TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Ilona Kiiveri

Multiplikatiiviset funktiot

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2015

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
KIIVERI, ILONA: Multiplikatiiviset funktiot
Pro gradu -tutkielma, 28 s.
Matematiikka
Toukokuu 2015

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoituksena on määritellä multiplikatiivinen funktio, mikä on tietynlainen aritmeettinen funktio, sekä esitellä joitakin tällaisia funktioita ja niiden ominaisuuksia. Aluksi määritellään multiplikatiivinen funktio. Seuraavaksi esitellään tekijäfunktiot sigma- ja tau-funktio, Eulerin pii-funktio sekä Möbiuksen funktio. Lisäksi määritellään aritmeettisen funktion f summafunktio F ja Möbiuksen käänteiskaava. Lopuksi määritellään Dirichlet'n tulo (Dirichlet'n konvoluutio) aritmeettisille funktioille ja erityisesti tarkastellaan Dirichlet'n tuloa multiplikatiivisten funktioiden tapauksessa. Tutkielman viimeisessä luvussa esitellään täydellisten lukujen joukko.

Tutkielman päälähteinä on käytetty Thomas Koshyn teosta Elementary number theory with applications sekä Tom M. Apostolin teosta Introduction to analytic number theory.

Sisältö

1 Johdanto

Multiplikatiiviset funktiot ovat tietynlaisia aritmeettisia funktiota, joille on sovelluksia esimerkiksi lukuteoriassa. Tämän tutkielman aluksi määritellään aritmeettinen funktio ja multiplikatiivinen funktio. Kolmannessa luvussa esitellään Eulerin pii-funktio sekä todetaan sen olevan multiplikatiivinen. Määritellään myös funktion f summafunktio F ja tarkastellaan erityisesti Eulerin pii-funktion summafunktiota. Neljännessä luvussa esitellään tekijäfunktiot sigma-funktio ja tau-funktio sekä todetaan niiden olevan multiplikatiivisia. Sigma-funktion avulla voidaan laskea positiivisen luvun n positiivisten tekijöiden summa, ja tau-funktion avulla positiivisen luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärä. Viidennessä luvussa määritellään Möbiuksen funktio sekä todetaan sen olevan multiplikatiivinen. Lisäksi tutkitaan Möbiuksen funktion summafunktiota sekä esitellään Möbiuksen käänteiskaava. Kuudennessa luvussa määritellään Dirichlet'n tulo aritmeettisille funktiolle sekä esitetään joitakin tuloksia kun kyseessä on kahden multiplikatiivisen funktion Dirichlet'n tulo. Lopuksi määritellään täydellisten lukujen joukko ja esimerkkinä multiplikatiivisten funktioden ominaisuuksista esitellään kuinka sigma-funktiota voidaan käyttää täydellisten lukujen tutkimiseen. Lukijalta edellytetään jaollisuuden ja funktion käsitteen hallintaa. Lähteinä on käytetty Tom M. Apostolin teosta Introduction to analytic number theory, Thomas Koshyn teosta Elementary number theory with applications sekä Kenneth H. Rosenin teosta Elementary number theory and its applications.

2 Multiplikatiivinen funktio

Määritellään aluksi aritmeettinen eli lukuteoreettinen funktio.

Määritelmä 2.1. Aritmeettinen funktio on reaali- tai kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla.

Multiplikatiiviset funktiot ovat tietynlaisia aritmeettisia funktioita.

Määritelmä 2.2. Aritmeettinen funktio f on multiplikatiivinen, jos se ei ole identtisesti nolla ja $f(mn) = f(m)f(n)$ aina, kun m ja n ovat keskenään jaottomia.

Määritelmä 2.3. Multiplikatiivinen funktio f on täydellisesti multiplikatiivinen, jos $f(mn) = f(m)f(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m ja n.

Esimerkki 2.1. Funktio $g(n) = n^k$, missä k on vakio, on täydellisesti multiplikatiivinen, koska $g(mn) = (mn)^k = m^k n^k = g(m)g(n)$.

Erityisesti, kun $k = 0$, $g(mn) = (mn)^0 = m^0 n^0 = g(m)g(n)$, missä $m^0 n^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (mn)^0$.

Lause 2.1. *Jos f on multiplikatiivinen funktio, niin $f(1) = 1$.*

Todistus (vrt. [1, s. 34]). Koska f on multiplikatiivinen, $(n, 1) = 1$ kaikille positiivisille kokonaisluvuille n ja $f(n) = f(1)f(n)$. Koska f ei ole identtisesti nolla, on olemassa positiivinen kokonisluku n, jolle $f(n) \neq 0$, siis $f(1) = 1$. □

Multiplikatiivisen funktion arvo mille tahansa positiiviselle luvulle voidaan laskea luvun alkulukuhajotelman avulla.

Lause 2.2. *Olkoon f multiplikatiivinen funktio ja n positiivinen luku. Muodostetaan luvulle n kanoninen alkulukuhajotelma $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$. Nyt*

$$f(n) = f(p_1^{e_1})f(p_2^{e_2}) \cdots f(p_k^{e_k}).$$

Todistus (vrt. [2, s. 344]). Lause voidaan todistaa induktiolla luvun n alkulukuhajotelman muodostavien erisuurten alkulukujen lukumäärän suhteen. Jos $k = 1$, niin $n = p_1^{e_1}$ ja $f(n) = f(p_1^{e_1})$. Tehdään induktio-oletus minkä mukaan lause on tosi mille tahansa luvulle n, jonka kanoninen alkulukuhajotelma muodostuu k alkuluvusta, siis $f(n) = f(p_1^{e_1})f(p_2^{e_2}) \cdots f(p_k^{e_k})$. Olkoon sitten n sellainen luku, jonka alkulukuhajotelma muodostuu $k + 1$ alkuluvusta, siis $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_{k+1}^{e_k+1}$. Koska alkulukuhajotelman muodostavat alkuluvut ovat keskenään jaottomia ja funktio f on multiplikatiivinen, induktio-oletuksen mukaan

$$f(p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k})f(p_{k+1}^{e_k+1}) = f(p_1^{e_1}) \cdots f(p_k^{e_k})f(p_{k+1}^{e_k+1}).$$

