TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Anniina Kallio

Poisson-prosessi vakuutusmatematiikassa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2016

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
Kallio, Anniina: Poisson-prosessi vakuutusmatematiikassa
Pro gradu -tutkielma, 53 s.
Matematiikka
Toukokuu 2016

Tiivistelmä

Tutkielman aiheena on Poisson-prosessi ja sen soveltaminen vakuutusalalla. Aluksi tutkielmassa käydään läpi todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä, joita tarvitaan muun muassa Poisson-jakauman ja Poisson-prosessin määrittelemiseen. Matemaattisia menetelmiä käytetään vakuutustoiminnassa muun muassa riskienhallintaan ja erilaisten riskien ennakointiin, ja Poisson-prosessi on yksi esimerkki tällaisesta matemaattisesta menetelmästä.

Tutkielmassa esitellään vakuutustoiminnasta, riskienhallinnan lisäksi, vakuutusyhtiön korvausvastuu: vakuutusyhtiölle syntyy korvausvastuu vakuutuksen voimassaoloaikana sattuvasta korvattavasta vahingosta jo vakuutussopimuksen tekohetkellä. Vakuutusyhtiön täytyy arvioida korvausvastuutaan, jotta se toimisi mahdollisimman vakavaraisesti, ja sillä olisi tarvittava maksukyky isojenkin korvausten toteutuessa.

Stokastisia eli satunnaisia malleja käytetään vakuutusalalla muun muassa vakuutuskorvausten ja vahinkojen määrien arviointiin. Determinististen menetelmien avulla arvioidaan myös vakuutusmaksujen ja vakuutuskorvausten suuruuksia vakuutustoiminnassa. Chain-Ladder -menetelmä on yksi esimerkki deterministisestä menetelmästä, jossa tiettyä asiaa arvioidaan aiemmin kerättyjen tilastojen ja aineistojen sekä algoritmin avulla.

Lopuksi esitellään simulointiprosessi, jota käytetään vakuutuskorvausten määrien laskemiseen ja arviointiin. Simulointi on hyödyllinen keino vakuutustoiminnassa tulevaisuudessa tapahtuvien muutosten ennakointiin ja niiden suuruuden arviointiin.

Asiasanat: Poisson-prosessi; vakuutusmatematiikka; riskienhallinta; korvausvastuu; Chain-Ladder -menetelmä; simulointi

Sisältö

1 Johdanto

Useasti kuulee kysyttävän, varsinkin yläkoulun matematiikan tunneilla, mihin näitä tietoja tarvitaan arkielämässä. Matematiikka on tärkeä perusta monelle arkipäiväiselle asialle: rakennusalalla käytetään päivittäin geometrian teoriaa, taloutta ennustetaan matemaattisin mallein ja alennusmyynneissä tarvitaan prosenttilaskujen osaamista. Vakuutusala on myös yksi niistä aloista, joilla sovelletaan erittäin paljon matematiikkaa. Erilaiset riskianalyysit ja tulevaisuudessa vakuutusalalla ja koko yhteiskunnassa tapahtuvien muutosten arviointi ovat välttämättömiä, jotta vakuutusalalla toimivat osapuolet pysyvät vakavaraisina suurienkin riskien toteutuessa.

Jo 1500-luvulla Girolamo Cardano (1501-1576) muodosti todennäköisyyslaskennan perustaa, joka vaikutti todennäköisyyslaskennan teorian syntyyn 1600-luvulla. Cardano harrasti korttipelejä, noppapelejä ja shakkia, joissa hän sai etulyöntiaseman ymmärtäessään todennäköisyyksiä: hän yleensä voittikin enemmän kuin hävisi! [11]

Todennäköisyyslaskennan ja vakuutusmatematiikan kehitys muun muassa Blaise Pascalin, Pierre de Fermat'n sekä Abraham de Moivren toimesta 1600- ja 1700-luvuilla vaikuttivat suuresti matematiikan soveltamiseen vakuutusalalla 1600-luvulta alkaen. Esimerkiksi henkivakuutuksen puolella vakuutusmatematiikan avulla vakuutusmaksut voidaan määrittää iästä riippuvaisiksi: mitä vanhempi henkivakuutuksenottaja on, sitä isompi on vakuutusmaksun suuruus. Tällöin vakuutusmaksujen suuruus porrastetaan riskin mukaan, sillä vanhemman henkilön kuolema on todennäköisempää kuin nuoren henkilön poismeno. [17, s. 35-36]

Blaise Pascal (1623-1662) kehitti todennäköisyyslaskennan teoriaa, ja hänen suurin panoksensa matematiikan kehittämisessä liittyykin juuri todennäköisyyslaskentaan. Hän kehitti todennäköisyyslaskennan teoriaa kirjeenvaihdossa Pierre de Fermat'n (1601-1665) kanssa vuonna 1654. Heitä pidetäänkin todennäköisyyslaskennan teorian perustajina. Lisäksi Pascalin muut tulokset todennäköisyyslaskennan alueella ovat erittäin tärkeitä erityisesti vakuutusmatematiikassa: varsinkin riskeihin ja epävarmuuteen suhtautuminen vakuutusalalla perustuu pitkälti Pascalin tuloksiin. [10] [12]

Abraham de Moivrea (1667-1754) pidetään vakuutusmatematiikan edelläkävijänä. Hän kirjoitti teoksissaan muun muassa tapahtumien todennäköisyyksistä erilaisissa peleissä, binomijakaumasta ja aktuaarisista taulukoista henkivakuutuksissa. [9]

Tilastoinnilla on ollut myös suuri vaikutus vakuutustoimintaan. 1700-luvun valistusaate korosti tiedon merkitystä, ja tällöin koottiin paljon tietoja eri alueilta. Näiden tietojen koonti ja tilastoiminen kertoivat, kuinka säännönmukaisia erilaiset ilmiöt ovat tietyillä alueilla. 1800-luvulla ranskalaiset matemaatikot vaikuttivat merkittävästi todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen ajatteluun. Esimerkiksi Pierre Simon Laplace (1749-1827) toteutti vuonna 1804 ensimmäisen otostutkimuksen, jonka analysoinnissa käytettiin todennäköisuuslaskennan teoriaa. [22]

Todennäköisyyslaskennasta tuttujen erilaisten jakaumien avulla voidaan arvioida muun muassa tulevien vakuutusmaksutulojen ja vakuutuskorvausten suuruutta. Näiden lukumäärien arvioinnissa tarvitaan lisäksi tilastoja edellisiltä vuosilta, jotta nähdään, millaisina aikoina on tehty minkäkin verran uusia vakuutussopimuksia. Mitä enemmän vakuutussopimuksia tehdään, sitä enemmän vakuutusmaksutulojen määrä kasvaa. Samoin käy vakuutuskorvausten määrän kanssa: edellisten vuosien tapahtumista voidaan arvioida se, kuinka suuri vakuutusyhtiön korvausvastuu on tulevana vuonna. Korvausvastuu sisältää kaikki mahdolliset vakuutuskorvaukset, jotka syntyvät silloin, kun vakuutuksenottajille sattuu korvattava vahinkotapahtuma.

Vakuuttaminen on yksi riskienhallintakeinoista, jolloin se jakaa yksittäisen toimijan riskin usemmalle osapuolelle. Suurten lukujen lain mukaan, kun riski jaetaan suuren ryhmän kesken, riski tasaantuu niin, ettei se vaaranna liikaa kenenkään vakavaraisuutta tai maksukykyä. Tämä onkin vakuutustoiminnan keskeinen idea. [17, s. 60]

Samalla kun vakuutuksenottaja antaa vakuutussopimuksen solmittuaan vastuun kyseisestä riskistä vakuutuksenantajalle eli vakuutusyhtiölle, saa vakuutusyhtiö sen riskin kantaakseen. Tällöin vakuutusyhtiölle muodostuu korvausvastuu korvata vakuutuksenottajalle sattuvat vahingot vakuutussopimuksen voimassaoloaikana, jos korvausehdot tai lakisääteisen vakuutuksen kohdalla kyseisestä vakuutuksesta säädetyn lainkohdat toteutuvat.

Erilaisten matemaattisten menetelmien avulla vakuutusyhtiö pyrkii arvioimaan tulevien vakuutuskorvausten lukumäärät ja suuruudet, jotta se on vakavarainen korvaamaan asiakkaillensa tulevaisuudessa sattuvat vahingot. Vakuutusyhtiöille on säädetty myös vakavaraisuusrajat, jotka varmistavat sen, että vakuutusyhtiöt ovat vakavaraisia ja maksukykyisiä asiakkaille sattuvien suurienkin vahinkojen sattuessa.

Tässä pro gradu -tutkielmassa esitellään stokastisista malleista Poisson-prosessi, jonka avulla arvioidaan vakuutuskorvausten suuruutta. Poisson-prosessi on yksi stokastisista prosesseista, joita käytetään vakuutusmatematiikassa esimerkiksi vahinkojen lukumäärän arviointiin. Deterministisistä menetelmistä esitellään Chain-Ladder -menetelmä, jota käytetään korvausvastuun estimointiin. Vakuutusyhtiön korvausvastuu onkin tärkeä osa vakuutusyhtiön toimintaa, joten sen käsittely on keskeisessä roolissa tässä tutkielmassa.

Lopuksi esitellään simulointiprosessi, jonka avulla arvioidaan työtapaturmista syntyvien vakuutuskorvausten määriä. Siinä siis simuloidaan työtapaturmatilastojen ja arvioiden avulla työkyvyttömyyksien keston vaikutusta vakuutuskorvausmäärään. Simuloinnin huipentumana, GNU Octave -ohjelmistoa avuksi käyttäen, generoidaan vakuutuskorvausmääriä satunnaisesti: näin saadaan yksittäisten vahinkomäärien ja vakuutuskorvausten sekä Poisson-prosessin avulla työtapaturmien kokonaiskorvaussumma. Tällä on huomattavia vaikutuksia arvioitaessa vakuutuskorvausmäärien muutoksia tulevaisuudessa, minkä perusteella voidaan tehdä arvioita jopa yhden yksittäisen vakuutuksen hinnasta.

2 Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Vakuutusmaailmassa käytetään erilaisten muutosten ennustamiseen ja arviointiin matemaattisia menetelmiä ja stokastisia malleja. Myöhemmin esitellään *Poisson-jakauma* sekä stokastinen prosessi *Poisson-prosessi*, jota käytetään sovelletussa todennäköisyyslaskennassa ja vakuutusmatematiikassa.

Tässä luvussa esitellään todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä, joita tarvitaan esimerkiksi *Poisson-jakauman* ja *Poisson-prosessin* määrittelyyn. Päälähteenä tässä luvussa on Pekka Tuomisen teos Todennäköisyyslaskenta I [23].

Määritelmä 2.1. (vrt. [23, s. 15]) Perhe $\mathcal{F}$, jonka alkiot ovat perusjoukon Ω osajoukkoja eli *tapahtumia*, on *σ-algebra* eli *joukkoperhe*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$, eli perusjoukko Ω kuuluu joukkoperheeseen $\mathcal{F}$.

2. Jos joukko A kuuluu joukkoperheeseen $\mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F}$, niin joukon A komplementti A^c kuuluu myös joukkoperheeseen $\mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$.

3. Jos tapahtumat A_i kuuluvat joukkoperheeseen $\mathcal{F}$, $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1,2,\dots)$, kun $i = 1,2,\dots$, niin tapahtumien A_i yhdisteet kuuluvat joukkoperheeseen $\mathcal{F}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Määritelmä 2.2. (vrt. [23, s. 15, 17]) Kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jossa Ω on alkeistapausten joukko eli perusjoukko, $\mathcal{F}$ on tapahtumien joukko ja $\mathbb{P}$ kertoo tapahtumien todennäköisyydet, on *todennäköisyyskenttä*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. Joukkoperhe $\mathcal{F}$ on σ-algebra perusjoukossa Ω (kts. määritelmä 2.1), ja todennäköisyys on kuvaus $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

2. Todennäköisyys on $\mathbb{P}(A) \geq 0$, kaikilla tapahtumilla $A \in \mathcal{F}$.

3. Koko perusjoukon Ω todennäköisyys on 1 eli $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

4. Jos tapahtumat $A_i \in \mathcal{F}$, kun $i = 1,2,\dots$, ovat erillisiä, niin todennäköisyys

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Todennäköisyyden $\mathbb{P}$ täytyy olla määritelty yksikäsitteisesti, kun tapahtuma $A \in \mathcal{F}$ on määritelty. Tällöin todennäköisyys $\mathbb{P}$ on siis kuvaus eli funktio $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

Määritelmän 2.2 todennäköisyyden aksioomat esitti matematiikko Andrei Kolmogorov vuonna 1929. Todennäköisyyden aksioomia voidaan soveltaa myös ajassa kehittyvien satunnaisilmiöiden teoriassa. Nämä satunnaisilmiöt ovat stokastisia prosesseja, joista enemmän muun muassa alaluvussa 3.2. [23, s. 17]

Määritelmä 2.3. (vrt. [23, s. 66]) Reaalilukujen *Borel-joukkojen luokka* $\mathcal{B}$ on suppein σ-algebra, joka sisältää reaalilukujen avoimet välit. Tällöin joukko B on *Borel-joukko*, jos joukko B kuuluu Borel-joukkojen luokkaan $\mathcal{B}$.

Määritelmä 2.4. (vrt. [13]) Oletetaan, että todennäköisyyskenttä on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}$ on *satunnaismuuttuja*, jos $\{X \in B\}$ kuuluu tapahtumien joukkoon $\mathcal{F}$ kaikilla Borel-joukoilla B.

Määritelmä 2.5. (vrt. [23, s. 48]) Oletetaan, että todennäköisyyskenttä on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Nyt kuvaus X on *diskreetti satunnaismuuttuja* todennäköisyyskentässä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jos kuvauksen X arvojoukko $X(\Omega)$ on numeroituva joukko $\{x_1, x_2, \dots\}$ ja $\{X = x_n\} \in \mathcal{F}$ kaikilla arvoilla n.

Määritelmä 2.6. (vrt. [23, s. 49]) Diskreetin satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio* $f_X(x)$ on $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$f_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\},$$

kun $x \in \mathbb{R}$.

Pistetodennäköisyysfunktio toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $f_X(x) \geq 0$, kun $x \in \mathbb{R}$,
2. jos $f_X(x) > 0$, niin x kuuluu satunnaismuuttujan X arvojoukkoon $\{x_1, x_2, \dots\}$,
3. $\sum_k f_X(x_k) = 1$.

Nyt nähdään, että satunnaismuuttujan X kaikkien mahdollisten arvojen todennäköisyyksien summa on 1. (Kts. määritelmän 2.2 kohta 3)

Määritelmä 2.7. (vrt. [23, s. 49]) Satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio* on kuvaus $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\},$$

kun $x \in \mathbb{R}$.

Huomautus 2.8. (vrt. [23, s. 49]) Pistetodennäköisyysfunktiot määrittävät diskreetin satunnaismuuttujan X kertymäfunktion yksikäsitteisesti seuraavan yhtälön mukaan:

$$F_X(x) = \sum_{k:\, x_k \leq x} f_X(x_k),$$

kun $x \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.9. (vrt. [23, s. 9]) Oletetaan, että perusjoukko Ω on äärellinen ja sen kaikki osajoukot ovat tapahtumia. Olkoon siis luku n kaikkien näiden alkeistapausten lukumäärä ja $n(A)$ tapahtuman A alkioiden lukumäärä eli tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten lukumäärä.

Jos sitten näiden tapahtumien todennäköisyyksille $P(A)$ pätee osamääräkaava

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n},$$

niin kyse on *klassisesta todennäköisyydestä*.

Tässä todennäköisyyskentän erikoistapauksessa perusjoukko on äärellinen, ja kaikki perusjoukon osajoukot ovat tapahtumia.

Määritelmä 2.10. (vrt. [23, s. 38]) Olkoon A ja B todennäköisyysavaruuden tapahtumia. Tapahtumat A ja B ovat *riippumattomia*, jos ja vain jos

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Määritelmä 2.11. (vrt. [23, s. 36]) Olkoon A ja B tapahtumia perusjoukossa Ω. Oletetaan myös, että tapahtuman B todennäköisyys on suurempi kuin 0, $\mathbb{P}(B) > 0$. Tällöin tapahtuman A *ehdollinen todennäköisyys* eli tapahtuman A *todennäköisyys ehdolla* B on

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Määritelmä 2.12. (vrt. [23, s. 128-129]) Olkoon X ja Y diskreettejä satunnaismuuttujia. Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y arvojoukoille x_i ja y_k pätee $\mathbb{P}\{X = x_i\} > 0$ ja $\mathbb{P}\{Y = y_k\} > 0$. Nyt *ehdolliset jakaumat* määritellään seuraavasti:

$$\mathbb{P}\{Y = y_k \mid X = x_i\} = \frac{\mathbb{P}\{X = x_i\} \cap \{Y = y_k\}}{\mathbb{P}\{X = x_i\}},$$

kun $i, k = 1, 2, \ldots$

Tällöin *ehdollinen odotusarvo* määritellään ehdollisen jakauman odotusarvona

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x_i) = \sum_k y_k \mathbb{P}\{Y = y_k \mid X = x_i\},$$

kun $i, k = 1, 2, \ldots$
Tässä edellytetään myös, että summat suppenevat itseisesti eli $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee itseisesti, jos $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ suppenee.

Huomautus 2.13. (vrt. [23, s. 129]) Yleisemmin ehdollinen odotusarvo on

$$\mathbb{E}(g(Y) \mid X = x_i) = \sum_k g(y_k)\mathbb{P}\{Y = y_k \mid X = x_i\},$$

kun $i, k = 1, 2, \ldots$

Määritelmä 2.14. (vrt. [23, s. 56]) Satunnaismuuttuja X on *jatkuva*, jos sillä on *tiheysfunktio* $f_X(x)$, joka toteuttaa seuraavan kaavan:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx.$$

Huomautus 2.15. (vrt. [23, s. 56]) Funktio $f_X(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tiheysfunktio, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. funktio $f_X(x) \geq 0$ sekä
2. funktio $f_X(x)$ on integroituva ja $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Määritelmä 2.16. (vrt. [23, s. 58]) Satunnaismuuttuja X noudattaa *tasajakaumaa* välillä $]a,b[$, kun $a,b \in \mathbb{R}$, eli

$$X \sim \mathrm{Tas}(a,b),$$

jos satunnaismuuttujalla X on tiheysfunktio,

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a},$$

kun $x \in]a,b[$ ja 0 muulloin.

