa nyt pelin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ tekemällä ensin vasemman seuraajasiirron funktiolla f ja jatkamalla pelin $\mathrm{FS}_{m-1,k}(\Diamond_f \mathbb{A}, \Box\mathbb{B})$ voittostrategian mukaisesti.

(e) Oletetaan, että $\varphi = \Box\psi$. Koska $\mathbb{A} \vDash \varphi$, niin $\Box\mathbb{A} \vDash \psi$. Toisaalta, koska $\mathbb{B} \vDash \neg\varphi$, niin $\mathbb{B} \vDash \Diamond\neg\psi$ ja täten jokaisella $(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B}$ on olemassa $(\mathcal{B}, v_w) \in \Box(\mathcal{B}, w)$ s.e. $(\mathcal{B}, v_w) \vDash \neg\psi$. Määritellään funktio $g : \mathbb{B} \to \Box\mathbb{B}$ asettamalla $g(\mathcal{B}, w) = (\mathcal{B}, v_w)$. Nyt siis $\Diamond_g \mathbb{B} \vDash \neg\psi$, joten kaava ψ erottaa joukot $\Box\mathbb{A}$ ja $\Diamond_g \mathbb{B}$. Induktio-oletuksen nojalla pelaajalla I on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m-1,k}(\Box\mathbb{A}, \Diamond_g \mathbb{B})$. Nyt pelaaja I voittaa pelin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ tekemällä ensin oikean seuraajasiirron funktiolla g ja jatkamalla pelin $\mathrm{FS}_{m-1,k}(\Box\mathbb{A}, \Diamond_g \mathbb{B})$ voittostrategian mukaan. □

Jatkossa oletetaan kielenkäytössä, että pelaajat pelaavat kaavan pituuspeliä hyvin; sanotaan, että pelaaja II voittaa pelin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, kun pelaajalla II on voittostrategia tähän peliin.

Esimerkki 3.3. Tarkastellaan yksinkertaista esimerkkiä kaavan pituuspelin kulusta. Olkoon $\Phi = \{p\}$. Olkoon $\mathbb{A} = \{(\mathcal{A}, a)\}$ ja $\mathbb{B} = \{(\mathcal{B}_1, b_1), (\mathcal{B}_2, b_2)\}$, missä pistemallit $(\mathcal{A}, a)$, $(\mathcal{B}_1, b_1)$ ja $(\mathcal{B}_2, b_2)$ ovat kuten kuvassa 3.1. Kuvassa musta piste tarkoittaa, että p on tosi kyseisessä maailmassa ja valkoinen piste vastaavasti, että $\neg p$ on tosi.

Tarkastellaan kaavan pituuspelin $\mathrm{FS}_{2,1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ yhtä pelikierrosta. Pelaaja I aloittaa oikealla jakosiirrolla valiten luvut $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 0$ ja $k_2 = 0$ sekä joukot $\mathbb{B}_1 = \{(\mathcal{B}_1, b_1)\}$ ja $\mathbb{B}_2 = \{(\mathcal{B}_2, b_2)\}$. Tällöin $m_1 + m_2 = 2$,



Kuva 3.1

$k_1 + k_2 + 1 = 1$ ja $\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}$, joten tämä on laillinen oikea jakosiirto. Pelaaja II saa valita jatkotilanteista $(1, 0, \mathbb{A}, \mathbb{B}_1)$ ja $(1, 0, \mathbb{A}, \mathbb{B}_2)$ ja valitsee näistä ensimmäisen. Seuraavaksi pelaaja I tekee vasemman seuraajasiirron valiten funktion $f : \mathbb{A} \to \Box\mathbb{A}$, jolle $f(\mathcal{A}, a) = (\mathcal{A}, a_3)$. Pelin jatkotilanne on $(1-1, 0, \Diamond_f \mathbb{A}, \Box\mathbb{B}_1) = (0, 0, \{(\mathcal{A}, a_3)\}, \{(\mathcal{B}_1, b_3)\})$. Huomataan, että $(\mathcal{A}, a_3) \vDash p$ ja $(\mathcal{B}_1, b_3) \vDash \neg p$. Siis literaali p erottaa joukot $\{(\mathcal{A}, a_3)\}$ ja $\{(\mathcal{B}_1, b_3)\}$, joten pelaaja I voittaa pelin.

Lisäksi huomataan, että jos pelaaja II olisi jakosiirron kohdalla valinnut jatkotilanteen toisin, olisi pelaaja I voinut jatkaa vasemmalla seuraajasiirrolla malliin $(\mathcal{A}, a_2)$ ja voittanut jälleen pelin. Siis pelaaja I voittaa näillä siirroilla riippumatta pelaajan II valinnoista, joten pelaajalla I on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{2,1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. Täten Lauseen 3.2 nojalla on olemassa modaalilogiikan kaava φ, joka erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, ja jolle $\mathrm{ms}(\varphi) \leq 2$ ja $\mathrm{cs}(\varphi) \leq 1$. Kaava φ voidaan Lauseen 3.2 todistuksen tapaan lukea pelaajan I voittostrategiasta. Huomataan, että $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$ on tällainen kaava.

Osoitetaan seuraavassa lauseessa, että jos kaavan pituuspelissä päädytään tilanteeseen, jossa pelin eri puolilla on riittävään asteeseen saakka bisimilaariset pistemallit, niin pelaaja II voittaa kaavan pituuspelin valitsemalla kunkin jatkotilanteen niin, että bisimilaariset mallit säilyvät molemmissa mallijoukoissa.

Lause 3.4. *Olkoot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ pistemallien joukkoja ja $m, k \in \mathbb{N}$. Jos on olemassa pistemallit $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$ ja $(\mathcal{B}, v) \in \mathbb{B}$, jotka ovat m-bisimilaariset, niin pelaajalla* II *on voittostrategia peliin* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla luvun $m + k \in \mathbb{N}$ suhteen. Tapauksessa $m + k = 0$ pätee $m = k = 0$ ja $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$ ja $(\mathcal{B}, v) \in \mathbb{B}$ ovat 0-bisimilaariset eli propositioiden suhteen ekvivalentit. Lemman 2.25 nojalla ei ole olemassa literaalia φ, joka erottaa joukot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$. Siis peli on päättynyt tilanteeseen, jossa pelaaja I ei voi siirtää ja pelaaja I ei voita peliä, joten pelaaja II voittaa pelin.

Oletetaan, että $m + k > 0$ ja väite pätee kaikilla $n, l \in \mathbb{N}$, joilla $n + l < m + k$. Jos nyt on olemassa m-bisimilaariset pistemallit $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$ ja $(\mathcal{B}, v) \in \mathbb{B}$, niin kuten perusaskeleessa, pelaaja I ei voita peliä tekemättä siirtoja. Jos pelaaja I ei voi siirtää, niin pelaaja II voittaa pelin. Oletetaan sitten, että pelaaja I voi siirtää ja tarkastellaan tapauksina pelaajan I ensimmäistä siirtoa pelissä $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Jos pelaaja I aloittaa jakosiirrolla valinnoilla $m_1, m_2, k_1, k_2, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$, niin koska $\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}$, pelaaja II voi valita jatkotilanteen $(m_i, k_i, \mathbb{A}_i, \mathbb{B})$, $i \in \{1, 2\}$, s.e. $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}_i$. Tällöin $m_i \leq m \leq n$ ja $m_i + k_i < m + k$, joten induktio-oletuksen nojalla pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m_i,k_i}(\mathbb{A}_i, \mathbb{B})$. Oikean jakosiirron tapaus on vastaava.

Jos pelaaja I tekee vasemman seuraajasiirron funktiolla $f : \mathbb{A} \to \Box\mathbb{A}$, niin koska $(\mathcal{A}, w)$ ja $(\mathcal{B}, v)$ ovat m-bisimilaariset, joukossa $\Box(\mathcal{B}, v)$ on pistemalli $(\mathcal{B}, v')$, joka on $(m-1)$-bisimilaarinen pistemallin $f(\mathcal{A}, w)$ kanssa. Jatkotilanteessa $(m-1, k, \Diamond_f\mathbb{A}, \Box\mathbb{B})$ on siis pistemallit $f(\mathcal{A}, w) \in \Diamond_f\mathbb{A}$ ja $(\mathcal{B}, v') \in \Box\mathbb{B}$, jotka ovat $(m-1)$-bisimilaariset ja $m-1+k < m+k$, joten induktio-oletuksen nojalla pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m-1,k}(\Diamond_f\mathbb{A}, \Box\mathbb{B})$. Oikean seuraajasiirron tapaus on vastaava.

Siis joka tapauksessa pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ ja induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $m, k \in \mathbb{N}$. □

Muotoillaan vielä Lauseesta 3.4 yksinkertaisempi versio, joka käyttää rajoittamatonta bisimilaarisuutta.

Seuraus 3.5. *Olkoot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ pistemallien joukkoja ja $m, k \in \mathbb{N}$. Jos on olemassa $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$ ja $(\mathcal{B}, v) \in \mathbb{B}$, jotka ovat bisimilaariset, niin pelaajalla* II *on voittostrategia peliin* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Todistus. Koska $(\mathcal{A}, w)$ ja $(\mathcal{B}, v)$ ovat bisimilaariset, niin Lemman 2.12 nojalla ne ovat n-bisimilaariset jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti ne ovat siis m-bisimilaariset, joten Lauseen 3.4 mukaan pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. □

Myöhemmissä kaavan pituuspelin pelitilanteiden tarkasteluissa pelaajan I siirtoja rajoittavat usein bisimilaariset mallit kyseisen pelitilanteen mallien seuraajina. Seurauksen 3.5 nojalla pelaaja I häviää, jos hän tekee seuraajasiirron tällaisessa tilanteessa. Tällöin pelaajan I on voittaakseen tehtävä ensin riittävästi jakosiirtoja ja näin mallijoukkojen erottamiseen vaadittavan kaavan pituus kasvaa.

Pistemallien ominaisuudet ovat luokkia, mutta liian monen pistemallin hallinta pelitilanteessa voi olla hankalaa ja kaavan pituuspeli on määritelty vain joukoille. Seuraava lause antaa keinon käsitellä vain haluttua luokan osajoukkoa kaavan pituuspelissä.