Siis induktioperiaatteen nojalla lause pätee kaikille luonnollisille luvuille. □

3 Eulerin phi-funktio

Määritelmä 3.1. Olkoon $m \geq 1$. Eulerin phi-funktio $\phi(m)$ ilmoittaa sellaisten positiivisten lukujen lukumäärän, jotka ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin luku m ja jotka ovat jaottomia luvun m kanssa.

Esimerkki 3.1. $\phi(11) = 10$, sillä luku 11 on alkuluku ja on siis jaollinen ainoastaan itsellään ja luvulla 1 ja niiden vastaluvuilla.

Seuraavaksi todistetaan apulause, joka osoittaa, että phi-funktion arvo voidaan laskea edeltävän esimerkin tapaan kaikille alkuluvuille.

Apulause 3.1. *Positiivinen luku p on alkuluku, jos ja vain jos $\phi(p) = p - 1$.*

Todistus (vrt. [2, s. 331]). Koska p on alkuluku, kaikki lukua p pienemmät positiiviset luvut ovat jaottomia luvun p kanssa. On siis $p - 1$ lukua p pienempää positiivista lukua, jotka ovat jaottomia luvun p kanssa.
Oletetaan sitten, että p ei ole alkuluku. Tällöin on olemassa täsmälleen $p - 1$ lukua p pienempää positiivista lukua. Olkoon $1 < d < p$ siten, että $d \mid p$. Siis luku d jakaa luvun p. Nyt siis $\phi(p) < p - 1$, mikä on ristiriidassa alkuperäisen väitteen kanssa. Siis luvun p on oltava alkuluku. □

Todistetaan vielä toinen apulause, jonka avulla voidaan laskea phi-funktion arvo alkuluvun potensseille.

Apulause 3.2. *Olkoon p alkuluku ja e positiivinen kokonaisluku. Tällöin $\phi(p^i) = p^i - p^{i-1}$.*

Todistus (vrt. [2, s. 344]). Apulauseen 2.2 mukaan $\phi(p) = p - 1$. Kun $i > 1$, kaikki lukua p^i pienemmät luvut, jotka eivät ole luvun p monikertoja, ovat jaottomia luvun p kanssa. Luvun p monikerrat voidaan luetella seuraavasti: $1p, 2p, \ldots, p^{i-1}p$. Siis lukua p^i pienempiä luvun p monikertoja on täsmälleen p^{i-1} kappaletta. Siis $\phi(p^i) = p^i - p^{i-1}$. Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\phi(p^i) = p^i - p^{i-1} = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

. □

Esimerkki 3.2. $\phi(125) = \phi(5^3) = 5^3 - 5^{3-1} = 125 - 25 = 100$.

Edellä laskettiin phi-funktion arvo alkuluvuille ja niiden potensseille. Seuraavaksi todistetaan, että phi-funktio on multiplikatiivinen, minkä jälkeen voidaan muodostaa lauseke, jonka avulla funktion arvo voidaan laskea mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle.

Todistetaan aluksi apulause.

Apulause 3.3. *Olkoot n ja m keskenään jaottomia positiivisia lukuja, ja olkoon r mikä tahansa kokonaisluku. Luvut r, $m+r$, $2m+r$, $\dots$, $(n-1)m+r$ ovat kongruentteja modulo n lukujen* 0, 1, 2, $\dots$, $(n-1)$ *kanssa jossakin järjestyksessä.*

Todistus (vrt. [2, s. 347]). Riittää, kun todistetaan, että luvuista r, $m+r$, $2m+r$, $\dots$,$(n-1)m+r$ mitkään kaksi eivät ole kongruentteja modulo n. Oletetaan, että $km+r \equiv lm+r (\mathrm{mod}\, n)$, missä $0 \leq k,l < n$. Siis $km \equiv lm (\mathrm{mod}\, n)$. Mutta koska luvut m ja n ovat keskenään jaottomia, on oltava $k \equiv l (\mathrm{mod}\, n)$. Koska k ja l ovat nyt pienimmät jakojäännökset modulo n, on oltava $k = l$.
Jos $k \neq l$, niin $km+r \not\equiv lm+r (\mathrm{mod}\, n)$. Siis millään kahdella luvulla joukossa r, $m+r$, $2m+r$, $\dots$,$(n-1)m+r$ ei ole samaa jakojäännöstä. Siis joukossa r, $m+r$, $2m+r$, $\dots$,$(n-1)m+r$ on täsmälleen n lukua ja niiden pienimmät jakojäännökset modulo n ovat luvut 0, 1, $\dots$, $(n-1)$ jossakin järjestyksessä. □

Lause 3.4. *Funktio ϕ on multiplikatiivinen.*

Todistus (vrt. [2, s. 348]). Olkoot m ja n keskenään jaottomia positiivisia lukuja. Osoitetaan, että $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. Järjestetään luvut $1,2,\dots,mn$ taulukkoon, johon tulee m riviä ja n saraketta:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & m+1 & 2m+1 & \dots & (n-1)m+1 \\
2 & m+2 & 2m+2 & \dots & (n-1)m+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r & m+r & 2m+r & \dots & (n-1)m+r \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m & 2m & 3m & \dots & nm.
\end{array}$$

Olkoon r positiivinen luku ja $\leq m$ siten, että $(r,m) > 1$. Osoitetaan, että ylläolevan taulukon rivillä r ei ole yhtään lukua, joka olisi keskenään jaoton luvun mn kanssa.
Olkoon $d = (r,m)$. Nyt siis $d \mid r$ ja $d \mid m$, joten $d \mid km+r$ jokaisella luvulla k. Luku d on siis jokaisen rivillä r olevan luvun tekijä.