Määritelmä 2.17. (vrt. [23, s. 59]) Satunnaismuuttuja X, joka saa arvokseen positiivisia reaalilukuja, noudattaa *eksponenttijakaumaa* parametrilla λ, $\lambda > 0$, eli

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$

jos sillä on tiheysfunktio

$$f_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Eksponenttijakauman odotusarvon ja varianssin johtaminen määritelmästä sivuutetaan. Odotusarvo ja varianssi ovat seuraavat:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Määritelmä 2.18. (vrt. [7, s. 98]) Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on $f_X(x)$ määritelmän 2.14 mukaan. Funktio $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$M(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tX} f_X(x)dx$$

on *jatkuvan satunnaismuuttujan X momenttifunktio*.

Määritelmä 2.19. (vrt. [7, s. 98]) Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka pistetodennäköisyysfunktio on $f_X(x)$. Funktio $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$M(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \sum_i \mathrm{e}^{tx_i} f_X(x_i)$$

on *diskreetin satunnaismuuttujan X momenttifunktio*.

Määritelmän 2.19 nojalla seuraava pätee, kun satunnaismuuttuja X on diskreetti:

$$M(0) = \sum_i f(x_i) = 1.$$

Kun momenttifunktioon sijoittaa luvun 0, se on pistetodennäköisyyksien summa kaikilla mahdollisilla satunnaismuuttujan X arvoilla. Tämä on siis luku 1, kts. määritelmän 2.2 kohta 3. [7, s. 99]

3 Poisson-prosessin ominaisuuksia

Poisson-jakauma on diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma. Sen avulla voidaan laskea tapahtumien todennäköisyyksiä tietyillä aikaväleillä. Kun Poisson-jakauma on määritelty, voidaan määritellä stokastinen prosessi, *Poisson-prosessi*, johon tarvitaan Poisson-jakaumaa. Poisson-prosessi on hyödyllinen ja paljon käytetty stokastinen eli satunnainen prosessi vakuutusalalla.

Tässä luvussa määritellään Poisson-jakauma ja Poisson-prosessi. Tämän luvun pääasiallisina lähteinä ovat Erkki Liskin luentomonisteet kursseille Todennäköisyyslaskenta [7] ja Matemaattisen tilastotieteen perusteet [8] sekä Pekka Tuomisen teos Todennäköisyyslaskenta I [23].

3.1 Poisson-jakauma

Lemma 3.1. Olkoon X satunnaismuuttuja. Silloin funktio

$$f_X(x) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

on pistetodennäköisyysfunktio kaikilla $\lambda > 0$.

Todistus. (vrt. [8, s. 129-130]) Palautetaan mieleen *eksponenttifunktion sarjakehitelmä*:

$$\mathrm{e}^{\lambda} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n.$$

Kun sovelletaan eksponenttifunktion sarjakehitelmää, saadaan

$$\exp(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Tällöin $f_X(x) \geq 0$ kaikilla $x = 0, 1, 2, \ldots$ ja eksponenttifunktion sarjakehitelmän perusteella

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1.$$

$\square$

Määritelmä 3.2. (vrt. [8, s. 129] ja [23, s. 53]) Satunnaismuuttuja X, joka saa arvokseen luonnollisia lukuja, ja jonka pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

noudattaa *Poisson-jakaumaa* parametrilla $\lambda \geq 0$. Tällöin satunnaismuuttuja X on *Poisson-jakautunut* parametrina λ, $\lambda \geq 0$, eli

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

Huomautus 3.3. (vrt. [14, s. 13]) Nyt jos satunnaismuuttuja on nolla, $X = 0$, niin se noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla 0, jolloin

$$X \sim \text{Poisson}(0).$$

Huomautus 3.4. (vrt. [8, s. 129]) Myöhemmin lauseessa 3.7 todistetaan, että Poisson-jakauman odotusarvo on λ. Nyt merkitään

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

Siis satunnaismuuttuja X noudattaa *Poisson-jakaumaa odotusarvolla* $\lambda > 0$.

Määritelmä 3.5. (vrt. [7, s. 105]) Diskreetti satunnaismuuttuja X, jolle $0 \le p \le 1$, noudattaa *Bernoullin jakaumaa* eli

$$X \sim \text{B}(p),$$

jos sen pistetodennäköisyysfunktiolle pätee

$$\mathbb{P}\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x},$$

kun $x \in \{0, 1\}$.

Bernoullin jakauman odotusarvo ja varianssi ovat seuraavat:

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}\text{ar}(X) = p(1-p).$$

Määritelmä 3.6. (vrt. [23, s. 50-51]) Satunnaismuuttuja X, jolle $0 \le p \le 1$ ja $n \in \mathbb{N}_+$, noudattaa *binomijakaumaa* eli

$$X \sim \text{Bin}(n, p),$$

jos satunnaismuuttujan arvojoukko on $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ja todennäköisyysfunktiona on

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x},$$

kun $n = 0, 1, 2, \ldots, n$. Binomijakauman odotusarvo ja varianssi ovat seuraavat:

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{V}\text{ar}(X) = np(1-p).$$

Toistamalla Bernoullin-koetta n-kertaa saadaan binomijakauma. Bernoullin jakauman ja binomijakaumaan yhteys on siis seuraava (vrt. [7, s. 103]):

$$\text{Bin}(1, p) = B(p).$$

Poisson-jakaumasta saadaan binomijakauman rajajakauma, kun $n \to \infty$ ja $p \to 0$ siten, että

$$np \to \lambda.$$

Siis Poisson-jakaumaa käytetäänkin erityisesti harvoin sattuvan tapahtuman todennäköisyyden selvittämiseen suuressa populaatiossa. Binomijakauma on taas toistokoe, jonka avulla saadaan tietää, millä todennäköisyydellä tapahtuma toteutuu tietyillä toistojen lukumäärällä. [23, s. 54]

Poisson-jakaumaa käytetään eri aloilla monissa sovelluksissa. Edellä todettiin, että Poisson-jakaumasta saadaan binomijakauman rajajakauma. Tämän nojalla Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa esimerkiksi binomijakauman $\mathrm{Bin}(n,p)$ likiarvona, kun n (tapahtumien lukumäärä) on suuri ja p (tapahtuman todennäköisyys) on pieni. Tällöin pätee

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{\mathrm{e}^{-np}(np)^x}{x!}.$$

[8, s. 129]

Lause 3.7. *Olkoon* $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. *Silloin*

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \lambda,$$

ja momenttifunktio

$$M(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \exp(\lambda \mathrm{e}^t - \lambda).$$

Todistus. (vrt. [8, s. 130]) Muodostetaan ensin momenttifunktion $M(t)$ lauseke:

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} \frac{\lambda^x}{x!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^t)^x}{x!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \exp(\lambda \mathrm{e}^t) \\ &= \exp(\lambda \mathrm{e}^t - \lambda). \end{aligned}$$

Odotusarvo ja varianssi saadaan laskemalla momenttifunktion eli $M(t)$:n 1. ja 2. derivaatta arvolla 0. Nyt

$$M'(t) = \exp(\lambda \mathrm{e}^t - \lambda) \cdot \lambda \mathrm{e}^t,$$

joten satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathbb{E}(X) = M'(0) = \exp(\lambda \cdot 1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot 1 = \exp(0) \cdot \lambda = \lambda.$$

Edelleen

$$M''(t) = \exp(\lambda \mathrm{e}^t - \lambda) \cdot \lambda \mathrm{e}^t \cdot \lambda \mathrm{e}^t + \exp(\lambda \mathrm{e}^t - \lambda) \cdot \lambda \mathrm{e}^t,$$

ja

$$\begin{aligned} M''(0) &= \exp(\lambda \mathrm{e}^0 - \lambda) \cdot \lambda \mathrm{e}^0 \cdot \lambda \mathrm{e}^0 + \exp(\lambda \mathrm{e}^0 - \lambda) \cdot \lambda \mathrm{e}^0 \\ &= \exp(\lambda - \lambda) \cdot \lambda \cdot \lambda + \exp(\lambda - \lambda) \cdot \lambda \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

joten satunnaismuuttuja X varianssi on

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = M''(0) - [M'(0)]^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda.$$

□

Lause 3.8. *Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden momenttifunktiot ovat muotoa $M_{X_i}(t)$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Nyt summan*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttifunktio on muotoa

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t).$$

Todistus. Satunnaismuuttujan t momenttifunktion avulla saadaan

$$\begin{aligned} M_{S_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tS_n}) \\ &= \mathbb{E}(e^{t(X_1 + \cdots + X_n)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX_1} \cdots e^{tX_n}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_k}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} M_{X_n}(t). \end{aligned}$$

□

Huomautus 3.9. Derivoimalla momenttifunktiota kerran ja sijoittamalla tähän derivoituun muotoon luku 0 saadaan satunnaismuuttujan X odotusarvo. Kun jatketaan momenttifunktion derivoimista ja luvun 0 sijoittamista derivoituun yhtälöön, saadaan satunnaismuuttujan X toisen potenssin odotusarvo. Tätä voidaan jatkaa satunnaismuuttujan X r. potenssiin.

Lause 3.10. *Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumattomat ja $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Silloin*

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda),$$

missä $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Todistus. (vrt. [8, s. 130]) Lauseessa 3.8 todistettiin, että riippumattomien satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots X_n$ summan momenttifunktio saadaan satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots X_n$ momenttifunktioiden tulona. Toisin sanoen summan

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttifunktio on muotoa

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t).$$

Nyt lauseen 3.8 nojalla saadaan

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i \mathrm{e}^t - \lambda_i) \\
&= \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \mathrm{e}^t - \lambda_i)\Big) \qquad (\lambda_i \mathrm{e}^t - \lambda_i = \lambda_i(\mathrm{e}^t - 1)) \\
&= \exp[\lambda(\mathrm{e}^t - 1)],
\end{aligned}
$$

missä $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Nyt $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. □

Huomautus 3.11. Lauseen 3.10 nojalla saadaan riippumattomien satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ summalle Y Poisson-jakauma, jota tämä uusi satunnaismuuttuja Y noudattaa.

3.2 Poisson-prosessi

Alaluvussa 3.1 määriteltyä Poisson-jakaumaa tarvitaan *Poisson-prosessissa*, jolla tutkitaan toisistaan riippumattomia tapahtumia jatkuvassa ajassa. Poisson-prosessi on stokastinen eli satunnainen prosessi, ja sitä kutsutaan toisistaan riippumattomien tapahtumien laskuriksi. Poisson-prosessilla tutkitaan toisistaan riippumattomia ja toistuvia tapahtumia. [8, s. 135]

Poisson-prosessilla on hyvin suosittuja teoreettisia ominaisuuksia: esimerkiksi Poisson-prosessin avulla saadaan aikaan äärellisulotteinen jakauma. Sovelletussa todennäköisyyslaskennassa ja stokastisten prosessien teoriassa on käytetty jo kauan Poisson-prosessia. [14, s. 13]

1900-luvun alussa Filip Lundberg hyödynsi Poisson-prosessia, kun hän muodosti mallin vakuutuskorvaushakemusten lukumäärälle. Harald Cramer kehitti teorian kollektiivisesta riskistä 1930-luvulla. Tähän teoriaan liittyy kaikkien vakuutuskorvaushakemusten lukumäärä S sekä vakuutuskorvausten määrä T. Nämä käsitteet ovat jakautuneet Poisson-prosessin mukaisesti. [14, s. 13]

Poisson-prosessilla on siis keskeinen rooli vakuutusmatematiikassa. Erityisesti historiallisista syistä sekä kiinnostavien matemaattisten ominaisuuksiensa vuoksi Poisson-prosessi on hyödyllinen vakuutusalalla. [14, s. 13]

Poisson-prosessi on stokastinen prosessi, jota kutsutaan myös *laskuriprosessiksi*, jos prosessin avulla saadaan selville tiettyyn ajankohtaan mennessä sattuneiden toisistaan riippumattomien tapahtumien lukumäärä. Laskuriprosessi on siis *riippumattomien lisäysten* prosessi, kun tapahtumat sattuvat erillisillä aikaväleillä, ja niiden lukumäärät ovat toisistaan riippumattomat. [8, s. 135]

Poisson-prosessin oletuksina ovat tapahtumien *stationaarisuus* ja riippumattomuus. Stationaarisuus tarkoittaa sitä, että aikavälillä sattuvien tapahtumien lukumäärä riippuu kyseisen aikavälin pituudesta, eikä välin sijainnista. [8, s. 135] Tapahtumien riippumattomuus on määritelty määritelmässä 2.10.

Ennen Poisson-prosessin määrittelyä esitellään muutama asia liittyen Poisson-prosessiin.

Merkintä 3.12. (vrt. [14, s. 13]) Jokaisella reaaliarvoja saavalla funktiolla f välillä $[0,\infty[$ merkitään

$$f]s,t] = f(t) - f(s),$$

kun $0 \leq s < t < \infty$.

Määritelmän 3.2 edellisen merkinnän 3.12 jälkeen voidaan määritellä Poisson-prosessi.

Määritelmä 3.13. (vrt. [24] ja [8, s. 135]) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyyskenttä. Ajalla indeksoitu joukko satunnaismuuttujia N_t on *stokastinen prosessi*

$$N = (N(t) \mid t \geq 0).$$

Määritelmä 3.14. (vrt. [8, s. 135]) Stokastinen prosessi $N = (N(t) \mid t \geq 0)$ on riippumattomien lisäysten prosessi eli *laskuriprosessi*, jos $N(t)$ on ajankohtaan t mennessä sattuneiden toisistaan riippumattomien tapahtumien lukumäärä. Näiden tapahtumien joukko on tällöin kiinnitetty joukko, jonka jokaiselle tapahtumalle on määritelty tapahtumisajankohta.

Määritelmä 3.15. (vrt. [1, s. 133], [8, s. 136] ja [14, s. 13-14]) Kokonaisarvoinen stokastinen prosessi N on *Poisson-prosessi*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. Todennäköisyys on
$$\mathbb{P}\{N(0)\} = 1.$$

2. Laskuriprosessin $(N(t) \mid t \geq 0)$ arvo on 0, kun laskuriprosessiin sijoitetaan luku 0. Siis
$$N(0) = 0.$$

3. Stokastisella prosessilla $(N(t) \mid t \in [0,\infty[)$ on *riippumattomat lisäykset*. Toisin sanoen jos
$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$
niin
$$N(t_n) - N(t_{n-1}), N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}), \ldots, N(t_1) - N(t_0)$$
ovat toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia.

4. Stokastisella prosessilla $(N(t) \mid t \in [0,\infty[)$ on *stationaariset* eli ajassa muuttumattomat lisäykset. Tällöin jokaisella $t, s > 0$, $N(t) - N(s)$ on sama jakauma kuin $N(t+h) - N(s+h)$ arvolla h, kun $t + h \in [0,\infty[$ ja $s + h \in [0,\infty[$.

5. Todennäköisyys on
$$\mathbb{P}\{(N(t+h) - N(t)) \geq 2\} = \varepsilon(h).$$

Poisson-prosessin *intensiteetti* on λ ($\lambda < 0$), jos edellisten ehtojen 2, 3, 4 ja 5 lisäksi seuraava ehto pätee:

- Todennäköisyys on

$$\mathbb{P}\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + \varepsilon(h).$$

Huomautus 3.16. (vrt. [8, s. 136] ja [2, s. 455]) Määritelmässä 3.15 oli käytössä merkintä $\varepsilon(h)$. Funktio $f(\cdot) = \varepsilon(h)$, jos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Eli merkintä $\varepsilon(h)$ tarkoittaa jakojäännöstä, joka lähestyy nollaa nopeammin kuin muuttuja h.

Lause 3.17. *Jollakin $\lambda > 0$ pätee, että todennäköisyys on*

$$\mathbb{P}\{N_t - N_s = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \qquad (\mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots)$$

kun $t > s$. Tällöin merkintä λ tarkoittaa Poisson-prosessin intensiteettiä.

Todistus. (vrt. [1, s. 133]) Todistus sivuutetaan. □

Määritelmä 3.18. (vrt. [14, s. 15]) Prosessilla N on *intensiteettifunktio* λ, jos funktio μ on jatkuva. Funktio λ on siis stokastisen prosessin $N = (N_t \mid t \in [0, \infty[)$ odotusarvo.

Toisin sanoen kaikilla arvolla $s < t$ inkrementti eli lisäys $\mu]s,t]$ merkitään seuraavasti:

$$\mu]s,t] = \int_s^t \lambda(y) dy, \qquad s < t,$$

jollain positiivisella mitattavissa olevalla funktiolla λ. Tästä seuraa, että funktio μ on jatkuva.

Huomautus 3.19. (vrt. [14, s. 15-16]) Funktio μ voidaan esittää Poisson-prosessin toiminnan aikamääreenä. Jos prosessi N on homogeeninen, niin aika kasvaa lineaarisesti:

$$\mu]s,t] = \mu]s+h, t+h],$$

jokaisella arvolla $h > 0$ ja $0 \leq s < t < \infty$.

Seuraavaksi osoitetaan, että Poisson-jakaumaa voi soveltaa aikavälille $\Delta \subset \mathbb{R}_+$. Tämä tarkoittaa sitä, että Poisson-jakauma soveltuu tälle aikavälille satunnaisesti sijoitettujen pisteiden jakaumaksi. Nämä pisteet voivat olla esimerkiksi vakuutusyhtiön tietoon eri saapumisajankohtina tulevia vahinkoja. (vrt. [23, s. 103-104])

Merkitään satunnaismuuttujalla $X(\Delta)$ aikavälillä $\Delta \subset \mathbb{R}_+$ sattuvien pisteiden lukumäärää. Nyt oletetaan pisteiden satunnaisuudesta, että

1. satunnaismuuttujan $X(\Delta)$ jakauma riippuu vain aikavälin Δ pituudesta (stationaarisuus),

2. jos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ ovat erillisiä aikavälejä, satunnaismuuttujat $X(\Delta_1), X(\Delta_2), \ldots$ ovat toisistaan riippumattomia (riippumattomat lisäykset) ja

3. on olemassa vakio $\lambda > 0$ siten, että

   $$\mathbb{P}\{X(\Delta) \geq 1\} = \lambda h + h\varepsilon(h) \text{ ja}$$

   $$\mathbb{P}\{X(\Delta) > 1\} = h\varepsilon(h),$$

   kun $|\Delta| = h$.