Lause 3.6. *Olkoot $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ pistemallien luokkia. Tällöin, jos on olemassa kaava $\varphi \in \mathrm{ML}$, joka erottaa luokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$, ja jolle $\mathrm{ms}(\varphi) \leq m$ ja $\mathrm{cs}(\varphi) \leq k$, niin pelaajalla* I *on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}', \mathbb{B}')$ kaikilla osajoukoilla $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B}$.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{A}$, $\mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B}$, ja että kaava φ, jolle $\mathrm{ms}(\varphi) \leq m$ ja $\mathrm{cs}(\varphi) \leq k$ erottaa luokat $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$. Tällöin $\mathbb{A} \vDash \varphi$ ja $\mathbb{B} \vDash \neg\varphi$, joten $\mathbb{A}' \vDash \varphi$ ja $\mathbb{B}' \vDash \neg\varphi$. Siis φ erottaa joukot $\mathbb{A}'$ ja $\mathbb{B}'$, joten Lauseen 3.2 mukaan pelaajalla I on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}', \mathbb{B}')$. □

Käytetään Lausetta 3.6 jatkossa todistustekniikkana. Todistettaessa, että pistemallien luokkien $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ erottamiseen vaaditaan vähintään tietyn pituinen kaava, valitaan sopivat osajoukot $\mathbb{A}'$ ja $\mathbb{B}'$ ja osoitetaan, että jo niiden erottamiseen tarvitaan halutun pituinen kaava. Vastaavasti, jos halutaan osoittaa, ettei luokkia $\mathbb{A}$ ja $\mathbb{B}$ voi erottaa millään modaalilogiikan kaavalla, voidaan näyttää tämä sopiville osajoukoille.

4 PAL on eksponentiaalisesti tiiviimpi kuin ML

Tässä luvussa osoitetaan kaavan pituuspelin avulla, että julkisten ilmoitusten logiikka PAL on eksponentiaalisesti tiiviimpi kuin modaalilogiikka ML.

4.1 Julkisten ilmoitusten logiikka

Modaalilogiikkaa on episteemisessä tutkimuksessa käytetty agenttien tiedon mallintamiseen. Jokaiselle agentille a määritellään oma modaalioperaattori $\Box_a$, ja kaava $\Box_a\varphi$ tulkitaan tarkoittamaan, että agentti a tietää kaavan φ pätevän. Vastaavasti duaalinen kaava $\Diamond_a\varphi$ tulkitaan tarkoittamaan, että agentin a näkökulmasta on mahdollista, että φ on tosi. Tämä lähestymistapa käsittelee kuitenkin vain staattisia tilanteita eikä salli agenttien tiedon muuttumista. Julkisten ilmoitusten logiikan (*public annoucement logic*) määritteli Plaza [11]. Tässä logiikassa pystytään ilmaisemaan agenttien tiedon muuttumista julkisten ilmoitusten seurauksena. PAL-kaava $[\varphi]\psi$ tulkitaan tarkoittamaan, että jos kaava φ ilmoitetaan julkisesti todeksi, niin syntyvässä tilanteessa ψ pätee. Tässä tutkielmassa käytämme lähteen [4] mukaisesti myös operaattorin $[\varphi]$ duaalista operaattoria $\langle\varphi\rangle$.

Määritellään ensin logiikan PAL syntaksi ja semantiikka.

Määritelmä 4.1. Olkoon Φ joukko propositiosymboleja. Julkisten ilmoitusten logiikan PAL(Φ) kaavojen joukko määritellään rekursiolla seuraavasti:

(1) $\top, \bot \in \mathrm{PAL}(\Phi)$

(2) Jos $p \in \Phi$, niin $p \in \mathrm{PAL}(\Phi)$,

(3) Jos $\varphi \in \mathrm{PAL}(\Phi)$, niin $\neg\varphi \in \mathrm{PAL}(\Phi)$,

(4) Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{PAL}(\Phi)$, niin $(\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{PAL}(\Phi)$,

(5) Jos $\varphi \in \mathrm{PAL}(\Phi)$, niin $\Diamond\varphi, \Box\varphi \in \mathrm{PAL}(\Phi)$,

(6) Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{PAL}(\Phi)$, niin $\langle\varphi\rangle\psi, [\varphi]\psi \in \mathrm{PAL}(\Phi)$.

Julkisten ilmoitusten logiikka on siis modaalilogiikan laajennus uusilla operaattoreilla $\langle\varphi\rangle$ ja $[\varphi]$, missä $\varphi \in \mathrm{PAL}$. Määritellään näille uusille operaattoreille totuusrelaatio modaalilogiikan totuusrelaation avulla.

Määritelmä 4.2. Olkoon Φ joukko propositiosymboleja. Pistemallien $(\mathcal{M}, w)$ ja PAL(Φ)-kaavojen φ välinen totuusrelaatio $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\mathrm{PAL}} \varphi$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

(1) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\mathrm{PAL}} \top$ ja $(\mathcal{M}, w) \nvDash_{\mathrm{PAL}} \bot$,

(2) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} p \Leftrightarrow w \in V(p)$,

(3) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \neg\varphi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \nvDash_{\text{PAL}} \varphi$,

(4) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \varphi$ tai $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \psi$,

(5) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \varphi$ ja $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \psi$,

(6) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \Diamond\varphi \Leftrightarrow$ on olemassa $(\mathcal{M}, v) \in \Box(\mathcal{M}, w)$, jolle $(\mathcal{M}, v) \vDash_{\text{PAL}} \varphi$,

(7) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \Box\varphi \Leftrightarrow$ kaikilla $(\mathcal{M}, v) \in \Box(\mathcal{M}, w)$ pätee $(\mathcal{M}, v) \vDash_{\text{PAL}} \varphi$,

(8) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \langle\varphi\rangle\psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \varphi$ ja $(\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash_{\text{PAL}} \psi$,

(9) $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} [\varphi]\psi \Leftrightarrow$ jos $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \varphi$, niin $(\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash_{\text{PAL}} \psi$.

Tässä, kun $\mathcal{M} = (W, R, V)$, niin $\mathcal{M}_{|\varphi}$ on Kripke-malli

$$\mathcal{M}_{|\varphi} = (W_{|\varphi}, R \cap (W_{|\varphi} \times W_{|\varphi}), V_{|\varphi}),$$

missä

$$W_{|\varphi} = \{w \in W \mid (\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \varphi\}$$

ja kaikilla $p \in \Phi$ pätee

$$V_{|\varphi}(p) = V(p) \cap W_{|\varphi}.$$

Huomataan, että määritelmässä esiintyvä ehto $(\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash_{\text{PAL}} \psi$ on järkevä vain, jos $w \in \text{dom}(\mathcal{M}_{|\varphi})$, mutta määritelmän kohdista (8) ja (9) nähdään, että tämä ehto vaaditaan vain, kun $(\mathcal{M}, w) \vDash_{\text{PAL}} \varphi$ eli $w \in \text{dom}(\mathcal{M}_{|\varphi})$. Jatkossa, kun merkitään $(\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash_{\text{PAL}} \psi$, voidaan siis olettaa, että $w \in \text{dom}(\mathcal{M}_{|\varphi})$.

Julkisten ilmoitusten logiikassa tulkitaan siis modaalilogiikan kaavat tavalliseen tapaan ja lisätään uusille operaattoreille omat tulkinnat. Käytetään jatkossa logiikan PAL totuusrelaatiolle $\vDash_{\text{PAL}}$ tavalliseen tapaan merkintää $\vDash$.

Todistetaan seuraavassa lauseessa ekvivalensseja, joiden avulla osoitetaan, että jokaiselle PAL-kaavalle on olemassa ekvivalentti ML-kaava.

Lause 4.3. *Jos $\varphi, \psi, \vartheta \in \text{PAL}$, niin seuraavat ekvivalenssit pätevät:*

(1) $(\mathcal{M}, w) \vDash [\varphi]\psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \neg\langle\varphi\rangle\neg\psi$,

(2) jos ψ on literaali, niin $(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \wedge \psi$,

(3) $(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \wedge \neg\langle\varphi\rangle\psi$,

(4) $(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle(\psi \vee \vartheta) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \vee \langle\varphi\rangle\vartheta$,

(5) $(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle(\psi \wedge \vartheta) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \wedge \langle\varphi\rangle\vartheta$,

(6) $(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\Diamond\psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \wedge \Diamond\langle\varphi\rangle\psi$,

(7) $(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\langle\psi\rangle\vartheta \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \langle\langle\varphi\rangle\psi\rangle\vartheta$.

Todistus. Määritelmän 4.2 perusteella saadaan seuraavat ekvivalenssit.

(1) Julkisen tiedon operaattoreiden duaalisuus:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}, w) \vDash [\varphi]\psi \\
&\Leftrightarrow \text{jos } (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi, \text{ niin } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \nvDash \varphi \text{ tai } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow \text{ei päde } \Big((\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \neg\psi\Big) \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \neg\langle\varphi\rangle\neg\psi.
\end{aligned}
$$

(2) Julkisen tiedon operaattorin ja literaalin ψ tapaus:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}, w) \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \wedge \psi.
\end{aligned}
$$

(3) Julkisen tiedon operaattori ja negaatio:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\psi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \neg\psi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja ei päde } \Big((\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi\Big) \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \wedge \neg\langle\varphi\rangle\psi.
\end{aligned}
$$

(4) Julkisen tiedon operaattori ja disjunktio:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle(\psi \vee \vartheta) \\
&\Leftrightarrow \ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \vee \vartheta \\
&\Leftrightarrow \ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } \Big((\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \text{ tai } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \vartheta\Big) \\
&\Leftrightarrow \ \Big((\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi\Big) \text{ tai } \Big((\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \vartheta\Big) \\
&\Leftrightarrow \ (\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \vee \langle\varphi\rangle\vartheta.
\end{aligned}
$$

(5) Julkisen tiedon operaattori ja konjunktio:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle(\psi \wedge \vartheta) \\
&\Leftrightarrow \ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \wedge \vartheta \\
&\Leftrightarrow \ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } \Big((\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \vartheta\Big) \\
&\Leftrightarrow \ \Big((\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi\Big) \text{ ja } \Big((\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \vartheta\Big) \\
&\Leftrightarrow \ (\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \wedge \langle\varphi\rangle\vartheta.
\end{aligned}
$$

(6) Julkisen tiedon operaattori ja timantti:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\Diamond\psi \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \Diamond\psi \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja on olemassa } (\mathcal{M}_{|\varphi}, v) \in \Box(\mathcal{M}_{|\varphi}, w), \\
&\qquad \text{jolle } (\mathcal{M}_{|\varphi}, v) \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja on olemassa } (\mathcal{M}, v) \in \Box(\mathcal{M}, w), \\
&\qquad \text{jolle } (\mathcal{M}, v) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, v) \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja on olemassa } (\mathcal{M}, v) \in \Box(\mathcal{M}, w), \\
&\qquad \text{jolle } (\mathcal{M}, v) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \wedge \Diamond\langle\varphi\rangle\psi
\end{aligned}
$$

(7) Kaksi julkisen tiedon operaattoria peräkkäin:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\langle\psi\rangle\vartheta \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \langle\psi\rangle\vartheta \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \text{ ja } ((\mathcal{M}_{|\varphi})_{|\psi}, w) \vDash \vartheta \\
&\overset{*}{\Leftrightarrow}\ (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\langle\varphi\rangle\psi}, w) \vDash \vartheta \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\langle\varphi\rangle\psi}, w) \vDash \vartheta \\
&\Leftrightarrow\ (\mathcal{M}, w) \vDash \langle\langle\varphi\rangle\psi\rangle\vartheta.
\end{aligned}
$$