Koska $d = (r,m) > 1$, mikään rivin r luvuista ei ole keskenään jaoton luvun m ja siten myös luvun mn kanssa. Siis rivillä r voi olla luvun mn kanssa keskenään jaottomia lukuja ainoastaan, jos $(r,m) = 1$. Funktion ϕ määritelmän mukaan on $\phi(m)$ sellaista lukua $r \in \{1,2,\dots,m\}$, että $(r,m) = 1$. Taulukossa on siis $\phi(m)$ riviä, joilla voi olla luvun mn kanssa jaoton luku.
Tarkastellaan riviä r, missä $(r,m) = 1$. Edellä todistetun apulauseen 3.3 mukaan rivin r lukujen $r, m+r, 2m+r, \dots, (n-1)m+r$ pienimmät jakojäännökset modulo n ovat $0,1,2,\dots,(n-1)$, joista $\phi(n)$ ovat keskenään jaottomia luvun n kanssa. Siis täsmälleen $\phi(n)$ lukua rivillä r on keskenään jaottomia luvun n ja siten myös luvun mn kanssa.
Koska taulukossa on $\phi(m)$ riviä joilla on luvun mn kanssa keskenään jaottomia lukuja ja jokaisella rivillä on $\phi(n)$ luvun n kanssa keskenään jaotonta lukua, taulukossa on $\phi(m)\phi(n)$ lukua mn pienempää ja luvun mn kanssa keskenään jaotonta lukua. Siis $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

□

Kun tiedetään, että ϕ-funktio on multiplikatiivinen, voidaan kanonisen alkulukuhajotelman avulla luoda kaava, jonka avulla voidaan laskea ϕ-funktion arvo millä tahansa positiivisella kokonaisluvulla n.

Lause 3.5. *Olkoon $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ luvun n kanoninen alkulukuhajotelma, kun n on positiivinen. Tällöin*

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p^1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p^k}\right).$$

Todistus (vrt. [2, s. 349]). Koska ϕ on multiplikatiivinen funktio, lauseen 2.2 nojalla

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= \phi(p_1^{e_1})\phi(p_2^{e_2})\ldots\phi({p_k}^{e_k}) \\
&= p_1^{e_1}(1 - \frac{1}{p^1})p_2^{e_2}(1 - \frac{1}{p^2})\cdots {p_k}^{e_k}(1 - \frac{1}{p^k}) \\
&= {p_1}^{e_1}\dot{p}_2^{e_2}\ldots {p_k}^{e_k}(1 - \frac{1}{p^1})(1 - \frac{1}{p^2})\cdots(1 - \frac{1}{p^k}) \\
&= n(1 - \frac{1}{p^1})(1 - \frac{1}{p^2})\cdots(1 - \frac{1}{p^k}).
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.3. Lasketaan edellisen lauseen avulla $\phi(76)$:

$$\begin{aligned}
\phi(76) &= \phi(2^2)\cdot\phi(19^1) \\
&= 2^2(1 - \frac{1}{2})\cdot 19^1(1 - \frac{1}{19}) \\
&= 2^2\cdot 19^1(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{19}) \\
&= 76(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{19}) \\
&= 36.
\end{aligned}$$

Määritellään seuraavaksi aritmeettisen funktion summafunktio.

Määritelmä 3.2. Olkoon f aritmeettinen funktio. Tällöin

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

ilmaisee funktion f arvojen summan kaikilla positiivisilla luvun n jakajilla. Funktion F sanotaan olevan funktion$f$ summafunktio.

Lause 3.6. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin $\sum_{d|n}\phi(d) = n$.*

Todistus (vrt. [3, s. 226]). Jaetaan luvut $1, 2, \ldots, n$ erillisiin ryhmiin siten, että luku k laitetaan ryhmään C_d, jos luku d on lukujen n ja k suurin yhteinen tekijä. Nyt luku k on ryhmässä C_d, missä $(k, n) = d$, jos ja vain jos $(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}) = 1$. Ryhmässä C_d ovat siis ne kokonaisluvut, jotka eivät ylitä lukua $\frac{n}{d}$ ja ovat suhteellisia alkulukuja luvun $\frac{n}{d}$ kanssa. Huomataan, että ryhmässä C_d on $\phi(\frac{n}{d})$ kokonaislukua. Koska ryhmät ovat erillisiä ja jokainen luku k on täsmälleen yhdessä ryhmässä, kaikkien ryhmien alkioiden yhteenlaskettu lukumäärä on täsmälleen luku n. Siis

$$n = \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}).$$

Koska d käy läpi kaikki positiiviset kokonaisluvut, jotka jakavat luvun n, niin myös $\frac{n}{d}$ käy läpi kaikki positiiviset kokonaisluvut, jotka jakavat luvun n. Siis

$$n = \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \phi(d).$$

□

Esimerkki 3.4. Luvun 16 jakajat ovat luvut $1, 2, 4, 8$ ja 16. Nyt luvun 16 jakajille laskettujen phi-funktion arvojen summa on 16. Siis

$$\sum_{d|16} \phi(d) = 16,$$

sillä $\phi(1) + \phi(2) + \phi(4) + \phi(8) + \phi(16) = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16$.

