TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Veera Silvennoinen

Todistamisesta yläkoulumatematiikassa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2016

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

SILVENNOINEN, VEERA: Todistamisesta yläkoulumatematiikassa

Pro gradu -tutkielma, 42 s.

Matematiikka

Toukokuu 2016

Tiivistelmä

Tutkielma käsittelee todistamista suomalaisessa yläkoulumatematiikassa. Todistamisen historiaa tarkastellaan Antiikin Kreikan näkökulmasta ja myös Suomen kouluopetuksen näkökulmasta 1900-luvulla. Lisäksi käydään läpi todistamisen roolia matematiikassa yleisesti - miksi todistaminen on matematiikan ydin ja millaisilla menetelmillä matematiikassa todistetaan. Tutkielmassa tarkastellaan myös sitä, miten perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ja oppikirjat käsittelevät todistamista 7.-9. luokilla; opetussuunnitelma edellyttää yläkoulussakin todistamisajatteluun pohjustamista, ja selkeästi oppikirjoissakin on painotettu muutakin kuin laskutaitoa. Kuitenkin se, millä tapaa ja kuinka tarkasti todistamista opetetaan yläkoulussa, jää paljolti opettajan vastuulle. Lopulta tutkielmassa selvitetään hieman alan toimijoiden - kahden aineenopettajan ja yhden kirjantekijän - mielipiteitä siitä, millainen rooli todistamisella on tämän päivän yläkoulumatematiikassa ja miten todistamista tulisi opettaa. Näkemykset ovat hieman eriäviä, mutta jokaista niistä yhdistää se, että todistaminen on kiinteä osa matematiikkaa ja se on tehtävä selväksi matematiikan kouluopetuksessa jo varhain.

Tärkeimpiä lähdeteoksia tämän tutkielman teossa ovat olleet Kenneth H. Rosenin Discrete Mathematics and Its Applications [6] sekä David A. Reidin ja Christine Knippingin Proof in Mathematics Education [2].

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman aihe valikoitui paljolti omien koulumuistojeni takia ja lisäksi juuri ennen tutkielman aloittamista käydyn keskustelun - joka käsitteli lukiolaisen vaikeutta orientoitua todistamistehtäviin - vuoksi. Muistan omalta kouluajaltani erityisesti yhden oppitunnin, joka käsitteli kolmion kulmien summaa. Opettaja kertoi, että olipa kolmio millainen tahansa, kulmien summa on aina 180°. Opettaja yritti vakuuttaa oppilaat asiasta sillä, että jokainen piirsi vihkoonsa mielivaltaisen kolmion, mittasi kulmat ja summasi ne. Jokaiselle tuli tulokseksi yllättäen 180°. Muistan, että en hyväksynyt tätä vakuuttelua, vaan koitin monta kertaa muodostaa sellaista kolmiota, jonka kulmien summa ei ole 180°, siinä kuitenkaan onnistumatta. Jos yleisesti matematiikassa ei voida osoittaa lauseen olevan totta yksittäistapausten totuuden perusteella, miksi lapsia vakuutellaan koulussa nimenomaan tällä tavalla uskomaan jokin lause todeksi?

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan todistaminen on sisällytettävä koulumatematiikkaan jo yläkoulussa. Siellä asiat on esitetty aika ympäripyöreästi eikä sitä, miten todistamista kuuluisi tarkalleen ottaen opettaa, ole juurikaan eritelty. Onkin aiheellista pohtia, mitä tämä todistamisen perusteisiin tutustuminen voisi olla. Voisiko jopa osan nykyisestä lukion materiaalista siirtää yläkouluun opiskeltavaksi vai onko lähdettävä liikkeelle huomattavasti pienemmän mittakaavan todistusajatteluun valmentavista tehtävätyypeistä ja opetustyylistä? On selvää, että vaikka jo yläkoulussa keskitytään arkipäivän ongelmien matemaattiseen formalisointiin, koulutodistuksessa ei voida vaatia tiukkaa formalismia - sen sijaan perustelua ongelmanratkaisuprosesseille on tarpeen harjoitella.

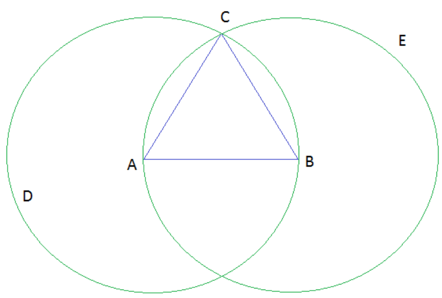
Tässä tutkielmassa perehdytään todistamiseen muun muassa selvittämällä mikä merkitys todistamisella on matematiikassa ja miksi sitä tehdään, mitkä ovat todistamisen historialliset juuret ja millaisia todistustekniikoita matemaattisissa todistuksissa käytetään. Todistamiseen perehdytään erityisesti myös siitä näkökulmasta, miten se on sisällytetty koulumatematiikkaan eli miten esimerkiksi oppikirjat esittelevät todistamisen. Lisäksi esitellään joitain valmiita selkotajuisia geometrisia todistuksia, joita voisi peruskouluikäisille esittää.

2 Historiallisia näkökulmia todistamiseen antiikin Kreikasta ja Suomen kouluopetuksesta 1900-luvulla

Tässä luvussa käsitellään valikoidusti matematiikan ja sen opetuksen historiaa todistamisen näkökulmasta. On mielekästä käydä hieman läpi antiikin matematiikkaa, sillä sieltä ovat lähtöisin ensimmäiset todistukset ja monet muut todistukset, jotka ovat tänä päivänäkin esityskelpoisia. Kuten mainittu, ensimmäiset matemaattiset todistukset liitetään antiikin Kreikkaan, erityisesti *Thales*-nimiseen matemaatikkoon (noin 600 eaa.). Hänen kerrotaan todistaneen useita geometriaan liittyviä peruslauseita, muun muassa sen, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret ja että puoliympyrän kaaren sisältämä kehäkulma on suora. Jälkimmäinen lause kulkee nimellä *Thaleen lause*. [1] Tämä lause mainitaan myös uudessa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014. [12]

Eukleides (365?-300? eaa.) on yksin merkittävimmistä henkilöistä matematiikan historiassa. Eukleideen kuuluisin teos on *Stoikheia* eli *Alkeet* ja se koostuu 13 kirjasta, joihin oli koottu sen ajan matematiikan teoreemat ja ne esitettiin osana laajempaa kokonaisuutta. Alkeet tarjosi mallin matemaattiselle todistamiselle - kaikki lauseet olivat täsmällisesti todistettu alussa annettujen määritelmien, aksioomien ja postulaattien avulla. Kouluopetuksessa Alkeet on ollut keskeinen oppikirja viime vuosisadalle asti, myös Suomessa. [1]
Seuraavana esitetään esimerkki Alkeiden ensimmäisestä todistuksesta:

Propositio 1: Voidaan piirtää tasasivuinen kolmio annettu äärellinen suora viiva yhtenä sivuna



Kuva 1.

Olkoon AB annettu äärellinen suora viiva. Tehtävänä on muodostaa tasasivuinen kolmio, jonka yksi sivu on AB. Keskipisteenä A ja pituutena AB muodostetaan ympyrä BCD. Keskipisteenä B ja pituutena BA muodostetaan toinen ympyrä ACE. Pisteeessä C,

> jossa ympyrät leikkaavat toisensa, muodostetaan pisteisiin A ja B suorat viivat CA ja CB. Piste A on ympyrän CDB keskipiste, joten AC ja AB ovat yhtä pitkät. Edelleen, koska piste B on ympyrän CAE keskipiste, BC ja BA ovat yhtä pitkät. CA osoitettiin yhtä pitkäksi kuin AB, joten CA ja CB ovat yhtä pitkiä kuin AB. Ja ne, jotka ovat yhtä suuria saman suureen kanssa, ovat myös yhtä suuria keskenään. Siis CA ja CB ovat myös yhtä suuret. Niinpä kolme äärellistä suoraa viivaa CA, AB ja BC ovat yhtä pitkiä. Näin ollen kolmio ABC on tasasivuinen, ja se on piirretty siten, että AB on yhtenä sivuna, mikä oli tehtävänä. (Heath, 1956, Vol 1. s.241-242, ref. [2, s. 5])

Tämän lauseen todistamiseen käytettiin seuraavia postulaatteja, aksioomaa ja määritelmää:

- Postulaatti 1: Voidaan piirtää suora viiva mistä tahansa pisteestä mihin tahansa pisteeseen.
- Postulaatti 3: Voidaan piirtää ympyrä minkä tahansa keskipisteen ja pituuden suhteen.
- Aksiooma 1: Ne, jotka ovat yhtä suuret saman suureen kanssa, ovat myös yhtä suuret keskenään.
- Määritelmä 15: Ympyrä on yhdestä viivasta koostuva sellainen tasokuvio, jossa eräästä kuvion sisäpuolella olevasta pisteestä kuvion viivalle piirretyt suorat viivat ovat kaikki yhtä pitkiä.

Huomioitavaa tämän todistuksen osalta on myös se, että Eukleides ei ollut määritellyt erikseen janaa eikä sädettä. [3, s. 7]

Muita merkittäviä matematiikan historiaan liittyviä nimiä Antiikin Kreikan ajalta on muun muassa *Pythagoras*, *Eudoksos* ja *Arkhimedes*, joista kaksi jälkimmäistä todistivat merkittäviä integraalilaskentaan liittyviä lauseita. [1]

Antiikin Kreikan ajan jälkeen matematiikan tutkimus on edennyt ajoittain suurinkin harppauksin, mutta tässä tutkielmassa jätetään tarkempi historiakatsaus tekemättä. Sen sijaan käydään läpi hieman Suomen koulumatematiikan vaiheita 1900-luvulla - millainen rooli todistamisella on ollut vuosisadan eri vaiheina. 1900-luvulla Suomen kouluopetuksessa on ollut muun muassa *vanhan* ja *uuden matematiikan* aika. Vanhan matematiikan alkamiselle ei ole annettu tarkkaa vuotta tai vuosikymmentä, ja sen sanotaan siirtyneen uuden matematiikan tieltä. Vanha matematiikka oli vahvasti jakautunut eri osa-alueisiin – lähinnä aritmetiikkaan, geometriaan ja algebraan. Kuten mainittu, Eukleideen Alkeiden todistuksia käytettiin kouluopetuksessa, ja todistaminen oli formaalin kasvatuksen väline [10, s. 22].

1900-luvun alkuvuosikymmeninä koulumatematiikka perustui pitkälti kirjoihin, joiden kirjoittajana oli kouluhallituksen matemaattisten aineiden ylitarkastaja, tohtori Lauri Nevanlinna. Uudempia painoksia toimitti Laurin veli, niinikään tohtori Otto Nevanlinna ja myöhemmin professori Rolf Nevanlinna. Kirjoittajat olivat toki matematiikassa päteviä, mutta kirjat vaativat paljon - sekä opettajilta että oppilailta. 1930-luvulla professori Kalle Väisälä puuttui matematiikan kouluopetukseen ja kyseenalaisti geometrian kouluopetuksen toimivuuden. Geometrian opettamisen ongelmallisuus aiheutui siitä, että alkeisgeometrialla on kaksi eri hahmoa: toisaalta se on havainnollinen luonnontiede, toisaalta abstraktinen matemaattinen teoria. Ongelmallista oli käsittää se, miksi tarvitaan abstrakti teoria usein itsestään selviltä näyttävien tulosten todistamiseksi. Rolf Nevanlinna oli taas sitä mieltä, että Eukleideen aksiomaattisella järjestelmällä tulisi olla sija oppikoulussa, sillä sen oli tarkoitus antaa oppilaalle pohjasivistys - ja olihan Eukleideen Alkeet vaikuttaneet vahvasti länsimaisen kulttuurin kehitykseen. Kuitenkin Väisälä katsoi Eukleideen järjestelmään perustuvan geometrian opetuksen koulussa liian vaikeaksi. Väisälän mielestä geometrian opetus olisi uudistettava siihen suuntaan, että vedottaisiin oppilaan omaan havaintokykyyn ja todistettaisiin vain sellaisia väittämiä, jotka paljaan havainnon perusteella eivät ole selviä. [4, s. 397-398]

Ville Mäkelä on tarkastellut tarkemmin tutkielmassaan [3, s. 21] tämän ajan koulumatematiikassa käytettyjä kirjoja - Kallion *Geometria I* ja Väisälän *Algebran oppi- ja esimerkkikirja I* - ja toteaa, että keskikoulun geometrian kirjan ensimmäisissä luvuissa ei puhuta todistamisesta, mutta sitä harjoitellaan Eukleideen mallin mukaisesti, joskin epämuodollisemmin tarkastelemalla "probleemia" ja "ratkaisemalla" niitä. Probleemien ratkaisujen kautta saatiin teoreemat. Vaikka täsmällisyydestä tingittiin, teoreemat eivät tulleet tyhjästä, vaan niitä vähintäänkin perusteltiin havainnollisesti. Kirjan viimeisessä luvussa puhutaan todistamisesta: siinä kerrotaan teoreemojen perustuvan aikaisempiin teoreemoihin ja aksioomiin. Myös kielenkäyttöä täsmännettiin - käytettiin sanoja oletus, väitös ja todistus. Algebran kirjoissa sen sijaan todistamista oli vähemmän.

1960-luvun lopulla havahduttiin siihen, että matematiikan kouluopetusta oli syytä muuttaa, kun todettiin esimerkiksi Eukleideen geometrian aksiomaattisen opettamisen hankaluus. Lisäksi muutokseen kannusti Piaget'n konstruktivismiin liittyvät ajatukset lasten matemaattisen ajattelun kehittymisestä [9, s. 104]. Todettiin myös, että laskentoon, geometriaan ja algebraan rajoittunut oppimäärä oli myös rajallinen sen ajan vaatimuksia ajatellen. Vuonna 1967 valmistui Pohjoismaisen Matematiikan Opetuksen Uudistamistoimikunnan mietintö, jonka mukaan matematiikan oli tarjottava oppilaalle mahdollisuuksia konstruoida matematiikkaa itse. Lisäksi painotettiin ilon ja kauneuden elämyksien saamista matematiikan parissa työskenneltäessä [3, s. 26].