Oletuksessa 3 käytetty merkintä $\varepsilon(h)$ tarkoittaa jäännöstermiä, jolle

$$\varepsilon(h) \to 0,$$

kun $h \to 0$. Oletetaan nyt, että $|\Delta| = t > 0$. Jaetaan aikaväli yhtäpitkiin ja erillisiin osaväleihin $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Tällöin

$$X(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} X(\Delta_k).$$

Oletuksen 1 nojalla kaikilla satunnaismuuttujilla $X(\Delta_k)$ on sama jakauma ja tämän vuoksi myös sama todennäköisyysgeneroiva funktio. Merkitään tätä funktiota merkinnällä G_n. Oletuksesta 3 seuraa, että todennäköisyys

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X(\Delta_k) = 0\} &= 1 - \lambda\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\varepsilon\Big(\frac{t}{n}\Big), \\
\mathbb{P}\{X(\Delta_k) = 1\} &= \lambda\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\varepsilon\Big(\frac{t}{n}\Big) \qquad \text{ja} \\
\mathbb{P}\{X(\Delta_k) > 1\} &= \frac{t}{n}\varepsilon\Big(\frac{t}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Nyt todennäköisyysgeneroiva funktio G_n on

$$G_n(z) = 1 - \lambda\frac{t}{n} + \lambda\frac{t}{n}z + \frac{t}{n}\varepsilon\Big(\frac{t}{n}\Big) + r(z),$$

missä kaikilla $|z| \leq 1$

$$|r(z)| \leq \mathbb{P}\{X(\Delta_k) > 1\} = \frac{t}{n}\varepsilon\Big(\frac{t}{n}\Big).$$

Koska satunnaismuuttujan $X(\Delta)$ summaesityksessä yhteenlaskettavat $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ovat riippumattomia oletuksen 2 nojalla, saadaan satunnaismuuttujan $X(\Delta)$ todennäköisyysgeneroivalle funktiolle esitys

$$G(z) = (G_n(z))^n = \Big(1 + \frac{\lambda t}{n}(z-1) + \frac{t}{n}\varepsilon\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n,$$

kun $n \in \mathbb{N}_+$. Kun $n \to \infty$, niin todennäköisyysgeneroivasta funktiosta saadaan

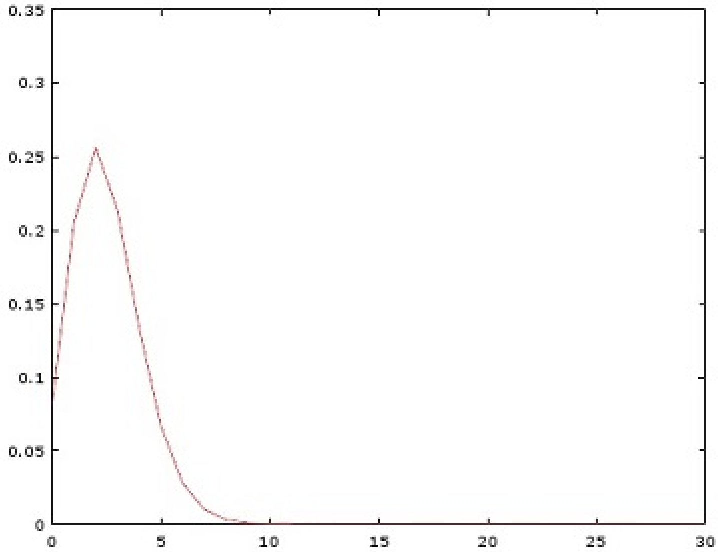
$$G(z) = e^{\lambda t(z-1)} \qquad (|z| \leq 1).$$

Tästä saadaan

$$|\Delta| = t \Rightarrow X(\Delta) \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

Edellä olevien oletuksien 1, 2 ja 3 nojalla pisteiden lukumäärän jakauma välillä t on välttämättä Poisson-jakauma. (vrt. [23, s. 104])

Seuraavaksi on esimerkki Poisson-prosessista. Esimerkissä selvitetään yrityksen työntekijöille sattuvien työtapatumien todennäköisyyksiä tietyillä aikaväleillä. Kuvassa on esimerkin jakauma Poisson$(2,5)$.



Esimerkki 3.20. Erään yrityksen työntekijöille sattuu työtapaturmia Poisson-prosessin mukaan noin $2,5$ päivässä.

a) Millä todennäköisyydellä syyskuussa on 5 päivää, jolloin työntekijöille ei satu yhtään työtapaturmaa? (Kyseessä eivät ole välttämättä peräkkäiset päivät ja kyseisessä yrityksessä työskennellään joka päivä.)

b) Mikä on todennäköisyys, että yhtään työtapaturmaa ei satu seuraavan kahdentoista tunnin aikana?

c) Millä todennäköisyydellä ainakin kaksi työtapaturmaa sattuu seuraavan kuuden tunnin aikana?

a) Olkoon $N(1)$ työtapaturmien lukumäärä yhdessä päivässä.
Tällöin

$$N(1) \sim \text{Poisson}(2,5),$$

koska Poisson-prosessin mukaan työtapaturmia sattuu kyseisen yrityksen työntekijöille noin $2,5$ päivässä. Täten todennäköisyys sille, että yhdessä päivässä ei satu yhtään työtapaturmaa on

$$\mathbb{P}\{N(1)=0\} = \frac{\mathrm{e}^{-2,5}\cdot 2,5^0}{0!} \approx 0,08208$$

Olkoon satunnaismuuttuja X niiden syyskuun päivien lukumäärä, jolloin yrityksessä sattuu työtapaturma. Syyskuussa on yhteensä 30 päivää, joten

$$X \sim \mathrm{Bin}\,(30, \mathbb{P}\{N(1)=0\})\,.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X=5\} &= \binom{30}{5}\Big(\mathbb{P}\{N(1)=0\}^5\cdot(1-\mathbb{P}\{N(1)=0\})\Big)^{25}\\ &\approx \binom{30}{5}0,08208^5\cdot 0,91792^{25}\\ &\approx 0,06239.\end{aligned}$$

Siis syyskuussa on noin 6 prosentin todennäköisyydellä viisi päivää, jolloin kyseisessä yrityksessä ei satu yhtään työtapaturmaa.

b) Olkoon $N(1)$ työtapaturmien lukumäärä yhdessä päivässä.
Nyt

$$N\left(\frac{1}{2}\right) \sim \mathrm{Poisson}\left(\frac{1}{2}\cdot 2,5\right) \iff N\left(\frac{1}{2}\right) \sim \mathrm{Poisson}(1,25).$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right\} &= \frac{\mathrm{e}^{-1,25}\cdot 1,25^0}{0!}\\ &\approx 0,28650.\end{aligned}$$

Siis seuraavan kahdentoista tunnin aikana yrityksessä ei satu yhtään työtapaturmaa noin 29 prosentin todennäköisyydellä.

c) $N(1)$ on sattuvien työtapaturmien lukumäärä yhdessä päivässä. Tällöin $N\left(\frac{1}{4}\right)$ on työtapaturmien määrä seuraavan kuuden tunnin aikana. Työtapaturmia sattuu keskimäärin $2,5$ päivässä.
Täten

$$N\left(\frac{1}{4}\right) \sim \mathrm{Poisson}\left(\frac{1}{4}\cdot 2,5\right) \iff N\left(\frac{1}{4}\right) \sim \mathrm{Poisson}(0,625).$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{1}{4}\right)\geq 2\right\} &= 1-\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{1}{4}\right)\leq 1\right\}\\ &= 1-\left(\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{1}{4}\right)=0\right\}+\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{1}{4}\right)=1\right\}\right)\\ &= 1-\left(\frac{\mathrm{e}^{-0,625}\cdot 0,625^0}{0!}+\frac{\mathrm{e}^{-0,625}\cdot 0,625^1}{1!}\right)\\ &\approx 0,13020.\end{aligned}$$

Siis noin 13 prosentin todennäköisyydellä kyseisessä yrityksessä sattuu seuraavan kuuden tunnin aikana ainakin kaksi työtapaturmaa.

3.3 Cramér-Lundberg -malli

Ennen *Cramér-Lundberg -mallin* määrittämistä käydään läpi riskiteorian perusmallin ominaisuudet. Mallin oletukset ovat seuraavat [14, s. 7]:

- Korvaukset tulevat vakuutusyhtiön tietoon ajankohtana T_i, joille pätee $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ Näitä muuttujia T_1 kutsutaan *korvausten saapumisajankohdiksi* tai *saapumisiksi* (arrivals).

- Korvaus numero i tulee vakuutusyhtiön tietoon ajankohtana T_i. Kyseisen korvauksen vaikutus vakuutusyhtiölle on *korvauksen suuruus* (claim size) X_i. Jono $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ muodostaa positiivisten satunnaismuuttujien jonon.

- Prosessi $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ korvausten suuruudesta ja prosessi $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ korvausten tietoontulosta ovat toisistaan riippumattomia prosesseja.

Näiden oletusten jälkeen voidaan määritellä *prosessi korvausten lukumäärästä*:

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, \qquad t \geq 0,$$

toisin sanoen prosessi $N = (N(t) \mid t \geq 0)$ on laskuriprosessi aikavälillä $]0, \infty]$.

Tällöin stokastisesta prosessista $N(t)$ saadaan korvausten lukumäärä ajankohdassa t eli kuinka paljon korvauksia on kertynyt tiettyyn hetkeen asti. [14, s. 7]

Huomautus 3.21. (vrt. [14, s. 15]) Stokastista Poisson-prosessia rinnastetaan yleensä tapaukseen, jossa on lineaarinen keskiarvofunktio, μ:

$$\mu(t) = \lambda t,$$

jossa $t \geq 0$, jollain $\lambda > 0$. Tätä tilannetta kutsutaan *homogeeniseksi Poisson-prosessiksi*, N. Muussa tapauksessa Poisson-prosessi on *epähomogeeninen*.

Huomautus 3.22. (vrt. [14, s. 15]) Parametrin λ suuruus on homogeenisen Poisson-prosessin *intensiteetti*. Jos parametri $\lambda = 1$, niin prosessia N kutsutaan *standardiksi homogeeniseksi Poisson-prosessiksi*.

Edellä esiteltyjen määritelmän 3.18 ja huomautuksien 3.19, 3.21 ja 3.22 nojalla voidaan sanoa, että vakuutuskorvaukset tulevat vakuutusyhtiön tietoon karkeasti arvioiden melko tasaisesti. Varsinkin jos prosessi N on homogeeninen Poisson-prosessi, niin aika-akseli koordinaatistossa on suora. Jos prosessilla N ei ole intensiteettifunktiota λ vakiona, niin laskuriprosessi kiihtyy ja hidastuu $\lambda(t)$ suuruuden mukaan. Tällöin muuttujaan λ vaikuttaa vakuutusmaailmassa esimerkiksi kausittaiset trendit ja suhdannevaihtelut, joista enemmän luvussa 4. [14, s. 15-16]

Seuraavassa esitellään *Cramér-Lundberg -malli*, jonka nojalla voidaan sanoa, että homogeenisella Poisson-prosessilla on suuri rooli vakuutusmatematiikassa [14, s. 18].

Jos määritetään prosessi korvausten lukumäärästä homogeeniseksi Poisson-prosessiksi, niin näin saatu prosessi liittää yhteen korvausten suuruuden ja korvausten tietoontulon vakuutusyhtiölle. Tätä prosessia kutsutaan Cramér-Lundberg -malliksi, joka toimii seuraavasti [14, s. 18]:

- Korvaustapahtumat syntyvät, kun ne tulevat vakuutusyhtiön tietoon eli tapahtumat voidaan määritellä saapumisaikojen $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ ja homogeenisen Poisson-prosessin mukaan
$$N(t) = \#\{i \leq 1 : T_i \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$
- Korvaus numero i tulee tietoon ajassa T_i. Tällöin syntyy korvaus, jonka suuruus on X_i. Muuttujien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jono muodostaa epänegatiivisten satunnaismuuttujien jonon. Nämä satunnaismuuttujat ovat toisistaan riippumatomia ja samoin jakautuneita.
- Jonot $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ja $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ovat toisistaan riippumattomia. Erityisesti prosessi N ja jono $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ovat toisistaan riippumattomia.

Lisäksi korvauksilla on odotusarvo ja varianssi.

Seuraavaksi luonnostellaan korvaussummien arviointia. Kun satunnaismuuttujien X_i summat $X_1 + X_2 + \cdots + X_i$ ovat mukana koko vakuutusyhtiön korvaussummassa, nämä satunnaismuuttujien summat lähestyvät normaalijakaumaa. Tästä seuraa, että Cramér-Lundberg -malli liittyy *keskeiseen raja-arvolauseeseen* (central limit theorem) [23, s. 117-118]:

Olkoon $\{X_1, \ldots, X_n\}$ satunnaisotanta, jonka koko on n-kappaletta. Satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ovat toisistaan riippumattomia ja jakautuneet identtisesti. Lisäksi satunnaismuuttujien odotusarvot ja varianssit on määritelty
$$\mathbb{E}(X_i) = \mu \qquad \text{ja} \qquad \mathbb{V}\text{ar} = \sigma^2 < \infty.$$

Tällöin kun satunnaisotannan koko n lähestyy ääretöntä, satunnaismuuttujat $\sqrt{n}(S_n - \mu)$ lähenevät normaalijakaumaa $N(0, \sigma^2)$:
$$\sqrt{n}\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) - \mu\Big) \to N(0, \sigma^2).$$

Prosessia S vakuutuskorvausten kokonaismäärästä Cramér-Lundberg -mallissa kutsutaan myös *yhdistetyksi Poisson-prosessiksi*. Cramér-Lundberg -malli on yksi hyödyllisimmistä ja käytetyimmistä malleista muissa vakuutuslajeissa kuin henkivakuutuksessa. Yksinkertainen malli kuvaa muutamaa välttämätöntä ominaisuutta, joita tarvitaan vakuutuskorvausten kokonaismäärien prosessissa. [14, s. 18]

Cramér-Lundberg -malli on perustana vararikkoteorialle (ruin theory). Malli ottaa huomioon vararikkoteorialle merkittävät käsitteet: vakuutusyhtiön tuloihin kuuluvat vakuutusmaksut ja vakuutuskorvaukset, jotka ovat vakuutusyhtiön menoja. Vakuutusmaksut tulevat vakuutusyhtiölle tasaisesti arvolla $c > 0$, ja vahingoista maksettavat korvaukset tulevat vakuutusyhtiön tietoon Poisson-prosessin mukaisesti parametrilla λ. [14, s. 155]

4 Vakuutustoimintaan liittyvät riskit ja niihin varautuminen matemaattisilla menetelmillä

4.1 Vakuutustoimintaan liittyvät riskit

Vakuutustoiminnasta saadut tulot ja siitä syntyvät menot muuttuvat vuosittain. Näistä muutoksista voi syntyä suuriakin riskejä vakuutusmarkkinoilla toimiville. Vakuutustoimintaan vaikuttavia ulkoisia tekijöitä ovat muun muassa puhdas satunnaisheilahtelu, huojunta, aaltoilu, trendit, katastrofit, erilaiset sijoitusriskit ja inflaatio. Nämä tekijät aiheuttavat muutoksia vakuutustoiminnan tuloihin ja menoihin sekä myös vahinkosuhteen suuruuden heilahtelua. [17, s. 149-160]

Vahinkosuhteen käsite määritellään seuraavasti: vahinkojen yhteenlaskettu määrä eli korvausmeno jaetaan koko vakuutuskannan vakuutusmaksujen määrällä. Suurten lukujen lain mukaan vahinkosuhde muuttuu sitä vähemmän, mitä suurempi vakuutuskanta on kysymyksessä. Vahinkosuhteen muuttuminen syntyy yleensä sattumasta. Tätä puhdasta satunnaisvaihtelua vastaan voidaan suojautua asettamalla vakuutusmaksut siten, että otetaan huomioon myös vakuutusyhtiön huonot vuodet, jolloin yhtiö ei olisi kovin vakavarainen. Riskin jälleenvakuuttaminen on hyvä keino huomioida mahdollinen puhdas satunnaisheilahtelu. [17, s. 59, 150]

Jälleenvakuuttaminen on erittäin tärkeä osa vakuutusmarkkinoita, sillä se on auttanut vakuutusyhtiöitä vakavaraisuusongelmassaan: nykyään vakuutusyhtiöt jakavat suuret riskinsä kansainvälisen jälleenvakuutusverkoston kanssa. Jälleenvakuuttaminen tapahtuu siis maiden ja maanosien rajojen ylitse. Käytännössä jälleenvakuuttaminen perustuu riskin ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan sopimukseen. Jälleenvakuuttamisessa osa ensivakuuttajan vastuulla olevasta suuresta riskistä siirretään jälleenvakuuttajalle. Ensivakuuttaja pitää loppuosan eli omavastuun riskistä itsellään. Jälleenvakuuttaja saattaa myös edelleenvakuuttaa riskiään muiden jälleenvakuutusyhtiöiden kanssa: tällöin suuret vakuutusvastuut jakaantuvat jälleenvakuutusverkostossa monille riskinkantajille ympäri maailman. [17, s. 32, 98, 496]

Vakuutusmaksutulojen ja vakuutuskorvausmenojen suuruus vaihtelee kausittain. Tälläinen huojunta voi näkyä esimerkiksi liikenteessä sattuvissa vahingoissa tai työmatkatapaturmissa liukkaan kelin vuoksi. Huojuntaa voidaan ennakoida samoin kuin edellä mainittua puhdasta satunnaisheilahtelua eli jälleenvakuuttamisella ja varmistamalla se, että vakuutusmaksuista saatavia tuloja on riittävästi. [17, s. 150-151]

Kansantalouden suhdannevaihtelut ja eri markkinoiden markkinasyklit aiheuttavat aaltoilua vakuutusmarkkinoilla. Esimerkiksi työtapaturmia on enemmän nousukauden aikaan, sillä silloin myös työntekoa ja työpaikkoja on enemmän. Toisaalta lisääntyvä työttömyys vähentää työntekoa ja työtunteja, jolloin työtapaturmiakin on vähemmän. Markkinoiden aaltoilua voidaan ennakoida osittain jälleenvakuuttamisella. [17, s. 152-157]

Eri aloille hetkittäin nousevat trendit vaikuttavat myös vakuutusalalle, sillä esimerkiksi uudisrakentamisessa kehittynyt vahingontorjunta ja rakennustavan muuttuminen ovat vähentäneet palovahinkoja. Moniin uusiin autoihin on lisätty peruutustutka, joka varmasti vähentää esimerkiksi parkkipaikoilla sattuvia kolareita. Lisääntynyt työsuojelu eli työympäristön ja työtehtävien ongelmat sekä näihin liittyvä riskit huomioiva toiminta vähentää työtapaturmariskiä. [17, s. 157-158]