4 Tekijäfunktiot

Määritelmä 4.1. Olkoon n positiivinen luku. Sigma-funktio σ on funktio, jonka arvo $\sigma(n)$ on luvun n positiivisten tekijöiden summa, siis

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Esimerkki 4.1. $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 = 6$

Alkulukujen tapauksessa $\sigma(p) = 1 + p$, koska alkuluvuilla on vain kaksi positiivista tekijää, luku 1 ja alkuluku p. Käänteisesti jos $\sigma(p) = 1 + p$, niin p on alkuluku.

Määritelmä 4.2. Olkoon n positiivinen luku. Tau-funktion arvo $\tau(n)$ on luvun n positiivisten jakajien lukumäärä, siis

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Esimerkki 4.2. $\tau(6) = 3$ sillä luvun 6 jakajia on kolme kappaletta $1, 2$, ja 3.

Todistetaan seuraavaksi, että sigma- ja tau-funktiot ovat multiplikatiivisia. Todistetaan ensin, että multiplikatiivisen funktion summafunktio on multiplikatiivinen.

Lause 4.1. *Jos f on multiplikatiivinen funktio, niin myös $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ on multiplikatiivinen funktio.*

Todistus (vrt. [2, s. 355]). Olkoot m ja n keskenään jaottomia positiivisia lukuja. Todistamme, että $F(mn) = F(m)F(n)$. Määritelmän mukaisesti

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d).$$

Koska lukujen m ja n ainoa yhteinen tekijä on luku 1, jokainen luvun mn jakaja d on jokin tulo, jonka tekijöinä ovat jokin luvun m jakaja d_1 ja luvun n jakaja d_2. Koska luvut m ja n ovat keskenään jaottomia, myös niiden jakajat d_1 ja d_2 ovat keskenään jaottomia. Näin ollen

$$F(mn) = \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1 d_2)$$

Koska f on multiplikatiivinen, $f(d_1 d_2) = f(d_1) f(d_2)$.

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} f(d_1) \sum_{d_2|n} f(d_2) \\ &= F(m)F(n) \end{aligned}$$

funktion F määritelmän mukaisesti. Siis funktio F on multiplikatiivinen.

$\square$

Vakiofunktio $f(n) = 1$ ja identiteettifunktio $g(n) = n$ ovat molemmat multiplikatiivisia funktioita. Vakio- ja identiteettifunktioiden multiplikatiivisuudesta ja edellisestä lauseesta seuraa suoraan, että tau- ja sigma-funktiot ovat multiplikatiivisia.

Lause 4.2. *Tau-funktio $\tau(n)$ ja sigma-funktio $\sigma(n)$ ovat multiplikatiivisia.*

Todistus (vrt. [2, s. 356]). Kun tiedetään, että vakiofunktio on multiplikatiivinen voidaan sen ja lauseen 4.1 nojalla kirjoittaa

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} f(d).$$

Kun tiedetään, että identiteettifunktio on multiplikatiivinen, voidaan sen ja lauseen 4.1 nojalla kirjoittaa

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} g(d).$$

$\square$

Edellisessä luvussa muodostettiin lauseke phi-funktion laskemiseksi alkuluvun potenssille. Muodostetaan seuraavaksi lausekkeet sigma- ja tau-funktioiden arvojen laskemiseksi alkuluvun potenssille. Määritellään aluksi geometrinen jono ja esitetään seuraavan apulauseen todistuksessa tarvittavan geometrisen osasumman laskeminen esimerkin avulla.

Määritelmä 4.3. Geometrinen jono on sellainen lukujono, missä jokainen termi jonon ensimmäistä termiä lukuunottamatta saadaan kertomalla edellinen termi vakiolla. Geometrisessä jonossa peräkkäisten termien suhde on vakio.

Esimerkki 4.3 (vrt. [3, s. 11])**.** Lasketaan geometrisen jonon $n+1$ ensimmäisen termin summa, eli osasumma $S_n = \sum_{j=0}^{n} ar^j$. Kerrotaan osasumman lauseke puolittain luvulla r ja sievennetään lauseke

$$\begin{aligned}
rS_n &= r\sum_{j=0}^{n} ar^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} ar^k + (ar^{n+1} - a) \\
&= S + (ar^{n+1} - a).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$rS_n - S_n = (ar^{n+1} - a).$$

Kun $r \neq 1$, ratkaisuksi saadaan

$$S_n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Jos $r = 1$,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} ar^j = \sum_{j=0}^{n} a = (n+1)a.$$

Seuraavassa apulauseessa lasketaan sigma- ja tau-funktion arvo alkuluvun potenssille.

Apulause 4.3. *Olkoon p alkuluku ja a positiivinen kokonaisluku. Tällöin*

$$\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

ja

$$\tau(p^a) = a + 1.$$

Todistus (vrt. [2, s. 357]). Luvun p^a jakajat ovat luvut $1, p, p^2, \cdots, p^{a-1}, p^a$. Siis luvulla p^a on täsmälleen $a + 1$ jakajaa. Siis

$$\tau(p^a) = a + 1.$$

Tarkastellaan luvun p^a jakajien summaa. Huomataan, että $\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{a-1} + p^a$. Jakajat muodostavat geometrisen sarjan, joten summa voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}.$$

□

Nyt voidaan edellistä apulausetta käyttäen muodostaa lausekkeet funktioiden arvon laskemiseksi positiivisen kokonaisluvun n alkulukuhajotelmalle.