50-luvulta lähtien todistamiseen oli alettu liittää taustalle logiikan päättelysääntöjä. Logiikka ja joukko-oppi tulivat osaksi matematiikan kouluopetusta modernisoinnin yhteydessä. Matematiikan todistuksia oli vaikea rakentaa täsmällisiksi logiikan päättelysääntöjen avulla - niistä tuli monimutkaisia ja epähavainnollisia. Kuitenkin looginen ajattelu on tarpeen, kun oppilaat muodostavat reaalimaailmasta matemaattisia skeemoja ja keksivät niihin liittyviä loogisia päättelymalleja muodostaen todistuksia. Niinpä logiikka yritettiin ottaa mukaan opetukseen liittäen se käytännön tilanteisiin ja ongelmanratkaisuprosesseihin. Tämä on täsmentänyt ja monipuolistanut todistamisajattelun kehittymistä, mutta kiinnostus todistustehtäviin on modernisoinnin alkuvaiheen jälkeen vähentynyt, mikä näkyy Suomessa ainakin lukion oppikirjoissa: todistustehtävistä luovuttiin. [9, s. 103]

Mäkelä [3, s. 28] on tarkastellut myös uuden matematiikan ajan oppikirjasarjaa *Valistuksen Matematiikkaa*. Todistuksia ei seitsemännen eikä kahdeksannen luokan oppikirjoista löydy. Geometrian osuus kirjoissa on pieni ja esimerkiksi seitsemännen luokan oppikirjassa janan keskinormaali ja kulman puolittaminen opetetaan konstruoimaan pinnallisesti piirrosten avulla.

Uutta matematiikkaa seurasi *ongelmakeskeisen matematiikan* aika, ja todistamisen kannalta tapahtui ikävä muutos. Malisen artikkelissa [10, s. 22] viitataan Inkilän ja Keskitalon pro gradu -tutkielmaan, ja sen mukaan vuoden 1985 opetussuunnitelman mukaisissa lukion oppikirjoissa vain noin kolmannes lauseista oli todistettu, kun taas 70-luvulla lähes jokainen lause oli todistettu. Mahdollisia syitä on Malisen mielestä useita: matematiikan tuntimäärän pieneneminen, käytännön sovellusten lisääminen ja todistamisen hankalaksi kokeminen.

Todistamisesta tämän päivän koulumatematiikassa on olemassa tutkimuksia ja tutkimushankkeita, muun muassa NorBa-projekti [5] ja joitain pro gradu -tutkielmia, jotka ovat keskittyneet lähinnä lukion pitkän matematiikan oppimäärän tarkastelemiseen. Myöhemmin tässä tutkielmassa on tarkoitus tarkastella erityisesti sitä, mitä todistaminen on yläkoulumatematiikassa.

3 Todistaminen matematiikassa

Monissa tieteissä on tyypillistä kehitellä uusia hypoteeseja, jotka voivat kumota vanhan tiedon. Matematiikassa sen sijaan tehdään ennemminkin laajennuksia, ja kun jokin väite on kerran todistettu, sen totuusarvo säilyy. Itse asiassa todistaminen on ainoa tapa matematiikassa, jolla rakentaa uutta matemaattista tietoa ja sisällyttää sitä matemaattisiin teorioihin. Lisäksi jotta voit varmistua siitä, että jokin lause on varmasti tosi, ainoa tapa on tehdä validi matemaattinen todistus. Myös intuitiivisesti selvältä tuntuvat asiat tarvitsevat todistuksen, jotta niiden totuudesta voidaan olla varmoja. Esimerkiksi lausetta “*on olemassa äärettömän monta alkulukua*” voidaan pitää intuitiivisesti itsestään selvänä, jota se ei kuitenkaan ole. Lauseen paikkansapitävyydestä voidaan olla varmoja vain siksi, että sille on esitetty validi todistus.

Todistaminen osoittaa, millaisia yhteyksiä matematiikan eri tutkimusaloilla on toisiinsa - esimerkiksi joitain puhtaasti algebrallisia väitteitä voidaan todistaa yksinkertaisesti topologian avulla. Tänä päivänä matematiikan aloja on kuitenkin monia, ja kaikilla matematiikan aloilla todistamisella ei ole samanlaista merkitystä kuin esimerkiksi geometriassa, jossa todistuksilla on hyvin pitkä perinne. Esimerkiksi joillain sovelletun matematiikan tutkimusaloilla pyrkimys ei ole todistaa tuloksia, mutta siltikin heidän käyttämänsä matematiikan tulokset on todistettu ja näin ollen oikeita. Jonkin näkemyksen mukaanhan voidaan ajatella, ettei esimerkiksi vaikkapa tilastollinen matematiikka edes ole matematiikkaa. Tämänkaltaisiin matematiikan määritelmiin ei kuitenkaan keskitytä tässä tutkielmassa.

Matematiikan avulla voidaan toki selvittää haastavien yhtälöiden juuria tai se voi toimia aputieteenä esimerkiksi luonnontieteissä, kuten vaikkapa fysiikassa, ja se on avain ongelmien ratkaisuun. Kuitenkaan tämä proseduraalinen tieto ei ole matematiikan ydin, vaan tarkoituksena on ymmärtää periaatteet numeroiden ja laskujen takana ja ennen kaikkea olla varma siitä, että ne ovat oikeita.

3.1 Matematiikan todistusmenetelmät

Tässä luvussa käsitellään joitain todistukseen liittyviä termejä ja päättelysääntöjä. Selvennetään, mitkä päättelysäännöt ovat oikeita, ja millaisia tyypillisiä virhepäätelmiä usein esiintyy. Myös yleisimmät matematiikan todistusmenetelmät käydään läpi. Tämän luvun lähteenä on käytetty Kenneth H. Rosenin teosta Discrete Mathematics and Its Applications [6, s. 161-187] sekä hieman Tampereen yliopiston Logiikka 1B-kurssin luentomateriaalia [7, s. 72-85].

Teoreema on lause, joka voidaan osoittaa todeksi. Teoreema on tosi, kun jono peräkkäisiä kaavoja muodostaa perustelun, jota kutsutaan *todistukseksi*. *Aksioomat* ja *postulaatit* ovat vallalla olevia olettamuksia matemaattisista rakenteista. Todistuksessa jonon jäsenet on muodostettu aksioomeista, postulaateista tai ne on päätelty johon aiemmista jäsenistä. *Päättelysäännöt*, joita käytetään johtopäätöksien tekemiseen, solmivat todistuksen eri vaiheet yhteen. Termit *lemma* ja *korollaari* (tai *seurauslause*) ovat tietyntyyppisiä teoreemoja. Lemma on yksinkertainen teoreema, jota käytetään toisten teoreemojen todistuksissa. Monimutkaiset todistukset ovat yleensä helpompia ymmärtää, kun ne on todistettu käyttäen sarjaa lemmoja, missä kukin lemma on erikseen todistettu. *Korollaari* on teoreema, joka seuraa välittömästi jostain aiemmasta teoreemasta.

Päättelysäännöt

Modus ponens -päättelysääntö (tai *implikaation eliminointi*) esitetään usein seuraavanlaisella kaaviolla:

$$\frac{p,\ p \to q}{q},$$

missä oletukset eli p ja $p \to q$ ovat viivan yläpuolella ja johtopäätös, eli q on viivan alapuolella. Tämä päättelysääntö perustuu tautologiaan

$$(p \wedge (p \to q)) \to q).$$

Mikäli siis implikaatio ja sen vasen puoli ovat tosia, niin myös implikaation oikean puolen on oltava tosi.

Esimerkki 3.1. Oletetaan, että implikaatio "*jos n on jaollinen luvulla 3, niin n^2 on jaollinen luvulla 9*" on tosi. Jos myös oletus "n on jaollinen luvulla 3" on tosi, modus ponensin nojalla myös johtopäätös "n^2 on jaollinen luvulla 9" on tosi.

Muita päättelysääntöjä ovat muun muassa:

- *Disjunktion tuonti* eli:

  $$\frac{p}{p \vee q},$$

  joka perustuu tautologiaan

  $$p \to (p \vee q).$$

  Sen mukaan mikäli p on tosi, myös p:n ja minkä tahansa proposition disjunktio on tosi.

- *Konjunktion eliminointi* eli:

$$\frac{p \wedge q}{p},$$

joka perustuu tautologiaan

$$(p \wedge q) \to p.$$

Mikäli siis p:n ja q:n konjunktio on tosi, niin silloin p on tosi.

- *Modus tollens* eli:

$$\frac{\neg q,\ p \to q}{\neg p},$$

joka perustuu tautologiaan

$$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p.$$

Mikäli siis $\neg q$ ja $p \to q$ ovat tosia, niin silloin oletuksena olevan implikaation etulauseen on oltava epätosi, eli $\neg p$ on oltava tosi.

- *Ketjusääntö* eli:

$$\frac{p \to q,\ q \to r}{p \to r},$$

perustuu tautologiaan

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r).$$

Mikäli siis $p \to q$ ja $q \to r$ ovat tosia, niin myös $p \to r$ on tosi.

- *Modus tollendo ponens* tai *disjunktion eliminointi* eli:

$$\frac{p \vee q,\ \neg p}{q},$$

perustuu tautologiaan

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q.$$

Mikäli siis $p \vee q$ ja $\neg p$ ovat tosia, niin silloin q: on oltava tosi.

Esimerkki 3.2. Seuraavat päättelyt ovat esimerkkejä yllämainituista säännöistä.

- Disjunktion tuonti: "*Luku 9 on jaollinen luvulla 3. Siis luku 9 on jaollinen luvulla 3 tai luku 9 on parillinen.*"
- Konjunktion eliminointi: "*Luku n on alkuluku ja se ei ole jaollinen luvulla 3. Siis luku n on alkuluku.*"

- Modus tollens: "*Luku n on jaollinen luvulla neljä ja jos n on alkuluku, niin n ei ole jaollinen luvulla neljä. Siis luku n ei ole alkuluku.*"
- Ketjusääntö: "*Jos n on parillinen, niin $2|n$. Jos $2|n$, niin on olemassa m siten, että $n = 2m$. Siis jos n on parillinen, niin on olemassa m siten, että $n = 2m$*"
- Disjunktion eliminointi: "*Luku 9 on jaollinen luvulla 3 tai luku 9 on parillinen. Luku 9 ei ole parillinen. Siis luku 9 on jaollinen luvulla 3.*"

Perustelu, joka on rakennettu päättelysääntöjen avulla, on validi. Kun kaikki propositiot validissa perustelussa ova tosia, se johtaa oikeaan johtopäätökseen. Kuitenkin validi perustelu voi johtaa myös virheelliseen johtopäätökseen, mikäli yhtä tai useampaa virheellistä oletusta on käytetty perustelun rakentamisessa. Esimerkiksi jos halutaan osoittaa implikaation "*Jos 101 on jaollinen luvulla 3, niin* 101^2 *on jaollinen luvulla 9*" oikea puoli todeksi, niin olettamalla, että implikaatio ja sen vasen puoli ovat tosia sekä käyttämällä modus ponens -sääntöä, päädytään virheelliseen johtopäätökseen. 101^2 ei ole jaollinen luvulla 9. Virheelliseen johtopäätökseen on tässä tapauksessa päädytty olettamalla väärin, että 101 on jaollinen luvulla 3.

Virhepäätelmät

On olemassa useita tyypillisiä päätelmiä, jotka johtavat virheelliseen päättelyyn. Nämä virhepäätelmät edustavat päättelysääntöjä, mutta perustuvat ennemmin toden mahdollisuuteen kuin tautologiaan.

Propositio $((p \to q) \land q) \to p$ ei ole tautologia, sillä se on epätotta silloin, kun p on epätotta ja q on totta. Kuitenkin on olemassa monia virheellisiä päättelyitä, jotka käsittelevät tätä tautologiana.

Esimerkki 3.3. Olkoon p propositio "$n \equiv 1 \pmod 3$" ja q propositio "$n^2 \equiv 1 \pmod 3$". Implikaatio $p \to q$, joka on "jos $n \equiv 1 \pmod 3$, niin $n^2 \equiv 1 \pmod 3$" on tosi. Jos q on tosi, olisi virheellistä päätellä, että myös p on tosi, sillä on mahdollista, että "$n \equiv 2 \pmod 3$". Jos johtopäätös "p on totta" tehdään, on kyseessä yllä mainittu virhepäätelmä.

Propositio $((p \to q) \land \neg p) \to \neg q$ ei ole tautologia, sillä se on epätosi silloin, kun p on epätotta ja q on totta.

Esimerkki 3.4. Olkoon p ja q, kuten esimerkissä 3. Jos implikaatio $p \to q$ on tosi ja $\neg p$ on myös tosi, niin ei voida päätellä, että $\neg q$ olisi tosi, sillä jos implikaation etulause ei ole totta, mutta implikaatio on, voi johtopäätös olla joko totta tai epätotta.

Moni virheellinen päättely perustuu *kehäpäätelmään.* Tämä virhepäätelmä ilmenee, kun yksi tai useampi todistuksen askel perustuu todistettavaan lauseeseen. Toisin sanoen, tämä virhepäätelmä ilmenee, kun lausetta todistettaessa oletetaan lauseen olevan tosi ja sitä (tai väitöstä joka on ekvivalentti todistettavan lauseen kanssa) käytetään myös lauseen todistuksessa.

Esimerkki 3.5. Seuraavassa päättelyssä on käytetty kehäpäätelmää. "*Oletetaan, että n^2 on parillinen. Siis $n^2 = 2k$ jollain k:n arvolla. Olkoon $n = 2l$ jollain l:n arvolla. Tämä osoittaa, että n on parillinen*".