Erilaiset luonnonkatastrofit, kuten hirmumyrskyt ja maanjäristykset, vaikuttavat suuresti vakuutusalaan. Esimerkkinä kesällä 2014 tuhoa aiheuttanut Helena-myrsky lisäsi monien erilaisten vahinkojen määrää: silloin vakuutuskorvauksia haettiin esimerkiksi metsä-, koti- ja autovakuutuksesta. Jälleenvakuutusverkosto on paras suojautumiskeino vakuutusyhtiöille, kun kyseessä on vahingot, jotka aiheutuvat erilaisista katastrofeista. [17, s.158]

Vakuutusyhtiöiden sijoitustoiminta aiheuttaa vakuutusyhtiölle sijoitusriskejä, kuten tuotto-, arvonmuutos-, pääoman menetys- ja valuuttariskejä. Sijoitusten hajauttamisella, sekä eri sijoitustyyppeihin että eri sijoituskohteisiin, vähennetään vakuutustoiminnassa häviämisen riskiä. [17, s. 159-160] Kuten Jukka Rantalan ja Teivo Pentikäisen teoksessa, Vakuutusoppi, hyvin tiivistetään:

> *Mitä suurempi on tuotto-odotus, sitä suurempi on myös riski.* [17, s. 160]

Inflaatio eli rahan arvon heikkeneminen vaikuttaa vakuutusyhtiön toimintaan liikekustannusten ja vakuutuskorvausten kautta. Inflaatioprosentin ollessa normaalia korkeampi vakuutusyhtiön korvausmeno nousee jyrkästi eli vahingoista maksettavien korvausten määrä kasvaa. Tällöin vakuutusyhtiön täytyy erityisesti ottaa huomioon vakuutusyhtiön vakavaraisuuden säilyttäminen, josta lisää alaluvussa 5.5. Lisäksi vakuutusyhtiön täytyy huolehtia korvausvastuustaan, kts. luku 5. [17, s. 160-161]

4.2 Riskien vähentäminen matemaattisten menetelmien avulla

Vakuutusalalla arvioidaan muun muassa vakuutusmaksujen, vakuutuskorvauksien ja vakuutustoiminnasta syntyvien liikekulujen suuruutta deterministisillä ja stokastisilla menetelmillä. Deterministisissä menetelmissä kyseistä kohdetta arvioidaan aiemmin kerättyjen tilastojen ja tietyn algoritmin avulla. Toisaalta stokastisissa malleissa arviointi syntyy tarkastelemalla tiettyä mekanismia, joka tuottaa halutut tulokset. Tällöin oletetaan, että tapahtumien satunnaisuus noudattaa tiettyä jakaumaa. [17, s. 167], [18, s. 2]

Varsinkin suurten vahinkojen satunnaisuus tuo epävarmuutta vakuutusyhtiön toimintaan, sillä mahdollisiin suuriin vakuutuskorvauksiin täytyy varautua ennalta.
Useasti vakuutusyhtiöt jälleenvakuuttavat suurimpia riskejään muille, suuremmille vakuutusyhtiöille. Matemaattisten menetelmien avulla voidaan kuitenkin pienentää vakuutusyhtiön toiminnan epävarmuutta.

Skenaariotekniikka eli ennustelaskelmien toistaminen eri oletuksilla on yksi keino vähentää epävarmuutta vakuutustoiminnassa. Oletuksina voidaan käyttää esimerkiksi pessimistin ja optimistin malleja, jolloin muodostetaan mallit vakuutustenottajista tällaisten erilaisten tyyppihenkilöiden mukaan. Skenaariotekniikassa voidaan yhtenä oletuksena käyttää myös todennäköisintä tapausta. [17, s. 167]

Kun deterministiset mallit ja skenaariotekniikka yhdistetään, pystytään ennustamaan ilmiöitä, jotka ovat melko vakaita ja helposti ennustettavissa. Tämä tapa ei kuitenkaan ota huomioon vahinkosuhteen satunnaisvaihtelua, joka aiheuttaa korvausmenon ja vahinkosuhteen suuruuden heilahtelua. [17, s. 149-161, 167]

Alaluvussa 4.1 esitellyt vakuutustoimintaan liittyvät riskit vaativat, että matemaattisilla menetelmillä ja stokastisilla malleilla mitoitetaan ja ennustetaan epävarmuustekijöitä. Matemaattisilla menetelmillä ja stokastisilla malleilla pyritäänkin ennustamaan sattumanvaraisia eli stokastisluonteisia tapahtumia. [17, s. 167-168]

Stokastisilla malleilla muodostetaan yhtiölle mahdolliset tulevaisuuden näkymät, jolloin pystytään varautumaan tulevaisuudessa eteen tuleviin riskeihin paremmin. Liiketoiminnan etenemistä seurataan vuosittain, ja vakuutustoimintaa muokataan muutosten mukaan. [17, s. 168]

Stokastisia malleja ovat muun muassa Monte-Carlo -simulointi ja erilaiset herkkyysanalyysit. Monte-Carlo -simuloinnissa vakuutustoimintaan liittyville muuttujille valitaan eri arvoja niitä koskevien todennäköisyyksien mukaan. Näistä arvoista saatujen tulosten vaihteluväli kuvaa vakuutustoiminnan epävarmuutta. Tällaisen simuloinnin avulla pystytään huomioimaan useat mahdolliset tapahtumat vakuutustoiminnassa. Herkkyysanalyysillä saadaan tuloksia siitä, miten vakuutusmaksujen suuruus ja määrä sekä sijoitustuottojen heilahtelu vaikuttavat vakuutustoimintaan. [17, s. 168]

5 Vakuutusyhtiön korvausvastuu

5.1 Riskien vakuuttaminen

Vakuutuksen ottaminen on yksi riskienhallintakeinoista: se tasaa riskiä useammalle osapuolelle. Suurten lukujen lain nojalla riskin jakaminen suuren ryhmän kesken pinentää riskin vaikutusta yksittäiselle riskinkantajalle. Kun yksittäinen vakuutuksenottaja ottaa vakuutuksen tietyn riskin varalle, hän kantaa vain pienen osan kaikkien yhteisestä riskistä. [17, s. 60] Jukka Rantalan ja Teivo Pentikäisen teoksessa, Vakuutusoppi, vakuutustoiminta määritellään seuraavasti:

> *Tietyn riskin alaiset yksiköt, vakuutuksenottajat, sopivat vahinkojen tasaamiseen erikoistuneen laitoksen, vakuutuslaitoksen eli vakuutuksenantajan, kanssa siitä, että riskin toteutuessa vakuutuksenantaja korvaa siitä aiheutuneen vahingon. Korvauksensaantioikeuden vastikkeeksi vakuutuksenottajat suorittavat vakuutusmaksun vakuutuksenantajalle.* [17, s. 61]

Tämä tarkoittaa siis sitä, että vakuutuksenottajat maksavat vakuutuksenantajalle eli vakuutusyhtiölle vakuutusmaksuja tietynlaisen vahingon varalta, jotta he saavat mahdollisen vahingon satuttua vakuutuskorvauksia vakuutusyhtiöltä. Tällöin vakuutuksenottaja ja -antaja solmivat oikeussuhteen eli *vakuutuksen* keskenään. Tämä oikeussuhde luodaan tekemällä *vakuutussopimus*, jossa määritellään kummankin osapuolen oikeudet ja velvollisuudet koskien kyseistä vakuutusta. [17, s. 61]

Kun vakuutusyhtiö tekee vakuutussopimuksen vakuutuksenottajan kanssa, vakuutusyhtiö sitoutuu korvaamaan vakuutuksenottajalle vakuutuksen voimassaoloaikana sattuvat vahingot. Vakuutus korvaa vahingot kuitenkin vain siihen asti, kun tilanne oli ennen vahingon sattumista. Tämä tarkoittaa siis sitä, että vakuutuskorvauksissa on rikastumiskielto. [15, s. 72].

Vakuutusyhtiön täytyy varautua tulevaisuudessa sattuviin vahinkoihin hyvin varhaisessa vaiheessa, jotta vakuutusyhtiö on vakavarainen korvaamaan vakuutussopimuksiensa voimassaoloaikoina sattuvat vahingot vakuutuksenottajille. Vakuutusyhtiöillä on siis *korvausvastuu* vakuutussopimuksen voimassaoloaikana sattuvien vahinkojen korvaamiseen. Tämä tietenkin edellyttää, että vahinko täyttää korvattavuuden ehdot kyseisestä vakuutuksesta. Korvattavuuteen vaikuttavat vakuutussopimusehdot ja lakisääteisessä vakuutuksessa laki kyseisestä vakuutuksesta.

5.2 Vakuutustoiminnan sääntely ja valvonta

Suomessa tapahtuvaa vakuutustoimintaa säännellään ja valvotaan sekä kansallisella että Euroopan unionin tasolla. Vakuutustoimintaa täytyy valvoa ja säännellä, jotta vakuutusyhtiöt ovat vakavaraisia ja maksuvalmiita korvaamaan tulevaisuudessa vakuutuksenottajille sattuvat vahingot. Kaikki vakuutustoimintaa ja eri vakuutuslaitoksia koskeva lainsäädäntö valmistellaan sosiaali- ja terveysministeriössä. Lakien valmistelun lisäksi sosiaali- ja terveysministeriössä huolehditaan, että alemman asteisia normejakin noudatetaan vakuutustoiminnassa. Myös kansainvälinen yhteistyö koordinoidaan sosiaali- ja terveysministeriön kautta. Uusien vakuutusyhtiöiden toimiluvat myöntää Finanssivalvonta. Työeläkeyhtiöiden toimiluvista päättää valtioneuvosto, kun sosiaali- ja terveysministeriö on tehnyt esittelyn kyseisestä toimilupaehdotuksesta. [17, s. 106-107]

Finanssivalvonta on perustettu vuonna 2009, ja se toimii Suomen Pankin yhteydessä. Sen tehtäviin kuuluvat muun muassa rahoitusalan valvonta sekä vakuutusyhtiöiden ja muiden vakuutusalalla toimivien toimijoiden valvonta ja toiminnan tarkastaminen. Keskeisenä osana Finanssivalvonnan toimintaa on eri yritysten toiminnan seuraaminen eli operatiivisen toiminnan valvonta. [17, s. 107]

Finanssivalvonnan hallintoa ja toimintaa koskevat säännökset kuuluvat lakiin Finanssivalvonnasta (878/2008). Tässä laissa on määritelty Finanssivalvonnan toiminnan keskeinen tavoite:

> *Finanssivalvonnan toiminnan tavoitteena on finanssimarkkinoiden vakauden edellyttämä luotto-, vakuutus- ja eläkelaitosten ja muiden valvottaviksi säädettyjen vakaa toiminta, vakuutettujen etujen turvaaminen sekä yleinen luottamus finanssimarkkinoiden toimintaan.* [5, 1 §]

Finanssivalvonnasta annetussa laissa on määritelty, että Finanssivalvonta on osa Euroopan valvontaviranomaista ja Euroopan finanssivalvontajärjestelmää. Laissa on myös momentit Finanssivalvonnan hallinnosta, määritelmät valvottavista vakuutuslaitoksista ja muista vakuutusalalla toimivista tahoista sekä luku valvontavaltuuksista. [5]

Lain mukaan Finanssivalvonnalla on oikeus saada tietoja taholta, jota se valvoo, sekä muulta toimijalta, joka on osana finanssimarkkinoita. Tietojensaannista on laissa seuraavasti:

> *Valvottavan ja muun finanssimarkkinoilla toimivan on salassapitosäännösten estämättä ilman aiheetonta viivytystä toimitettava Finanssivalvonnalle sen pyytämät tiedot ja selvitykset, jotka ovat tarpeen Finanssivalvonnalle laissa säädetyn tehtävän hoitamiseksi.* [5, 18 §]

Kilpailu- ja kuluttajavirasto on myös yksi vakuutustoimintaa sääntelevistä ja valvovista tahoista. Sen tehtävänä on pitää vakuutusmarkkinat toimivana kokonaisuutena ja tarkkailla, että kilpailulaissa (948/2011) määritellyt kilpailunrajoitukset ovat voimassa vakuutusmarkkinoilla. Virasto tutkii myös yrityskauppoja, jotka on tehty sen toimivaltaan kuuluvalla alueella. [17, s. 107]

Lisäksi Kilpailu- ja kuluttajavirasto turvaa vakuutusalalla kuluttajan taloudellisesta ja oikeudellista asemaa. Tämä tapahtuu vertailemalla hintoja eri vakuutusyhtiöiden välillä. Kilpailu- ja kuluttajavirasto edistää myös kuluttajan toimintamahdollisuuksia päätöksenteossa ja vakuutusmarkkinoilla niin yksityisesti kuin yhteiskunnallisestikin. Myös kuluttaja-asiamies ja tietosuojavaltuutettu ovat mukana vakuutustoiminnan valvonnassa vakuutusalalla. [17, s. 108]

Vakuutustoimintaa säädellään myös Euroopan unionin tasolla, ja vakuutustoiminnassa voimassa olevat useat säännökset perustuvat Euroopan unionin direktiiveihin. Euroopan unionilla onkin siis suuri merkitys vakuutustoimintaa koskevaan lainsäädäntöön Suomessa. Euroopan unionin toimielimet, Eurooppa-neuvosto, Euroopan komissio sekä Euroopan parlamentti, valmistelevat ja päättävät Euroopan unionin lainsäädäntöä. [17, s. 109]

Vakuutusalalla on paljon yhteistoimintaa ja erilaisia organisaatioita, jotka kehittävät yhteistyötä vakuutusalalla toimivien tahojen välille. Finanssialan Keskusliitto turvaa vakuutusalalle hyvän ja toimivan toimintaympäristön, finanssimarkkinat sekä maksujenvälitysjärjestelmän. Finanssialan Keskusliitto on kaikkien Suomessa toimivien pankkien ja vakuutusyhtiöiden edustaja, ja se on Elinkeinoelämän Keskusliiton eli EK:n jäsenjärjestö. [17, s. 112-113]

5.3 Vakuutusmaksut ja -korvaukset

Vakuutusyhtiö kerää vakuutusmaksuja tulevien vakuutuskorvausten maksamista varten. Vakuutusyhtiön kirjanpito toimii samoin kuin muidenkin yritysten kirjanpito. Vakuutusalalla kirjanpitoon liittyen käytetään joskus omia nimityksiä ja laskentatapoja, sillä vakuutusalalla on paljon erityispiirteitä, kun sitä verrataan muihin yhteiskunnan eri aloihin. Yleisesti kirjanpidossa menot ja tulot kirjataan sille ajankohdalle, jolloin nämä suoritteet ovat syntyneet. Tässä on kyse suoriteperusteisesta kirjaamisesta yrityksen kirjanpitoon. [17, s. 172]

Vakuutusmaksu kirjataan vakuutusyhtiön kirjanpitoon tuloksi silloin, kun vakuutuksenottaja maksaa vakuutusmaksun vakuutusyhtiölle. Tämä tarkoittaa sitä, että vakuutusmaksu vakuutusturvasta peritään vakuutuksenottajalta ennakkoon. Useinkaan vakuutuksenottajalle sattunut vahinkotapahtuma ei tule heti vakuutusyhtiön tietoon. Vakuutusyhtiön täytyykin siis varautua näihin vielä tuntemattomiin vahinkoihin ennalta, sillä niistä saattaa tulla korvattavaa erittäin pitkän ajan kuluttua itse vahinkotapahtumasta. Toisaalta vakuutusmaksun vastasuoritus eli vakuutuskorvaus vakuutuksenottajalle sattuneesta vahingosta kirjataan yrityksen kirjanpitoon menoksi silloin, kun nämä korvaukset maksetaan vakuutuksenottajalle. [17, s. 172-176]

Kun korvaukset kirjataan suoriteperusteisesti kirjanpitoon, korvaus pitää rekisteröidä sen tilikauden kuluksi, jolloin vahinkotapahtuma sattuu. Vahinkotapahtuma ei kuitenkaan aina tule vakuutusyhtiön tietoon saman tilikauden aikana kuin vahinko on sattunut. Tämä tuo korvausvastuun käsitteen vakuutustoimintaan: vakuutusyhtiön tulee varautua tuleviin vahinkoihin jo aikaisessa vaiheessa turvatakseen vakuutusyhtiön talouden. Tästä syntyy vakuutusyhtiön velvollisuus suorittaa korvaus vakuutuksenottajalle, vaikka se maksettaisiinkin vasta vuosien päästä vahingon sattumisesta, tai sen maksaminen jaksottuisi usealle vuosikymmenelle, kuten eläkevakuutuksen tapauksessa. [17, s. 176]

Esimerkiksi ammattitauti ilmenee usein vuosia tietyn vahinkotapahtuman jälkeen. Joissain tilanteissa vahingoittunut ei ole enää ammattitaudin ilmenemisaikana töissä sellaisessa paikassa, jossa ammattitauti olisi voinut aiheutua. Tällöin korvausvelvollisuus määritetään sen työn perusteella, jossa altistuminen fysikaaliselle, kemialliselle tai biologiselle tekijälle on voinut tapahtua. Tämä voi olla erittäin vaikeaa määrittää jopa monien vuosien jälkeen. Jos altistusta ei pystytä selvittämään, korvausvelvollisuus on sillä vakuutusyhtiöllä, jonka asiakkaana on ollut vahingoittuneen viimeisin työnantaja. Tällöin täytyy selvittää, että ammattitaudin aiheutuminen on todella voinut aiheutua viimeisimmän työsuhteen aikaisissa työtehtävissä. [6, 26 § ja 28 §]

Seuraavaksi on esimerkkejä siitä, miten vahingon sattumis- ja tietoontuloajankohta vaikuttavat vakuutusyhtiön korvausvastuuseen.

1. Vahinko sattuu, ja vahingon sattuminen tulee vakuutusyhtiön tietoon saman tilikauden aikana. Tällöin tilinpäätökseen ei synny velkaa tämän vakuutuskorvauksen osalta.

2. Vahinko sattuu erään tilikauden aikana, ja vakuutusyhtiö saa myöskin tiedon siitä tämän saman tilikauden aikana. Vakuutuskorvaus kuitenkin maksetaan vakuutuksenottajalle vasta seuraavalla tilikaudella, jolloin yrityksen tilinpäätöksessä tämä vakuutusmaksu on siirtyvää velkaa, joka kirjataan vakuutusyhtiön korvausvastuuseen. Sitten tämä velka maksetaan pois vakuutuksenottajalle seuraavan tilikauden aikana.