Lause 4.4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $n = {p_1}^{e_1} {p_2}^{e_2} \cdots {p_k}^{e_k}$ luvun n alkulukuhajotelma. Tällöin*

$$\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$$

ja

$$\sigma(n) = \frac{{p_1}^{e_1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{{p_2}^{e_2} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{{p_k}^{e_k} - 1}{p_k - 1}.$$

Todistus (vrt. [2, s. 357]). Tiedetään, että tau-funktio on multiplikatiivinen. Apulauseen4.3 nojalla

$$\begin{aligned}\tau(n) &= \tau({p_1}^{e_1}) \cdot \tau({p_2}^{e_2}) \cdots \tau({p_k}^{e_k}) \\ &= (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1).\end{aligned}$$

Tiedetään, että sigma-funktio on multiplikatiivinen. Apulauseen 4.3nojalla

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma({p_1}^{e_1}) \cdot \sigma({p_2}^{e_2}) \cdots \sigma({p_k}^{e_k}) \\ &= \frac{{p_1}^{e_1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{{p_2}^{e_2} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{{p_k}^{e_k} - 1}{p_k - 1}.\end{aligned}$$

Voidaan kirjoittaa

$$\tau(n) = \prod_{1}^{k} (e_i + 1)$$

ja

$$\sigma(n) = \prod_{i}^{k} \frac{{p_i}^{e_i} - 1}{p_i - 1}.$$

□

Esimerkki 4.4. Laske sigma- ja tau-funktion arvo luvulle 132.
Luvun 132 alkulukuhajotelma on $132 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^1$, joten

$$\sigma(132) = \sigma(2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^1) = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$$

ja

$$\tau(132) = \tau(2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^1) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^1 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{11^1 - 1}{11 - 1} = 3.$$

5 Möbiuksen funktio

Tässä luvussa esitellään Möbiuksen funktio μ ja todistetaan, että se on multiplikatiivinen. Lisäksi tarkastellaan Möbiuksen funktion summafunktiota ja esitetään Möbiuksen käänteiskaava.

5.1 Möbiuksen funktion määritelmä ja multiplikatiivisuus

Määritelmä 5.1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin Möbiuksen funktion μ arvo on

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{jos } n = 1 \\ 0 & \text{jos } p^2 \mid n \text{ jollekin alkuluvulle } p \\ (-1)^k & \text{jos } n = p_1 p_2 \dots p_k, \text{ missä alkuluvut } p_i \text{ ovat erisuuria.} \end{cases}$$

Möbiuksen funktio antaa jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle arvon -1, 0, tai 1. Jos luvun n kanoninen alkulukuhajotelmaan sisältyy jonkin alkuluvun p neliö, Möbiuksen funktion arvo luvulle n on $\mu(n) = 0$. Jos luvun n alkulukuhajotelma ei sisällä minkään alkuluvun p neliötä, Möbiuksen funktion arvo luvulle n on $\mu(n) = (-1)^k$, missä k on alkulukuhajotelman alkulukujen määrä. Luvun 1 Möbiuksen funktion arvo on $\mu(1) = 1$.

Esimerkki 5.1. Lasketaan Möbiuksen funktion arvo luvuille 132, 1976 ja 6.
Luvun 132 alkulukuhajotelma sisältää alkuluvun neliön 2^2, joten

$$\mu(132) = \mu(2^2 \cdot 3 \cdot 11) = 0.$$

Luvun 1976 alkutekijähajotelma sisältää luvun $2^3 = 2^2 \cdot 2$. Siis $2^2 \mid 1976$, joten

$$\mu(1976) = \mu(2^3 \cdot 13 \cdot 19) = 0.$$

Luvun 6 alkulukuhajotelma on neliövapaa, joten

$$\mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = (-1)^2 = 1.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että Möbiuksen funktio μ on multiplikatiivinen.

Lause 5.1. *Möbiuksen funktio μ on multiplikatiivinen.*

Todistus (vrt. [3, s. 253]). Olkoot m ja n keskenään jaottomia positiivisia kokonaislukuja. Osoitetaan että $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.
Käsitellään ensin tapaus, jossa $m = 1$ tai $n = 1$. Jos $m = 1$, $\mu(mn) = \mu(1 \cdot n) = \mu(n)$ ja $\mu(m)\mu(n) = \mu(1)\mu(n) = 1 \cdot \mu(n) = \mu(n)$. Siis $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$. Vastaavasti tapauksessa, jossa $n = 1$, $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.
Oletetaan sitten, että ainakin toinen luvuista n ja m on jaollinen alkuluvun neliöllä. Tällöin myös tulo mn on jaollinen kyseisen alkuluvun neliöllä. Siis funktion μ määritelmän mukaisesti $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n) = 0$.

Käsitellään lopuksi tapaus, jossa kummankaan luvun m tai n alkulukuhajotelma ei sisällä alkuluvun neliötä. Oletetaan, että $m = p_1 p_2 p \cdots p_s$, missä $p_1, p_2 \cdots, p_s$ ovat erisuuria alkulukuja, ja $n = q_1 q_2 \cdots q_t$, missä $q_1, q_2, \cdots, q_t$ ovat erisuuria alkulukuja. Koska m ja n ovat keskenään jaottomia, Mikään alkuluku ei voi esiintyä molempien alkulukuhajotelmassa. Tulo mn on siis täsmälleen $s + t$ erisuuren alkuluvun tulo. Tästä seuraa, että $\mu(mn) = (-1)^{s+t} = (-1)^s(-1)^t = \mu(m)\mu(n)$. □

5.2 Möbiuksen funktion summafunktio ja käänteiskaava

Tarkastellaan seuraavaksi Möbiuksen funktion summafunktiota.