Väite "*olkoon $n = 2l$ jollain arvolla l*" esiintyy todistuksessa. Mikään aiemmin päätelty ei osoita tämän väitteen olevan totta. Tämä on kehäpäätelmä, sillä päättelyprosessissa on käytetty sitä väitettä, mikä pitäisi todistaa. Ratkaisu sinänsä on kuitenkin oikein - ainoastaan todistamisen menetelmä on väärä.

Todistustekniikat

Koska monet lauseet ovat implikaatioita, on tärkeää hallita niihin liittyvät todistamistekniikat. Kun annetaan p:lle ja q:lle totuusarvot, niin implikaatiomuotoinen lause $p \to q$ on tosi silloin, kun p on epätosi tai q on tosi, kuten alla olevasta implikaation totuustaulusta näkyy.

p	q	$p \to q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Jos siis voidaan todistaa, että implikaation vasen puoli on epätosi tai että implikaation oikea puoli on tosi, kyseessä on *triviaali todistus.* Triviaalit todistukset ovat tärkeitä esimerkiksi induktiotodistuksissa ja silloin, kun todistetaan joitain teoreemojen erikoistapauksia.

Esimerkki 3.6. Osoitetaan, että propositio $P(0)$ on tosi, kun $P(n)$ on "*jos $n > 1$, niin $n^2 > n$*".

Propositio $P(0)$ vastaa implikaatiota "*jos $0 > 1$, niin $0^2 > 0$*". Koska implikaation vasen puoli $0 > 1$ on epätosi, implikaatio $P(0)$ on automaattisesti tosi. $\square$

Esimerkki 3.7. Olkoon $P(n)$ lause "*jos a ja b ovat positiivisia lukuja siten, että $a \geqslant b$, niin silloin $a^n \geqslant b^n$*". Osoitetaan, että $P(0)$ on totta.

Lause $P(0)$ luetaan seuraavasti: "*jos $a \geqslant b$, niin $a^0 \geqslant b^0$*". Koska $a^0 = b^0 = 1$, niin $P(0)$ on tosi, sillä implikaation oikea puoli on tosi. $\square$

Suora todistus tarkoittaa sitä, että implikaatio osoitetaan todeksi siten, että oletuksesta p todistetaan q. Suoraa todistusta käyttääkseen on oletettava p:n olevan totta ja päättelysääntöjen ja jo todistettujen lauseiden perusteella osoitettava, että myös q:n on oltava totta.

Esimerkki 3.8. Annetaan suora todistus sille, että "*jos n on pariton, niin n^2 on pariton*".

Oletetaan, että "*n on pariton*" pitää paikkansa. Silloin $n = 2k + 1$ jollain kokonaisluvun k arvolla. Siitä seuraa, että

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Siis n^2 on pariton. □

Implikaatio $p \to q$ on ekvivalentti kontrapositionsa, $\neg q \to \neg p$, kanssa ja niinpä implikaatio $p \to q$ voidaan todistaa osoittamalla sen kontraposition $\neg q \to \neg p$ olevan totta. Tämä jälkimmäinen implikaatio on usein todistettu suoralla todistuksella, mutta mitä tahansa muutakin todistustekniikkaa voi käyttää. Tämänkaltaista todistusmenetelmää kutsutaan *käänteiseksi todistukseksi.*

Esimerkki 3.9. Annetaan käänteinen todistus lauseelle "*Jos 3n+2 on pariton, niin n on pariton*".

Oletetaan, että implikaation oikea puoli on epätosi. Oletetaan siis, että n on parillinen. Silloin $n = 2k$ jollain kokonaisluvulla k. Siis

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1).$$

Siis $3n + 2$ on parillinen. Niinpä implikaation oikean puolen negaatio osoittaa, että implikaation vasen puoli on myös epätosi. Näin ollen alkuperäinen implikaatio on tosi. □

Implikaatio $p \to q$ voidaan osoittaa todeksi myös *ristiriidan avulla.* Silloin tehdään vastaoletus, että $\neg q$ on tosi, ja tästä seuraa oletuksen p avulla, että sekä r että $\neg r$ ovat tosia, mikä on ristiriita. Näin ollen implikaation $p \to q$ on oltava tosi. Tätä kutsutaan *epäsuoraksi todistamiseksi.*

Esimerkki 3.10. Osoitetaan ristiriidan avulla, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Olkoon p propositio "$\sqrt{2}$ *on irrationaalinen*".
Oletetaan, että $\neg p$ on totta. Silloin $\sqrt{2}$ on rationaalinen. Siis on olemassa kokonaisluvut a ja b siten, että

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

missä luvuilla a ja b ei ole yhteisiä tekijöitä. Korottamalla puolittain neliöön, saadaan

$$2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Edelleen

$$2b^2 = a^2.$$

Tämä tarkoittaa, että a^2 on parillinen, ja näin ollen myös a on parillinen. Ja koska a on parillinen, niin on olemassa c siten, että $a = 2c$. Niinpä

$$2b^2 = 4c^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2.$$

Tämä tarkoittaa, että b^2 on parillinen ja näin ollen myös b on parillinen. Nyt on osoitettu, että propositiosta $\neg p$ seuraa, että $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, missä luvuilla a ja b ei ole yhteisiä tekijöitä, ja luku 2 jakaa sekä luvun a että b, mikä on ristiriita. Näin ollen $\neg p$ on epätotta. Niinpä p eli että "$\sqrt{2}$ on irrationaalinen" on tosi. □

Implikaation käänteinen todistus voidaan kirjoittaa uudestaan todistuksena ristiriidan avulla. Käänteisessä todistuksessa osoitetaan, että $p \to q$ on totta käyttäen suoraa todistusta siitä, että sen kontrapositio on totta. Käänteisessä todistuksessa oletetaan, että $\neg q$ on totta ja osoitetaan, että $\neg p$ on totta. Uudelleen kirjoittamalla implikaation $p \to q$ ja käyttämällä epäsuoraa todistamista oletamme, että p ja $\neg q$ ovat totta. Sitten käytetään implikaation $\neg q \to \neg p$ suoraa todistusta osoittaaksemme että $\neg p$:n on oltava myös tosi. Tämä johtaa ristiriitaan $p \wedge \neg p$, joka viimeistelee todistuksen.

Esimerkki 3.11. Osoitetaan, että "*jos* $3n + 2$ *on pariton, niin* n *on pariton*".

Oletetaan, että $3n + 2$ on pariton ja että n ei ole pariton, siis että n on parillinen. Kuten aiemmassa esimerkissä, voidaan todistaa, että jos n on parillinen, niin $3n + 2$ on parillinen. Tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $3n + 2$ on pariton. Siis väite "*jos* $3n + 2$ *on pariton, niin* n *on pariton*" on tosi. □

Kun todistetaan implikaatiota, joka on muodossa

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee ... \vee p_n) \to q,$$

tautologiaa

$$((p_1 \vee ... \vee p_n) \to q) \leftrightarrow ((p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge ... \wedge (p_n \to q))$$

voidaan käyttää päättelysääntönä. Tämä osoittaa, että alkuperäinen implikaatio, jossa hypoteesinä on disjunktio propositioista $p_1,..., p_n$, voidaan osoittaa todistamalla jokainen n kpl implikaatioita $p_i \to q$, $i = 1,...,n$ todeksi. Joskus todistettaessa, että implikaatio $p \to q$ on totta, voidaan käyttää p:n sijasta disjunktioita $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n$ implikaation vasemmalla puolella, missä p ja $p_1 \vee ... \vee p_n$ ovat ekvivalentteja.

Esimerkki 3.12. Osoitetaan, että implikaatio "*jos n on luku, joka ei ole jaollinen kolmella, niin $n^2 \equiv 1 \pmod 3$*" on tosi.

Olkoon p propositio "*n ei ole jaollinen kolmella*" ja olkoon q propositio "$n^2 \equiv 1 \pmod 3$". Silloin p on ekvivalentti lauseen $p_1 \vee p_2$ kanssa, missä p_1 on "$n \equiv 1 \pmod 3$" ja p_2 on "$n \equiv 2 \pmod 3$". Niinpä osoitettaessa implikaatio $p \to q$, voidaan osoittaa, että $p_1 \to q$ ja $p_2 \to q$. On helppoa antaa suora todistus näille implikaatioille. Ensin oletetaan, että p_1 on totta, eli $n = 3k + 1$ jollain luvulla k. Niinpä

$$n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1.$$

Siitä seuraa, että $n^2 \equiv 1 \pmod 3$. Niinpä $p_1 \to q$ on totta. Seuraavaksi oletetaan, että p_2 on totta. Silloin $n \equiv 2 \pmod 3$, niinpä $n = 3k + 2$ jollain luvulla k. Niinpä

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1.$$

Siitä seuraa, että $n^2 \equiv 1 \pmod 3$, joten $p_2 \to q$ on totta. Nyt on osoitettu, että molemmat implikaatiot pitävät paikkansa, joten voidaan tehdä johtopäätös, että $p_1 \vee p_2 \to q$ on totta. Koska $p_1 \vee p_2$ on ekvivalentti p:n kanssa, voidaan todeta, että $p \to q$ on totta. □

Todistettaessa ekvivalenssia $p \leftrightarrow q$, voidaan käyttää tautologiaa

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p)).$$

Ekvivalenssi voidaan siis todistaa todistamalla implikaatiot *jos p, niin q* ja *jos q, niin p*.

Esimerkki 3.13. Osoitetaan, että "*n on pariton jos ja vain jos n^2 on pariton*".

Olkoon p propositio "*n on pariton*" ja q propositio "*n^2 on pariton*". On osoitettava, että implikaatiot $p \to q$ ja $q \to p$ ovat tosia. On jo osoitettu, että $p \to q$ on tosi (esimerkki 3.8). Todistettaessa implikaatio $q \to p$ käytetään käänteistä todistusta. Osoitetaan, että implikaation oikea puoli on epätosi, eli että "*n on parillinen*". Silloin $n = 2k$ jollain kokonaisluvulla k. Silloin

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

joten n^2 on parillinen. Tämä osoittaa sen, että $q \to p$. Koska ollaan osoitettu molemmat implikaatiot tosiksi, myös ekvivalenssi $p \leftrightarrow q$ on tosi. □

Jos halutaan osoittaa lauseet p_1, p_2, ..., p_n ekvivalenteiksi, voidaan osoittaa, että

$$((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge ... \wedge (p_n \to p_1))$$

on tosi.
Eli jos implikaatiot $p_1 \to p_2$, ..., $p_n \to p_1$ voidaan osoittaa olevan totta, niin propositiot p_1,...,p_n ovat ekvivalentteja.

Huom! Joskus useamman proposition ekvivalenssia lyhennetään käyttämällä merkintää

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow p_3 \leftrightarrow ... \leftrightarrow p_n,$$

joka on kyseenalainen sen vuoksi, että ekvivalenssin liitännäisyyden takia merkinnässä ei ole tarkalleen ottaen kyse siitä, että kullakin propositiolla olisi sama totuusarvo, vaan että ensimmäisen kahden proposition ekvivalenssin totuusarvo on sama kuin kahden seuraavan proposition ekvivalenssin totuusarvo jne.

Esimerkki 3.14. Osoitetaan, että seuraavat propositiot ovat ekvivalentteja.

p_1: “n mod $3 = 1$ tai n mod $3 = 2$”
p_2:”n ei ole jaollinen kolmella”
p_3:”$n^2 \equiv 1 \pmod 3$”.

Osoitettaessa, että propositiot ovat ekvivalentteja, voidaan osoittaa, että implikaatiot $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$ ja $p_3 \to p_1$ ovat totta. Käytetään suoraa todistusta todistamaan, että $p_1 \to p_2$. Oletetaan, että n mod $3 = 1$ tai 2. Jakoyhtälön perusteella $n = 3q + r$, missä $0 \leqslant r < 3$. Modulon määritelmän perusteella $r \equiv n \pmod 3$. Koska n on jaollinen kolmella, jos ja vain jos $r = 0$, oletus, että n mod $3 = 1$ tai 2 näyttää, että n ei ole jaollinen kolmella. Näin ollen $p_1 \to p_2$. Implikaatio $p_2 \to p_3$ on todistettu esimerkissä 12. Käytetään epäsuoraa todistusta todistamaan, että $p_3 \to p_1$. Oletetaan, että johtopäätös on epätosi, eli että n mod $3 \neq 1$ tai 2. Koska n mod $3 = 0, 1$ tai 2, nähdään, että n mod $3 = 0$. Tämä tarkoittaa, että $3|n$, joten $n = 3k$ jollain kokonaisluvulla k. Tämä osoittaa, että $n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$, mikä osoittaa, että $n^2 \equiv 0 \pmod 3$, joten p_3 ei ole tosi. Tämä päättää epäsuoran todistuksen $p_3 \to p_1$. Näin ollen propositiot p_1, p_2 ja p_3 ovat ekvivalentteja. $\square$

Teoreemat ja kvanttorit

Monet teoreemat on esitetty niin, että ne sisältävät kvanttoreita, esimerkiksi ne ovat väitteitä siitä, että jotain *on olemassa*. Tämänkaltainen teoreema voidaan formalisoida muotoon $\exists x P(x)$, ja sen todistusta kutsutaan olemassaolon todistukseksi. Todistamiseen on monia keinoja. Esimerkiksi voidaan muodostaa a, jolla pätee $P(a)$. Tätä kutsutaan *konstruktiiviseksi todistukseksi*. On mahdollista todistaa olemassaolo myös *ei-konstruktiivisesti*, eli ei etsitä konkreettista esimerkkiä, joka toteuttaisi lauseen. Yksi tyypillinen tapa on osoittaa ristiriidan kautta, että olemassaolon negaatio johtaa ristiriitaan.

Esimerkki 3.15. Osoitetaan konstruktiivisesti, että "*jokaisella n on olemassa n peräkkäistä lukua, jotka eivät ole alkulukuja.*" Siis $\forall n \exists x \forall i (i < n \to x + i + 1$ ei ole alkuluku).