$*$: $(\mathcal{M}_{|\varphi})_{|\psi} = \mathcal{M}_{|\langle\varphi\rangle\psi}$. Nimittäin

$$
\begin{aligned}
w \in \mathrm{dom}((\mathcal{M}_{|\varphi})_{|\psi}) &\Leftrightarrow (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \varphi \text{ ja } (\mathcal{M}_{|\varphi}, w) \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \\
&\Leftrightarrow w \in \mathrm{dom}(\mathcal{M}_{|\langle\varphi\rangle\psi}).
\end{aligned}
$$

Koska $(\mathcal{M}_{|\varphi})_{|\psi}$ ja $\mathcal{M}_{|\langle\varphi\rangle\psi}$ ovat molemmat mallin $\mathcal{M}$ rajoittumia, niin universumien samuudesta seuraa näiden mallien samuus. $\Box$

Käyttämällä edellisen lauseen ekvivalensseja kaavanmuunnossääntöinä voidaan muuntaa mikä tahansa PAL-kaava ekvivalentiksi ML-kaavaksi. Nimittäin ensin voidaan tavallisten modaalioperaattoreiden duaalisuuden perusteella muuttaa boksit timanteiksi ja sitten Lauseen 4.3 kohdan (1) nojalla muuttaa operaattorit $[\varphi]$ operaattoreiksi $\langle\varphi\rangle$. Nyt Lauseen 4.3 sääntöjen avulla voidaan työntää operaattorit $\langle\varphi\rangle$ propositiosymbolien eteen ja kohdan (2) nojalla voidaan poistaa operaattorit $\langle\varphi\rangle$. Toistamalla tätä menettelyä saadaan poistettua myös sisäkkäiset julkisten ilmoitusten operaattorit ja päädytään modaalilogiikan kaavaan.

Kun lisäksi muistetaan, että kaikki ML-kaavat ovat PAL-kaavoja, niin huomataan, että julkisten ilmoitusten logiikalla on sama ilmaisuvoima kuin modaalilogiikalla. Kuitenkin seuraavaksi näytämme, että jotkin ominaisuudet voidaan ilmaista logiikassa PAL eksponentiaalisesti tiiviimmin kuin logiikassa ML. Uudet operaattorit $\langle\varphi\rangle$ ja $[\varphi]$ siis tuovat lisäarvoa tiiviimpien ja tehokkaampien ilmaisujen muodossa.

4.2 PAL-kaavojen ja pistemallien konstruktio

Tässä luvussa määritellään ominaisuus, joka voidaan ilmaista julkisten ilmoitusten logiikassa eksponentiaalisesti tiiviimmin kuin modaalilogiikassa. Tämän todistamiseksi määritellään pistemallijoukot, joista toisen malleilla on tämä ominaisuus ja toisen malleillla ei ole. Näiden mallijoukkojen välillä pelattava kaavan pituuspeli osoittaa, että ominaisuuden ilmaisemiseen modaalilogiikassa vaaditaan luvun n suhteen eksponentiaalisen pitkä kaava. Tarkasteltavat julkisen tiedon logiikan kaavat ja pistemallijoukot ovat suoraan lähteestä [4]. Lähteessä laajennetuilla syntaksipuilla toteutetut todistukset on tässä tutkielmassa tehty käyttäen kaavan pituuspeliä. Tarkastellaan tämän luvun ajan tapausta $\Phi = \{p\}$.

Määritellään ensin kaavat $\delta_n \in \mathrm{PAL}$ rekursiolla seuraavasti:

(1) $\delta_1 = \Diamond p \wedge \Diamond\neg p$

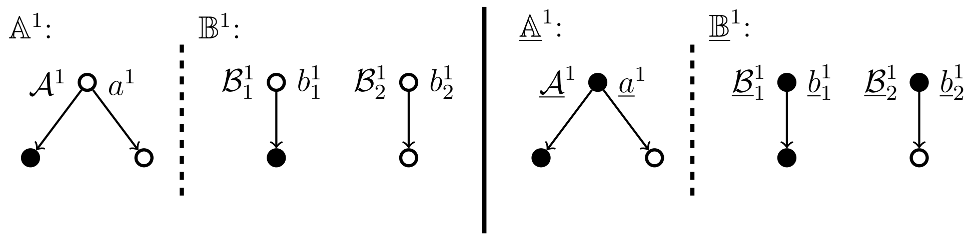
(2) $\delta_{n+1} = \langle\delta_n\rangle\delta_1$.

Laajennetaan modaalilogiikan kaavan pituuden määritelmää lisäämällä modaalipituuteen kohta

$$\mathrm{ms}(\langle\varphi\rangle\psi) = \mathrm{ms}([\varphi]\psi) = \mathrm{ms}(\varphi) + \mathrm{ms}(\psi) + 1.$$

Näin saatu PAL-kaavojen pituuden määritelmä antaa riittävän hyvän arvion kaavan pituudesta merkkijonona, sillä PAL-kaavat voidaan muuttaa negaationormaalimuotoon aivan kuten ML-kaavat. Tämän määritelmän mukaan saadaan kaavoille δ_n pituudet $\mathrm{s}(\delta_1) = 3$ ja $\mathrm{s}(\delta_{n+1}) = \mathrm{s}(\delta_n) + \mathrm{s}(\delta_1) + 1 = \mathrm{s}(\delta_n) + 4$. Ratkaisemalla tämä differenssiyhtälö saadaan $\mathrm{s}(\delta_n) = 4n - 1$. Kaavojen δ_n pituus on siis lineaarinen suhteessa lukuun n. Jos sovelletaan Lauseen 4.3 muunnossääntöjä kaavaan δ_n kuten Lauseen 4.4 todistuksessa, saadaan ekvivalentin modaalilogiikan kaavan δ'_n pituudeksi $s(\delta'_n) = 2 \cdot 3^n - 3$. Muunnetun kaavan δ'_n pituus on siis eksponentiaalinen suhteessa lukuun n ja osoitamme tässä luvussa, että alle eksponentiaalisen pituista muunnosta julkisten ilmoitusten logiikalta modaalilogiikalle ei ole olemassa.

Määritellään sitten mallijoukot $\mathbb{A}^n$ ja $\mathbb{B}^n$. Asetetaan aluksi $\mathbb{A}^1 = \{(\mathcal{A}^1, a^1)\}$ ja $\mathbb{B}^1 = \{(\mathcal{B}^1_1, b^1_1), (\mathcal{B}^1_2, b^1_2)\}$ sekä $\underline{\mathbb{A}}^1 = \{(\underline{\mathcal{A}}^1, \underline{a}^1)\}$ ja $\underline{\mathbb{B}}^1 = \{(\underline{\mathcal{B}}^1_1, \underline{b}^1_1), (\underline{\mathcal{B}}^1_2, \underline{b}^1_2)\}$, missä pistemallit ovat kuvan 4.1 mukaiset. Kuvan mustissa pisteissä p on tosi ja valkoisissa pisteissä $\neg p$ on tosi.

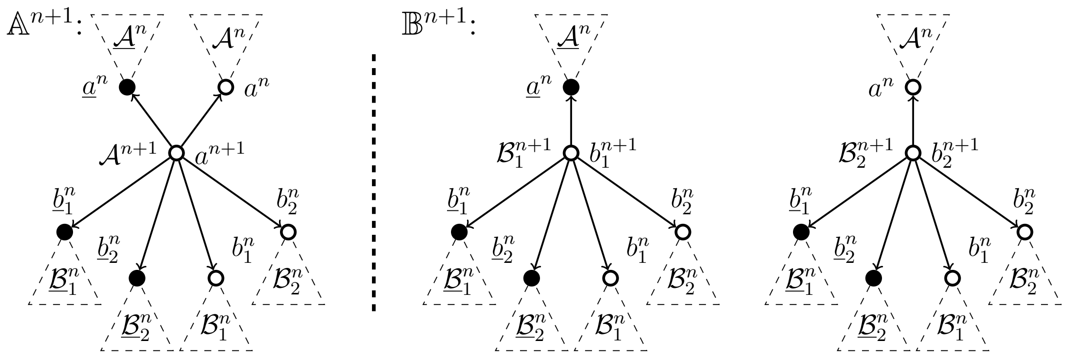


Kuva 4.1

Oletetaan sitten, että joukot $\mathbb{A}^n$, $\mathbb{B}^n$, $\underline{\mathbb{A}}^n$ ja $\underline{\mathbb{B}}^n$ on määritelty. Asetetaan

$\mathbb{A}^{n+1} = \{(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1})\}$, missä $(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) = \Delta_{\neg p}(\mathbb{A}^n \cup \underline{\mathbb{A}}^n \cup \mathbb{B}^n \cup \underline{\mathbb{B}}^n)$
$\underline{\mathbb{A}}^{n+1} = \{(\underline{\mathcal{A}}^{n+1}, \underline{a}^{n+1})\}$, missä $(\underline{\mathcal{A}}^{n+1}, \underline{a}^{n+1}) = \Delta_{p}(\mathbb{A}^n \cup \underline{\mathbb{A}}^n \cup \mathbb{B}^n \cup \underline{\mathbb{B}}^n)$
$\mathbb{B}^{n+1} = \{(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1}), (\mathcal{B}_2^{n+1}, b_2^{n+1})\}$, missä $(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1}) = \Delta_{\neg p}(\underline{\mathbb{A}}^n \cup \mathbb{B}^n \cup \underline{\mathbb{B}}^n)$
ja $(\mathcal{B}_2^{n+1}, b_2^{n+1}) = \Delta_{\neg p}(\mathbb{A}^n \cup \mathbb{B}^n \cup \underline{\mathbb{B}}^n)$
$\underline{\mathbb{B}}^{n+1} = \{(\underline{\mathcal{B}}_1^{n+1}, \underline{b}_1^{n+1}), (\underline{\mathcal{B}}_2^{n+1}, \underline{b}_2^{n+1})\}$, missä $(\underline{\mathcal{B}}_1^{n+1}, \underline{b}_1^{n+1}) = \Delta_{p}(\underline{\mathbb{A}}^n \cup \mathbb{B}^n \cup \underline{\mathbb{B}}^n)$
ja $(\underline{\mathcal{B}}_2^{n+1}, \underline{b}_2^{n+1}) = \Delta_{p}(\mathbb{A}^n \cup \mathbb{B}^n \cup \underline{\mathbb{B}}^n)$

Pistemalli $(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1})$ muodostetaan siis liittämällä yhteen kaikki edellisellä tasolla määritellyt mallit ja asettamalla $\neg p$ todeksi pisteessä a^{n+1}. Mallia $(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1})$ muodostettaessa jätetään edellisten mallien joukosta $(\mathcal{A}^n, a^n)$ liittämättä ja mallista $(\mathcal{B}_2^{n+1}, b_2^{n+1})$ jätetään pois $(\underline{\mathcal{A}}^n, \underline{a}^n)$. Vastaavat alleviivatut mallit saadaan näistä malleista asettamalla p todeksi erotetussa pisteessä. Kuva 4.2 havainnollistaa tätä konstruktiota.