Lause 5.2. *Möbiuksen summafunktion $F(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ arvo positiiviselle kokonaisluvulle n on*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \textit{jos } n = 1; \\ 0 & \textit{jos } n > 1. \end{cases}$$

Todistus (vrt. [3, s. 253]). Olkoon $n = 1$. Tällöin

$$F(1) = \sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1.$$

Olkoon sitten $n > 1$. Lauseessa 4.1 osoitettiin, että multiplikatiivisen funktion summafunktio on myös multiplikatiivinen. Oletetaan, että p on alkuluku ja k on positiivinen kokonaisluku. Nyt

$$F(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \cdots + \mu(p^k) = 1 + (-1) + 0 + \cdots + 0 = 0,$$

koska $\mu(p^i) = 0$ aina, kun $i \geq 2$. Olkoon nyt n positiivinen kokonaisluku siten, että $n \geq 1$. Olkoon $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t}$ luvun n alkulukuhajotelma. Koska F on multiplikatiivinen, $F(n) = F(p_1^{a_1}) F(p_2^{a_2}) \cdots F(p_t^{a_t})$. Koska jokaisella $p_t^{a_t}$ $\mu(p_t^{a_t}) = 0$, niin $F(n) = 0$. □

Esimerkki 5.2. Lasketaan Möbiuksen funktion summafunktion arvo luvulle 76 ja luvulle 6.
Luvun 76 tekijät ovat 1, 2, $4 = 2^2$, 19, $38 = 2 \cdot 19$ ja $76 = 2^2 \cdot 19$. Siis

$$\begin{aligned} \sum_{d|76} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(2) + \mu(4) + \mu(19) + \mu(2 \cdot 19) + \mu(2^2 \cdot 19) \\ &= 1 + (-1) + 0 + (-1) + (-1)^2 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luvun 6 tekijät ovat 1, 2, 3 ja $6 = 2 \cdot 3$. Siis

$$\begin{aligned} \sum_{d|6} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(2 \cdot 3) \\ &= 1 + (-1) + (-1) + (-1)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Seuraavassa lauseessa esitetään Möbiuksen käänteiskaava. Käänteiskaavan avulla voidaan ilmaista funktion f arvoja funktion f summafunktion F arvojen avulla.

Lause 5.3. *(Möbiuksen käänteiskaava) Oletetaan, että f on aritmeettinen funktio ja F on funktion f summafunktio siten, että*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Tällöin kaikille positiivisille kokonaisluvuille n,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Todistus (vrt. [3, s. 254]). Funktion f summafunktion F määritelmän mukaan korvataan lauseke $F(\frac{n}{d})$ lausekkeella $\sum_{e|(\frac{n}{d})} f(e)$. Siis

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} F(\frac{n}{d}) &= \sum_{d|n}\left(\mu(d)\sum_{e|(\frac{n}{d})} f(e)\right)\\ &= \sum_{d|n}\left(\sum_{e|(\frac{n}{d})} \mu(d)f(e)\right).\end{aligned}$$

Huomataan, että kokonaislukuparien joukko (d,e), missä $d \mid n$ ja $e \mid (\frac{n}{d})$, on sama kuin kokonaislukuparien joukko (d,e), missä $e \mid n$ ja $d \mid (\frac{n}{e})$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\left(\sum_{e|(\frac{n}{d})} \mu(d)f(e)\right) &= \sum_{e|n}\left(\sum_{d|(\frac{n}{e})} f(e)\mu(d)\right)\\ &= \sum_{e|n}\left(f(e)\sum_{d|(\frac{n}{e})} \mu(d)\right).\end{aligned}$$

Lauseen 5.2 mukaan $\sum_{d|(\frac{n}{e})} \mu(d) = 0$ kaikissa muissa tapauksissa paitsi silloin, jos $\frac{n}{e} = 1$. Kun $\frac{n}{e} = 1$, eli $n = e$, summan arvoksi saadaan 1. Siis

$$\sum_{e|n}\left(f(e)\sum_{d|(\frac{n}{e})} \mu(d)\right) = f(n)\cdot 1 = f(n).$$

□

Kun luku d käy läpi kaikki luvun n positiiviset tekijät, niin samoin myös luku $(\frac{n}{d})$ käy läpi kaikki luvun n positiiviset tekijät. Tästä seuraa, että käänteiskaava voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) F(d).$$

Funktion f summafunktio $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ ilmaisee summafunktion $F(n)$ funktion f avulla, kun taas käänteiskaava ilmaisee funktion f summafunktion $F(n)$ avulla.

Möbiuksen funktion ja Eulerin phi-funktion välinen yhteys voidaan ilmaista käänteiskaavaa apuna käyttäen. Seuraavassa lauseessa muodostetaan käänteiskaavan avulla aritmeettinen lauseke phi-funktiolle.

Lause 5.4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin*

$$\phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Todistus (vrt. [2, s. 387]). Lauseen 3.6 mukaan

$$n = \sum_{d|n} \phi(d).$$

Tästä seuraa, että Möbiuksen käänteiskaavan mukaan

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)(\frac{n}{d}).$$

□

Esimerkki 5.3. Lasketaan $\phi(6)$ ja $\phi(14)$ käyttäen edellisen lauseen kaavaa $n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$. Luvun 6 tekijät ovat $1, 2, 3$ ja 6.

$$\begin{aligned} 6\sum_{d|6} \frac{\mu(d)}{d} &= 6\mu(1) + 3\mu(2) + 2\mu(3) + 1\mu(6) \\ &= 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 \\ &= 2 = \phi(6). \end{aligned}$$

Luvun 14 tekijät ovat $1, 2, 7$ ja 14.

$$\begin{aligned} 14\sum_{d|14} \frac{\mu(d)}{d} &= 14\mu(1) + 7\mu(2) + 2\mu(7) + 1\mu(14) \\ &= 14 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 \\ &= 6 = \phi(14). \end{aligned}$$

Lauseessa 4.1 osoitettiin, että multiplikatiivisen funktion f summafunktio F on myös multiplikatiivinen. Möbiuksen käänteiskaavan avulla voimme todistaa lauseelle 4.1 käänteisen väitteen. Seuraava lause osoittaa, että jos aritmeettisen funktion f summafunktio F on multiplikatiivinen, niin myös funktio f on multiplikatiivinen.