Olkoon $x = (n+1)!+1$. Tarkastellaan lukuja $x+1$, $x+2$, ..., $x+n$. Huomataan, että $i+1$ jakaa luvun $x+1 = (n+1)! + (i+1)$ kun $i = 1, 2, ..., n$. Niinpä n peräkkäistä lukua, jotka eivät ole alkulukuja, on löydetty. $\square$

Esimerkki 3.16. Osoitetaan ei-konstruktiivisesti, että "*Jokaiselle luvulle n on olemassa sitä suurempi alkuluku*". Formalisoituna $\forall n \exists x Q(n,x)$, missä $Q(n,x)$ on propositio "x on alkuluku ja suurempi kuin n".

Olkoon n positiivinen luku. Osoitettaessa, että on olemassa suurempi alkuluku kuin n, tarkastellaan lukua $n! + 1$. Koska jokaisella luvulla on *alkulukutekijä*, on olemassa ainakin yksi alkuluku, joka jakaa $n! + 1$:n. Yksi mahdollisuus on, että $n! + 1$ on itsessään jo alkuluku. Huomaa, että kun $n! + 1$ jaetaan luvulla, joka on pienempi kuin n tai yhtäsuuri, jakojäännös on 1. Siis minkä tahansa alkulukutekijän tälle luvulle täytyy olla suurempi kuin n. Tämä on esimerkki ei-konstruktiivisesta todistamisesta, koska alkulukua, joka on suurempi kuin n ei ole muodostettu. On vain osoitettu, että sellaisen on oltava olemassa. $\square$

Tarkastellaan lausetta $\forall x P(x)$. Muistetaan, että $\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ on validi. Tämä tarkoittaa sitä, että jos löydetään jokin a siten, että $P(a)$ on epätosi, niin olemme osoittaneet, että on olemassa x, jolla $\neg P(x)$ on tosi, eli lause $\forall x P(x)$ on epätosi. Tällaista todistamistapaa kutsutaan vastaesimerkin avulla todistamiseksi. Vain yhden vastaesimerkin löytäminen johtaa siihen, että yllä mainitun kaltainen lause saadaan todistettua epätodeksi.

Esimerkki 3.17. Osoitetaan vastaesimerkin avulla, että "*kaikki alkuluvut ovat parittomia*" on epätotta.

Formalisoidaan väittämä seuraavalla tavalla: $\forall x O(x)$, missä $O(x)$ on propositio "*x on pariton ja kuuluu alkulukujen joukkoon*". Luku $x = 2$ on vastaesimerkki, sillä 2 on alkuluku ja parillinen. Näin ollen väite "*kaikki alkuluvut ovat parittomia*" on epätotta. $\square$

Matemaattinen induktio

Matemaattinen induktio on hyvin tärkeä todistusmenetelmä. On tärkeää huomata, ettei matemaattista induktiota voida käyttää työkaluna uusien teoreemojen löytämiseen.
Matemaattisen induktion validisuus seuraa siitä, että luonnollisten lukujen järjestys on hyvinjärjestys eli siitä, että jokaisella epätyhjällä luonnollisten

lukujen osajoukolla on olemassa pienin alkio.

Todistetaan, että induktioperiaate seuraa luonnollisten lukujen hyvinjärjestyksestä. Olkoon $S \subseteq \mathbb{N}$ ja sillä on seuraavat ominaisuudet:

$$1 \in S,$$

$$n \in S \Rightarrow n + 1 \in S.$$

Osoitetaan, että $S = \mathbb{N}$.
Tehdään vastaoletus, että $\mathbb{N} \neq S$. Oletetaan siis, että $\mathbb{N} \setminus S$ ei ole tyhjä. Koska $\mathbb{N} \setminus S$ ei ole tyhjä, sillä on pienin alkio. Olkoon se m.
Koska $1 \in S$, niin $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$. Siis $m \neq 1$. On siis olemassa jokin $q \in \mathbb{N}$ siten, että $m = q' = q + 1$.
$q \in S$, koska muuten $q \in \mathbb{N} \setminus S$ ja silloin m ei olisi joukon pienin alkio. Koska joukolla S on ominaisuus $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$, niin oltava $m = q' \in S$, sillä $q \in S$. Tämä on ristiriita, sillä $m \in \mathbb{N} \setminus S$. Siispä $\mathbb{N} \setminus S$ on tyhjä joukko. Näin ollen $S = \mathbb{N}$. $\square$

Matemaattisella induktiolla voidaan todistaa lauseita, jotka ovat muotoa $\forall n P(n)$, missä käsitellään positiivisia lukuja.
Todistus sille, että $P(n)$ on totta jokaisella n:llä koostuu kahdesta askeleesta:
1. *Perusaskel.* Osoitetaan, että $P(1)$ on totta.
2. *Induktioaskel.* Osoitetaan, että implikaatio $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ on totta jokaisella positiivisella luvulla n.
Tässä lausetta $P(n)$ kutsutaan *induktio-oletukseksi.*
Induktioaskeleen implikaatio osoitetaan usein suoralla todistuksella todeksi. On kuitenkin huomattava, että matemaattisessa induktiossa ei oleteta, että $P(n)$ on totta kaikilla positiivisilla luvuilla n. Sen sijaan todistetaan, että *jos oletetaan*, että $P(n)$ on totta, niin silloin myös $P(n + 1)$ on totta.

Esimerkki 3.18. Osoitetaan matemaattisen induktion avulla, että ensimmäisen n:n positiivisen parittoman kokonaisluvun summa on n^2.
Olkoon $P(n)$ propositio, että ensimmäisen n:n parittoman positiivisen luvun summa on n^2.
Perusaskel: Osoitetaan, että $P(1)$ on totta. $1 = 1^2$, joten $P(1)$ on totta.
Induktioaskel: Osoitetaan, että $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ on totta. Oletetaan, että $P(n)$ on totta, eli

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Nyt $P(n + 1)$ luetaan

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Koska $P(n)$ on totta, niin

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1)$$

$$= (1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)) + (2n + 1)$$
$$= n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

□

Esimerkki 3.19. Osoitetaan matemaattisella induktiolla, että äärellisen geometrisen jonon summa on

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + ... + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1},$$

kun $r \neq 1$.
Olkoon $P(n)$ propositio, jonka mukaan $n + 1$ termin summa on oikein.
Perusaskel: $P(0)$ on totta, sillä

$$a = \frac{ar - a}{r - 1}.$$

Induktioaskel: Oletetaan, että $P(n)$ on totta, eli että

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Näyttääksemme, että tämä oletus johtaa siihen, että myös $P(n + 1)$ on totta, lisätään puolittain ar^{n+1} ja saadaan

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} + ar^{n+1}.$$

Muokkaamalla yhtälön oikeaa puolta saadaan

$$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} + \frac{ar^{n+2} - ar^{n+1}}{r - 1} = \frac{ar^{n+2} - a}{r - 1}.$$

Saadaan

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+2} - a}{r - 1}.$$

Tämä osoittaa, että jos $P(n)$ on totta, niin myös $P(n + 1)$ on totta. Siispä alussa kirjoitettu summalauseke on oikein. □

4 Todistaminen koulumatematiikassa

Tässä luvussa käsitellään todistamista koulumatematiikan näkökulmasta. Kuinka täsmällistä ja formaalia todistamisen on oltava? Entä miksi todistamista ylipäätään tulisi sisällyttää yläkoulumatematiikkaan? Lisäksi alaluvuissa käsitellään sitä, miten perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa suhtaudutaan todistamiseen ja kuinka paljon oppikirjat sisältävät todistamiseen liittyvää teoriaa ja tehtäviä.

On vaikeaa antaa tarkkaa määritelmää sille, mitä todistamisella tarkoitetaan koulumatematiikassa, sillä esimerkiksi matemaatikoilla ja opettajilla saattaa olla erilaiset näkemykset siitä, mikä on validi todistus. (Reid, 2005; ref. [8, s. 135]). Formaalisuuden ja täsmällisyyden aste on myöskin riippuvainen kontekstista. (Hanna, 1995; Hersh, 1993; ref. [8, s. 135]). Yläkoulussa harjoiteltavalla todistamisella ja sen pohjustamisella ei ole vielä välttämättä tarpeen hakea tiukkaa formaaliutta, kun yläkoululaisilla formaali tapa ylipäätään esittää asioita hakee vasta muotoaan. Myös esimerkiksi koulumaailmassa varsin keskeisen konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan symbolisen esitystavan lisäksi olisi hyödyllistä tukea oppilaan oppimista liittämällä esitys myös reaalimaailman konteksteihin ja toisenlaisiin, tutumpiin esitysmuotoihin, kuten kuvien ja luonnollisen kielen käyttöön [3, s. 15]. Dimension artikkelissa [10, s. 23] Paavo Malinen perustelee koulumatematiikassa käytettävää vähäistä formaaliutta seuraavasti:

> “Eukleideen Alkeet-teoksessa todistukset olivat eräs täydentävä tekijä esiteltäessä matemaattisen rakenteen selkeyttä ja muodollista kauneutta. Valitettavasti tuollaisia tyylikkäitä kokonaisuuksia ei mahdu kunnolla kouluopetukseen, joten todistaminenkin on pääasiassa vielä päättelyjen järkeväksi todentamista ongelmanratkaisussa. Onkin parasta nousta tyvestä puuhun myös formaalin ajattelun kehittämisessä. Silloin ehkä havaitaan myöhemmin selkeän matemaattisen todistamisen kauneus ja arvo.”

Argumentointi-sanaa käytetään usein todistamisesta puhuttaessa, mutta näkemykset argumentoinnin ja todistamisen yhteydestä vaihtelevat. Argumentointi voidaan nähdä joko jonain erillisenä todistamisesta tai välttämättömänä osana todistusprosessia. Aika usein argumentointi viittaa ei-deduktiiviseen perustelemiseen, joka perustuu induktioon, abduktioon, esimerkkien käyttöön, kuvien tai konkreettisten mallien käyttöön, mutta on myös tutkijoita, jotka pitävät todistamista argumentoinnin erikoistapauksena [8, s. 135-136]. Lähteessä [2, s. 83-122] käsitellään tarkemmin deduktiivista, induktiivista, abduktiivista päättelyä sekä analogiapäättelyä, niihin nojautuvaa perustelemista ja niiden yhteyttä todistamiseen koulumatematiikassa. Puhuttaessa todistamisesta yläkoulumatematiikassa, argumentointia ja varsinaista matemaattista todistamista ei ole välttämätöntä erottaa toisistaan.

Lähteen [8, s.136-137] mukaan oppilaan erilaisista todistamiseen liittyvistä työskentelytavoista voidaan erotella seuraavia piirteitä: induktiivinen/deduktiivinen lähestymistapa, formaalius/epämuodollisuus, näkymättömyys/näkyvyys. Jokainen näistä pareista ovat osittain päällekkäisiä ja yhteen kietoutuneita. Induktiivinen lähestymistapa viittaa esimerkiksi työskentelyyn, jossa erityistapausten tai esimerkkien avulla voidaan löytää jokin yleinen malli. Deduktiivinen lähestymistapa viittaa taas deduktiiviseen päättelyyn, joka onkin varsinaisen matemaattisen todistamisen idea. Formaaliudella ja epämuodollisuudella taas viitataan yllä jo mainittuun tapaan ilmaista asioita: formaalius perustuu täsmällisyyteen, aksioomien, jo todistettujen teoreemojen ja määritelmien käyttämiseen, kun taas epämuodollisuus sallii päättelyprosessissa käytettävän esimerkiksi kuvia ja ei-formaalia päättelyä. Matematiikan keskeisiä todistusmenetelmiä (suora todistus, epäsuora todistus, jne.) voidaan käyttää ongelmanratkaisussa päättelyä jäsentämään, mutta erityisen täsmällistä todistusajattelua käytetään vain harvoin koulutilanteissa [9, s. 106]. Näkyvyydellä tarkoitetaan tässä sellaista työskentelyä todistamisen kanssa, jossa keskitytään itse todistamiseen ja siihen liittyviin osasiin, esimerkiksi todistamistekniikoihin ja logiikan näkökulmiin. Näkymättömyydellä tarkoitetaan taas todistamisprosessia, jossa näihin yllä mainittuihin seikkoihin ei kiinnitetä huomiota. [8, s. 137] Aiempien tutkimusten mukaan monet todistamiseen liittyvät näkökulmat pysyttelevät oppilaalle näkymättöminä ja jopa yliopistotasolla opiskelijat kamppailevat yksinkertaisten ongelmien - koskien esimerkiksi todistamisen loogista rakennetta ja todistustekniikoita - kanssa (Hemmi, 2008; Schoenfeld, 1991; ref. [8, s. 137]). Varmastikin samasta syystä myös siirtymä yläkoulumatematiikan ja lukiomatematiikan osalta on haastava - todistamistehtäviä ei kerta kaikkiaan välttämättä ymmärretä ja niitä saatetaan jopa vieroksua.

Paavo Malinen erottelee [9, s. 105-106] todistamisen ja todistamisajattelun koulumatematiikassa seuraavasti:

> “1. Traditionaalinen malli tähtää systemaattiseen todistamiseen loogisten päättelysääntöjen ja matematiikan tieteellisessä tutkimuksessa hyväksyttyjen metodien mukaisesti. Nämä on mahdollista omaksua jo koulussa intuitiivisesti, ja niiden systemaattiseen käyttöön perehdytään vähitellen.
> 2. Ongelmanratkaisun malli tähtää oppilaiden kannalta mielekkäiden ongelmien tutkimiseen. Kokeilujen ja arvailujen yhteydessä tapahtuu varmistuksia ja toteen näyttämistä, mikä johtaa ongelman ratkaisuun. Ongelmanratkaisuun liittyy ajatuksia todistamisesta, vaikka päättely ei ole yleensä matemaattisen todistusmallin

> mukaista. Traditionaalisen mallin mukainen todistaminen voidaan nähdä omana kokonaisuutenaan. Ongelmanratkaisun mallissa taas todistamisajattelu on osana päättelyprosessia. Tieteellisenä metodina ongelmanratkaisun mallissa on “guess and test”, ja induktion käyttö hypoteesien koettelussa on tyypillistä. “

Miksi todistamista?