3. Vahinko sattuu erään tilikauden aikana, mutta vahinko ilmoitetaan vakuutusyhtiölle vasta seuraavan tilikauden aikana. Vaikka vakuutusyhtiö ei tietäisi vahingosta, ennen kuin tilikauden tilinpäätös on valmis, on tämä velka vakuutuskorvauksesta jo olemassa. Nyt tämä vakuutuskorvaus siis varataan vakuutusyhtiön korvausvastuuseen. Korvausvastuun varaaminen tapahtuu tilastollisten menetelmien ja stokastisien prosessin avulla. Näitä menetelmiä varten tarvitaan kokemusta aiemmilta vuosilta esimerkiksi siitä, kuinka paljon vahingosta ilmoittaminen viivästyy. Luvuissa 6 ja 7 on lisää matemaattisista menetelmistä, joita käytetään vakuutustoiminnan muutosten arviointiin tulevaisuudessa, erityisesti vakuutuskorvausten lukumäärien ja korvausvastuun näkökulmasta. [17, s. 177]

5.4 Vakuutusmaksun rakenne

Vakuutusten hinnoittelussa otetaan huomioon kunkin vakuutuslajin markkinatilanne. Vakuutusmaksuissa arvioidaan ja otetaan huomioon vakuutusyhtiön korvausvastuu. Vakuutusmaksuista saatavan tulon täytyy kattaa vakuutusyhtiölle vakuutuskorvauksista syntyvät menot, jotta vakuutusyhtiön toiminta on vakavaraista. Vakuutusmaksu koostuu kolmesta kulujen ryhmästä: riskimaksu, hoitokulukuormitus ja riskilisä. [17, s. 220]

Riskimaksun määrittäminen koostuu riskianalyysin tekemisestä, tariffimallin valinnasta ja tariffien numeerisesta määrityksestä. Riskianalyysissä analysoidaan vakuutettujen eri riskikohteita, joista voi syntyä vahinkoa vakuutuksenottajalle. Erityisesti riskiin vaikuttavat tekijät, joista vahinkojen suuruus riippuu, ovat tarkastelun kohteena riskianalyysissä. Riskianalyysissä profiloidut vakuutukset ryhmitellään eri luokkiin, ja jokainen luokka saa oman tariffin eli maksun. Tästä esimerkkinä on yrityksen, työntekijöiden työtapaturmien varalta, ottama lakisääteinen tapaturmavakuutus: riskialttiimmissa töissä vakuutusmaksu on suurempi kuin riskittömimmissä töissä. [17, s. 222-223]

Lopullinen riskimaksu määritellään jokaiselle luokalle tilastojen ja aiempien kokemusten avulla. Vakuutusmaksu voidaan määritellä euromääräisenä tai ilmaista promilleina esimerkiksi vakuutusmäärästä kyseisessä vakuutuksessa. Riskimaksun määrittämiseen otetaan yleisesti huomioon myös vakuutusyhtiön kaikkien vakuutusten ja vahinkojen hoitoon liittyvät kustannukset. Näihin kustannuksiin kuuluvat muun muassa vakuutusten uusiminen ja vahinkojen korvauskäsittely. [17, s. 223-224]

Toisena osana vakuutusmaksun suuruuteen, riskimaksun lisäksi, vaikuttaa hoitokulukuormitus. Vakuutusyhtiön liikekustannukset ja vakuutusten korvauskäsitelykustannukset kohdistetaan eri vakuutuslajeille ja tällöin myös yksittäisille vakuutuksenottajien vakuutuksille. Vakuutusten hoitoon liittyviin kuluihin luetaan esimerkiksi vakuutussopimuksen syntymiseen liittyvät alkukustannukset, vakuutusten hoitoon liittyvät kustannukset sekä vakuutuskorvausten hoitoon liittyvät kustannukset. Hoitokustannuksiin ei kuulu vakuutusyhtiöiden sijoitustoimintaan liittyviä hoitokustannuksia, joita syntyy vakuutusyhtiöiden sijoitusten hoidossa ja arvioinnissa. Tällaiset kustannukset kuuluvat vakuutusyhtiön tilinpäätöksessä sijoitustoiminnan kuluihin. [17, s. 224-225]

Kolmantena ja viimeisenä vakuutusmaksun määrittämiseen liittyy riskilisä, joka ottaa huomioon vakuutustoiminnalle tyypillisen vakuutusyhtiöiden vuositulosten vaihtelun. Korvausmenon satunnaisheilahtelu voi johtua esimerkiksi puhtaasta satunnaisheilahtelusta, suhdannevaihteluihin liittyvästä aaltoilusta vakuutusmarkkinoilla, alan trendeistä tai inflaatiosta. Näitä vakuutustoimintaan vaikuttavia tekijöitä käsiteltiin alaluvussa 4.1. Vakuutusmaksun riskilisää tarvitaan siis parantamaan vakavaraisuuspääomaa eli toimintapääomaa, jotta tappiolliset tilikaudet eivät heilauta vakuutusyhtiön taloutta huonoon suuntaan. [17, s. 226]

Aiemmin esitellyistä vakuutusmaksun osista riskimaksulla maksetaan erityisesti vakuutusyhtiön korvausmenoja. Hoitokuluosa kattaa tällöin kustannukset, jotka syntyvät vakuutusyhtiön vakuutus- ja korvausjärjestelmän toimeenpanosta. [17, s. 358]

Myös vakuutusmarkkinoilla on muiden finanssimarkkinoiden tapaan kovaa kilpailua. Se synnyttää monia ongelmia, koska vakuutusmaksua ei voi määritellä kovin tarkoin ennalta, ja epävarmuus tariffin oikeasta tasosta ja valinnasta on suuri. Tämän vuoksi vakuutusmaksun suuruudesta tingitään useasti. Kuitenkaan vakuutusyhtiön ei kannata antaa vakuutuksia liian halvalla, koska myöhemmin yhtiön kannattavuus ja vakavaraisuus voivat heiketä huomattavasti, sillä vakuutusmaksussa täytyy ottaa huomioon usea seikka. Vakuutusmaksujen määrittelemisessä sattuneet virheet huomataankin vasta vuosien päästä, kun vakuutuksenottajat hakevat korvauksia vakuutuksistaan; tällöin nähdään, pystyykö yhtiö pitämään lupauksensa korvausvastuusta. [17, s. 227]

Seuraavaksi on esimerkki siitä, kuinka vakuutusmaksu määräytyy lakisääteisessä tapaturmavakuutuksessa. Työnantajalla on *vakuuttamisvelvollisuus* ottaa työntekijälleen vakuutus työssä tai työhön liittyvissä olosuhteissa sattuvan tapaturman varalle. Lakisääteinen tapaturmavakuutus kattaa yleisvakuutuksena kaikki tietyn yrityksen työntekijät. Työnantajan ottaessa lakisääteisen tapaturmavakuutuksen vakuutusyhtiöltä alkaa kyseinen vakuutusyhtiö hoitamaan myös työnantajan ja palkansaajan työttömyysvakuutusmaksun sekä työntekijän ryhmähenkivakuutusmaksun perintää. [17, s. 357-358]

Vakuutusmaksu määräytyy työtapaturmavakuutuksessa tehtävän työn vaarallisuuden ja maksettujen palkkojen perusteella. Tämä tarkoittaa sitä, että mitä vaarallisempi työ sitä suurempi riski tapaturmaan, jolloin vakuutusmaksukin on suurempi. Myös maksetut palkat vaikuttavat vakuutusmaksun suuruuteen, sillä suuremmilla yrityksillä, joilla on enemmän työntekijöitä, riski sattuvaan työtapaturmaan on suurempi. [17, s. 357]

Pienen yrityksen lakisääteisen tapaturmavakuutuksen vakuutusmaksu määräytyy *taulustomaksun* mukaan, jossa vakuutusmaksukustannukset tasataan eri pientyönantajien kesken työalojen mukaan. Keskisuurten ja suurien työnantajien työtapaturmavakuutuksen vakuutusmaksussa on mukana erikoismaksuja, esimerkiksi yrityksen koon mukaan. Tällaisilla yrityksillä vakuutusmaksu määräytyy joko kokonaan erikoismaksujärjestelmän mukaan tai osaksi sen ja työnantajan oman riskin mukaan. Tällöin vakuutusmaksun suuruuteen vaikuttavat myös kyseisessä yrityksessä aiemmin sattuneet työtapaturmat ja niistä maksetut korvaukset. [17, s. 357]

5.5 Vakavaraisuussääntelyt

Euroopan unioni on uudistanut vakuutusyhtiöiden vakavaraisuussääntelyä Solvenssi 2 -hankkeella, joka koskee henki-, vahinko- ja jälleenvakuutusyhtiöitä. Ennen Solvenssi 2 -hankkeen voimassaoloa Euroopan unionin vakuutustoimintaa koskevat direktiivit ovat erillisiä osia vakuutustoiminnan sääntelyssä. Tämä hanke siis kokoaa vakuutustoimintaan liittyvät direktiivit yhdeksi kokonaisuudeksi. [3]

Solvenssi 2 -hankkeessa on kaksi eri solvenssi- eli maksukykyisyysrajaa, joilla määritetään se, millainen vakuutusmarkkinoilla toimiva vakavarainen vakuutusyhtiö on ([4] ja [17, s. 170]):

Vakavaraisuuspääomavaatimus eli *Solvency Capital Requirement, SCR* on juridisesti sitova pääomavaatimus. Tämä tarkoittaa sitä, että vakuutusyhtiöllä on oltava tämän vaatimuksen mukainen pääoma, jotta vakuutusyhtiö kestää suuret ja ennakoimattomat tappiot. Jos vakuutusyhtiö alittaa tämän rajan, se ei ole enää luotettava vakuutustenottajien kannalta, ja yhtiön täytyy tällöin tehdä suuria toimenpiteitä parantaakseen tilannettaan. Vakuutusyhtiötä aletaan tällöin seuraamaan erittäin tarkasti, jotta varmistetaan se, että vakuutusyhtiö tekee tarvittavat ja vaaditut muutokset parantaakseen vakavaraisuuttaan.

Toisena rajana on *vähimmäispääomavaatimus* eli *Minimum Capital Requirement, MCR*, joka on myös juridisesti sitova, kuten vakavaraisuuspääomavaatimuskin. Tämän rajan alittaminen merkitsee sitä, että vakuutusyhtiön tilanne on vakava. Jos vakuutusyhtiö alittaa tämän pääomavaatimusrajan eikä pysty täyttämään vähimmäispääomavaatimusta lyhyen ajan kuluessa, niin Finanssivalvonta peruu vakuutusyhtiön toimiluvan. Tämä tarkoittaa sitä, että vakuutusyhtiö ei saa enää toimia vakuutusyhtiönä vakuutusmarkkinoilla.

Nämä vakavaraisuusrajat määrittävät siis toimintakykyisen ja vakavaraisen vakuutusyhtiön. Rajat tuovat turvaa vakuutuksenottajille, jotta he voivat luottaa siihen, että vakuutusyhtiöt hoitavat vakuutuksia vakavaraisesti. Vakuutusyhtiönhän on oltava maksukykyinen korvaamaan mahdolliset vahingot vakuutuksenottajille, sillä vakuutussopimuksen osapuolet ovat sopineet kummankin osapuolen osalta tietyt oikeudet ja velvollisuudet vakuutusasioissa.

6 Stokastiset mallit vakuutuskorvausten määrien arvioinnissa

Tässä luvussa esitellään klassisen riskiteorian pääpiirteet. Näiden avulla nähdään, kuinka stokastiset eli satunnaiset mallit liittyvät vakuutusmaailmaan. Riskiteorian perusmallin ominaisuuksia määriteltiin alaluvussa 3.3 Cramér-Lundberg -mallin mukaisesti. Lisäksi alaluvussa 4.2 mainittiin deterministiset menetelmät ja stokastiset mallit, joiden avulla vakuutustoiminnan riskejä arvioidaan ja pyritään vähentämään.

Jokaisessa vakuutuskorvausprosessissa *vakuutuskorvaus* esitetään vertikaalisena eli pystysuorana askeleena ylöspäin: mitä suurempi korvaus on sitä korkeampi tämä vertikaalinen askel on. Aikaa merkitään jatkuvana horisontaalisella eli vaakasuoralla akselilla, ja pystysuoralla akselilla on siis vakuutuskorvaukset, joita merkitään muuttujalla x. Vakuutuskorvausprosessia tarkastellaan aikavälillä $]0, t]$. [2, s. 13]

Tällöin funktion X arvo kohdassa t, $X(t)$ kuvaa korvausten määrää kyseisenä ajankohtana t: tätä kutsutaan *vakuutuskorvauskertymäksi* $X(t)$. Tämä on yhdistelmä stokastisesta prosessista, jossa sekä tapahtumien ajankohdat että jokaisen korvauksen suuruus ovat molemmat satunnaisilmiöitä. Tätä kutsutaan *prosessin toteutumiseksi*. [2, s. 13-14]

Oletetaan, että aikahavainnot t ovat kiinnitettyjä. Tällöin prosessin seurauksena on myös korvauksien määrän *aste* eli vakuutuskorvauskertymä $X(t)$, joka esittää kertyneiden korvausten määrää välillä $]0, t]$. *Satunnaismuuttujan kertymäfunktio* on

$$F_t(x) = \mathbb{P}\{X(t) \leq x\}.$$

[2, s. 14]

Olkoon X stokastinen prosessi. Jokaisessa kohdassa vaakasuoralla akselilla t *kertymäfunktio* on määritelty yksikäsitteisesti. [2, s. 14]

Merkitään arvolla $P = \mathbb{E}(X(1))$ *riskimaksua* (pure risk premium) ja arvolla λ *riskilisää* (safety loading coefficient), joka ottaa huomioon yllättävät menot vakuutustoiminnassa. Nämä menot voivat vaikuttaa suurestikin vakuutusyhtiön vakavaraisuuteen ja maksuvalmiuteen eli likviditeettiin. [2, s. 15]

Klassisessa riskiteoriassa *vakuutusmaksutulo* (premium income), aikavälillä $]0, t]$, saadaan määriteltyä seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} P(t) &= (1 + \lambda) \cdot P \cdot t \\ &= (1 + \lambda) \cdot \mathbb{E}(X(1)) \cdot t. \end{aligned}$$

missä arvo $P = \mathbb{E}(X(1))$. Vakuutusmaksutulon $P(t)$ määrittelyyn tarvitaan siis turvakuormituskerroin λ ja puhtaan riskin vakuutusmaksu P. [2, s. 15]

Muuttujan λ arviointi liittyy riskien välttämiseen, sillä turmakuormituskertoimeen λ vaikuttaa alaluvussa 4.1 mainitut vakuutustoiminnan riskit: esimerkiksi trendit ja kansantalouden suhdannevaihtelut vaikuttavat vakuutustoiminnan menoihin. Vakuutusten hoitoon, korvauskäsittelyyn ja vakuutusyhtiön toimintaan liittyvät kustannukset otetaankin huomioon jokaisen asiakkaan vakuutusmaksuissa, kuten aiemmassa alaluvussa 5.4 todettiin.

6.1 Korvausten määrä

Korvausten lukumäärä eli vakuutuskorvausmenon suuruus määritellään stokastisen mallin avulla. Korvausten lukumäärän määrittämiseen käytetään muuttujaa $\Bbbk$, jota voidaan kuvata todennäköisyysjakauman ehdoilla.

Nämä ehdot on määritelty seuraavasti:

$$p_k = \mathbb{P}\{\Bbbk = k\},$$

jossa muuttujan k määrittelyjoukko on $k = 0, 1, 2, \ldots$, ja muuttujan k korvausten maksu tapahtuu aina kyseisellä aikavälillä. (vrt. [2, s. 15])

Tietyn kohteen kokonaisriski koostuu yksittäisistä riskiyksiköistä. Näitä yksiköitä ovat muun muassa kotivakuutuksessa eri talot sekä kiinteistöt ja lakisääteisessä tapaturmavakuutuksessa jokainen työntekijä. [2, s. 30]

Varsinaiset vahinkotapahtumat ovat onnettomuuksia, jotka sattuvat sattumanvaraisesti riskiyksikköihin. Jotta pystytään mallintamaan riskiprosessia yksittäisissä riskiyksiköissä, täytyy näitä riskiyksiköitä käsitellä erillisinä, itsenäisinä kokonaisuuksina. Todennäköisyys sille, että yksi tai useampi vahinko sattuu samalla aikavälillä, määritellään jokaiselle yksikölle erikseen. Myös vahinkojen vaikutuksien suuruus ja jakautuminen eri aikaväleille määritellään samoin: jokaiselle yksikölle erikseen. [2, s. 30]

Kokonaisriskiä laskettaessa korvausten lukumäärä saadaan kaikkien yksittäisten ja eri korvaustapahtumien lukumäärän $\Bbbk$ summana. Tällöin kokonaissumma korvausten suuruudesta on summa erillisten riskiyksiköiden kokonaisvahinkokorvausmenosta. [2, s. 30]

6.2 Poisson-jakauma korvausten lukumäärän määrityksessä

Tässä alaluvussa esitetään, miten Poisson-jakaumaa käytetään korvausten lukumäärien määrittelyyn. Jos oletetaan, että eri vahinkojen korvausten maksu ovat toisistaan riippumattomia, korvausten lukumäärä on Poisson-jakautunut tietyllä aikavälillä. Poisson-prosessi seuraa siis siitä, että tiettyyn ajanhetkeen kertyneistä korvausmääristä ja niiden sattumisajankohdista saadaan Poisson-jakauma. Tämä tarkoittaa siis sitä, että vakuutuskorvauskertymä $X(t)$ on Poisson-jakautunut tietyllä aikavälillä. [2, s. 31]

Merkintä 6.1. [2, s. 31] Oletetaan, että aikavälillä $]0, t]$ kertyneiden korvausten lukumäärä $(\Bbbk(t)_{t \geq 0})$ on ajan t funktio. Tällöin arvo $\Bbbk(t)$ on *stokastinen prosessi*.

Hypoteesi 6.2. *Poisson-prosessin hypoteesina* on, että vakuutuskorvausten lukumäärän prosessi täyttää seuraavat ehdot [2, s. 31-32]:

1. Minä tahansa kahtena toisistaan erillisenä aikavälinä syntyvien korvausten lukumäärät ovat toisistaan riippumattomia. Tätä kutsutaan *inkrementtien eli lisäysten riippumattomuudeksi* (kts. 3.15, 2. kohta).

2. Ainoastaan yksi korvaus voi seurata samasta tapahtumasta, mitä kutsutaan *korvausten monikerran pois sulkemiseksi.*

3. Todennäköisyys sille, että korvaus syntyy annetussa, muokatussa ajankohdassa, on yhtä suuri kuin nolla. Tätä kutsutaan *erityisten ajankohtien pois sulkemiseksi.*

Hypoteesin 6.2 oletukset ovat siis Poisson-prosessin ehdot, kts. määritelmä 3.15.