Kuva 4.2

Tässä luvussa tutkittava, tiiviystuloksen osoittava ominaisuus on $\mathrm{Mod}(\delta_n)$. Osoitetaan, että kaikilla joukon $\mathbb{A}^n$ pistemalleilla on tämä ominaisuus, ja että millään joukon $\mathbb{B}^n$ pistemallilla ei ole tätä ominaisuutta. Todistus seuraa lähteen [4] todistusta täydentäen perusteluja.

Lause 4.4. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin kaava δ_n erottaa joukot $\mathbb{A}^n$ ja $\mathbb{B}^n$.*

Todistus. Muutetaan ensin kaavat δ_n ekvivalenteiksi ML-kaavoiksi δ'_n. Asetetaan $\delta'_1 = \delta_1$ ja $\delta'_{n+1} = \delta'_n \wedge \Diamond(\delta'_n \wedge p) \wedge \Diamond(\delta'_n \wedge \neg p)$. Osoitetaan induktiolla, että $\delta'_n \equiv \delta_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Tapaus $n = 1$ on selvä. Tehdään induktio-oletus $\delta'_n \equiv \delta_n$ ja käytetään Lausetta 4.3:

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \langle\delta_n\rangle\delta_1 \equiv \langle\delta'_n\rangle(\Diamond p \wedge \Diamond\neg p) \equiv \langle\delta'_n\rangle\Diamond p \wedge \langle\delta'_n\rangle\Diamond\neg p \\ &\equiv \delta'_n \wedge \Diamond\langle\delta'_n\rangle p \wedge \Diamond\langle\delta'_n\rangle\neg p \equiv \delta'_n \wedge \Diamond(\delta'_n \wedge p) \wedge \Diamond(\delta'_n \wedge \neg p) = \delta'_{n+1}.\end{aligned}$$

Todistetaan sitten induktiolla luvun n suhteen, että jokaisella $1 \leq j \leq n$ pätee $\mathbb{A}^n \vDash \delta'_j$ ja $\underline{\mathbb{A}}^n \vDash \delta'_j$. Kun $n = 1$, niin tämä on helppoa nähdä.

Olkoon sitten $n > 1$ ja tehdään induktio-oletus, että väite pätee luvulle $n-1$. Osoitetaan sitten tälle kiinteälle luvulle n induktiolla luvun $1 \leq j \leq n$ suhteen, että $\mathbb{A}^n \vDash \delta'_j$.

Tapaus $j = 1$ on jälleen selvä. Tehdään induktio-oletus, että $\mathbb{A}^n \vDash \delta'_{j-1}$. Luvun n induktio-oletuksen nojalla $(\mathcal{A}^{n-1}, a^{n-1}) \vDash \delta'_{j-1}$ ja $(\underline{\mathcal{A}}^{n-1}, \underline{a}^{n-1}) \vDash \delta'_{j-1}$. Toisaalta mallien konstruktion perusteella tiedetään, että $(\mathcal{A}^{n-1}, a^{n-1}) \vDash \neg p$ ja $(\underline{\mathcal{A}}^{n-1}, \underline{a}^{n-1}) \vDash p$. Saadaan siis

$$(\mathcal{A}^{n-1}, a^{n-1}) \vDash \delta'_{j-1} \wedge \neg p \text{ ja } (\underline{\mathcal{A}}^{n-1}, \underline{a}^{n-1}) \vDash \delta'_{j-1} \wedge p.$$

Yhdistämällä tämä ja luvun j induktio-oletus saadaan

$$(\mathcal{A}^n, a^n) \vDash \delta'_{j-1} \wedge \Diamond(\delta'_{j-1} \wedge p) \wedge \Diamond(\delta'_{j-1} \wedge \neg p)$$

eli $\mathbb{A}^n \vDash \delta'_j$. Joukon $\underline{\mathbb{A}}^n$ tapaus on samanlainen.

Osoitetaan vielä, että $\mathbb{B}^n \vDash \neg\delta'_n$ ja $\underline{\mathbb{B}}^n \vDash \neg\delta'_n$. Tarkastellaan pistemallia $(\mathcal{B}^n_1, b^n_1)$; muiden mallien tapaukset ovat samanlaisia. Kun $n = 1$, niin on helppo nähdä, että $(\mathcal{B}^1_1, b^1_1) \vDash \neg\delta'_1$.

Olkoon $n > 1$. Osoitetaan, että $(\mathcal{B}^n_1, b^n_1) \vDash \neg\Diamond(\delta'_{n-1} \wedge \neg p)$. Induktio-oletuksen mukaan $\mathbb{B}^{n-1} \vDash \neg\delta'_{n-1}$ ja $\underline{\mathbb{B}}^{n-1} \vDash \neg\delta'_{n-1}$, joten näiden joukkojen mallit eivät toteuta kaavaa $\delta'_{n-1} \wedge \neg p$. Toisaalta $(\underline{\mathcal{A}}^{n-1}, \underline{a}^{n-1}) \vDash p$, joten joukon $\underline{\mathbb{A}}^{n-1}$ ainoa malli ei myöskään toteuta kaavaa $\delta'_{n-1} \wedge \neg p$. Koska

$$\Box(\mathcal{B}^n_1, b^n_1) = \underline{\mathbb{A}}^{n-1} \cup \mathbb{B}^{n-1} \cup \underline{\mathbb{B}}^{n-1},$$

niin $(\mathcal{B}^n_1, b^n_1) \vDash \neg\Diamond(\delta'_{n-1} \wedge \neg p)$. Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}^n_2, b^n_2) &\vDash \neg\Diamond(\delta'_{n-1} \wedge p), \\ (\underline{\mathcal{B}}^n_1, \underline{b}^n_1) &\vDash \neg\Diamond(\delta'_{n-1} \wedge \neg p) \\ \text{ja } (\underline{\mathcal{B}}^n_2, \underline{b}^n_2) &\vDash \neg\Diamond(\delta'_{n-1} \wedge p).\end{aligned}$$

Koska $\delta'_n = \delta'_{n-1} \wedge \Diamond(\delta'_{n-1} \wedge p) \wedge \Diamond(\delta'_{n-1} \wedge \neg p)$, niin $\mathbb{B}^n \vDash \neg\delta'_n$ ja $\underline{\mathbb{B}}^n \vDash \neg\delta'_n$.

On osoitettu erityisesti, että $\mathbb{A}^n \vDash \delta'_n$ ja $\mathbb{B}^n \vDash \neg\delta'_n$, joten δ'_n ja siten myös δ_n erottaa joukot $\mathbb{A}^n$ ja $\mathbb{B}^n$. $\square$

4.3 ML-kaavojen eksponentiaalinen pituus

Tarkastellaan seuraavaksi kaavan pituuspeliä $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}^n, \mathbb{B}^n)$. Tavoitteena on osoittaa, että pelaaja II voittaa pelin, jos $m + k < 2^n$. Aloitetaan aputuloksilla. Kootaan Lemmoihin 4.5 ja 4.6 tilanteita ja siirtoja, joilla pelaaja I häviää pelin varmasti, kunhan pelaaja II pelaa oikein.

Lemma 4.5. *Jos* $\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{A}$ *ja* $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{B}$*, ja pelaaja* I *aloittaa pelin* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *seuraajasiirrolla, niin pelaaja* II *voittaa pelin. Sama pätee jos joukot* $\mathbb{A}^n$ *ja* $\mathbb{B}^n$ *korvataan joukoilla* $\underline{\mathbb{A}}^n$ *ja* $\underline{\mathbb{B}}^n$*.*

Todistus. Todetaan ensin, että koska mallit $(\mathcal{A}^n, a^n)$ ja $(\mathcal{B}_1^n, b_1^n)$ ovat propositioiden suhteen ekvivalentit, niin Lemman 2.25 nojalla pelaaja I ei voita peliä ilman siirtoja.

Oletetaan, että pelaaja I aloittaa pelin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ vasemmalla seuraajasiirrolla valiten funktion $f : \mathbb{A} \to \Box\mathbb{A}$, jolle $f(\mathcal{A}, w) \in \Box(\mathcal{A}, w)$ kaikilla $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}$. Erityisesti $f(\mathcal{A}^n, a^n) \in \Box(\mathcal{A}^n, a^n)$. Toisaalta joukkojen $\mathbb{A}^n$ ja $\mathbb{B}^n$ määritelmien mukaan pätee (bisimilaarisuutta vaille, ks. Huomautus 2.8) $\Box\mathbb{A}^n = \Box\mathbb{B}^n$. Siis

$$\Box(\mathcal{A}^n, a^n) = \Box\mathbb{A}^n = \Box\mathbb{B}^n \subseteq \Box\mathbb{B},$$

joten $f(\mathcal{A}^n, a^n) \in \Box\mathbb{B}$ ja jatkotilanteessa $(m-1, k, \Diamond_f\mathbb{A}, \Box\mathbb{B})$ pelin eri puolilla on bisimilaariset pistemallit. Seurauksen 3.5 nojalla pelaajalla II on voittostrategia tästä tilanteesta.

Oikean seuraajasiirron tapauksessa vastaavasti $g(\mathcal{B}_1^n, b_1^n) \in \Box\mathbb{A}$, ja jälleen Seurauksen 3.5 nojalla pelaaja II voittaa. Joukkojen $\underline{\mathbb{A}}^n$ ja $\underline{\mathbb{B}}^n$ tapaus on samanlainen. □

Lemma 4.6. *(a) Jos* $\mathbb{A}^{n+1} \subseteq \mathbb{A}$ *ja* $(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1}) \in \mathbb{B}$*, ja pelaaja* I *aloittaa pelin* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *oikealla seuraajasiirrolla tai sellaisella vasemmalla seuraajasiirrolla, että* $f(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) \neq (\mathcal{A}^n, a^n)$*, niin pelaaja* II *voittaa pelin.*

(b) Jos $\mathbb{A}^{n+1} \subseteq \mathbb{A}$ *ja* $(\mathcal{B}_2^{n+1}, b_2^{n+1}) \in \mathbb{B}$*, ja pelaaja* I *aloittaa pelin* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *oikealla seuraajasiirrolla tai sellaisella vasemmalla seuraajasiirrolla, että* $f(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) \neq (\underline{\mathcal{A}}^n, \underline{a}^n)$*, niin pelaaja* II *voittaa pelin.*

Todistus. Todistetaan vain kohta (a), sillä kohta (b) on vastaavanlainen. Samoin kuin edellisessä lemmassa, pelaaja I ei voita peliä ilman siirtoja.