> ”Todistamisajattelun kehittämiseen kouluissa liittyy paljon koko ikäluokalle arvokkaita tavoitteita. Se on osa sitä prosessia, jolla yksilöitä kasvatetaan esimerkiksi itsenäiseen työskentelyyn ja kriittiseen ajatteluun tai tiedon käyttökelpoisuuden arviointiin. Todistaminen on päättelyprosessin varmistus ja huipennus. Se on oleellinen osa ajattelun kehittämistä ja formaalia kasvatusta, mikä on taas todettu tarpeelliseksi nykyisessä tietoyhteiskunnassa.”,

muotoilee Paavo Malinen näkemyksensä todistamisajattelusta [9, s. 100]. Tämä kattaa hyvin sen, mitä matemaattinen todistaminen parhaimmillaan merkitsee yläkoulun oppilaalle. Lisäksi vaikka pääpaino matematiikassa - erityisesti arkipäivän matematiikassa - onkin laskutaidossa, miksi väheksyä millään tapaa niitä tieteenalaan hyvin olennaisesti liittyviä piirteitä, jotka tekevät matematiikasta juuri matematiikkaa eikä vain numeroiden pyörittelyä ja laskimen kanssa pelaamista?

Kouluopetuksen tärkeä tavoite on eriyttää oppilaita kiinnostuksen ja osaamisen mukaan ja siksi halukkaille ja lahjakkaille olisi tärkeää tuoda enemmän esille matematiikan todellista luonnetta. Siispä ei olisi välttämättä lainkaan huonompi idea järjestää jo yläkoulussa kurssi, jolla pohjustettaisiin todistamista niin, että käytäisiin läpi esimerkiksi logiikan päättelysääntöjä, joitain lukion todistamistehtäviä tai mahdollisesti jopa induktiotodistusta.

4.1 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet

Todistaminen ei ole matematiikasta erillään oleva asia, niin kuin se näyttää olevan opetussuunnitelmissamme. Se on tärkeä komponentti matematiikan kannalta: sen avulla tehdään, kommunikoidaan ja taltioidaan matematiikkaa. Schoenfeld uskoo, että se voidaan sisällyttää opetussuunnitelmaan kaikilla asteilla. [Schoenfeld, 1994; ref. [13], s. 379] Vaikka todistaminen ja todistusajattelu ovat keskeisessä roolissa matematiikassa, ei ole jostain syystä vielä selvää, millainen rooli todistamisella pitäisi olla peruskoulumatematiikassa. Tämä käy ilmi siitä, miten eri tavoin eri maiden kansallisissa opetussuunnitelmissa todistaminen esitetään ja miten sitä pitäisi opetukseen sisällyttää. [8, s. 132]

Koska tämä tutkielma projektina ajoittuu vuoden 2004 perusopetuksen opetussuunnitelman voimassaoloajalle, käsitellään todistamista kyseisen opetussuunnitelman mukaisesti. Kuitenkin vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet on laadittu ja viimeistelty, ja koska opetus muuttuu piakkoin sen mukaiseksi, on järkevää käsitellä todistamista myös uuden opetussuunnitelman näkökulmasta. Tästä eteenpäin kutsutaan näitä opetussuunnitelman perusteita termeillä POPS 2004 ja POPS 2014.

POPS 2004:n mukaan [11, s. 163-167] vuosiluokkien 6-9 matematiikan opetuksen tärkein tehtävä on syventää matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä ja tarjota riittävät perusvalmiudet. Opetussuunnitelman mukaan perusvalmiuksiin kuuluvat muun muassa arkipäivän matemaattisten ongelmien mallintaminen, matemaattisten ajattelumallien oppiminen ja täsmällisen ilmaisun harjoitteleminen. Vuosiluokkien 6-9 tavoitteisiin kuuluu muun muassa se, että oppilas oppii loogista ja luovaa ajattelua, ilmaisemaan ajatuksensa yksiselitteisesti ja perustelemaan toimintaansa ja päätelmiään sekä esittämään kysymyksiä ja päätelmiä havaintojen perusteella. Keskeisiin sisältöihin taas kuuluu esimerkiksi ajattelua tukevien piirrosten ja välineiden käyttö. Varsinaisesta todistamisesta sanotaan seuraavaa:

> “Todistamisen pohjustaminen: perustellut arvaukset ja kokeilut, systemaattinen yritys-erehdysmenetelmä, vääräksi osoittaminen, suora todistus.”

Vaikka todistamisesta mainitaan opetussuunnitelmassa vain yllä mainitun yhden ranskalaisen viivan verran, todistamisajattelun vahvistamista ajatellen on painotettu myös siihen olennaisesti liittyviä asioita, joita on yllä mainittu. Omien ajatusten ilmaiseminen, toimintansa perusteleminen sekä looginen ja luova ajattelu ovat niitä tärkeitä taitoja, jotka pohjustavat todistamisen taitoa. Piirrokset ja välineet ovat hyvä apuväline esimerkiksi perustelemiselle, kun oppilaan kyky formalisoida matemaattista esitystään vasta kehittyy.

POPS 2014:ssa [12, s. 374-379] todistamisesta on mainittu sisältöihin lukeutuvassa “Ajattelun taidot ja menetelmät” -kohdassa muun muassa seuraavaa:

> ”Harjoitellaan loogista ajattelua vaativia toimintoja kuten sääntöjen ja riippuvuuksien etsimistä ja esittämistä täsmällisesti. Pohditaan ja määritetään vaihtoehtojen lukumääriä. Vahvistetaan oppilaiden päättelykykyä ja taitoa perustella. – – Tutustutaan todistamisen perusteisiin. Harjoitellaan väitelauseiden totuusarvon päättelyä.”

Yllä lainatut saman sisällöt ovat juurikin niitä taitoja, joita varsinaiseen todistamiseen tarvitaan. Todistamisen pohjustamista käymällä läpi määrättyjä todistamiseen liittyviä menetelmiä ei ole kuitenkaan samalla tavalla nimetty kuin POPS 2004:ssa. Näin ollen opettajan vastuulle jää se, millä tavalla tämä opetussuunnitelman kohta toteutetaan. Myös opetussuunnitelman tavoitteissa mainitaan sellaisia seikkoja, jotka ruokkivat todistamistaitoja: oppilasta tuetaan muun muassa loogiseen ja luovaan ajatteluun. Oppimisympäristöihin liittyvissä sisällöissä painotetaan jälleen piirrosten ja välineiden käyttöä, mikä on tärkeä välivaihe todistamisajattelun kehittämisessä. POPS 2014:ssa todistamisajattelua pohjustavat taidot on otettu huomioon myös arvioinnin osalta:

> ”Arvioinnin kohteena ovat matemaattiset tiedot ja taidot sekä niiden soveltaminen. Lisäksi arvioinnissa kiinnitetään huomiota tekemisen tapaan ja taitoon perustella ratkaisuja sekä ratkaisujen rakenteeseen ja oikeellisuuteen.”

Mielenkiintoista olisi selvittää, miten opettajat suhtautuvat todistamista koskeviin opetussuunnitelman kohtiin. Opetussuunnitelmien mainitsemat ympäripyöreät “todistamisen pohjustaminen” ja “todistamisen perusteet” antaa opettajalle aika vapaat kädet valita tapansa toteuttaa opetus. Matemaattisesti orientoituneet opettajat eivät välttämättä tarvitse opetussuunnitelmaa määräämään sitä, kuinka todistamista tulisi opettaa. Tällaiset opettajat todennäköisesti kokevat itsestäänselvyytenä sen, että todistaminen kuuluu koulumatematiikkaan, oli luokka-aste mikä hyvänsä. Mikäli taas opettaja ei ole juurikaan syventynyt matematiikan luonteeseen eikä koe todistamista niin itsestäänselvänä, voi olla varsin hyödyllistä muistuttaa opetussuunnitelman muodossa, että todistaminen tulisi sisällyttää opetukseen myös yläkoulussa. Toisen tutkielman aiheeksi jääkin opettajien suhtautuminen todistamiseen. Esimerkiksi Eric J. Knuth on jo tehnyt aiheesta tutkimusta *Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof* [13].

4.2 Oppikirjoista

Tässä tutkielmassa ei tehdä missään määrin kattavaa oppikirja-analyysiä, mutta katsotaan hieman, miten oppikirjat käsittelevät todistamista ja siihen pohjustamista teoria- ja tehtäväosioissa. Kuinka paljon perustelujen tärkeyttä painotetaan ja kuinka näkyvillä todistamistaitoa harjoittavat prosessit ovat. Tarkemmassa käsittelyssä oli Pii-kirjasarjan kaikki kolme kirjaa, sekä lisäksi Kantti ja Kerroin, joista käytössä ei ollut uusimpia painoksia.

Todistamistehtäviä ei yläkoulun kirjasarjoissa valtavasti ole. Tehtäviä, joissa pyydetään perusteluja, on joitain, mutta mielestäni aika moni tehtävä on rajoittunut vain laskutaidon harjoittamiseen. Alla on joitain esimerkkejä siitä, millaisia aiheen mukaisia tehtäviä kussakin kirjasarjassa on.

Seuraavat kaksi tehtävää ovat Pii-kirjasarjan esimerkkitehtäviä.

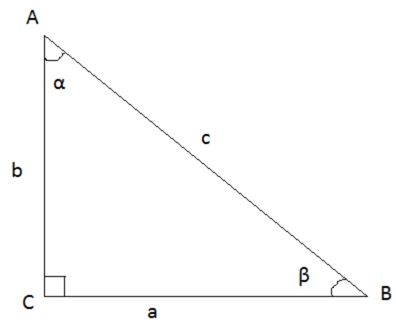
Tehtävä 75. [16, s. 234] Osoita, että kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta pienimmän ja suurimman tulo on aina pienempi kuin keskimmäisen luvun neliö.

Tehtävä 193. [15, s. 65] Perustele kuvan avulla, miten suunnikkaan pinta-ala muuttuu, kun sen kanta ja korkeus kasvavat kolminkertaisiksi.

Seuraavat kaksi esimerkkiä ovat taas Kerroin-kirjan esimerkkejä.

Tehtävä 275. [17, s. 201] Osoita todeksi.
a) Kun ympyrän säde kaksinkertaistuu, sen piiri kaksinkertaistuu.
b) Kun ympyrän säde kaksinkertaistuu, sen pinta-ala nelinkertaistuu.
c) Kun pallon säde kaksinkertaistuu, sen tilavuus kahdeksankertaistuu.

Tehtävä 325. [17, s.211] Osoita, että oheisen suorakulmaisen kolmion ABC pinta-ala on $\frac{1}{2}\, c^2\, sin\alpha\, cos\alpha$.



Kuva 2.

Seuraavat kaksi esimerkkiä ovat Kantti-kirjan esimerkkejä.

Tehtävä 19. [18, s. 190] Osoita, että lausekkeet x^2 ja $2x - 1$ saavat saman arvon, kun $x = 1$.

Tehtävä 20. [18, s. 190] Onko luku x=1 yhtälön juuri? Perustele.

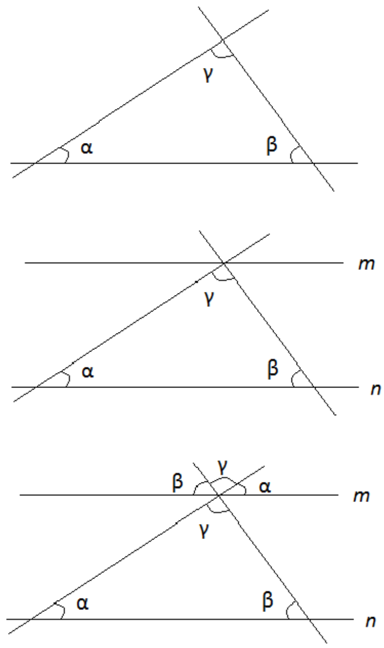
- $x^2 = 2x - 1$
- $x^2 - 2x = -1$
- $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $-x^2 + 2x - 1 = 0$

Pii-kirjasarjassa todistamiseen liittyvät tehtävät oli melkein jokaisessa tapauksessa muotoiltu siten, että tehtävän lopussa oppilasta pyydetään perustelemaan saatu vastaus. Sen sijaan Kertoimessa ja Kantissa oli käytetty muissakin kuin esimerkkitehtävissä sanoja "osoita" ja "todista". Lukion kirjoissa "osoita"- ja "todista"-alkuisia tehtäviä alkaa olla useampia, joten olisi mielenkiintoista tietää, miksi Pii-kirjasarjan kohdalla on selkeästi tehty tietoinen valinta olla käyttämättä tietyllä tapaa muotoiltuja tehtäviä? Voi olla, että Pii-kirjoissa esiintyvät "perustele vastauksesi"-tyyppiset todistamiseen liittyvät tehtävät näyttäytyvät oppilaalle aivan erilaisena tehtävätyyppinä kuin Kantti- ja Kerroin-kirjojen "osoita"- tai "todista"-tehtävät, joista jälkimmäiset tehtävätyypit saattaisivat valmentaa jollain tapaa jo hieman lukion tehtäviin.