Lause 5.5. *Olkoon f aritmeettinen funktio ja $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ sen summafunktio. Nyt jos F on multiplikatiivinen, niin myös f on multiplikatiivinen.*

Todistus (vrt. [3, s. 255]). Oletetaan, että m ja n ovat keskenään jaottomia positiivisia kokonaislukuja. Osoitetaan, että $f(mn) = f(m)f(n)$. Luvut m ja n ovat keskenään jaottomia, joten jokainen luvun mn tekijä d voidaan kirjoittaa jonkin luvun m tekijän d_1 ja jonkin luvun n tekijän d_2 tulona. Siis jos $d = d_1 d_2$, niin $d_1 \mid m$ ja $d_2 \mid n$ ja $(d_1, d_2) = 1$. Tiedetään, että μ ja F ovat multiplikatiivisia. Käyttämällä Möbiuksen käänteiskaavaa

$$\begin{aligned} f(mn) &= \sum_{d|mn} \mu(d) F\Big(\frac{mn}{d}\Big) \\ &= \sum_{d_1|m, d_2|n} \mu(d_1 d_2) F\Big(\frac{mn}{d_1 d_2}\Big) \\ &= \sum_{d_1|m, d_2|n} \mu(d_1)\mu(d_2) F\Big(\frac{m}{d_1}\Big) F\Big(\frac{n}{d_2}\Big) \\ &= \sum_{d_1|m} \mu(d_1) F\Big(\frac{m}{d_1}\Big) \cdot \sum_{d_2|n} \mu(d_2) F\Big(\frac{n}{d_2}\Big) \\ &= f(m)f(n). \end{aligned}$$

□

Todistetaan seuraavaksi, että Möbiuksen käänteiskaavalle käänteinen väite on myös tosi.

Lause 5.6. *Olkoon F ja f aritmeettisia funktioita siten, että*

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

Tällöin $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Todistus (vrt. [2, s. 388]). Funktion f määritelmän mukaan

$$f(d) = \sum_{d'|d} \mu(d') F\Big(\frac{d}{d'}\Big),$$

siis

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} \sum_{d'|d} \mu(d') F\Big(\frac{d}{d'}\Big).$$

Olkoon $\frac{d}{d'} = k$ ja $\frac{n}{d} = l$, tällöin $d = kd'$ ja $n = ld = kld'$. Siis yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} f(d) &= \sum_{d|n} \sum_{kd'=d} \mu(d') F(k) \\ &= \sum_{kd'|n} \mu(d') F(k) \\ &= \sum_{k|n} F(k) \Bigg[\sum_{d'|(\frac{n}{k})} \mu(d') \Bigg]. \end{aligned}$$

Nyt lauseesta 5.2 seuraa, että $\sum_{d'|(\frac{n}{k}} \mu(d')$ on 1 silloin, kun $n = k$, ja 0 muulloin. Siis yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} f(d) &= F(n) \cdot (1) \\ &= F(n).\end{aligned}$$

Siis $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. □

6 Dirichlet'n tulo

Tässä luvussa määitellään Dirichlet'n tulo (eli Dirichlet'n konvoluutio) ja tarkastellaan joitain sen ominaisuuksia. Dirichlet'n tulon avulla voidaan tutkia aritmeetisia funktioita. Koska multiplikatiiviset funktiot ovat aritmeettisia funktioita, Dirichlet'n tulo on erityisesti tapa tutkia multiplikatiivisia funktioita.

6.1 Dirichlet'n tulon määritelmä ja käänteisfunktio

Määritelmä 6.1. Jos f ja g ovat aritmeettisia funktioita, niiden Dirichlet'n tulo on aritmeettinen funktio h,

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dirichlet'n tulossa kerrotaan keskenään aritmeettinen funktio f ja aritmeettinen funktio g, ja saadaan lopputulokseksi kolmas aritmeettinen funktio h. Dirichlet'n tulo voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$f * g = h \text{ tai } (f * h)(n) = h(n).$$

Lasketaan siis yhteen kaikki sellaiset termit, jotka saadaan kertomalla funktiot f ja g keskenään käyttäen sellaisia funktioiden arvoja, joiden tulo on n, ja saadaan lopputuloksena kolmannen funktion h arvo luvulla n.Voidaan siis kirjoittaa

$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a)g(b),$$

missä a ja b käyvät läpi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut, joiden tulo on n.

Esimerkki 6.1 ([1, s. 29]). Edellisessä luvussa lauseessa 3.6 phi-funktiolle muodostettu summalauseke

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)(\frac{n}{d})$$

on muodoltaan vastaava kuin Dirichlet'n tulo.

Määritelmä 6.2. Identiteettifunktio on sellainen funktio I, jolle

$$I(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & \text{jos } n = 1; \\ 0 & \text{jos } n > 1. \end{cases}$$

Lause 6.1. *Kaikille aritmeettisille funktioille f ja identiteettifunktiolle I on voimassa*

$$I * f = f * I = f.$$

Todistus (vrt. [1, s. 30]). Lasketaan Dirichlet'n tulo funktioille f ja I,

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \left[\frac{d}{n}\right] = f(n),$$

sillä $\left[\frac{d}{n}\right] = 0$ jos $d < n$. Vastaavasti saadaan, että $I * f = f$. □

Seuraavassa lauseessa määritellään käänteisfunktio Dirichlet'n tulon suhteen.