Oikean seuraajasiirron tapauksessa koska $\Box(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1}) \subseteq \Box\mathbb{A}^{n+1}$, niin saadaan $g(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1}) \in \Box\mathbb{A}$, ja Seurauksen 3.5 nojalla pelaaja II voittaa.

Vasenta seuraajasiirtoa tarkasteltaessa huomataan, että koska

$$f(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) \in \Box(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) \text{ ja } f(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) \neq (\underline{\mathcal{A}}^n, \underline{a}^n),$$

niin $f(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) \in \Box(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) \setminus (\mathcal{A}^n, a^n) = \Box(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1})$, joten pelaaja II voittaa. □

Näistä lemmoista huomataan, että pelaajan I valinnat seuraavan siirron suhteen ovat hyvin rajoitetut, kun joukkojen $\mathbb{A}^n$ ja $\mathbb{B}^n$ malleja on pelitilanteessa mukana. Mallijoukot onkin suunniteltu juuri pakottamaan pelaaja I tekemään pelissä tiettyjä siirtoja ja kasvattamaan näin joukkojen erottamiseen vaadittavan kaavan kokoa. Seuraavassa lauseessa käydään läpi koko pelin kulku.

Lause 4.7. *Jos* $m, k \in \mathbb{N}$ *ja* $m + k < 2^n$, *niin pelaajalla* II *on voittostrategia peliin* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}^n, \mathbb{B}^n)$.

Todistus. Todistetaan induktiolla luvun n suhteen vahvempi väite: jos $\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{A}$, $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{B}$ tai $\underline{\mathbb{A}}^n \subseteq \mathbb{A}$, $\underline{\mathbb{B}}^n \subseteq \mathbb{B}$, ja $m+k < 2^n$, niin pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Kun $n = 1$, niin oletetaan, että $m + k < 2$. Lemman 4.5 nojalla, jos pelaaja I aloittaa seuraajasiirrolla, niin pelaaja II voittaa pelin. Jos taas pelaaja I tekee jakosiirron, niin pelaaja II voi valita jatkotilanteen niin, että molemmilla puolilla säilyvät propositioiden suhteen ekvivalentit mallit ja pelaaja II voittaa pelaajan I resurssien loppumisen vuoksi.

Oletetaan sitten, että väite pätee luvulla n ja osoitetaan väite luvulle $n+1$. Pelaaja I voi tehdä pelin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ alussa vasempia jakosiirtoja. Tällöin pelaaja II voi kunkin siirron jälkeen valita sellaisen jatkotilanteen $(m', k', \mathbb{A}', \mathbb{B})$, että $\mathbb{A}^{n+1} \subseteq \mathbb{A}'$, sillä joukko $\mathbb{A}^{n+1}$ on yksiö. Pelaaja I ei voi voittaa peliä pelkillä vasemmilla jakosiirroilla, sillä pelin eri puolet sisältävät tällöin propositioiden suhteen ekvivalentit pistemallit. Lisäksi pelin konnektiiviaste vähenee jokaisessa jakosiirrossa. Peli jatkuu siis riippumatta mahdollisista vasemmista jakosiirroista tilanteesta $(m', k', \mathbb{A}', \mathbb{B})$, jossa oletukset ovat edelleen voimassa.

Jos pelaaja I jatkaa tilanteesta $(m', k', \mathbb{A}', \mathbb{B})$ seuraajasiirrolla, niin Lemman 4.5 nojalla pelaaja II voittaa pelin. Oletetaan sitten, että pelaaja I jatkaa peliä oikealla jakosiirrolla valiten luvut m_1, m_2, k_1, k_2 ja joukot $\mathbb{B}'$ ja $\mathbb{B}''$. Jos pätee $\mathbb{B}^{n+1} \subseteq \mathbb{B}'$ tai $\mathbb{B}^{n+1} \subseteq \mathbb{B}''$, niin pelaaja II voi valita jatkotilanteen niin, että oletukset säilyvät, kuten vasempien jakosiirtojen tapauksessa. Oletetaan siis, että $\mathbb{B}^{n+1} \nsubseteq \mathbb{B}'$ ja $\mathbb{B}^{n+1} \nsubseteq \mathbb{B}''$. Voidaan olettaa symmetrian nojalla, että $(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1}) \in \mathbb{B}'$ ja $(\mathcal{B}_2^{n+1}, b_2^{n+1}) \in \mathbb{B}''$. Nyt on oltava $m_1 + k_1 < 2^n$ tai $m_2 + k_2 < 2^n$, sillä muutoin olisi

$$m + k = m_1 + k_1 + m_2 + k_2 + 1 \geq 2^n + 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1,$$

mikä olisi ristiriidassa oletuksen kanssa. Pelaajan II strategia on valita se tilanne, jolle epäyhtälö $m_i + k_i < 2^n$ pätee. Oletetaan symmetrian nojalla, että $m_1 + k_1 < 2^n$, jolloin pelaaja II valitsee jatkotilanteen $(m_1, k_1, \mathbb{A}', \mathbb{B}')$.

Nyt pelitilanteelle pätevät siis oletukset $\mathbb{A}^{n+1} \subseteq \mathbb{A}'$, $(\mathcal{B}_1^{n+1}, b_1^{n+1}) \in \mathbb{B}'$ ja $m_1 + k_1 < 2^n$. Jos pelaaja I jatkaa peliä jakosiirroilla, niin pelaaja II voi valita jatkotilanteen niin, että nämä oletukset säilyvät ja pelaaja I ei voita peliä. Olkoon $(m'', k'', \mathbb{A}'', \mathbb{B}'')$ pelin tilanne mahdollisten jakosiirtojen jälkeen.

Jos pelaaja I jatkaa tästä tilanteesta oikealla seuraajasiirrolla tai vasemmalla seuraajasiirrolla, jolle $f(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) \neq (\mathcal{A}^n, a^n)$, niin Lemman 4.6 nojalla pelaaja II voittaa. Oletetaan siis, että pelaaja I jatkaa vasemmalla seuraajasiirrolla valiten sellaisen funktion $f : \mathbb{A}'' \to \Box\mathbb{A}''$, että $f(\mathcal{A}, w) \in \Box(\mathcal{A}, w)$ kaikilla

$(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}''$ ja $f(\mathcal{A}^{n+1}, a^{n+1}) = (\mathcal{A}^n, a^n)$. Jatkotilanteessa $(m'', k'', \Diamond_f \mathbb{A}'', \Box \mathbb{B}'')$ pätee nyt $\mathbb{A}^n \subseteq \Diamond_f \mathbb{A}''$ ja $\mathbb{B}^n \subseteq \Box \mathbb{B}''$. Lisäksi

$$m'' - 1 + k'' < m'' + k'' < m_1 + k_1 < 2^n,$$

joten induktio-oletuksen nojalla pelaaja II voittaa pelin tästä tilanteesta.

Joukkojen $\underline{\mathbb{A}}^n$ ja $\underline{\mathbb{B}}^n$ tapaus todistetaan vastaavasti. $\Box$

Edellisestä todistuksesta huomataan, että tiettyjen mallien läsnäolo toimi tietynlaisena lokaalina invarianttina. Pelaajalla I oli vain yksi mahdollinen siirto, jolla päästä eroon näistä malleista, ja kyseinen siirto johti toisen yhtä pakottavan lokaalin invariantin piiriin. Nyt voidaan koota haluttu tiiviystulos.

Lause 4.8. *Julkisen tiedon logiikka on eksponentiaalisesti tiiviimpi kuin modaalilogiikka.*

Todistus. Tarkastellaan pistemallien luokkia $\mathrm{Mod}(\delta_n)$. Kaava δ_n ja Lauseen 4.4 todistuksessa määritelty ekvivalentti modaalilogiikan kaava δ'_n määrittelevät tietenkin luokan $\mathrm{Mod}(\delta_n)$. Aiemmin on todettu, että kaavan δ_n pituus on lineaarinen parametrin n suhteen. Toisaalta Lauseen 4.4 nojalla $\mathbb{A}^n \subseteq \mathrm{Mod}(\delta_n)$ ja $\mathbb{B}^n \subseteq \overline{\mathrm{Mod}(\delta_n)}$. Lisäksi, Lauseen 4.7 nojalla, jos $m+k < 2^n$, niin pelaaja II voittaa kaavan pituuspelin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{A}^n, \mathbb{B}^n)$. Täten Lauseen 3.2 nojalla ei ole olemassa modaalilogiikan kaavaa φ_n, joka erottaa joukot $\mathbb{A}^n$ ja $\mathbb{B}^n$ ja jolle $s(\varphi_n) < 2^n$. Siis Lauseen 3.6 nojalla ei ole modaalilogiikan kaavaa φ_n, joka määrittelee ominaisuuden $\mathrm{Mod}(\delta_n)$, ja jolle $s(\varphi_n) < 2^n$. Siis ominaisuus $\mathrm{Mod}(\delta_n)$ on ilmaistavissa molemmissa logiikoissa, mutta julkisen tiedon logiikassa se onnistuu lineaarisen mittaisella kaavalla ja modaalilogiikassa vaaditaan eksponentiaalisen mittainen kaava. $\Box$

5 FO on epäelementaarisesti tiiviimpi kuin ML

Tarkastellaan tässä luvussa tapausta $\Phi = \emptyset$. Tarkasteltavissa modaalilogiikan kaavoissa ei siis ole propositiosymboleja. Tällöin ainoat pelin voittoehdossa sallitut kaavat ovat $\perp$ ja $\top$ ja näin ollen pelaaja I voittaa pelin, jos $\mathbb{A} = \emptyset$ ja $\mathbb{B} \neq \emptyset$, tai jos $\mathbb{A} \neq \emptyset$ ja $\mathbb{B} = \emptyset$. Pistemallien valuaatio on tässä tapauksessa tyhjä kuvaus, joten on mielekästä puhua pistemallien sijaan pistekehyksistä.

5.1 Bisimulaatioinvariantti ominaisuus pistekehyksille

Tässä luvussa määritellään ominaisuus, jota käytetään osoittamaan tiiviystulos predikaattilogiikan ja modaalilogiikan välille. Lisäksi osoitetaan, että kyseinen ominaisuus on predikaattilogiikassa määriteltävissä verrattaen lyhyellä kaavalla ja bisimulaatioinvarianttina ominaisuutena määriteltävissä myös modaalilogiikassa.

Merkintä 5.1. Olkoon $\mathbb{A}_n$ niiden pistekehysten $(\mathcal{A}, w)$ luokka, joille kaikki pistekehykset $(\mathcal{A}, u), (\mathcal{A}, v) \in \Box(\mathcal{A}, w)$ ovat keskenään n-bisimilaariset. Olkoon lisäksi $\mathbb{B}_n$ luokan $\mathbb{A}_n$ komplementti.