Kirjojen teoriaosien tulisi olla johdonmukaisesti eteneviä, helposti ymmärrettäviä ja loogisia. Näin ollen olisi hyödyllistä esittää tiettyjen lauseiden tai kaavojen kohdalla myös perustelut. Esimerkiksi kolmiulotteisten kappaleiden pinta-alojen lausekkeet ovat sellaisia, jotka olisi hyvä johtaa peruskoululaiselle - ne saattaisivat jäädä mieleen paremmin eivätkä ne näyttäytyisi vain kryptisinä kaavoina. Itse asiassa Pii-kirjoissa [15, s. 84] on johdettu ympyrän pinta-alan lauseke jakamalla ympyrä sektoreihin, ja tämä voidaan ajatella jonkinlaisena perusteluna sille, mistä ympyrän pinta-alan lauseke oikein muodostuu, vaikkakaan se ei ole lähelläkään täsmällistä perustelua.

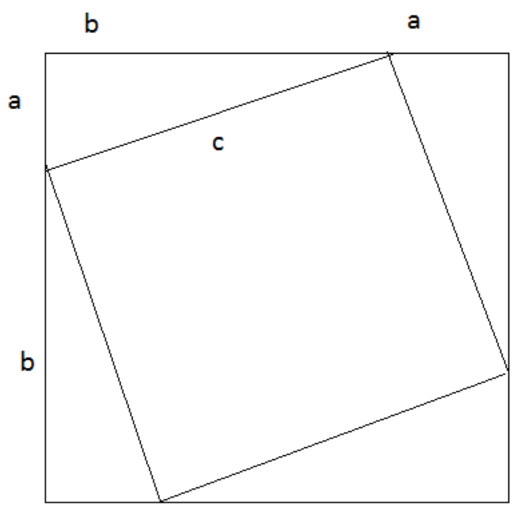
Lisäksi Pii-kirjassa [14, s. 252] on todistettu johdanto-osiossa mainittu kolmion kulmien summa, mikä on sen verran yksinkertainen, että ihmettelen aiempaa enemmän sitä, miksi oppilaille yritettäisiin syöttää pajunköyttä vakuuttamalla askarreltujen kolmioiden perusteella lauseen olevan totta. Kirjassa kolmion kulmien summa on todistettu seuraavalla tavalla:

> 1. Piirretään suorat, jotka kulkevat kolmion sivujen kautta.
> 2. Piirretään suora, joka kulkee kärkipisteen kautta ja on yhdensuuntainen suoran n kanssa (kts. kuva seuraavalla sivulla).
> 3. Merkitään kulmien α ja β kanssa samankohtaisia ja yhtä suuria kulmia α:lla ja β:lla ja γ:n ristikulmaa γ:lla.
> 4. Kulmat α, β ja γ muodostavat yhdessä oikokulman eli $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.



Kuva 3.

Kirjoissa on jätetty myös syystä tai toisesta joitain tärkeitä lauseita todistamatta. Kuitenkin esimerkiksi Pythagoraan lauseelle on esitetty hyvin selkotajuisia todistuksia, joita yläkoululaisen olisi kohtalaisen helppo ymmärtää. Esimerkiksi seuraavanlainen todistus Pythagoraan lauseelle voisi olla varsin sopiva yläkoululaisille esitettäväksi:



Kuva 4.

Kuvassa näkyvien neliöiden sivujen pituudet ovat $a+b$ ja c. Suuremman neliön pinta-ala voidaan kirjoittaa $(a+b)^2$ ja pienemmän neliön pinta-ala on taas c^2. Suuremman neliön ala voidaan esittää myös niin, että se on pienemmän neliön ala laskettuna yhteen kulmiin jäävien neljän suorakulmaisen kolmion pinta-alojen kanssa. Toisin sanoen

$$(a+b)^2 = c^2 + 4(\frac{1}{2}ab).$$

Avaamalla sulkeet ja sieventämällä oikeanpuoleista lauseketta saadaan

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

jossa a ja b ovat suorakulmaisen kolmion kateetit ja c kolmion hypotenuusa. Ollaan siis todistettu Pythagoraan lause

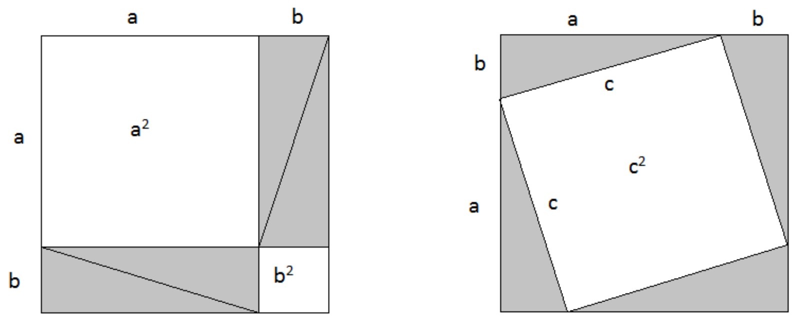
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Pythagoraan lause on mahdollista todistaa myös graafisesti. Lähteessä [2, s. 137] on esitetty *Tallin* (1995) ehdottama esimerkki. Tall kommentoi esimerkkiä:

> "Jokaisessa piirroksessa a:lle ja b:lle saadaan jotkin tietyt arvot, mutta piirros voidaan nähdä prototyyppinä, mallina kaikille suorakulmaiselle kolmiolle."

Tallin esimerkki sisältää kaksi kuvaa:



Kuva 5.

Pythagoraan lause on merkittävä yläkoulumatematiikassa, joten kaiken järjen mukaan se pitäisi myös vakuuttaa oppilaille todistamalla lause. Oppikirjojen jättäessä tärkeiden lauseiden tai tulosten todistukset esittämättä, jää opettajille päätettäväksi, esitetäänkö todistuksia ja jos esitetään, niin kuinka täsmällisesti.

Varsin ymmärrettävä todistus on myös aiemmin esitelty Eukleideen todistus. Sinänsä tulos, joka todistetaan, ei ole välttämättä se tarpeellisin siinä mielessä, että sitä ei juurikaan käytetä tyypillisiin matematiikan ongelmanratkaisutehtäviin, mutta se perehdyttäisi oppilasta todistamisen maailmaan ja antaisi ymmärtää, että graafinen esitys voi vallan hyvin olla osana todistamista.

Eriyttävää materiaalia - tai sitten vain hieman toisenlaista matematiikan opiskelua - on huomattavissa esimerkiksi Pii-kirjasarjan eräässä Ekstraaosiossa. [15, s. 91] Siellä kerrotaan ympyrän neliöinnin ongelman historiasta: Antiikin Kreikassa taisteltiin pitkään ympyrän neliöinnin kanssa, ja vasta 1800-luvun loppupuolella pystyttiin todistamaan, ettei viivaimella ja harpilla voida muodostaa pinta-alaltaan yhtä suurta neliötä ja ympyrää. Sen jälkeen havainnollistetaan ongelmaa esimerkillä 1 cm -säteisestä ympyrästä ja sen kanssa pinta-alaltaan samansuuruisesta neliöstä, jota ei voida geometrisesti tarkalleen piirtää. Varsinaisesta todistamisesta ei ole sen enempää sanottu - eikä varmasti ole tarpeenkaan tämän aihepiirin ja yleisön huomioon ottaen - mutta ehkäpä se jättää oppilaille muistikuvan siitä, että todistaminen on tärkeä osa matematiikkaa! Olisi ollut hauskaa, mikäli vastaavan henkinen ongelma - kulman kolmiajako - olisi esitetty vaikkapa kulmia käsittelevän teoriaosan lopussa.

5 Alalla toimivien näkemyksiä

Osana tutkielmaa halusin myös selvittää mitä mieltä ammattilaiset - aineenopettajat ja oppikirjantekijät - ovat todistamisesta koulumatematiikassa ja siitä, millaiseksi he kokevat sen tämänhetkisen roolin kouluopetuksessa. Selvitetään myös, miten he suhtautuvat perusopetuksen opetussunnitelman perusteisiin ja kuinka paljon jää opettajan vastuulle perehdyttää oppilasta todistamiseen. On myös mielekästä pohtia, kuinka lyhytjännitteisemmät oppilaat voidaan temmata mukaan todistamisen maailmaan.

Halusin ensin tietää hieman alalla toimivien taustoista: milloin he ovat saaneet koulutuksensa ja missä. Lisäksi halusin tietää, ovatko opettajankoulutukseen osallistuneet saaneet itse eväitä todistamisen opettamiseen. Molemmat aineenopettajat ovat saaneet koulutuksensa 2010-luvulla ja heidän mukaan todistamisella ei ainakaan ollut suurta roolia opettajankoulutuksessa.

> Opettaja 1: " – – Olen käynyt opettajankoulutuksen. Sen yhteydessä oli puhetta myös todistamisesta jonkin verran. Siihen ei kuitenkaan loppujen lopuksi hirveästi paneuduttu. Se(kin) on opettajan vastuulla ja päätettävissä, haluaako todistuksia oppilaiden kanssa käydä läpi ja millä tavalla. Melko yleinen toteamus oli se, että todistaminen vie aikaa ja se aika on aina sitten jostain muusta pois. – – "

> Opettaja 2: "– – Omassa opetusharjoittelussani kyllä tuotiin esille todistamisen merkitys matematiikassa, mutta muistaakseni sen opettamista ei juurikaan käyty läpi. – – "

Aineenopettajan pedagogiset opinnot on kokonaisuus, johon tulisi mahduttaa hyvin paljon asioita, ja näin ollen minkään yksittäisen asian käsittelyyn ei voida käyttää paljoa aikaa, mutta olisi kummallista, jos todistamista käsitellään vain sivuten. Halusin myös tietää, missä vaiheessa todistamisen opettaminen (todistamisen pohjustaminen) tulisi ottaa mukaan koulumatematiikkaan. Aineenopettajilta halusin kysyä, ovatko he opettaneet yläkoulussa todistamista ja jos, niin miten. Tähän kysymykseen sain hieman eriäviä vastauksia, ja epäilen sen johtuvan siitä, että todistaminen ja/tai siihen pohjustaminen merkitsee kullekin vastaajalle hieman eri asioita.

Aineenopettajat vastasivat kysymykseeni seuraavasti:

> Opettaja 1: "Mielestäni todistamista voisi alkaa kuljettamaan mukana matematiikassa jo ihan ensimmäiseltä luokalta asti alakoulusta. Tarkoitan sitä, että matematiikan opetuksessa olisi hyvä alusta asti alkaa pohtimaan oppilaiden kanssa sitä, miksi asioita

> lasketaan siten kun niitä lasketaan. Hyvin aikaisessa vaiheessa olisi mielestäni tärkeää tuoda esille se, että matematiikka ei ole pelkkää laskemista ja kaavoja, vaan paljon muutakin. Olen opettanut yläkoulussa todistamista siinä mielessä, että pohdimme ja pyrimme perustelemaan asioita oppilaiden kanssa. Esim. sen sijaan, että tyytyy toteamaan, että ”piin arvo on 3,14... ja tämä nyt sijoitetaan kaavaan piin paikalle ja lasketaan”, voisi pohtia hiukan tarkemmin miksi sen arvo on se mikä on. Tämä pohdinta ja perustelu täytyy tietysti tapahtua siten, että se ei vie liikaa aikaa. – – Olen esittänyt kahdeksannelle luokalle mm. Pythagoraan lauseen todistuksen.”

> Opettaja 2: “Mielestäni todistamista ei tarvitsisi välttämättä kovin ajoissa ottaa mukaan koulumatematiikkaan. Tämä siksi, että vaikka todistaminen on yksi merkittävimmistä asioista matematiikassa, sitä ei kuitenkaan tarvitse alkaa esittelemään perinpohjaisesti kaikille, vaan vain niille, jotka ovat kiinnostuneet matematiikasta ja jotka tulevat tarvitsemaan todistamista matematiikassa jatkossa. Mielestäni kuitenkin jotain yksinkertaisia todistusharjoituksia on hyvä käydä esimerkiksi yläkoulussa. Näin saadaan kaikille oppilaille jonkinlainen käsitys matematiikan ajattelusta, ja opettaa jonkin verran sitä, että asiat on todistettava ennen kuin niitä voidaan pitää tosina ja että mitään ei voi temmata tuulesta ja kaikki pitää pystyä perustelemaan. Todistamista on hyvä pohjustaa, jotta se ei lukiossa tulisi aivan uutena asiana opiskelijoille.”

Yllä olevat mielipiteet eroavat toisistaan. Ei niinkään siksi, etteikö molemmat pitäisi todistamista tärkeänä osana matematiikkaa, vaan lähinnä siksi, että toinen aineenopettaja ei koe todistamisen olevan tarpeellinen asia opettaa kovin aikaisin. Liekö tämä juurikin osa sitä todistamisen määrittelyn ongelmaa? Molemmat ovat kuitenkin sitä mieltä, että todistaminen kuuluu erottamattomasti matematiikkaan, ja että se on tehtävä selväksi myös oppilaille. Seuraavana kokeneen oppikirjantekijän näkemys asiaan:

> “Peruskoulun ensimmäisellä luokalla. Tuollaisia paperinmakuisia termejä kuin "todistamisen opettaminen"ja "todistusajatteluun valmentaminen"varmaan tarvitaan kasvatustieteissä, mutta matematiikassa ei ole mitään erillistä "todistusajattelua"vaan kaikki väitteet täytyy perustella (tai ainakin täytyy periaatteessa osata perustella). Perustelun vaatimustaso riippuu tietenkin luokkatasosta. Ajatellaanpa vaikkapa ekaluokkalaista, joka "laskee sormilla", että 2+3=5. Tämä on aivan kunniallinen todistus sikäli, että se

> antaa oppilaalle täysin oikean sanoisinko "subjektiivisen kokemuksen"siitä, että tuloksesta ei ole pienintäkään epäilyä. Laskimella suoritettuna tästä tehtävästä ei sen sijaan ole hänen matemaattiselle kehittymiselleen mitään hyötyä. – – ”

Paperinmakuisiin termeihin tarttuminen ja niiden kyseenalaistaminen viittaa juurikin siihen tosiasiaan, että todistaminen ei ole matematiikasta erillään oleva asia, mistä aineenopettajatkin taitavat olla samaa mieltä. Ne olisivat kuitenkin saattaneet olla tärkeitä termejä. Kun ne olisi määritelty, ei olisi tarvinnut kyseenalaistaa sitä, ymmärsivätkö kaikki kysymykset samalla tavalla. Mielestäni on myös olennaista huomauttaa esimerkillä todistamisen vaatimustasosta. Vaikka digitaalista oppimista tänä päivänä paljon painotetaankin, on olennaista myös huomauttaa siitä, että laskimeen naputtaminen ei kehitä matemaattisesti lainkaan samalla tavalla kuin vaikkapa esimerkissä käytetty sormilla laskeminen.