6.3 Malli vakuutuskorvausten lukumäärän prosessille

Tässä alaluvussa esitellään esimerkkitapaus tanskalaisesta palovakuutuksesta. Tiedot on kerätty vuosilta 1980-1990, ja esimerkissä on tutkittu vakuutuskorvaushakemusten tietoontuloa eli miten korvausten saapumisajankohdat vakuutusyhtiöiden tietoon vaikuttavat vakuutuskorvausten lukumääriin vakuutuskorvausprosessin eri vaiheissa. Tässä esimerkissä tutkitaan, kuinka hyvin Poisson-prosessi mallintaa reaalimaailman tapausta. Tilanne on kuvattu Thomas Mikoschin kirjassa Non-Life Insurance Mathematics sivuilla 38-42. [14]

Havaintoja eli palovahinkoja on yhteensä $n = 2167$ kappaletta. Tässä mallissa käsitellään saapumisaikoja (arrival times) (T_n) eli palovahinkojen tietoontuloa vakuutusyhtiöille sekä saapumisaikojen väliaikoja (inter-arrival times) (W_n).

Mallissa on estimoitu kaikkien saapumisaikojen väliaikojen kestoja ja muodostettu origon kautta kulkeva käyrän sekantti, jonka kulmakerroin on $1,85$, $\mu(t) = 1,85t$. Saapumisaikojen (T_n) käyrä sijaitsee tällöin tämän yhtenäisen suoran yläpuolella. Jos mallissa olevat aikavälit olisivat pitkät eli palovahinkoja sattuisi harvakseltaan, satunnaismuuttujien jakaumassa olisi enemmän hajontaa.

Vahingon suuruus ja vaikutus sekä vakuutuksenottajalle että vakuutusyhtiölle muodostavat satunnaismuuttujan intensiteetin. Tämä vaikuttaa satunnaismuuttujien hajontaan: sen vaikutus pienenee, koska se jää intensiteetin vaikutuksen alle. Tässä esimerkissä saapumisaikojen väliajat ovat kuitenkin lyhyet, joten intensiteetti ei peitä hajonnan vaikutusta. Tämän vuoksi epähomogeeninen Poisson-prosessi on parempi tapa mallintaa korvausten lukumäärää.

Poisson-prosessissa saapumisaikojen väliajat (W_i) ovat toisistaan riippumattomia ja noudattavat eksponenttifunktiota parametrilla λ:

$$W_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

Arvo

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{T_n} = \frac{1}{1,85}$$

on muuttujan λ todennäköisyysestimaattorin maksimiarvo. Tämä muodostuu, kun luku 1 jaetaan suoran kulmakertoimella $1,85$.

Tässä esimerkissä Tanskassa vakuutusyhtiön tietoon tuli vuonna 1980 166 palovahinkoa. Vuonna 1985 palovahinkojen lukumäärä 207 kappaletta ja vuonna 1990 palovahinkoja oli 218 kappaletta. Palovahinkojen saapumisaikojen keskiarvon arvio ajankohdassa $t = i$ määritellään muuttuvana keskiarvona seuraavasti:

$$(\hat{\lambda}(i))^{-1} = (2m+1)^{-1} \sum_{j=max(1,i-m)}^{min(n,i+m)} W_j,$$

kun $m = 50$.

Arvoa $\hat{\lambda}(i)$ vastaavia estimaatteja voidaan tulkita intensiteettifunktion estimaatteina, kts. määritelmä 3.18. Intensiteetin kasvu viime vuosina on ollut yleisenä ilmiönä vakuutuskorvausten parissa. Tämä tarkoittaa sitä, että yksittäisellä vahingolla on entistä isompi vaikutus sekä vakuutuksenottajalle että vakuutusyhtiölle. Tämän lisäksi myös vuosittaiset vakuutuskorvausten lukumäärät ovat kasvaneet.

Tanskalaisten palovakuutusten tilastojen intensiteettifunktio ei ole siis tasainen vuosina 1980-1990, koska vahinkojen vaikutukset muuttuvat, ja korvaushakemusten lukumäärät kasvavat vuosittain. Oletetaan siis, että saapumisajat voidaan mallintaa epähomogeenisen Poisson-prosessin mukaan. Tässä prosessissa käytetään jatkuvaa keskiarvofunktiota.

Oletetaan lisäksi, että intensiteetti on tasainen jokaisena vuonna eli se on sama koko tulevan vuoden, mutta se voi olla eri vuosittain tarkasteltuna erisuuruinen. Tällöin Poisson-prosessin keskiarvofunktio $\mu(t)$ on paloittain lineaarinen funktio, joilla voi olla eri kulmakertoimet eri vuosina, kts. huomautus 3.21. Paloittain lineaarisuus johtuu intensiteetin pysymisestä koko vuoden ajan samana, mutta seuraavana vuonna intensiteetin muutos antaa funktiolle eri kulmakertoimen.

Muutetaan vakuutuskorvausten saapumisajankohdat (T_n) keskiarvofunktion mukaisiksi, $\mu(T_n)$. Homogeenisen ja epähomogeenisen Poisson-prosessin välisten suhteiden nojalla saapumisajankohdat voidaan tulkita standardin homogeenisen Poisson-prosessin mukaisesti. Kun muuttujien jonoa $(\mu(T_n))$ verrataan lukuun n, saadaan melkein suora käyrä.

Homogeeninen Poisson-prosessi on sopiva malli vakuutuskorvausten tietoontulon mallintamiseen tanskalaisessa palovakuutuksessa lyhyillä aikaväleillä, kuten vuoden ajanjaksoilla. Tilastoissa näkyy selvästi kausittaiset osatekijät: esimerkiksi vuoden 120. päivän kohdalla palovakuutuskorvausten ilmenemisessä on huippu, joka sijoittuu huhti-toukokuulle. Kesäkuukausina on myös huomattavissa enemmän palovakuutuskorvausten tietoontuloja vakuutusyhtiöille kuin alkukeväällä tai loppusyksyllä. Lisäksi joulu-tammikuussa on paljon enemmän palovahinkoja, poikkeuksena vuoden viimeinen viikko.

Yleisesti palovahingot johtuvat tulen huolettomasta käsittelystä. Edellä kuvatut kausittaiset vaihtelut joulu-tammikuussa voivat johtua muun muassa siitä, että joulunaikana poltetaan enemmän kynttilöitä. Myös takkaa lämmitetään talvella enemmän, joka voi lisätä palovahingoista tehtyjen vakuutuskorvaushakemusten määrää. Huolimattomuus ja lisääntynyt tulenkäyttö kasvattavat siis palovahinkojen määrää. Kesän suurta palovahinkojen määrää selittävät kesäloma-aika, jolloin ollaan enemmän kotona. Ulkotulien teko ja grillaaminen lisäävät palovahinkojen riskiä. Lisäksi metsäpalot nostavat palovahinkojen määrää kesällä, ja salamat voivat myös olla syynä kesäajan palovahinkoihin.

7 Chain-Ladder -menetelmä

Jotta vakuutusyhtiö on vakavarainen korvaamaan vakuutettujan vahingot, täytyy sen varautua pitkän ajan päästä sattuviin vahinkoihin. Vakuutussopimuksen allekirjoittamisen jälkeen vakuutusyhtiölle syntyy velvollisuus maksaa korvaukset vakuutuksenottajille myöhemmin sattuvista vahingoista. Nämä tulevaisuudessa syntyvät vakuutuskorvaukset ovat vakuutusyhtiön korvausvastuu tai korvausvastuuvelka, joka esiteltiin luvussa 5. Korvausvastuulla tarkoitetaan velan todellista määrää, jota käytetään satunnaismuuttujana. [15, s. 72]

Tässä luvussa esitellään yksi deterministisistä menetelmistä, *Chain-ladder -menetelmä*, jonka avulla voidaan estimoida vakuutusyhtiön korvausvastuuta. Chain-ladder -menetelmässä korvausvastuun arvioinnissa estimaatti määritellään aikaisemmista tilastoista tietyn algoritmin avulla. Deterministiset menetelmät eivät ota kuitenkaan huomioon sitä, kuinka satunnaisia tietyt vakuutuskorvaukset ovat. Näissä menetelmissä ei siis huomioida puhdasta satunnaisheilahtelua. [18, s. 19]

Lähteinä tässä luvussa ovat erityisesti Harri Nyrhisen Riskiteoria -kurssin luentomoniste syksyltä 2013 [15] ja Sari Ropposen tutkielma Kollektiivinen korvausvastuu [18].

7.1 Selviämiskolmiot

Määritellään ensin tilastoryhmittely, *selviämiskolmio*, jonka avulla saadaan määriteltyä jokaisen sattumisvuoden korvausmäärä. Tällaisellä tilastoryhmittelyllä nähdään se, kuinka paljon vakuutuskorvauksia maksetaan ensimmäisenä, toisena jne. vuotena vahingon sattumisen jälkeen. Tällöin nähdään se, kuinka aikaisessa vaiheessa vakuutusyhtiö saa tiedon sattuneesta vahingosta. [15, s. 72-73]

Taulukko 7.1: Selviämiskolmio (kts. [15, s. 73])

i/j	0	1	...	I-1	I
0	C_{00}	C_{01}	...	$C_{0,I-1}$	C_{0I}
1	C_{10}	C_{11}	...	$C_{1,I-1}$	
...	...	...	....		
I-1	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$			
I	C_{I0}				

Selviämiskolmio kuvaa suoritettuja vakuutuskorvauksia vuoden I lopulla. Taulukossa vahinkojen sattumisvuodet ovat taulukon ensimmäisellä sarakkeella $i = 0, 1, 2, \dots I$ ja vahingoista maksettavien vakuutuskorvausten suoritusvuodet taulukon ensimmäisellä rivillä $j = 0, 1, 2, \dots I$. Nyt vahingoista maksettavien vakuutuskorvausten suoritusvuodet ovat taulukossa suhteessa vahinkojen sattumisvuoteen, jolloin korvaus syntyy. [15, s. 73]

Määritelmä 7.1. (vrt. [15, s. 73]) Olkoot vahinkojen sattumisvuodet $i = 0, 1, 2, \ldots, I$ riveillä ja vahingoista maksettavien vakuutuskorvausten suoritusvuodet $j = 0, 1, 2, \ldots, I$ sarakkeilla suhteessa sattumisvuoteen.

Nyt muuttuja C_{ij} muodostaa sen *korvausmäärän*, joka on maksettu vakuutuksenottajalle vakuutuskorvauksina sattumisvuoden i vahingosta vuosina i, $i+1$, ..., $i+j$.

Muuttujasta C_{ij} saadaan siis kokonaiskorvausmäärä kyseisenä sattumisvuonna sattuneista vahingoista suoritusvuoteen j mennessä.

Huomautus 7.2. (vrt. [15, s. 73]) Selviämiskolmion lävistäjältä saadaan kaikki vuoden I loppuun mennessä *maksetut korvaukset* kustakin vahingosta, aina sattumisvuosittain. Nämä korvaukset ovat siis

$$C_{I0}, C_{I-1,1}, \ldots, C_{1,I-1}, C_{0I}.$$

Huomautus 7.3. (vrt. [15, s. 73]) Kun selviämiskolmiota täydennetään suorakaiteeksi, voidaan estimoida korvausvastuuta. Näin saadaan selville lopulliset sattumisvuosittaiset korvausmäärät eli ne korvaukset, mitä kunakin vuonna sattuneista vahingoista on maksettu vakuutuskorvauksia kaikkien suoritusvuosien aikana. Usein näiden korvausmäärien estimoinnissa käytetään alkuun odotusarvoja eli tehtävänä on arvioida korvausvastuun odotusarvo tai ehdollinen odotusarvo, kun havainnot C_{ij} on tiedossa.

7.2 Chain-Ladder -menetelmä

Vakuutusyhtiön korvausvastuun estimoinnissa käytetään sekä stokastisia malleja että deterministisiä menetelmiä. Stokastisissa malleissa tarkastelun kohteena on tuntematon mekanismi, josta saadaan havaitut vakuutuskorvaukset. Näissä malleissa oletetaan, että korvaukset noudattavat tiettyä jakaumaa, esimerkiksi Poisson-jakaumaa. Stokastisissa malleissa käytetään tilastoja aiemmista vahingoista ja niistä maksetuista vakuutuskorvauksista. Näiden tilastojen avulla saadaan estimaatti korvausvastuun odotusarvolle ja ennustevirheen hajonnalle, jonka avulla voidaan arvioida kyseisen stokastisen mallin tarkkuutta. [18, s. 2]

Deterministiset menetelmät arvioivat vakuutusyhtiön korvausvastuuta suoraan tilastoista, jotka on koottu aiemmista havainnoista. Näitä tilastoja arvioidaan tietyn algoritmin avulla. Deterministisen menetelmän avulla ei voida arvioida itse menetelmän tarkkuutta, koska algoritmi ei ota mukaan arviointiin aiemmissa tilastoissa luultavasti näkyvää, tiettyjen vahinkojen, satunnaisuutta eli puhdasta satunnaisvaihtelua. [18, s. 2]

Yksi deterministisistä menetelmistä vakuutusyhtiön korvausvastuun selvittämiseksi on Chain-ladder -menetelmä, jossa käytetään T. Mackin vuonna 1993 muotoilemia stokastisia malleja. Nämä esitellään huomautuksessa 7.6.

Määritelmä 7.4. (vrt. [15, s. 74]) Olkoot C_{ij}, missä $i, j = 0, 1, 2, \ldots, I$, satunnaismuuttujia, jotka määrittelevät vuoden i vahingoista vuoden $i + j$ loppuun mennessä maksetut vakuutuskorvaukset. Oletetaan, että kaikki vakuutuskorvaukset kyseisistä vahingoista maksetaan I vuodessa vahingon sattumisesta.

Lopulliset vahinkomäärät C_{iI} saadaan selville estimoimalla niitä *Chain-Ladder -menetelmässä*:

Merkitään kertoimia

$$\hat{m}_j = \frac{\left(\sum_{i=0}^{I-j} C_{ij}\right)}{\left(\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j-1}\right)},$$

missä $j = 1, 2, \ldots, I$. Estimoidaan vahinkomääriä

$$\hat{C}_{ir} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i+1}^{r} \hat{m}_j,$$

missä $i = 0, 1, 2, \ldots, I$ ja $r \geq I - i + 1$.

Estimointi aloitetaan tuoreimmasta havainnosta, joka koskee vahingon sattumisvuotta. Sen jälkeen tätä havaintoa verrataan kyseistä sattumisvuotta aiempien sattumisvuosien havaintoihin.

Määritelmä 7.5. (vrt. [15, s. 74]) Nyt määritelmän 7.4 nojalla sattumisvuoden i korvausvastuun *Chain-Ladder -estimaatti* on

$$\hat{U}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I-i},$$

ja koko *korvausvastuun estimaatti* vuoden I lopussa on

$$\hat{U}_i = \sum_{i=0}^{I} \hat{U}_i.$$

Huomautus 7.6. (vrt. [15, s. 74] ja [25, s. 37]) Chain-Ladder -menetelmän taustalla on *Mackin malli* vuodelta 1993. Tämän mallin oletukset ovat seuraavat:

1. On olemassa vakioita $m_0, m_1, \ldots, m_j > 0$ ja varianssiparametrit $\sigma_0^2, \ldots, \sigma_{J-1}^2 > 0$ siten, että kaikilla $0 \leq i \leq J$ seuraavat kaavat ovat voimassa:

$$\mathbb{E}(C_{ij} | C_{i0}, \ldots, C_{i,j-1}) = m_{j-1} C_{i,j-1} \qquad \text{ja}$$
$$\mathbb{V}\text{ar}(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1},$$

   missä $i = 0, 1, 2, \ldots$ ja $j = 0, 1, 2, \ldots, I$.

2. Kumulatiiviset vahingot $C_{i,j}$ eri sattumisvuosina i ovat toisistaan riippumattomia eli kaikilla $i \neq j$,

$$(C_{i0}, \ldots, C_{iI}) \qquad \text{ja} \qquad (C_{j0}, \ldots, C_{jI})$$

   ovat riippumattomia.

Määritelmä 7.7. (vrt. [15, s. 74-75]) Oletetaan, että kertoimet $\hat{m}_j$ riippuvat suhteellisesta suoritusvuodesta j eivätkä sattumisvuodesta. Tällöin sattumisvuodet ovat toisistaan riippumattomia. Oletetaan lisäksi, että kertoimet m_j ovat *Chain-Ladder -kertoimia* tai *kehityskertoimia*. Näiden kertoimien estimaatit ovat sarakesummien osamääriä. Toisin sanoen Chain-ladder -kertoimet eli kehityskertoimet kuvaavat vakuutusyhtiön vahinkomäärien kasvua suoritusvuosittain.

Merkitään

$$D = \sigma(C_{kj}, k, j \geq 0, k + j \leq I),$$

$$D_k = \sigma(C_{kj}, 0 \leq j \leq I - k),$$

missä $k = 0, 1, 2, \dots, I$ ja

$$B_k = \sigma(C_{ij}, 0 \leq j \leq k, i + j \leq I),$$

missä $k = 0, 1, 2, \dots, I$.

Täten koko selviämiskolmiosta saatavaa tietoa eli informaation koko historiaa merkitään muuttujalla D. Yhden sattumisvuoden k tiedoa merkitään muuttujalla D_k, joka on aina yksi kokonainen rivi selviämiskolmiosta. Lisäksi muuttujalla B_k merkitään tietoa suhteellisista suoritusvuosista $j \leq k$, mikä on selviämiskolmion katkaistu kärki oikealta.

Lause 7.8. *Olkoon* $\mathbb{P}\{C_{i0} > 0\} = 1$ *kaikilla* $i \geq 0$. *Oletetaan myös, että huomautuksessa 7.6 esitellyt Mackin mallin ehdot ovat voimassa. Tällöin pätevät seuraavat ehdot:*

1. $\mathbb{E}(C_{iI} \mid D) = m_{I-i+1} \dots m_I C_{i,I-i}$
   sekä

2. $\mathbb{E}(\hat{m}_j \hat{m}_{j+1} \dots \hat{m}_I) = m_j m_{j+} \dots m_I$.

Todistus. (vrt. [15, s. 75-76])

1. Huomautuksen 7.6 oletuksen 2 nojalla odotusarvo

$$\mathbb{E}(C_{iI} \mid D) = \mathbb{E}(C_{iI} \mid D_i).$$

Nyt huomautuksen 7.6 oletuksen 1 avulla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C_{iI} \mid D) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_{iI} \mid C_{i0}, \dots C_{i,I-1}) \mid D_i) \\ &= \mathbb{E}(m_I C_{i,J-1} \mid D_i) \\ &= m_I \mathbb{E}(C_{i,I-1} \mid D_i).\end{aligned}$$

Tästä seuraa induktiolla kohta 1.