Annetaan seuraavassa lemmassa predikaattilogiikan kaava φ_n, joka määrittelee ominaisuuden $\mathbb{A}_n$. Kaavan pituus on suuruusluokaltaan 2^n, mutta myöhemmin huomataan, että tämä jää vielä pieneksi verrattuna vaaditun modaalilogiikan kaavan kokoon.

Lemma 5.2. *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa kaava $\varphi_n(x) \in \mathrm{FO}$, joka erottaa luokat $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$, ja jonka pituus on eksponentiaalinen n:n suhteen.*

Todistus. Määritellään ensin FO-kaavat $\psi_n(x, y)$, joille pätee

$$(\mathcal{M}, u) \text{ ja } (\mathcal{M}, v) \text{ ovat } n\text{-bisimilaariset, jos ja vain jos } \mathcal{M} \vDash \psi_n[u/x, v/y].$$

Määritellään kaavat $\psi_n(x, y)$ rekursiolla:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &:= \exists s R(x, s) \leftrightarrow \exists t R(y, t) \\ \psi_{n+1}(x, y) &:= \forall s(R(x, s) \to \exists t(R(y, t) \land \psi_n(s, t)) \\ &\qquad \land \forall t(R(y, t) \to \exists s(R(x, s) \land \psi_n(s, t)) \end{aligned}$$

Tässä ekvivalenssi ja implikaatio tulkitaan lyhennysmerkinnöiksi. Selvästi kaavat $\psi_n(x, y)$ ilmaisevat n-bisimilaarisuuden halutulla tavalla. Lisäksi

$$\mathrm{s}(\psi_1(x, y)) = 11 \text{ ja } \mathrm{s}(\psi_{n+1}(x, y)) = 2 \cdot \mathrm{s}(\psi_n(x, y)) + 13.$$

Ratkaisemalla tämä differenssiyhtälö saadaan $\mathrm{s}(\psi_n) = 3 \cdot 2^{n+2} - 13$.

Määritellään sitten kaavat $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n(x) := \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(x,z) \to \psi_n(y,z)).$$

Selvästi jokaisella $(\mathcal{A}, w) \in \mathbb{A}_n$ pätee $\mathcal{A} \vDash \varphi_n[w/x]$ ja jokaisella $(\mathcal{B}, w) \in \mathbb{B}_n$ pätee $\mathcal{B} \vDash \neg\varphi_n[w/x]$, joten $\varphi_n(x)$ erottaa luokat $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$. Lisäksi

$$\mathrm{s}(\varphi_n(x)) = \mathrm{s}(\psi_n(x,y)) + 6 = 3 \cdot 2^{n+2} - 7,$$

joten kaavan $\varphi_n(x)$ pituus on eksponentiaalinen n:n suhteen. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että ominaisuus $\mathbb{A}_n$ on ylimalkaan määriteltävissä modaalilogiikassa. Aloitetaan aputuloksella.

Lemma 5.3. *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ kaava φ_n on $(n+1)$-bisimulaatioinvariantti.*

Todistus. Olkoot $(\mathcal{A}, w)$ ja $(\mathcal{B}, v)$ $(n+1)$-bisimilaarisia pistekehyksiä. Oletetaan, että $\mathcal{A} \vDash \varphi_n[w/x]$. Jos $(\mathcal{B}, v_1), (\mathcal{B}, v_2) \in \Box(\mathcal{B}, v)$, niin $(n+1)$-bisimilaarisuuden nojalla on olemassa sellaiset $(\mathcal{A}, w_1), (\mathcal{A}, w_2) \in \Box(\mathcal{A}, w)$, että $(\mathcal{A}, w_1) \leftrightarroweq_n (\mathcal{B}, v_1)$ ja $(\mathcal{A}, w_2) \leftrightarroweq_n (\mathcal{B}, v_2)$. Koska $\mathcal{A} \vDash \varphi_n[w/x]$, niin saadaan

$$(\mathcal{B}, v_1) \leftrightarroweq_n (\mathcal{A}, w_1) \leftrightarroweq_n (\mathcal{A}, w_2) \leftrightarroweq_n (\mathcal{B}, v_2),$$

joten $\mathcal{B} \vDash \psi_n[v_1/x, v_2/y]$. Siispä $\mathcal{B} \vDash \varphi_n[w/x]$. $\square$

Tämän aputuloksen ja van Benthemin karakterisaatiolauseen avulla saadaan haluttu modaalilogiikan kaava.

Seuraus 5.4. *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa kaavan $\varphi_n(x) \in \mathrm{FO}$ kanssa ekvivalentti kaava $\vartheta_n \in \mathrm{ML}$.*

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Edellisen lemman nojalla kaava $\varphi_n(x) \in \mathrm{FO}$ on $(n+1)$-bisimulaatioinvariantti, joten Lemman 2.14 nojalla se on myös bisimulaatioinvariantti. Täten van Benthemin karakterisaatiolauseesta (Lause 2.15) seuraa, että on olemassa kaava $\vartheta_n \in \mathrm{ML}$, joka on ekvivalentti kaavan φ_n kanssa. $\square$

5.2 Pistekehysten joukko-opillinen konstruktio

On määritelty ominaisuus $\mathbb{A}_n$ ja osoitettu, että se on ilmaistavissa predikaattilogiikassa ja modaalilogiikassa. Lisäksi tiedetään ominaisuuden ilmaisevan predikaattilogiikan kaavan pituus. Tutkitaan ominaisuuden $\mathbb{A}_n$ ilmaisemiseen tarvittavan modaalilogiikan kaavan pituutta kaavan pituuspelin avulla. Peliä ei ole kuitenkaan määritelty luokille, joten on ensin löydettävä sopivat luokkien $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$ osajoukot, joilla pelata peliä. Käytetään näiden konstruointiin joukko-opin kumulatiivista hierarkiaa. Kumulatiivista hierarkiaa ja transitiivisia joukkoja on käsitelty laajemmin esimerkiksi oppikirjassa [6].

Määritelmä 5.5. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. *Kumulatiivisen hierarkian lukua n vastaava taso* V_n määritellään rekursiolla seuraavasti

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \emptyset \\
V_{n+1} &= \mathcal{P}(V_n)
\end{aligned}
$$

Intutiivisesti joukko V_n sisältää kaikki sellaiset joukot, joissa on korkeintaan n paria sisäkkäisiä joukkosulkeita. Määritellään seuraavaksi transitiivisen joukon käsite ja osoitetaan, että kumulatiivisen hierarkian tasot ovat transitiivisia.

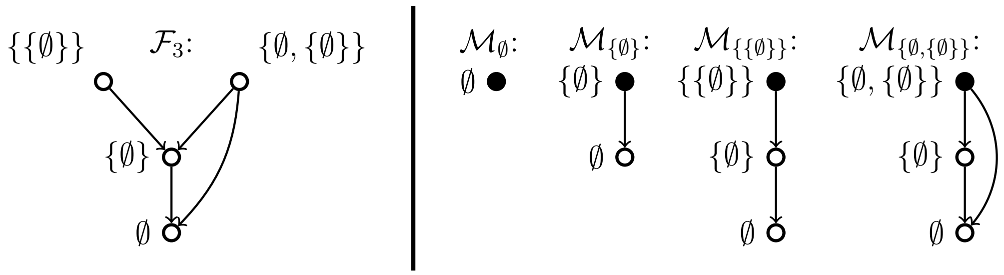
Määritelmä 5.6. Joukko A on *transitiivinen*, jos kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $b \in a$ pätee $b \in A$.

Lemma 5.7. *Kun $n \in \mathbb{N}$, joukko V_n on transitiivinen.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun $n \in \mathbb{N}$ suhteen. Selvästi $V_0 = \emptyset$ on transitiivinen. Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $a \in V_{n+1}$ ja $b \in a$. Nyt siis $a \in \mathcal{P}(V_n)$ eli $a \subseteq V_n$, joten $b \in V_n$. Olkoon $x \in b$. Nyt $x \in b \in V_n$ ja induktio-oletuksen nojalla V_n on transitiivinen, joten $x \in V_n$. Siis $b \subseteq V_n$ eli $b \in \mathcal{P}(V_n) = V_{n+1}$. Siis V_{n+1} on transitiivinen. $\square$

Liitetään nyt jokaiseen kumulatiivisen hierarkian tasoon Kripke-kehys seuraavasti: kun $n \in \mathbb{N}$, niin $\mathcal{F}_n = (V_n, R_n)$, missä $(a, b) \in R_n \Leftrightarrow b \in a$. Joukon V_n transitiivisuus takaa, että se on suljettu saavutettavuusrelaation R_n suhteen ja joukon V_n koko rakenne tulee mukaan määriteltyyn kehykseen.

Merkitään sitten jokaisen pisteen $a \in V_n$ generoimaa kehyksen $\mathcal{F}_n$ alipistekehystä merkinnällä $(\mathcal{M}_a, a)$. Pistekehyksen $(\mathcal{M}_a, a)$ universumi on siis joukon a transitiivinen sulkeuma, johon on lisätty erotetuksi pisteeksi itse joukko a. Kuvassa 5.1 on muodostettu kumulatiivisen hierarkian kolmatta tasoa vastaava Kripke-kehys $\mathcal{F}_3$ ja jokaisen sen alkion a generoima alipistekehys $(\mathcal{M}_a, a)$. Pistekehysten erotetut pisteet on merkitty kuvaan mustalla.



Kuva 5.1

Tarkasteltavana oleva ominaisuus $\mathbb{A}_n$ käsittelee pistekehyksen seuraajien n-bisimilaarisuutta, joten seuraavaksi todistetaan, että kumulatiivisen hierarkian tason kahden eri alkion virittämät alipistekehykset eivät ole koskaan n-bisimilaariset.

Lemma 5.8. *Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $a, b \in V_{n+1}$. Tällöin, jos $a \neq b$, niin pistekehykset $(\mathcal{M}_a, a)$ ja $(\mathcal{M}_b, b)$ eivät ole n-bisimilaarisia.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun $n \in \mathbb{N}$ suhteen. Tapaus $n = 0$ on triviaali, sillä joukossa $V_{0+1} = V_1$ on vain yksi alkio. Oletetaan sitten, että $n > 0$, $a, b \in V_{n+1}$ ja $a \neq b$. Oletetaan lisäksi vastoin väitettä, että $(\mathcal{M}_a, a)$ ja $(\mathcal{M}_b, b)$ ovat n-bisimilaarisia. Koska $a \neq b$, voidaan symmetrian nojalla olettaa, että on olemassa $x \in a$ s.e. $x \notin b$. Koska $(\mathcal{M}_a, a) \leftrightarrows_n (\mathcal{M}_b, b)$, niin on olemassa sellainen $y \in b$, että $(\mathcal{M}_x, x) \leftrightarrows_{n-1} (\mathcal{M}_y, y)$. Koska $x \in a \in V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$, niin $x \in a \subseteq V_n$, joten $x \in V_n$. Vastaavasti $y \in V_n$. Induktio-oletuksen nojalla saadaan, että $x = y$, mikä on ristiriita, sillä $x \notin b$ ja $y \in b$. $\square$

Nyt voidaan määritellä pistekehysten joukot, joilla kaavan pituuspeliä jatkossa pelataan.