POPS 2004:ssa on mainittu todistamisen pohjustaminen ja siihen liittyvät “menetelmät”, joista jo on mainittu aiemmin tässä tutkielmassa. Halusin tietää, millaisiin tilanteisiin tai tehtävätyyppeihin menetelmät - perustellut arvaukset ja kokeilut, systemaattinen yritys-erehdysmenetelmä, vääräksi osoittaminen ja suora todistus - ja niiden harjoittelu sopivat. Seuraavat lainaukset ovat aineenopettajien näkemyksiä. Ainakin toinen niistä on hieman turhan ylimalkainen, jotta siitä voisi minkäänlaisia yleistyksiä tehdä.

> Opettaja 1: “Perustellut arvaukset ja kokeilut: En tiedä miten tämä liittyy varsinaisesti todistamiseen. Lähinnä tulee mieleen se, että tehtäviä laskettaessa tulee välivaiheet olla näkyvissä. Pelkkä vastaus tulkitaan aina perusteettomaksi arvaukseksi, vaikka se olisi oikein. Tietysti välivaiheiden esittäminen laskuissakin on tietynlaista todistamista.
> Systemaattinen yritys-erehdysmenetelmä: Tämän kohdalla tulee mieleen ehkä se, että oikea vastaus ei ole aina se tärkein osa, vaan se miten siihen ollaan päästy. Tehtävien ratkaisutapoja on erilaisia ja yritys-erehdysmenetelmä on niistä yksi eikä mielestäni millään tavalla epämatemaattinen tapa. Tämä voi jollain lailla pohjustaa jopa induktiiviseen ajatteluun. Esim. oppilas ei ymmärrä tehtävissä esitettyjä kirjainmuuttujia ja kokeilee sen sijaan ratkaista tehtävää lukuarvoilla kokeilemalla. Onnistuttuaan tässä, saattaa olla tämän jälkeen helpompaa pyrkiä yleistämään saatu yksittäistulos yleiseksi ratkaisuksi. Tämä on induktiivista ajattelua.
> Vääräksi osoittaminen: Vaikea sanoa missä tällaista tarvitsisi peruskoulumatematiikassa. Tämä voisi jollain tapaa liittyä edelliseen kohtaan (yritys-erehdysmenetelmä). Eli kun kokeillaan ratkaista esim. jokin kirjainmuuttujia sisältävä tehtävä lukuarvoilla ja päädytään virheelliseen vastaukseen.

> Suora todistus: Suoria todistuksia sellaisena kuin minä ne ymmärrän, ei peruskoulumatematiikassa tehdä oikeastaan ollenkaan. Ehkä juuri Pythagoraan lauseen todistaminen voisi olla yksi (ja ainoa=?) esimerkki.”

> Opettaja 2: “Esimerkiksi geometria on hyvä matematiikan osa-alue, jossa todistamista voidaan harjoittaa. Otetaan esimerkkinä vaikka Pythagoraan lause. Tämä lause on hyvä esimerkki todistamisesta yläkoulussa, jossa oppilaat saavat kuvioiden avulla todistaa lauseen oikeaksi.”

Itse tulkitsen vastaukset niin, että nämä menetelmät eivät ole kovin tuttuja vastaajille eikä niiden yhteyttä todistamisen opetteluun välttämättä ole ajateltu kovin syvällisesti. Kirjantekijän vastaus taas oli seuraavanlainen:

> “Todistamisen tuollainen "lokerointi"on varmaan hyödyksi kasvatustieteissä, mutta minulle riittävät jaottelut induktiivinen vs. deduktiivinen ja (mikä on tavallaan sama asia) konkreettinen vs. abstrakti. Tilanteiden ja tehtävätyyppien sijoittaminen näihin lokeroihin on varmaan sekin hyödyllistä - ja kasvatustieteilijälle hyvä julkaisun aihe - mutta ei mielestäni kovinkaan kiinnostavaa. Siksi tyydyn vain sanomaan (mikä on tietysti täysin triviaalia), että mitä useammalla tavalla opetustilannetta tai harjoitustehtävää voidaan käsitellä sitä parempi. Mutta silloin joudutaan vaikeuksiin "lokeroinnin"kanssa, sillä yksi lokero ei riitä.”

En ole varma, viittaako vastaaja lokeroinnilla opetussuunnitelman mainitsemiin menetelmiin vai siihen, että kysymyksessäni ehkä johdattelin tarpeettomasti lokeroimaan kunkin menetelmän johonkin tiettyyn tehtävätyyppiin tai tilanteeseen. En itse näe, että opetussuunnitelmassa lokeroitaisiin, vaan lähinnä eritellään ne menetelmät, jotka ovat yläkoululaiselle ymmärrettäviä tapoja perustella laskujaan tai suorittaa ongelmanratkaisua. Sen sijaan oman kysymykseni tajusin hieman lokeroivaksi ja ehkäpä tässä tapauksessa myös huonosti muotoilluksi.

Suhtautumisesta opetussuunnitelmaan halusin tietää enemmän. Ovatko opetussuunnitelman perusteissa mainitut todistamiseen liittyvät sisällöt sopivat? Onko tämänhetkinen painotus ongelmallinen tai todistamista koskevan opetussuunnitelman kohdan toteuttaminen hankalaa? Aineenopettajat vastasivat seuraavasti:

> Opettaja 1: “Sisällöt ovat hyvin ympäripyöreät, kuten opetussuunnitelmassa yleensä asiat ovat. Niitä saattaa olla vaikea tulkita. Toisaalta tämä jättää opettajalle todella paljon päätäntävaltaa,

miten asiat esitetään. Tämä on mielestäni hyvä asia, koska opettajien taso Suomessa on korkea. Ymmärrän toki senkin, että opetussuunnitelmaan ei voida alkaa kirjoittamaan sisältöjä kovin pitkästi."

Opettajien taso on ilman muuta Suomessa korkea. Ei ole kuitenkaan itsestäänselvää, että vähemmän matemaattisesti orientoituneet opettajat kokisivat todistamisen olennaisena osana matematiikan opettamista yläkoulussa.

> Opettaja 2: "Koen, että todistamisen opettaminen on jokseenkin hankalaa. Varmasti edistyksellisimmät opettajat, jotka suunnittelevat tuntejansa hyvin yksityiskohtaisesti, osaavat ottaa huomioon todistamisen osana opetusta. Koen, että juuri asian linkittäminen osaksi tavallista opetusta on hankalaa. Mielestäni todistaminen ei saisi olla irrallinen osa, vaan se olisi ikään kuin sisäänrakennettuna kaikessa matematiikassa, kuten esimerkiksi tuo Pythagoraan lauseen todistamisen esimerkki. Oppilaat asiaan tutustuttaessa huomaamattaan todistavat lauseen ensin todeksi, ennen kuin alkavat sitä laskuissaan käyttämään."

Minulle heräsi monia kysymyksiä tästä vastauksesta: Miksi todistamisen opettaminen olisi hankalaa? Miksi vain yksityiskohtaisesti suunnittelemalla on mahdollista ottaa todistaminen huomioon? Vastaaja selkeästi ymmärtää niin tämän kuin muidenkin vastaustensa perusteella, että todistaminen on matematiikkaa, mutta voisikohan olla, että todistaminen (ja edelleen se todistamisen määrittely) on opettajalle jotenkin vierasta - kuitenkin Pythagoraan lauseen todistaminen on hänen mielestään helppo opettaa vaivihkaakin. Kirjantekijä suhtautuu opetussuunnitelmaan ehkäpä hieman kriittisemmin:

> "Lieneekö sillä, mitä opetussuunnitelmassa sanotaan todistamisesta, paljoakaan merkitystä? Muistaakseni jossakin vanhassa matematiikan opetussuunitelmassa sanottiin mm., että oppilaan täytyy saada "miellyttäviä elämyksiä"! Ei opetussuunnitelmilla synnytetä niitä - eikä todistustaitojakaan. Opettajalle jää vastuu saada (ainakin parhaat) oppilaat ymmärtämään, että matematiikassa kaikki väitteet täytyy perustella ja myös saada heidät osaamaan tehdä niin. Siitä, mitä opetussuunnitelmassa sanotaan todistamisesta, ei (kuten jo sanoin) taida olla paljoakaan apua."

Toki opettajan vastuulla on se, mitä hänen oppilaansa oppivat, mutta ainakin opetussuunnitelman pitäisi taata se, että todistamista ei täysin sivuuteta opetuksessa.

Entä oppikirjat? Oppikirjat ovat opetussuunnitelman mukaisia materiaalipankkeja, mutta miten opettajat näkevät kirjojen esittelevän todistamista?

Kuinka suuri vastuu opettajalle jää todistamista koskevan opetussuunnitelman kohdan toteuttamisessa? Aineenopettajat eivät juurikaan havaitse oppikirjojen todistamista painottavaa puolta:

> Opettaja 1: ”Hyvin, hyvin vähän. Todistamisen vastuu on käytännössä täysin opettajalla, koska opetussuunnitelma ei anna mitään konkreettisia työkaluja tähän ja se on hyvin tulkinnanvarainen.”

> Opettaja 2: “Tämä mielestäni jää opettajan oman tuntisuunnittelun varaan eli on huomioitava todistaminen erikseen, sillä useimmat oppikirjasarjat eivät sitä noteeraa. Toki se kuuluu jokaisen opettajan työhön seurata opetussuunnitelmaa eikä vain edetä oppikirjan mukaan.”

Ehkäpä todistaminen ei vain näyttäydy erillisenä osana kirjoissa, vaan se on osana teoriaosioita, osana tehtävänantoja, niinkuin aineenopettajat ovat aiemmin luonnehtineet todistamisen olevan kiinteä osa matematiikkaa. Oppikirjantekijä taas vastaa seuraavasti:

> “Ainakin minä olen yrittänyt tehdä niin. Olen nimittäin vuodesta 1974 alkaen kirjoittanut (ryhmän jäsenenä) matematiikan oppikirjoja ensin peruskoulun yläastetta ja sitten lukiota (laaja/pitkä matematiikka) varten. Kirjat menivät pitkän aikaa melko hyvin kaupaksi, mutta viime vuosina niiden myynti kääntyi jyrkkään laskuun, eikä niitä uudisteta tulevien opetussuunnitelmien mukaisiksi. Tämä ehkä kertoo jotakin matematiikan kouluopetuksen nykyisestä tilasta. Mitä kokeneempi ja ammattitaitoisempi opettaja on ja mitä paremmin hän itse osaa matematiikkaa sitä vähemmän hän tarvitsee tukea oppikirjoista ja opetussuunnitelmista, jolloin hän menestyy työssään näissä olevista virheistä ja puutteista huolimatta.”

Viimeinen virke osuu mielestäni naulankantaan.

Todistaminen on varmasti itsessään jo motivoivaa osalle oppilaista. Kuinka todistamisesta saataisiin motivoivaa kaikille, myös lyhytjänteisemmille ja pinnalliseen opiskeluun taipuvaisille oppilaille? Aineenopettajat vastasivat seuraavasti:

> Opettaja 1: “Tämä on hyvin paljon opettajasta kiinni. Todistamisesta saa kyllä motivoivaa, kun sen osaa esittää oikein. Itse tapaan pohdiskella oppilaiden kanssa yhdessä asioita ja tätä kautta perustellen ajautua lopulliseen tulokseen. Myös erilaisten konkreettisten asioiden käyttäminen apuna (esim. esimerkit elävästä elämästä)

> tekee asiasta kiinnostavampaa. Todistamisen saaminen motivoivaksi kaikille on tietysti mahdotonta, mutta valtaosa oppilaista on mahdollista saada innostumaan pohdiskelusta."
>
> Opettaja 2: "Mielestäni peruskoulussa, jossa jokainen oppilas, mielenkiinnoistaan huolimatta, joutuu opiskelemaan matematiikkaa, todistaminen olisi enemmänkin todistamisen pohjustamista tai ylipäätään matemaattisen ajattelun työstämistä todistamisen suuntaan. Näin ollen, kun asiaa ei niin sanotusti nosteta jalustalle, vaan opetetaan sitä niin sanotusti vaivihkaa, niin voi monelle olla motivoivaa jo se, että tehdään jotain "erilaista"."

Ensimmäisestä lainauksesta löysin pari ylipäätään matematiikan opiskeluun liittyvää, omasta mielestäni tärkeää motivointiin liittyvää seikkaa: asioiden pohdiskelu yhdessä ja esimerkit elävästä elämästä. Nämä varmasti motivoivat todistamisen opettelua, mutta myös mekaanisempaa laskujen ratkaisua. Toisessa vastauksessa on otettava huomioon taas se, että epäilen vastaajan käsittävän käytettävät termit eri tavalla kuin olin itse ajatellut. Kuitenkin hän toi ilmi olennaisen näkökulman siitä, että kaikkia ei matematiikka kiinnosta - ja koska sitä on pakollisena opiskeltava - on keskityttävä heidän osaltaan olennaisten taitojen hankkimiseen. Näihin kuuluu esimerkiksi laskujen perustelut ja tiettyjen perusperiaatteiden ymmärtäminen. Kirjantekijän näkemys on taas seuraavanlainen:

> "Kaikkia ei tarvitse motivoida kaikkeen. Ne oppilaat, joilla ei ole halua tai kykyä oikeaan matematiikan opiskeluun, voivat tyytyä jokapäiväisessä elämässä tarvittavaan "laskentoon"ja suuntautua niihin aineisiin, joiden opiskeluun heillä on mielenkiintoa ja edellytyksiä. Erityistä huomiota tarvitsevat kuitenkin sellaiset matemaattisesti lahjakkaat oppilaat, jotka syystä tai toisesta pitävät matematiikan opiskelua vastenmielisenä. Heidän on tiedostettava lahjakkuutensa ja löydettävä motivaationsa. Siihen, miten tämä saadaan aikaan, ei ole yleispätevää keinoa, joten opettajalla on ratkaiseva merkitys. Koska hän tuntee kyseisen oppilaan, hänen pitäisi tietää, miten juuri tuon oppilaan kohdalla kannattaa menetellä. Kouluviranomaiset eivät tunne häntä eivätkä tiedä miten."