2. Huomautuksen 7.6 oletuksen 2 nojalla odotusarvo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(C_{ij} \mid B_{j-1}) &= \mathbb{E}(C_{ij} \mid C_{i0}, \dots C_{i,j-1}) \\ &= m_j C_{i.j-1},\end{aligned}$$

kun $j \geq 1$. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{m}_j \mid B_{j-1}) &= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j-1}} | B_{j-1}\right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j-1}\right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-j} m_j C_{i,j-1} \\ &= m_j.\end{aligned}$$

Tästä huomataan, että odotusarvo $\mathbb{E}(\hat{m}_j) = m_j$. Tässä todistuksessa aiemmin saatujen tuloksien avulla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{m}_j \hat{m}_{j+1} \dots \hat{m}_I) &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\hat{m}_j \hat{m}_{j+1} \dots \hat{m}_I) \mid B_{I-1})\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\hat{m}_j \hat{m}_{j+1} \dots \hat{m}_{I-1} \mathbb{E}(\hat{m}_I \mid B_{I-1})\} \\ &= m_I \mathbb{E}\{\hat{m}_j \hat{m}_{j+1} \dots \hat{m}_{I-1}\}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa myös induktiolla kohta 2.

□

Esimerkki 7.9. (vrt. [16, Harjoitus 9, tehtävä 2])

Oletetaan, että kaikki vahinkojen korvaukset maksetaan kolmessa vuodessa, $I = 3$, vahingon sattumisesta. Täydennetään selviämiskolmio suorakaiteeksi Chain-Ladder -menetelmän avulla. Lisäksi määritetään Chain-Ladder -estimaatti vuoden 3 lopussa, kun kyseinen vakuutusyhtiö on toiminut vuodet $0 - 3$. Sattumisvuodet ovat taulukossa ensimmäisessä sarakkeessa i, ja vakuutuskorvausten suoritusvuodet j ovat taulukossa riveittäin.

	0	1	2	3
0	25	65	95	95
1	20	55	90	
2	15	50		
3	10			

Lasketaan ensin kertoimet $\hat{m}_j$ määritelmän 7.4 mukaan, kun arvot $i = \{0, 1, 2, 3\}$ ja $j = \{1, 2, 3\}$. Tällöin

$$\hat{m}_1 = \frac{\sum_{i=0}^{I-1} C_{i1}}{\sum_{i=0}^{I-1} C_{i,0}} = \frac{C_{01}+C_{11}+C_{21}}{C_{00}+C_{10}+C_{20}} = \frac{65+55+50}{25+20+15} = \frac{170}{60} \approx 2,8333,$$

$$\hat{m}_2 = \frac{\sum_{i=0}^{I-2} C_{i2}}{\sum_{i=0}^{I-2} C_{i,1}} = \frac{C_{02}+C_{12}}{C_{01}+C_{11}} = \frac{95+90}{65+55} = \frac{185}{120} \approx 1,5417 \qquad \text{ja}$$

$$\hat{m}_3 = \frac{\sum_{i=0}^{I-3} C_{i3}}{\sum_{i=0}^{I-3} C_{i,2}} = \frac{C_{03}}{C_{02}} = \frac{95}{95} = 1.$$

Taulukon puuttuvat luvut saadaan edelleen määritelmän 7.4 avulla kertomalla taulukossa jo tunnettuina olevia lukuja kertoimilla $\hat{m}_j$. Tällöin korvausmääriksi saadaan

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{13} =& C_{12} \cdot \hat{m}_3 = 90 \cdot 1 = 90,\\
\hat{C}_{22} =& C_{21} \cdot \hat{m}_2 = 50 \cdot \frac{185}{120} \approx 77,\\
\hat{C}_{23} =& \hat{C}_{22} \cdot \hat{m}_3 = 77 \cdot 1 = 77,\\
\hat{C}_{31} =& C_{30} \cdot \hat{m}_1 = 10 \cdot \frac{170}{60} \approx 28,\\
\hat{C}_{32} =& \hat{C}_{31} \cdot \hat{m}_2 = 28 \cdot \frac{185}{120} \approx 43 \qquad \text{ja}\\
\hat{C}_{33} =& \hat{C}_{32} \cdot \hat{m}_3 = 43 \cdot 1 = 43.
\end{aligned}$$

Nyt taulukko on täydennetty kokonaislukujen tarkkuudella:

	0	1	2	3
0	25	65	95	95
1	20	55	90	90
2	15	50	77	77
3	10	28	43	43

Estimoitu korvausvastuu saadaan määritelmän 7.5 kaavalla

$$\hat{U}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I-i}.$$

Tällöin estimoiduiksi korvausvastuiksi saadaan

$$\begin{aligned}
\hat{U}_0 &= C_{03} - C_{0,3} = 95 - 95 = 0,\\
\hat{U}_1 &= \hat{C}_{13} - C_{1,2} = 90 - 90 = 0,\\
\hat{U}_2 &= \hat{C}_{23} - C_{2,1} = 77 - 50 = 27 \qquad \text{ja}\\
\hat{U}_3 &= \hat{C}_{33} - C_{3,0} = 43 - 10 = 33.
\end{aligned}$$

Koko korvausvastuun estimaatti vuoden $I = 3$ lopussa on

$$\hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 = 0 + 0 + 27 + 33 = 60.$$

7.3 Vahinkojen lukumäärät

Määritelmä 7.10. (vrt. [18, s. 20]) Oletetaan, että tietyn sattumisvuoden vahinkojen lukumäärät ovat riippumattomia toisen sattumisvuoden vahinkojen lukumääristä.

Kehityskerroin d_j estimoidaan

$$\hat{d}_j = \frac{\sum_{k=1}^{t-j+2} N_{kj}}{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{k,j-1}},$$

kun $j = 0, 1, 2, \ldots$

Tällöin kehityskerroin d_j estimoidaan kehitysvuodesta j havaittujen sattumisvuosittaisten vahinkojen lukumäärien summasta, ja tämä jaettaan edellisen kehitysvuoden vahinkojen lukumäärien summalla.

Huomautus 7.11. (vrt. [18, s. 20-21]) Yleensä, kun lasketaan kehityskertoimia, lasketaan ensin yksittäiset kehityskertoimet:

$$d_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_{i,j-1}},$$

kun $i = 1, 2, \ldots, I-1$ ja $j = 2, 3, \ldots, t-i+1$. Tällöin kehityskerroin $\hat{d}_j$ voidaan esittää näiden yksittäisten kehityskertoimien painotettuna keskiarvona:

$$\begin{aligned}\hat{d}_j &= \frac{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{kj}}{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{k,j-1}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{t-j+1} \frac{N_{kj}}{N_{k,j-1}} \cdot N_{k,j-1}}{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{k,j-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{t-j+1} \frac{N_{k,j-1}}{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{k,j-1}} \cdot d_{kj}\end{aligned}$$

kun $j = 2, 3, \ldots, J$.

Chain-Ladder -menetelmä käyttää selviämiskolmiota lähtötietona ja täydentää kolmion suorakaiteeksi kehityskertoimien d_j avulla. Kun aineistona ovat vahinkojen lukumääriä, kehityskerroin d_j määrittää sen, miten tiedossa olevien vahinkojen lukumäärä on muuttunut kehitysvuoden $j-1$ lopusta kehitysvuoden j loppuun mennessä. [18, s. 20]

Vahinkojen lukumäärien muutoksia voidaan arvioida yksittäisten kehityskertoimien avulla. Näihin muutoksiin vaikuttavat muun muassa lakimuutokset, raportoinnin muuttuminen tai alaluvussa 4.1 mainitut vakuutusalaan vaikuttavat asiat. [18, s. 21]

Määritelmä 7.12. (vrt. [18, s. 21-22]) Olkoot $\hat{d}_j$ kehityskertoimia, joista saadaan Chain-Ladder -menetelmän *selviämisjakauma*, $\hat{F}(j)$, seuraavalla kaavalla:

$$\hat{F}(j) = \frac{\hat{N}_{ij}}{\hat{N}_{iJ}} = \frac{N_{iJ} \prod_{k=2}^{j} \hat{d}_k}{N_{iJ} \prod_{k=2}^{J} \hat{d}_k} = \frac{1}{\prod_{k=j+1}^{J} \hat{d}_k},$$

kun $j = 1, 2, \ldots, J$.

Selviämisjakauman avulla saadaan selville, kuinka monta vahinkoa vuonna i sattuneista vahingoista on vakuutusyhtiön tiedossa vuonna j.

Sattumisvuoden i lopulliseksi vahinkojen lukumääräksi saadaan kehitysvuosien j kumulatiivisten lukumäärien estimaattien, $\hat{N}$, avulla

$$\hat{N}_{iJ} = N_{i,t-i+1} \cdot \hat{d}_{t-i+2} \cdot \cdots \cdot \hat{d}_j.$$

8 Simulointi

Vakuutuskorvausten määrien laskemisesta ja arvioinnista tietyillä aikaväleillä saattaa tulla melko hankalaa jo pienillä vahinkomäärillä ja rajoittavilla oletuksillakin. Laskemista hankaloittavat erilaiset korrelaatit eli eri muuttujien riippuvuussuhteet. Tässä luvussa esitellään *vakuutuskorvausmäärien simulointia* ja lopuksi esitellään esimerkki simuloinnista lakisääteisen tapaturmavakuutuksen puolella. Keskeisenä lähteenä tässä luvussa on C.D. Daykinin, T. Pentikäisen ja M. Pesosen teos Practical Risk Theory for Actuaries [2].

Tällä hetkellä *simulointia* käytetään paljon toiminnallisessa tutkimuksessa, varsinkin vakuutustoiminnassa, kun yritetään arvioida ja ennakoida vakuutustoiminnassa tapahtuvia muutoksia tulevaisuudessa. Vakuutuskorvausmäärien muutokset ovat yhtenä esimerkkinä vakuutustoimintaan vaikuttavista muutoksista. Simulointi antaa vakuutuskorvausten arviointiin ja laskemiseen joustavan ja tehokkaan jäljentämistavan. Tämä auttaa arviointia jopa monimutkaisimpien mallien tarkassa määrittelyssä. [2, s. 137-138]

Simulointi-käsitteellä on monia merkityksiä. Usein stokastiset elementit liittyvät simulointiin, mutta se ei ole aina välttämätöntä. Tässä simulointia käsitellään vain stokastiselta kannalta. [2, s. 138]

Simuloinnissa pyritään, analyyttisen ongelmanratkaisun ja perinteisten menetelmien sijasta, jäljittelemään mahdollisia tapahtumia. Sitten nämä erilaiset tapahtumat yhdistetään perustapahtumien ketjuiksi. Tällöin jokaista tapahtumaa on helpompi käsitellä ja arvioida. *Satunnaislukugeneraattoria* käytetään tuottamaan jokaiselle muuttujalle tarpeellinen toteutus. Sitten tätä simulointiprosessia toistetaan monta kertaa, jotta pystytään arvioimaan esimerkiksi vakuutusyhtiön vakuutuskorvausten määriä. [2, s. 137]

Simulointiin tarvittava tekninen työkalu on siis satunnaislukugeneraattori, jolla tuotetaan mahdollisimman monia käytännön sovelluksissa tarvittavia satunnaislukuja. Tämä tarkoittaa sitä, että tietokonealgoritmi tuottaa *pseudo-satunnaislukuja* (pseudo-random numbers). Nämä luvut ovat samoin jakautuneita eli ne ovat esimerkiksi Poisson-jakautuneita riittävällä tarkkuudella. [2, s. 138]

8.1 Satunnaisluvut

Seuraavaksi esitellään yksinkertaisin tilanne, jossa voidaan käyttää simulointia [2, s. 138-139]:

Olkoon F tietyn jakauman kertymäfunktio. Määritellään ensin satunnaisluvut siten, että ne ovat jakautuneet saman jakauman mukaisesti:

$$X_1, X_2, \ldots, X_s.$$

Lisäksi näistä satunnaisluvuista oletetaan, että ne ovat toisistaan riippumattomia. Tämä simulointiprosessi on samanlainen prosessi kuin lotossa käytetty prosessi. Esimerkiksi jos tutkitaan diskreetin jakauman prosessia, se on järjestetty siten, että tietyn arvon todennäköisyydeksi on saatu sama todennäköisyys kuin silloin, jos asetetaan tämä arvo annetun jakauman mukaisesti.

Monet simuloinnit aloitetaan samanlaisesti jakautuneista satunnaisluvuista. Useimmissa sovelluksissa mahdollisten arvojen r oletetaan kuuluvan välille $]0,1[$. [2, s. 139]

Jos tutkitaan vielä lottoesimerkkiä, niin sallitut luvut ovat desimaalilukuja välillä $]0,1[$. Tällöin tarkastellaan erityisesti numeromerkkejä (digits) u. Täten jokaisen numeromerkin u todennäköisyys tulla arvotuksi on

$$\frac{1}{(10^u - 1)}.$$

Nyt voidaan muodostaa tasajakauman $\mathrm{Tas}(0,1)$ kertymäfunktio R:

$$R(r) = \begin{cases} 0 & \text{kun } r \leq 0 \\ r & \text{kun } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{kun } r \geq 1. \end{cases}$$

Nyt r on tasaisesti yksikkövälille jakautunut satunnaismuuttuja. Silloin pystytään muuntamaan kyseinen satunnaisluku r funktion F käänteisfunktion F^{-1} avulla seuraavasti [2, s.139-141]:

$$X = F^{-1}(r). \tag{8.1}$$

Tällöin satunnaismuuttujan X jakauma on jatkuva.

Toisaalta taas yleisessä tapauksessa tämän kaavan 8.1 tilalla käytetään kaavaa:

$$F^{-1}(r) = \min\{x \mid F(x) \geq r\}. \tag{8.2}$$

Simulointiprosessi voidaan järjestää myös siten, että numeerinen arviointi saadaan tiheydestä ja jakaumafunktiosta. Tällöin simuloidut X-arvot on ryhmitelty joukkoihin arvioitujen tiheyksien mukaan. Simuloinnissa otetaan siis huomioon vahinkotapahtumien sattumistiheys.

8.2 Vakuutuskorvausten määrä

Yksinkertaisessa simuloinnissa sovelletaan yhtälöitä 8.1 ja 8.2. Simulointiprosessi koostuu kahdesta kohdasta [2, s.141-142]:

1. Luodaan välille $]0,1[$ tasaisesti jakautunut satunnaisluku r.
2. Etsitään pienin muuttuja k, jolle pätee

$$F(k) \geq r$$

ja oletetaan, että muuttuja k on kyseinen satunnaisluku. Satunnaisluvun k löytämiseksi tarvitaan laskelmia ja valmiina olevia taulukoita aiemmista vakuutuskorvausten määristä.

Toistamalla edellä olevia kohtia 1 ja 2 s-kertaa saadaan otanta vakuutuskorvausten määrästä.

8.3 Simulointi Poisson-prosessin avulla

Tässä alaluvussa esitellään esimerkki simuloinnista Poisson-prosessin avulla. Lähteenä on Tapaturmavakuutuskeskuksen Tilastojulkaisun 2015 taulukot, joihin on koottu vuosina 2005-2014 Suomessa sattuneiden työtapaturmien määrät. Lisäksi taulukoissa työtapaturmat on jaettu muun muassa työkyvyttömyyden keston, pääammattiluokan, sukupuolen ja ikäluokan mukaan. Tässä simuloinnissa käsitellään tilastoa, jossa työtapaturmat on luokiteltu niiden vakavuuden mukaan eli kuinka pitkä työkyvyttömyysaika on aiheutunut työtapaturman jälkeen. Lisäksi simuloinnissa otetaan huomioon vahingoista maksetut korvaukset: nämä korvaussummat ovat Tapaturmavakuutuskeskuksen tilastosta, jossa on yhteenveto viime vuosina maksetuista työtapaturmavakuutuskorvauksista. Tässä simuloinnissa tutkitaan työtapaturmista johtuvien työkyvyttömyyksien keston vaikutusta vakuutusyhtiön korvausmäärään. Simuloinnissa on käytetty GNU Octave -ohjelmistoa. [20], [21]

Työtapaturman sattuessa vahingoittuneelle työntekijälle korvataan muun muassa sairaanhoitokuluja sekä matka- ja lääkekuluja. Jos henkilö on työtapaturman seurauksena vahinkopäivän lisäksi vähintään kolmena peräkkäisenä päivänä työkyvytön kokonaan tai osittain, vakuutusyhtiö korvaa tätä ansionmenetystä. Vahinkopäivältä ei kuitenkaan makseta päivärahaa. Jos työnantaja on maksanut työntekijälleen sairausajan palkan, vakuutusyhtiö korvaa ansionmenetykset työnantajalle: muussa tapauksessa korvaus menee suoraan vahingoituneelle työntekijälle. Päivärahakorvauksia maksetaan alle vuoden työkyvyttömyyden aiheuttavissa työtapaturmissa. Jos työkyvyttömyys jatkuu yli vuoden, vahingoittuneelle maksetaan tapaturmaeläkettä. [19, s. 97-98]

Muita korvauslajeja työtapaturmatapauksissa ovat esimerkiksi haittaraha pysyvästä yleisestä haitasta, erilaiset kuntoutuskorvaukset sekä hoitotuki. Työtapaturmien aiheuttamissa kuolemantapauksissa korvataan hautausapua sekä perhe-eläkettä leskelle, alle 18-vuotiaille lapsille ja 18-24 -vuotiaille opiskeleville lapsille. [19, s. 125, 131, 140-141]

Seuraavaan taulukkoon on merkitty vuosina 2010-2013 sattuneiden työtapaturmien lukumäärät. Työtapaturmat on luokiteltu niistä johtuvien työkyvyttömyysjaksojen keston mukaan. Luokittelussa on otettu huomioon muun muassa alle kolmen päivän työkyvyttömyydet, jolloin vakuutusyhtiö ei korvaa ansionmenetystä.