Merkintä 5.9. Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät, kun $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_n =& \{\triangle\{(\mathcal{M}_a, a)\} \mid a \in V_{n+1}\} \\
\mathbb{D}_n =& \{\triangle\{(\mathcal{M}_a, a), (\mathcal{M}_b, b)\} \mid a, b \in V_{n+1}, a \neq b\}.
\end{aligned}$$

Huomataan, että joukon $\mathbb{D}_n$ tapauksessa liitettävät pistekehykset eivät ole erillisiä, kuten Merkinnässä 2.2 vaaditaan. Tässä tapauksessa tämä ei kuitenkaan ole ongelma, sillä pistekehyksissä ei ole valuaatiota ja molemmat liitettävät pistekehykset ovat Kripke-kehyksen $\mathcal{F}_n$ generoituja alipistekehyksiä, joten niiden saavutettavuusrelaatiot ovat yhteisten alkioiden kohdalla samat. Pistekehykset voitaisiin myös erillistää, jolloin päädyttäisiin bisimilaariseen lopputulokseen.

Todistetaan seuraavassa lemmassa jatkoa varten, että kumulatiivisen hierarkian tasot, ja näin ollen myös joukot $\mathbb{C}_n$, ovat kooltaan varsin suuria.

Lemma 5.10. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $|\mathbb{C}_n| = |V_{n+1}| = \mathrm{tower}(n)$.*

Todistus. Huomataan ensin, että joukon $\mathbb{C}_n$ määritelmän mukaan sen alkiot ovat yksi yhteen vastaavuudessa joukon V_{n+1} alkioiden kanssa, joten saadaan $|\mathbb{C}_n| = |V_{n+1}|$.

Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Tapauksessa $n = 0$ saadaan $|V_{0+1}| = |\{\emptyset\}| = 1 = \mathrm{tower}(0)$. Kun $n > 0$, niin $|V_{n+1}| = |\mathcal{P}(V_n)| = 2^{|V_n|}$, mistä induktio-oletuksen nojalla saadaan $|V_{n+1}| = 2^{\mathrm{tower}(n-1)} = \mathrm{tower}(n)$. $\square$

5.3 Graafin väritysluku kaavan pituuspelin invarianttina

Sopivat malliluokat kaavan pituuspelin pelaamiseen on määritelty ja seuraavaksi tarvitaan argumentteja pelin kulusta. Sopivan invariantin määrittelyyn tarvitaan hieman graafiteoriaa. Aloitetaan graafin värityksen ja väritysluvun käsitteillä. Näitä käsitteitä ja graafiteoriaa yleensä käsitellään esimerkiksi kirjassa [12].

Määritelmä 5.11. Olkoon $\mathcal{G} = (V, E)$ graafi ja C joukko. Kuvaus $\chi : V \to C$ on graafin $\mathcal{G}$ *väritys*, jos kaikilla $u, v \in V$ pätee, että jos $(u, v) \in E$, niin $\chi(u) \neq \chi(v)$. Jos $k \in \mathbb{N}$ ja $|C| = k$, niin χ on graafin $\mathcal{G}$ *k-väritys*.

Graafin $\mathcal{G}$ *värityslukus* $\chi(G)$ on pienin luku $k \in \mathbb{N}$, jolle on olemassa graafin $\mathcal{G}$ k-väritys.

Tutkitaan seuraavaksi, miten graafin jakaminen osiin solmujen tai särmien suhteen vaikuttaa värityslukuihin.

Lemma 5.12. *Olkoon $\mathcal{G} = (V, E)$ graafi.*

1. *Olkoot $V_1, V_2 \subseteq V$ epätyhjiä s.e. $V_1 \cup V_2 = V$ ja olkoot $\mathcal{G}_1 = (V_1, E \restriction V_1)$ ja $\mathcal{G}_2 = (V_2, E \restriction V_2)$. Tällöin $\chi(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G}_1) + \chi(G_2)$.*

2. *Olkoot $E_1, E_2 \subseteq E$ s.e. $E_1 \cup E_2 = E$ ja olkoot $\mathcal{G}_1 = (V, E_1)$ ja $\mathcal{G}_2 = (V, E_2)$. Tällöin $\chi(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G}_1)\chi(\mathcal{G}_2)$.*

Todistus.

1. Merkitään $k_1 = \chi(\mathcal{G}_1)$ ja $k_2 = \chi(\mathcal{G}_2)$. Olkoon $\chi_1 : V_1 \to \{1, \ldots, k_1\}$ graafin $\mathcal{G}_1$ k_1-väritys ja $\chi_2 : V_2 \to \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$ graafin $\mathcal{G}_2$ k_2-väritys. Nyt $\chi = \chi_1 \cup (\chi_2 \restriction (V_2 \setminus V_1))$ on graafin $\mathcal{G}$ $k_1 + k_2$-väritys. Nimittäin, jos graafin $\mathcal{G}$ naapurisolmut $v, w \in V$ kuuluvat molemmat joukkoon V_1, niin koska χ_1 on graafin $\mathcal{G}_1$ väritys, niin v ja w ovat eri värisiä. Vastaavasti jos $v, w \in V_2 \setminus V_1$, niin ne ovat eri värisiä. Jos taas $v \in V_1$ ja $w \in V_2 \setminus V_1$, niin $\chi(v) \in \{1, \ldots, k_1\}$ ja $\chi(w) \in \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$, joten v ja w ovat eri värisiä. Siis graafin $\mathcal{G}$ voi värittää $k_1 + k_2$ värillä ja täten $\chi(\mathcal{G}) \leq k_1 + k_2 = \chi(\mathcal{G}_1) + \chi(\mathcal{G}_2)$.

2. Olkoot $\chi_1 : V \to \{1, \ldots, k_1\}$ ja $\chi_2 : V \to \{1, \ldots, k_2\}$ graafien $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ värityksiä. Nyt kuvaus
$$\chi : V \to \{1, \ldots, k_1\} \times \{1, \ldots, k_2\},\ \chi(v) = (\chi_1(v), \chi_2(v))$$
on graafin $\mathcal{G}$ väritys. Nimittäin, jos $v, w \in V$ ovat naapurisolmuja graafissa $\mathcal{G}$, niin $(v, w) \in E = E_1 \cup E_2$. Jos $(v, w) \in E_1$, niin $\chi_1(v) \neq \chi_1(w)$. Jos taas $(v, w) \in E_2$, niin $\chi_2(v) \neq \chi_2(w)$. Kummassakin tapauksessa pätee
$$\chi(v) = (\chi_1(v), \chi_2(v)) \neq (\chi_1(w), \chi_2(w)) = \chi(w),$$
joten solmut v ja w ovat eri väriset. Siis graafin $\mathcal{G}$ voi värittää
$$|\{1, \ldots, k_1\} \times \{1, \ldots, k_2\}| = k_1 k_2 = \chi(\mathcal{G}_1)\chi(\mathcal{G}_2)$$
värillä, joten $\chi(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G}_1)\chi(\mathcal{G}_2)$. □

Sovelletaan nyt näitä graafiteoreettisia tarkasteluja tarkasteltavaan kaavan pituuspeliin. Määritellään ensin pelitilanteen pistekehysjoukoille graafi seuraavasti.

Merkintä 5.13. Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}_n$ ja $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}_n$. Merkitään $\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}) = (V, E)$, missä

$$V = \{(\mathcal{M}, w) \mid \triangle\{(\mathcal{M}, w)\} \in \mathbb{V}\}$$
$$\text{ja } E = \{((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w')) \in V \times V \mid \triangle\{(\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w')\} \in \mathbb{E}\}.$$

Tulkitaan joukon $\{(\mathcal{M}_a, a) \mid a \in V_n\}$ alkiot solmuiksi. Koska joukon $\mathbb{C}_n$ pistekehykset ovat muotoa $\triangle\{(\mathcal{M}_a, a)\}$, niin jokaista niistä vastaa yksikäsitteinen tämän joukon alkio ja joukon $\mathbb{C}_n$ pistekehykset voidaan tulkita solmuiksi. Joukon $\mathbb{D}_n$ pistekehykset taas ovat muotoa $\triangle\{(\mathcal{M}_a, a), (\mathcal{M}_b, b)\}$, missä $a \neq b$, joten ne voidaan tulkita särmiksi. Tarkastetaan seuraavassa lemmassa, että näin määritelty rakenne todella on graafi.

Lemma 5.14. *Jos $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}_n$ ja $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}_n$, niin $\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ on graafi.*

Todistus. Koska $\emptyset \neq \mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}_n$, niin on olemassa $\triangle\{(\mathcal{M}, w)\} \in \mathbb{V}$, jolloin $(\mathcal{M}, w) \in V$ ja $V \neq \emptyset$. Selvästi E on joukon V kaksipaikkainen relaatio. Jos $((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w')) \in E$, niin $\triangle\{(\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w')\} \in \mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}_n$, joten saadaan $(\mathcal{M}, w) \neq (\mathcal{M}', w')$. Siis E on irrefleksiivinen. Toisaalta selvästi

$$\triangle\{(\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w')\} = \triangle\{(\mathcal{M}', w'), (\mathcal{M}, w)\},$$

joten E on symmetrinen. Siis $\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}) = (V, E)$ on graafi. $\square$

Tätä pelitilanteen pistekehyksiin perustuvaa graafia apuna käyttäen voidaan nyt määritellä sopiva invariantti kaavan pituuspelin hallintaan. Invariantti on ehto, joka takaa pelaajan II voiton, ja jonka pelaaja II voi säilyttää pelaajan I siirroista riippumatta. Seuraavassa lauseessa huomataan, että riittävä ehto pelaajan II voittoon pelissä $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ on $k < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})))$, missä k on pelin konnektiiviaste.

Lause 5.15. *Olkoot $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}_n$, $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}_n$, $\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})) \geq 2$ ja $k < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})))$. Tällöin pelaajalla* II *on voittostrategia peliin* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ *kaikilla $m \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Olkoot $n, m, k \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \mathbb{V} \subseteq \mathbb{C}_n$, $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}_n$ $\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})) \geq 2$ ja $k < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})))$. Todistetaan tulos induktiolla luvun k suhteen.