Tässä tuleekin ilmi haaste, johon opettaja törmää varmasti monesti työurallaan. Kuinka opettajana löydät luokasta ne lahjakkaat, mutta matematiikkaan negatiivisesti suhtautuvat oppilaat ja vieläpä vaikutat heidän asenteisiinsa oikealla tavalla?

Aikaisemmissa vastauksissa on tullut esiin havainnollisten perustelujen, kuten esimerkiksi kuvien tai konkreettisten kappaleiden käyttöä osana perusteluprosessia. Mikä merkitys todistuksen muodollisuudella (päättely perustuu määritelmiin, lauseisiin ja aksioomiin yksityiskohtaisesti ja eksaktisti perustellen) vs. ei-muodollisilla perusteluilla (esimerkiksi kuvat tms.) on ajatellen yläkoululaiselle sopivaa todistamista ja ylipäätään todistusajattelun oppimista? Näin vastasivat aineenopettajat:

> Opettaja 1: “Suuri merkitys! Mielestäni yläkoulussa todistuksen tulisi olla nimenomaan ei-muodollista perustelua. Lukiossa todistuksen yhteyteen voisi sitten pitkässä matematiikassa tuoda määritelmä, lause, aksioomat –asiat mukaan. “

> Opettaja 2: “Yläkoululaiselle yleisesti sopii mielestäni ei-muodollinen perustelu. Tämä siksi, että mielestäni yläkoulussa ei tarvitse kaikille opettaa muodollista todistusta, sillä se ei kaikkia kiinnosta eivätkä kaikki sitä koskaan tule tarvitsemaankaan. Tärkeintä on, että kaikille opetetaan idea, että matematiikkaan liittyy vahvasti todistaminen. Jos oppilas on yläkoulussa kiinnostunut todistamisesta, en näe syytä, miksi tällaisille oppilaille ei voisi opettaa myös muodollista todistamista.”

Tärkeää on myös se, että oppilaan on ymmärrettävä esimerkiksi syyt tiettyihin matematiikkaan liittyviin täsmällisyyttä vaativiin merkintöihin ja perusteluihin, ja se saattaa vaatia tietyissä tapauksissa paljon ns. esivalmisteluja. Kirjantekijän lyhyt ja ytimekäs näkemys:

> “Käyttäisin mieluummin jaottelua täsmällinen perustelu vs. havainnollinen perustelu. Kysymyksesi on vaikea ja laaja, mutta vastaan siihen lyhyesti: Suuri!”

Halusin vielä lopuksi kysyä, jäikö mielen päälle jotain muuta sanottavaa. Alla olevassa aineenopettajalta lainatusta pätkästä käy ilmi ne asiat, jotka itsellenikin tuli mieleen vastauksia läpikäydessäni:

> Opettaja 1: “– – Myös sanan ”todistaminen” –määrittely ei ole yksikäsitteistä. Mikä on todistamista ja mikä ei? – – Ehkä todistamista tapahtuu kuitenkin tämänkin päivän peruskoulumatematiikassa enemmän, mutta sitä ei aina huomata ja erikseen noteerata.

Ainakin itselleni todistamisen määrittely on tietyllä täsmällisyydellä ajateltuna selvää, mutta sitä se ei varmastikaan ole kaikille - sen huomasin tutkielman teon eri vaiheissa - ja näin ollen jonkinlainen määritelmä olisi ollut ainakin paikallaan ennen kuin aloin selvittää alan toimijoiden näkemyksiä.

6 Havaintoja

Käsitän itse todistamisen luokka-asteesta ja matemaattisesta ymmärryksestä riippuen johtopäätösten perustelemisena. Alakouluikäisen jo haastattelemani kirjantekijän mainitsema “sormilla laskeminen” on todistamista. Yläkoululainen voi tehdä todistuksen perustelemalla vaikkapa omaan kokemusmaailmaansa liittyvän ongelmanratkaisuprosessin. Lukiossa voidaan todistaa jo formaalisti, mutta ei kuitenkaan yhtä täsmällisesti ja aksiomaattisesti kuin yliopistossa - kaikkia peruslauseita ei lukion todistuksissa ole todistettu ja määritelmiä huomioitu. Yliopistossa siirrytään taas askel eteenpäin, ja todistukset ovat paikoitellen huomattavasti korkealentoisempia. Mielestäni todistamisen opettaminen tulisi ottaa kouluihin jo heti ensimmäisellä luokalla. Alimmilla luokilla todistamiseen voi johdattaa melkeinpä keinoilla millä hyvänsä - konkreettisin välinein, tarinallisuuden kautta tai vaikkapa leikin varjolla. Alalla toimiva aineenopettaja mainitsi haastatellessani häntä, että todistaminen vie aikaa, ja se aika on jostain muusta pois. Uskon, että todistaminen on kuitenkin useassa tapauksessa äärimmäisen tärkeässä osassa oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymistä enkä itse opettajana haluaisi pihistää ainakaan siitä.

Mielestäni on myös tärkeää, että opetussunnitelmien perusteissa huomioidaan todistaminen. Se osoittaa sen, että matematiikan ei tulisi olla ainoastaan kaavojen ja laskimen käyttöä, vaan koulumatematiikan tehtävä on todella kehittää oppilaan loogista ajattelua ja matemaattisia taitoja. Opetussuunnitelmat ovat tietyllä tapaa ympäripyöreitä - siitä olen samaa mieltä toisen haastatellun aineenopettajan kanssa - mutta mielestäni olisi opettajia ja heidän luovuuttaan aliarvioivaa kirjoittaa yksityiskohtaisia ohjeita siitä, mitä ja miten kutakin asiaa tulisi opettaa. Koska opetussuunnitelmassa mainitaan todistamisesta, niin voidaan olettaa, ettei ole itsestäänselvää, että todistaminen olisi jokaisen opettajan mielestä tärkeä ja matematiikasta erottamaton osanen. Vuoden 2004 opetussuunnitelmassa mainitut todistamiseen liittyvät menetelmät ovat sellaisia, jotka tulisi oppilaalle opettaa. On tärkeää, että esimerkiksi ongelmanratkaisuprosessissa tekemiset voidaan perustella. Se ei välttämättä kuitenkaan onnistu yläkouluikäiseltä kovinkaan täsmällisesti ja formaalisti, ja tällöin perustelussa on oikeutettua käyttää juurikin esimerkiksi kokeiluja ja yritys-erehdysmenetelmää. Vääräksi osoittamisella on mielestäni siinä mielessä suuri merkitys ja hyöty, että jonkin lauseen paikkansapitävyyden voi kumota löytämällä vain yhden vastaesimerkin, ja toisinaan vastaesimerkin löytäminen voi olla haastavakin tehtävä. Suoria todistuksia voidaan käyttää monissa geometrian alkeisiin liittyvissä lauseissa, ja näin ollen sekin on varsin hyödyllinen opettaa jo jossain mittakaavassa yläkoulussa.

Oppikirjoissa voitaisiin mielestäni panostaa hieman enemmän tulosten perusteluun. Tarkastelemani Pii-kirjasarjan geometrian osiossa oli joitain kaavojen johtamisia, mutta muilta osin kirjan teoriaosat antoivat vastaukset valmiina. Tarkastellessani Pii-kirjasarjaa ja kahta muuta kirjasarjaa huomasin, että Piissä pyydettiin perusteluja joidenkin tehtävien ratkaisuille, mutta taas Kantissa ja Kertoimessa oli sananvalinnoiksi valittu useassa kohdassa "Todista". Uskon, että nämä ovat täysin tietoisia valintoja. Itse en haluaisi vieroksua todista-sanan käyttöä esimerkiksi yläkoulussa, vaikka todistaminen ei niin täsmällistä olekaan kuin ylemmillä koulutusasteilla.

Toinen aineenopettaja, jota haastattelin, painotti todistamisen opettamisesta "vaivihkaa". Jos todistamista opetetaan ainoastaan vaivihkaa, voi olla, että oppilaat kokevat melkoisen shokin siirtyessään lukion pitkän matematiikan kurssille, kun todistaminen on täysin vierasta toimintaa - vaikkei se oikeastaan sitä ihan täysin olekaan. Sitä paitsi, yläkoulussa olisi tarpeen tutustuttaa oppilaita siihen, millainen matematiikka on tieteenä - ja tietysti siihen kuuluu olennaisesti todistaminen - joten onko silloin järkevää vaivihkaa, ikään kuin "salaa", opettaa jotain sellaista, joka jokaisen olisi ymmärrettävä matematiikasta ja sen luonteesta.

Kuitenkaan kaikkia ei tarvitse motivoida todistamiseen - kerta kaikkiaan jokainen meistä ei koe matematiikkaa juuri itselleen mieleisimpänä aineena, ja näinhän on juuri hyvä, kaikenlaisia osaajia tarvitaan. Kuitenkin haasteellista on osoittaa niille matemaattisesti lahjakkaille tai matematiikasta kiinnostuneille matematiikan hienous ja kauneus, vieläpä sillä tavalla, että pysytään oppilaan käsityskyvyn rajojen sisäpuolella, ja lisäksi tukea kunkin oppilaan omia päättelyprosesseja ja todistamista oikealla tapaa.

Muodollisuuden ja havainnollisuuden oikealla tasapainolla on suuri merkitys todistamista ajatellen koulumatematiikassa. Suuria vaatimuksia muodollisuudella ei monessa tapauksessa voi olla, kun muodollinen esitys vasta hakee muotoaan. Varsinkin yläkoulussa olisi syytä muodollisuuden sijaan painottaa ymmärtämistä ja sen kehittämistä, tukea oikeanlaisia päättelyprosesseja ja johdattaa oikealla tavalla oikeanlaisiin johtopäätöksiin. Koen, että vasta ymmärryksen jälkeen voidaan keskittyä käyttämään päättelyprosessin muotoilussa matemaattisia symboleja ja tiukempaa täsmällisyyttä.

Tämän tutkielman teon aikana olen havainnut odotettua suurempia eroja aineenopettajien näkemyksissä.Olen huomannut myös sen, miten tärkeää todistaminen loppujen lopuksi on jo yläkoulumatematiikassa. Ei pelkästään siksi, että se vaan kuuluu matematiikkaan, vaan myös siksi, että se todella kehittää oppilasta matemaattisesti - ja auttaa pääsemään niihin tavoitteisiin joihin opetussuunnitelmankin mukaan on tähdättävä.

Viitteet

[1] Lehtinen, Matti (2000). *Matematiikan historiaa.* Matematiikkalehti Solmu. http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/

[2] Reid, David A., Knipping, Christine (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.*

[3] Mäkelä, Ville (2012). *Todistaminen suomalaisessa ja etelä-korealaisessa koulumatematiikassa.* Pro gradu -työ. https://tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/82240/gradu04802.pdf?sequence=1

[4] Lehto, Olli (2005). *Oman tien kulkijat:Veljekset Vilho, Yrjö ja Kalle Väisälä*

[5] Fysiikan, kemian ja matematiikan didaktiikan tutkimusryhmä. Tutkimushankkeet. http://blogs.helsinki.fi/ma-lu/tutkimushankkeet/

[6] Rosen, Kenneth H. (1991) *Discrete Mathematics and Its Applications.*

[7] Rantala, Veikko, Virtanen, Ari (2003) *Logiikan peruskurssi.* Luentomateriaali kurssille Logiikka 1B. Tampereen yliopisto.

[8] Hemmi, Kirsti. Lepik, Madis. Viholainen, Antti. (2011) *Proof and proof-related items in Estonian, Finnish and Swedish Compylsory School Mathematics Curricula.* Toim. Silfverberg, H., Joutsenlahti, J. Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.-15.10.2010. Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden yksikkö. 132-150

[9] Malinen, Paavo. (1997) *Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun.* Teoksessa Räsänen, Kupari, Ahonen, Malinen: Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki instituutti.

[10] Malinen, Paavo. (1996) *Selkeyttä todistamiseen koulumatematiikassa.* Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti Dimensio 5/96. 22-24

[11] Opetushallitus. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.* http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf

[12] Opetushallitus. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.* http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

[13] Knuth, Eric J. *Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof* http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/articles/Knuth%282002%29.pdf

[14] Heinonen, Martti. Luoma, Markus. Mannila, Leena. Rautakorpi-Salmio, Kati. Tapiainen, Timo. Tikka, Tommi. Urpiola, Timo. (2012) *Pii 7. Matematiikka*

[15] Heinonen, Martti. Luoma, Markus. Mannila, Leena. Rautakorpi-Salmio, Kati. Tapiainen, Timo. Tikka, Tommi. Urpiola, Timo. (2013) *Pii 8. Matematiikka*

[16] Heinonen, Martti. Luoma, Markus. Mannila, Leena. Tikka, Tommi. (2009) *Pii 9. Matematiikka*

[17] Alho, Kaarina. Hiltunen, Heikki. Luoma, Markus. Pulli, Arja. (2002) *Kerroin* Kurssit 7-9. Yläasteen matematiikka.

[18] Alho, Kaarina. Koivu, Tuomas. Luoma, Markus. Rantanen, Marko. (2004). *Kantti* Matematiikkaa luokille 7-9.

Viittaukset verkkosivustoihin on tarkistettu 2.5.2016.