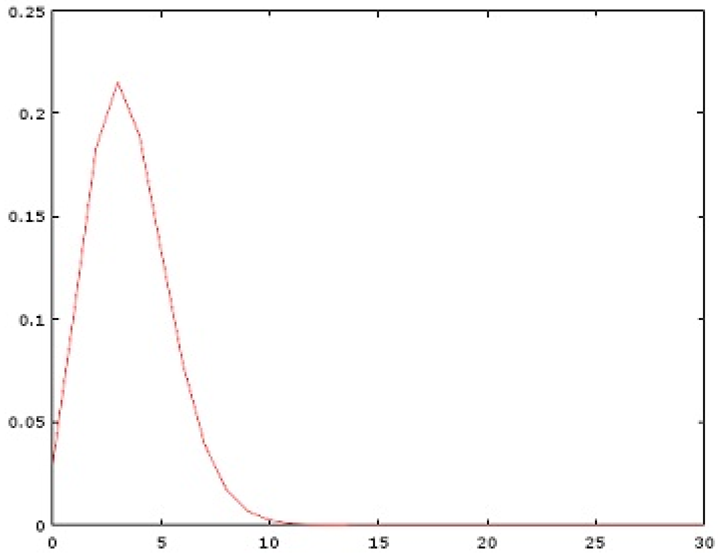
Taulukko 8.1: Palkansaajien työtapaturmat luokiteltuna työkyvyttömyyden keston mukaan vuosina 2010-2013 (vrt. [21])

0	0-3 pv	4-30 pv	31-90 pv	91-180 pv	180+, eläke	kuollut	Yht.
2010	70185	43072	7445	1926	1286	51	123965
2011	75208	44622	7762	2127	1271	47	131037
2012	74550	42255	7540	1958	1329	48	127680
2013	73591	39490	7038	1883	1148	29	123179

Käsitellään seuraavaksi esimerkkitapaus työtapaturmista, joissa työkyvyttömyys on kestänyt yli 180 päivää tai kyseessä on tapaturmaeläke. Esimerkiksi vuonna 2010 tällaisia työtapaturmia oli 1286 kappaletta, niin keskimäärin yhdessä päivässä tällaisia tapaturmia sattuu

$$\frac{1286}{365} \approx 3,52.$$

Olkoon $N(1)$ työtapaturmien, jotka aiheuttavat tällaisia pitkiä työkyvyttömyyksiä, lukumäärä yhdessä päivässä. Nyt $N(1) \sim \text{Poisson}(3,52)$.



Lasketaan nyt todennäköisyys sille, että yhdessä päivässä ei satu yhtään työtapaturmaa, joka aiheuttaisi yli 180 päivän työkyvyttömyyttä tai tapaturmaeläkettä:

$$\mathbb{P}\{N(1) = 0\} = \frac{e^{-3,52} \cdot 3,52^0}{0!} \approx 0,03.$$

Tutkitaan seuraavaksi lisää yli 180 päivän työkyvyttömyyden tai eläkkeen aiheuttavia työtapaturmia vuosina 2010-2013. Aiemmin saatiin jo, että vuonna 2010 tällaisia työtapaturmia sattui keskimäärin 3,52 kappaletta päivässä. Tällöin $N(1)$ on työtapaturmien lukumäärä yhdessä päivässä ja $N(1) \sim \text{Poisson}(3,52)$ eli työtapaturmien lukumäärä yhdessä päivässä noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla $\lambda = 3,52$.

Lasketaan nyt nämä samat keskiarvot vuosilta 2011-2013:

$$\frac{1271}{365} \approx 3,48 \qquad \text{eli} \qquad N(1) \sim \text{Poisson}(3,48)$$

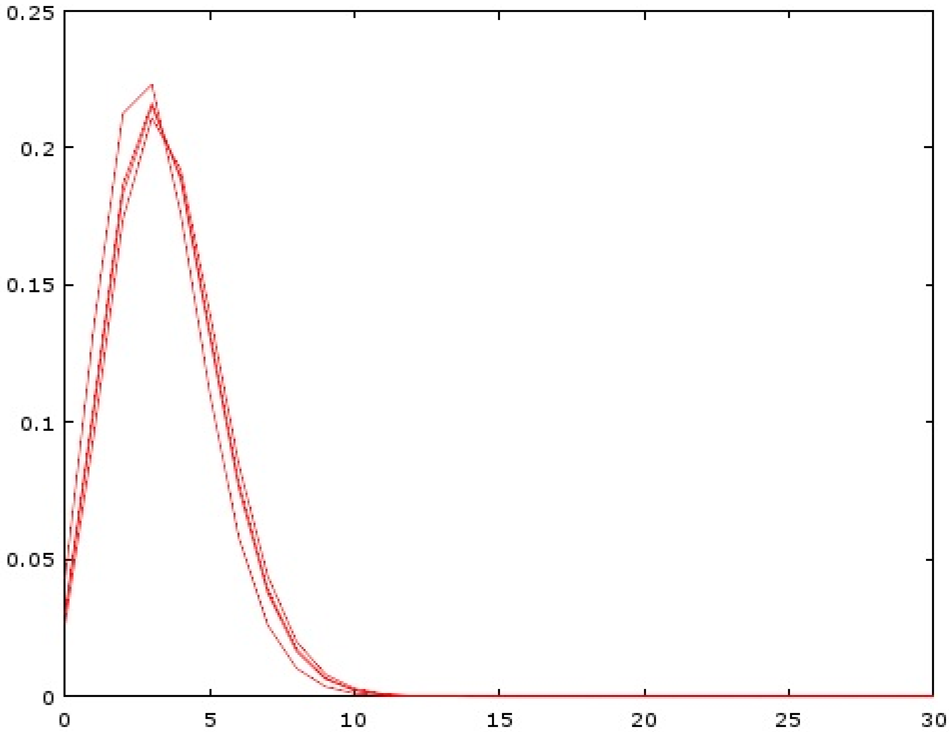
vuoden 2011 työtapaturmissa, joissa työkyvyttömyys on kestänyt yli 180 päivää tai vahingoittunut on tapaturmaeläkkeellä.

Seuraavaksi on vielä vuosien 2012 ja 2013 keskimääräiset työtapaturmamäärät päivässä:

$$\frac{1329}{365} \approx 3,64 \qquad \text{eli} \qquad N(1) \sim \text{Poisson}(3,64),$$

$$\frac{1148}{365} \approx 3,15 \qquad \text{eli} \qquad N(1) \sim \text{Poisson}(3,15).$$

Näiden Poisson-jakaumien kuvaajat on seuraavassa kuvassa:



Taulukossa 8.2 on työtapaturmien lukumäärät yhteensä vuosina 2010-2013. Työtapaturmat on luokiteltu työkyvyttömyyden keston mukaan. Tätä seuraavassa taulukossa 8.3 on näiden kokonaisvahinkomäärien osuus koko vahinkomäärästä vuosina 2010-2013.

Taulukko 8.2: Palkansaajien työtapaturmat yhteensä vuosina 2010-2013 (vrt. [21])

	0-3 pv	4-30 pv	31-90 pv	91-180 pv	180+, eläke	kuollut	Yht.
Yht.	293534	169439	29785	7894	5034	175	505861

Taulukko 8.3: Suhteelliset frekvenssit prosentteina (%) kaikista työtapaturmista vuosina 2010-2013

0-3 pv	4-30 pv	31-90 pv	91-180 pv	180+, eläke	kuollut	Yht.
58	33,5	6	2	0,01	0,0003	≈ 100

Alaluvussa 3.3 esiteltiin Cramèr-Lundberg -malli, jonka mukaan satunnaismuuttujien X_i summat $X_1 + X_2 + \cdots + X_i$ ovat mukana koko korvaussummassa, jolloin nämä summat lähestyvät normaalijakaumaa. Simuloidaan nyt näitä vuosina 2010-2013 sattuneita työtapaturmia Cramèr-Lundberg -malli mukaan. Kaikkien työtapaturmien

intensiteetti vuosien 2010-2013 aikana (4 vuotta) on

$$\lambda = \frac{123965 + 131037 + 127680 + 123179}{365 \cdot 4} = \frac{505861}{1460} \approx 346,5.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että näiden neljän vuoden 2010-2013 työtapaturmamäärien mukaan työtapaturmia sattuu keskimäärin päivässä 346,5 kappaletta.

Seuraavassa taulukossa 8.4 on vuosina 2010-2013 maksettujen työtapaturmavakuutuskorvausten määrät suoritusvuosittain. Näissä korvausmäärissä ei siis oteta huomioon vahingon sattumisvuotta: näihin sisältyy myös aiemmin sattuneiden vahinkojen korvauksia. Lukumäärissä ovat mukana kaikki vakuutuslajit eli lakisääteinen tapaturmavakuutus ja yrittäjän vapaaehtoinen työajan vakuutus sekä vapaa-ajan vakuutus, jonka voi yhdistää lakisääteiseen tapaturmavakuutukseen. Lisäksi näissä luvuissa ovat mukana kaikissa vakuutuslaitoksissa, paitsi Maatalousyrittäjien eläkelaitoksessa, vakuutetut vahingot. Tämä täytyy ottaa huomioon, kun verrataan korvausmääriä aiemmin esiteltyihin taulukoihin, sillä niissä on mukana vain palkansaajien vahingot. (vrt. [20])

Taulukko 8.4: Maksetut korvaukset (1000 euroa) suoritusvuosittain (vrt. [20])

2010	2011	2012	2013
546 421	564 806	584 740	596 341

Tässä simuloinnissa Poisson-prosessin stationaarisuusoletuksen nojalla virhe ei kuitenkaan ole suuri, jos käytetään seuraavaksi esiteltävää arviointitapaa. Stationaarisuusoletus tarkoittaa siis sitä, että odotusarvot ovat kuitenkin samat.

Approksimoidaan nyt vuosien 2010-2013 aikana sattuneiden työtapaturmien korvausmäärän suuruutta vuosina 2010-2013 maksettujen korvausten avulla:

Olkoon $X(t)$ diskreetti satunnaismuuttuja. Vuosina 2010-2013 korvausten kokonaissummaksi saadaan

$$546\,421\,000 + 564\,806\,000 + 584\,740\,000 + 596\,341\,000 = 2\,292\,308\,000\text{e}.$$

Tällöin keskimääräinen korvaus on

$$\frac{2\,292\,308\,000\text{e}}{505861} \approx 4500\text{e},$$

ja keskimääräinen korvausten kokonaissumma vuosittain on

$$\frac{2\,292\,308\,000\text{e}}{4} \approx 570\,000\,000\text{e}.$$

Nyt satunnaismuuttujan $X(t)$ odotusarvo vuosien 2010-2013 mukaan on

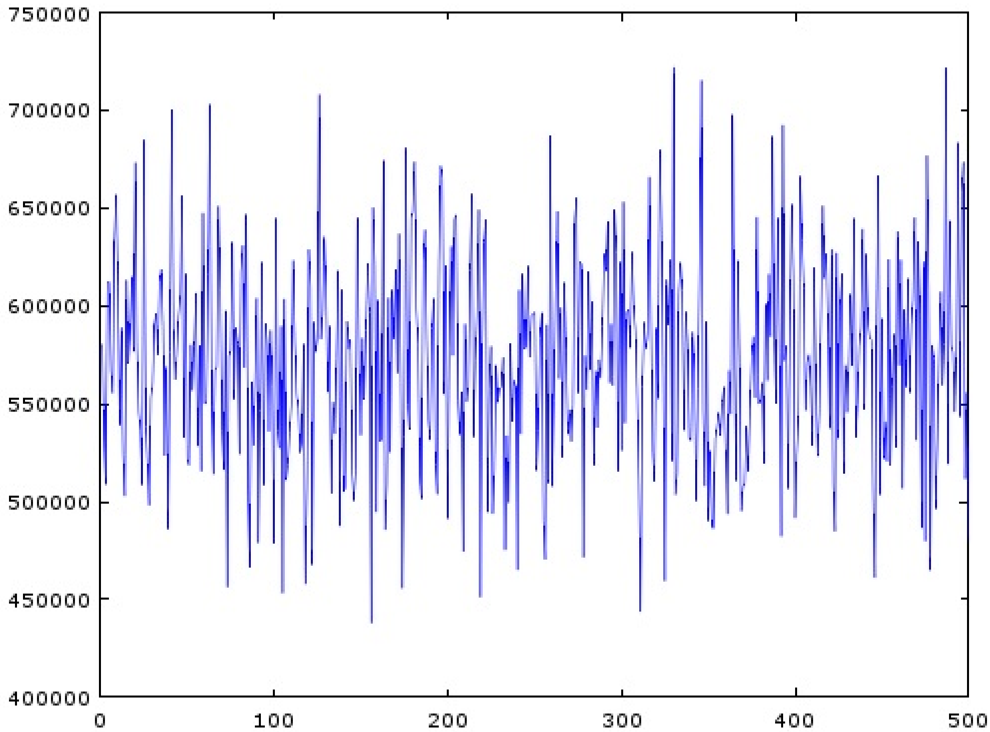
$$\mathbb{E}(X(t)) \approx 4500\text{e}.$$

Oletetaan, että diskreetti satunnaismuuttuja $X(t)$ jakautuu taulukon 8.3 mukaan. Arvioidaan siis vakuutuskorvauksia ja työkyvyttömyyden kestoa.

Nyt saadaan

Työkyvyttömyyden kesto	Arvioitu vakuutuskorvauksen suuruus (1000 euroa)	Todennäköisyys
0-3 pv	600	0,58
4-30 pv	1700	0,335
31-90 pv	5 500	0,06
91-180 pv	10 000	0,02
180+, eläke	25 000	0,01

Edellä olevien tulosten, diskreetin satunnaismuuttujan, Poisson-prosessin ja tarvittavien toistojen avulla saadaan seuraava jakauma kokonaiskorvaussummista, kun käytetään satunnaislukugeneraattoria GNU Octave -ohjelmistolla. Tämän avulla voidaan arvioida vakuutuskorvausmäärien muutoksia ja suuruuksia tulevaisuudessa. Korvaussumma vuositasolla on laskettu aiemmin, siis noin 570 000 000e. Jakaumassa vakuutuskorvauksen suuruus on laskettu tuhansina euroina.



Lähteet

[1] Basu, A.K.: *Introduction to Stochastic Process*.
Alpha Science International Ltd, Pangbourne, 2003

[2] Daykin, C. D., Pentikäinen, T. ja Pesonen, M: *Practical Risk Theory for Actuaries*.
Chapman & Hall, Lontoo, 1994

[3] Finanssivalvonta: *Solvenssi II*. [Verkkodokumentti, viitattu 7.3.2016]
http://www.finanssivalvonta.fi/fi/Saantely/Saantelyhankkeet/Solvenssi/Pages/Default.aspx

[4] Finanssivalvonta: *Suomalaisten vakuutusyhtiöiden Solvenssi II - vaikuttavuustutkimus*. [Verkkodokumentti, viitattu 7.3.2016]
http://www.finanssivalvonta.fi/fi/tiedotteet/lehdistotiedotteet/documents/qis5.pdf

[5] Finlex: *Laki Finanssivalvonnasta 878/2008*. [Verkkodokumentti, viitattu 18.3.2016]
http://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2008/20080878?search%5Btype%5D=pika&search%5Bpika%5D=finanssivalvonta

[6] Finlex: *Työtapaturma- ja ammattitautilaki 459/2015*. [Verkkodokumentti, viitattu 1.2.2016]
http://www.finlex.fi/fi/laki/alkup/2015/20150459#Pidp2199920

[7] Liski, Erkki: *Todennäköisyyslaskenta, luentomoniste*.
Tampereen yliopisto, 2015 [Verkkodokumentti, viitattu 5.3.2016]
http://www.uta.fi/sis/mtt/mtttp4/Luku4.pdf

[8] Liski, Erkki: *Matemaattisen tilastotieteen perusteet, luentomoniste*.
Tampereen yliopisto, 2015 [Verkkodokumentti, viitattu 23.11.2015]
http://www.uta.fi/sis/mtt/mttta2/Luku5.pdf

[9] Mactutor: *Abraham de Moivre*. [Verkkodokumentti, viitattu 19.5.2016]
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Moivre.html

[10] MacTutor: *Blaise Pascal*. [Verkkodokumentti, viitattu 19.5.2016]
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal.html

[11] MacTutor: *Girolamo Cardano*. [Verkkodokumentti, viitattu 23.4.2016]
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan.html

[12] MacTutor: *Pierre de Fermat*. [Verkkodokumentti, viitattu 19.5.2016]
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat.html

[13] Mellin, Ilkka: *Todennäköisyyslaskenta: Satunnaismuuttujat ja todennäköisyys-jakaumat*.
Aalto-yliopisto [Verkkodokumentti, viitattu 22.5.2016]
http://math.aalto.fi/opetus/sovtoda/oppikirja/TodLaskSatMuutjaJak.pdf

[14] Mikosch, Thomas: *Non-Life Insurance Mathematics: an introduction with stochastic processes*.
Springer-Verlag, Berlin, 2004

[15] Nyrhinen, Harri: *Riskiteoria, syksy 2013*.
Helsingin yliopisto, 2013 [Verkkodokumentti, viitattu 7.2.2015]
https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/Riskiteoria,+syksy+2013?preview=/112438755/119538627/rt13.pdf

[16] Nyrhinen, Harri: *Riskiteoria, syksy 2015*.
Helsingin yliopisto, 2015 [Verkkodokumentti, viitattu 16.5.2016]
http://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/Riskiteoria%2C+syksy+2015

[17] Rantala, Jukka ja Pentikäinen, Teivo: *Vakuutusoppi*.
Finanssi- ja vakuutuskustannus Oy, Sastamala, 2009

[18] Ropponen, Sari: *Kollektiivinen korvausvastuu*.
Suomen Akturiaariyhdistys ry, päivitetty 2013 [Verkkodokumentti, viitattu 20.5.2016]
http://www.actuary.fi/aktuaarit/shv-tutkinto/Kollektiivinen_korvausvastuu.pdf

[19] Salo, Kirsi: *Työtapaturma ja ammattitauti*.
FINVA, Vantaa, 2015

[20] Tapaturmavakuutuskeskus: *Yhteenveto maksetuista korvauksista korvauslajeittain*. [Verkkodokumentti, viitattu 22.5.2016]
http://www.tvk.fi/fi/Tilastot-/Korvaussuoritetilasto/

[21] Tapaturmavakuutuskeskus: *Tilastojulkaisu 2015*. [Verkkodokumentti, viitattu 28.4.2016]
http://www.tvk.fi/fi/Tilastot-/Tilastojulkaisut/

[22] Tilastokeskus: *Tilastonteko on yhtä vanhaa perua kuin kirjoitustaito*. [Verkkodokumentti, viitattu 23.4.2016]
http://www.tilastokeskus.fi/artikkelit/2010/art_2010-09-27_005.html?s=6&tulosta

[23] Tuominen, Pekka: *Todennäköisyyslaskenta 1*.
Limes ry, Helsinki, 1993

[24] WolframMathWorld: *Stochastic Process*. [Verkkodokumentti, viitattu 21.5.2016]
http://mathworld.wolfram.com/StochasticProcess.html

[25] Wüthrich, Mario V. ja Merz, Michael: *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*.
John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England, 2008