Jos $k = 0$, niin pelaaja I voi tehdä vain seuraajasiirtoja. Koska pätee $\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})) \geq 2$, niin löydetään solmut $(\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w') \in V$, joiden välillä on särmä $((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w')) \in E$. Tällöin

$$\triangle\{(\mathcal{M}, w)\}, \triangle\{(\mathcal{M}', w')\} \in \mathbb{V} \text{ ja } \triangle\{(\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w')\} \in \mathbb{E}.$$

Jos pelaaja I tekee vasemman tai oikean seuraajasiirron, niin jatkotilanteessa $(m-1, k, \mathbb{V}', \mathbb{E}')$ pätee $(\mathcal{M}, w) \in \mathbb{V} \cap \mathbb{E}$ tai $(\mathcal{M}', w') \in \mathbb{V} \cap \mathbb{E}$ (bimilaarisuutta vaille, ks. Huomautus 2.8). Pelin molemmilla puolilla on siis keskenään bisimilaariset mallit ja Seurauksen 3.5 nojalla pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m-1,k}(\mathbb{V}', \mathbb{E}')$.

Oletetaan sitten, että $k > 0$. Jos pelaaja I aloittaa pelin seuraajasiirrolla, niin vastaavasti kuin yllä, pelaaja II voittaa.

Oletetaan, että pelaaja I aloittaa pelin vasemmalla jakosiirrolla $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ja $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \subseteq \mathbb{V}$. Jos $\mathbb{V}_1 = \emptyset$, niin $\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$ ja saadaan

$$k_2 < k < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})) = \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_2, \mathbb{E})).$$

Tällöin induktio-oletuksen nojalla pelaaja II voittaa pelin. Oletetaan siis symmetrian nojalla, että $\mathbb{V}_1 \neq \emptyset$ ja $\mathbb{V}_2 \neq \emptyset$. Merkitään

$$\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}) = (V, E),\ \mathcal{G}(\mathbb{V}_1, \mathbb{E}) = (V_1, E_1) \text{ ja } \mathcal{G}(\mathbb{V}_2, \mathbb{E}) = (V_2, E_2).$$

Nyt $\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$, joten $V_1 \cup V_2 = V$. Lisäksi graafien $\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})$, $\mathcal{G}(\mathbb{V}_1, \mathbb{E})$ ja $\mathcal{G}(\mathbb{V}_2, \mathbb{E})$ määritelmistä nähdään, että $E_1 = E \restriction V_1$ ja $E_2 = E \restriction V_2$. Nyt Lemman 5.12 nojalla $\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})) \leq \chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_1, \mathbb{E})) + \chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_2, \mathbb{E}))$. Tällöin pätee $k_1 < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_1, \mathbb{E})))$ tai $k_2 < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_2, \mathbb{E})))$, sillä muutoin logaritmin ominaisuuksien perusteella olisi

$$\begin{aligned} k &< \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}))) \leq \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_1, \mathbb{E})) + \chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_2, \mathbb{E}))) \\ &\leq \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_1, \mathbb{E}))) + \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_2, \mathbb{E}))) + 1 \leq k_1 + k_2 + 1 = k. \end{aligned}$$

Täten pelaaja II voi valita pelille sellaisen jatkotilanteen $(m, k_i, \mathbb{V}_i, \mathbb{E})$, että $k_i < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}_i, \mathbb{E})))$. Induktio-oletuksen nojalla pelaajalla II on voittostrategia tästä pelitilanteesta.

Oletetaan lopuksi, että pelaaja I aloittaa pelin oikealla jakosiirrolla valiten $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ja $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2 \subseteq \mathbb{E}$. Merkitään

$$\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}) = (V, E),\ \mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_1) = (V_1, E_1) \text{ ja } \mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_2) = (V_2, E_2).$$

Nyt pätee $V_1 = V_2 = V$ ja $E_1 \cup E_2 = E$. Lemman 5.12 nojalla saadaan siis $\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E})) \leq \chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_1))\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_2))$. Täten on oltava $k_1 < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_1)))$ tai $k_2 < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_2)))$, sillä muutoin logaritmin ominaisuuksien perusteella olisi

$$\begin{aligned} k &< \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}))) \leq \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_1))\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_2))) \\ &= \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_1))) + \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_2))) \leq k_1 + k_2 + 1 = k. \end{aligned}$$

Siis pelaaja II voi tässäkin tapauksessa valita pelin jatkotilanteen $(m, k_i, \mathbb{V}, \mathbb{E}_i)$ niin, että $k_i < \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{V}, \mathbb{E}_i)))$. Induktio-oletuksen nojalla pelaajalla II on voittostrategia tästä pelitilanteesta.

Täten pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{V}, \mathbb{E})$. □

Palataan nyt peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)$ ja tutkitaan, miten suuri konnektiiviparametrin tulee tässä pelissä olla, jotta pelaaja I voisi voittaa.

Lause 5.16. *Jos* $k < \mathrm{tower}(n-1)$ *ja* $m \in \mathbb{N}$, *niin pelaajalla* II *on voittostrategia peliin* $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)$.

Todistus. Lemman 5.10 nojalla $|\mathbb{C}_n| = \mathrm{tower}(n)$. Lisäksi joukko $\mathbb{D}_n$ sisältää kaikki pistekehykset $\triangle\{(\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w')\}$, missä $\triangle\{(\mathcal{M}, w)\}, \triangle\{(\mathcal{M}', w')\} \in \mathbb{C}_n$. Siis graafi $\mathcal{G}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)$ on isomorfinen täydellisen graafin $K_{\mathrm{tower}(n)}$ kanssa. Täydellisessä graafissa jokainen solmu on kaikkien muiden solmujen naapurisolmu, joten värityksessä kaikki solmut on väritettävä eri värillä. Saadaan

$$\chi(\mathcal{G}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)) = \chi(K_{\mathrm{tower}(n)}) = \mathrm{tower}(n).$$

Nyt $k < \mathrm{tower}(n-1) = \log(\mathrm{tower}(n)) = \log(\chi(\mathcal{G}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)))$, joten Lemman 5.15 nojalla pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)$. □

Palataan nyt luokkiin $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$. Luokassa $\mathbb{A}_n$ ovat ne pistekehykset, joiden kaikki seuraajat ovat bisimilaarisia. Luokkaan $\mathbb{B}_n$ kuuluvat ne pistekehykset, joille tämä ei päde. Osoitetaan nyt pelin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)$ avulla, että näiden luokkien erottamiseen vaaditaan modaalilogiikassa ainakin eksponenttitornin pituinen kaava.

Lause 5.17. *Jos $\vartheta_n \in \mathrm{ML}$ erottaa luokat $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$, niin $\mathrm{s}(\vartheta_n) \geq \mathrm{tower}(n-1)$.*

Todistus. Oletetaan, että kaava $\vartheta_n \in \mathrm{ML}$ erottaa luokat $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$. Koska jokaisella joukon $\mathbb{C}_n$ pistekehyksellä on vain yksi seuraaja, niin $\mathbb{C}_n \subseteq \mathbb{A}_n$. Toisaalta jokainen joukon $\mathbb{D}_n$ pistekehys on muotoa $\triangle\{(\mathcal{M}_a, a), (\mathcal{M}_b, b)\}$, missä $a, b \in V_{n+1}$ ja $a \neq b$. Pistekehyksellä on siis kaksi seuraajaa, jotka Lemman 5.8 nojalla eivät ole n-bisimilaarisia, joten $\mathbb{D}_n \subseteq \mathbb{B}_n$.

Oletetaan vastoin väitettä, että $\mathrm{s}(\vartheta_n) < \mathrm{tower}(n-1)$. Merkitään $m = \mathrm{ms}(\vartheta_n)$ ja $k = \mathrm{cs}(\vartheta_n)$. Nyt Lauseen 3.6 nojalla pelaajalla I on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)$. Toisaalta erityisesti $k < \mathrm{tower}(n-1)$, joten Lauseen 5.16 mukaan pelaajalla II on voittostrategia peliin $\mathrm{FS}_{m,k}(\mathbb{C}_n, \mathbb{D}_n)$. Tämä on ristiriita, joten on oltava $\mathrm{s}(\vartheta_n) \geq \mathrm{tower}(n-1)$. □

Nyt saadaan lopullinen tiiviystulos seurauksena edellisistä lauseista.

Seuraus 5.18. *Predikaattilogiikka on epäelementaarisesti tiiviimpi kuin modaalilogiikka.*

Todistus. Lemman 5.2 nojalla jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa kaava $\varphi_n(x) \in \mathrm{FO}$, joka erottaa luokat $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$, ja jonka koko on suuruusluokkaa 2^n. Lisäksi Lemman 5.4 mukaan on olemassa kaavan $\varphi_n(x)$ kanssa ekvivalentti modaalilogiikan kaava ja Lemman 2.24 nojalla tämä kaava erottaa luokat $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$. Siis luokat $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$ voidaan erottaa modaalilogiikan kaavalla. Lauseesta 5.17 saadaan, että jos $\vartheta_n \in \mathrm{ML}$ erottaa luokat $\mathbb{A}_n$ ja $\mathbb{B}_n$, niin $s(\vartheta_n) \geq \mathrm{tower}(n-1)$. □

Lähteet

[1] Adler M., Immerman N., *An $n!$ lower bound on formula size*, ACM Trans. Comput. Log. 4:3, 296–314, 2003.

[2] Blackburn P., de Rijke M., Venema Y., *Modal Logic*, Cambridge University Press, New York, 2001.

[3] Dawar A., Grohe M., Kreutzer S., Schweikardt N., *Model Theory Makes Formulas Large*, Automata, Languages and Programming, 34th International Colloquium, ICALP 2007, Wroclaw, Poland, July 9-13, 2007, Proceedings, 913–924, 2007.

[4] van Ditmarsch H., Fan J., van der Hoek W., Iliev P., *Some Exponential Lower Bounds on Formula-size in Modal Logic*, Advances in Modal Logic 10, invited and contributed papers from the tenth conference on "Advances in Modal Logic", held in Groningen, The Netherlands, August 5-8, 2014, 139–157, 2014.

[5] Ebbinghaus H.-D., Flum J., Thomas W., *Mathematical Logic*, Springer, 1994.

[6] Enderton H. B., *Elements of Set Theory*, Gulf Professional Publishing, 1977.

[7] French T., van der Hoek W., Iliev P., Kooi B. P., *On the succinctness of some modal logics*, Artif. Intell. 197, 56–85, 2013.

[8] Grohe M., Schweikardt N., *The succinctness of first-order logic on linear orders*, Logical Methods in Computer Science, 1:1, 2005.

[9] Hella L., Väänänen J. A., *The size of a formula as a measure of complexity*, Logic Without Borders : Essays on Set Theory, Model Theory, Philosophical Logic and Philosophy of Mathematics, Ontos Mathematical Logic 5, de Gruyter, 193–214, 2015.

[10] van der Hoek W., Iliev P., *On the relative succinctness of modal logics with union, intersection and quantification*, International conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems, AAMAS '14, Paris, France, May 5-9, 2014, 341–348, 2014.

[11] Plaza J., *Logics of public communications*, Synthese 158:2, 165–179, 2007.

[12] Thulasiraman K., Swamy M. N. S., *Graphs: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, 1992.