Lause 6.2. *Jos f on aritmeettinen funktio, jolle $f(1) \neq 0$, on olemssa yksikäsitteinen aritmeettinen funktio f^{-1} siten, että*

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I.$$

Tällaista funktiota f kutsutaan käänteisfunktioksi Dirichlet'n tulon suhteen. Käänteisfunktio f^{-1} saadaan rekursiivisesti

$$f^{-1} = \frac{1}{f(1)},$$

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \text{ kun } n > 1.$$

Todistus (vrt. [1, s. 30]). Olkoon f aritmeettinen funktio. Osoitetaan, että yhtälöllä $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ on yksikäsitteinen ratkaisu funktion arvolle $f^{-1}(n)$. Kun $n = 1$,

$$(f * f^{-1})(1) = I(1),$$

mikä saadaan muotoon

$$f(1) f^{-1}(1) = 1.$$

Koska $f(1) \neq 0$, yhtälölle on olemassa ainoastaan yksi ratkaisu,

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}.$$

Oletetaan sitten, että funktion arvot $f^{-1}(k)$ on määritelty yksikäsitteisesti kaikille luvuille $k < n$. Nyt tulee ratkaista yhtälö $(f * f^{-1})(n) = I(n)$, mikä voidaan kirjoittaa

$$\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0.$$

Tämä voidaan vielä kirjoittaa muotoon

$$f(1) f^{-1}(n) + \sum_{d|n, d<n} f\left(\frac{n}{d} f^{-1}(d) = 0.\right.$$

Koska induktio-oletuksen mukaan funktion arvot $f^{-1}(d)$ tunnetaan kaikille jakajille $d < n$, on olemassa yksikäsitteinen arvo funktiolle $f^{-1}(n)$,

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d),$$

koska $f(1) \neq 0$. Käänteisfunktion olemassaolo ja ykksikäsitteisyys on täten todistettu. □

Esimerkki 6.2 (kts. [1, s. 31]). Yksikköfunktio u on sellainen aritmeettinen funktio, jolle $u(n) = 1$ kaikilla luvuilla n. Lause 5.2 osoittaa, että

$$\sum_{d|n} \mu(d) = I(n).$$

Tämä voidaan ilmaista Dirichlet'n tulona,

$$\mu * u = I.$$

Tällöin funktiot u ja μ ovat toistensa käänteisfunktioita Dirichlet'n tulon suhteen, siis $u = \mu^{-1}$ ja $\mu = u^{-1}$.

6.2 Dirichlet'n tulo ja multiplikatiiviset funktiot

Tarkastellaan seuraavaksi kahden multiplikatiivisen funktion Dirichlet'n tuloa. Osoitetaan, että kahden multiplikatiivisen funktion Dirichlet'n tulo on multiplikatiivinen.

Lause 6.3. *Jos f ja g ovat multiplikatiivisia funktioita, myös niiden Dirichlet'n tulo on multiplikatiivinen.*

Todistus (vrt. [1, s. 35]). Olkoon $f * g = h$. Olkoot m ja n kaksi keskenään jaotonta positiivista kokonaislukua. Tällöin

$$h(mn) = \sum_{c|mn} f(c) g\Big(\frac{mn}{c}\Big).$$

Jokainen luvun mn jakaja c voidaan ilmaista kahden luvun a ja b tulona siten, että $c = ab$, missä $a \mid m$ ja $b \mid n$, ja $(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = 1$ ja myös $(a, b) = 1$. Siis jokaista luvun mn jakajaa c vastaa jokin tulo ab. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{a|m, b|n} f(ab) g\Big(\frac{mn}{ab}\Big) \\ &= \sum_{a|m, b|n} f(a) f(b) g\Big(\frac{m}{a}\Big) g\Big(\frac{n}{b}\Big) \\ &= \sum_{a|m} f(a) g\Big(\frac{m}{a}\Big) \sum_{b|n} g\Big(\frac{n}{b}\Big) \\ &= h(m) h(n). \end{aligned}$$

□

Esimerkki 6.3. Tarkastellaan esimerkkinä jälleen lauseessa 3.6 phi-funktiolle muodostetua lauseketta

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) (\frac{n}{d}).$$

Tiedetään, että Möbiuksen funktio μ ja vakiofunktio ovat multiplikatiivisia, joten edellisen lauseen perusteella voitaisiin päätellä, että myös ϕ-funktio on multiplikatiivinen. Aiemmin on jo osoitettu ϕ-funktion olevan multiplikatiivinen.

Dirichlet'n tuloa voidaan siis käyttää funktioiden multiplikatiivisuuden tutkimiseen. Samaan tapaan kuin edellä, osoitetaan seuraavasa lauseessa, että jos funktio g ja funktioiden f ja g tulo on multiplikatiivinen, niin myös funktio f on multiplikatiivinen.

Lause 6.4. *Jos funktio g ja Dirichlet'n tulo $f * g$ ovat molemmat multiplikatiivisia, niin myös funktio f on multiplikatiivinen.*

Todistus (vrt. [1, s. 35]). Oletetaan aluksi, että f ei ole multiplikatiivinen ja oletetaan, että myöskään $f * g$ ei ole multiplikatiivinen. Olkoon $h = f * g$. Koska f ei ole multiplikatiivinen, on olemassa sellaiset keskenään jaottomat positiiviset kokonaisluvut m ja n, joille

$$f(mn) \neq f(m)f(n).$$

Valitaan tällainen lukupari m ja n siten, että tulo mn on mahdollisimman pieni. Jos $mn = 1$, niin $f(1) \neq f(1)f(1)$, joten $f(1) \neq 1$. Nyt $h(1) = f(1)g(1) = f(1) \neq 1$, joten h ei ole multiplikatiivinen. Jos $mn > 1$ niin $f(ab) = f(a)f(b)$ kaikille keskenään jaottomille positiivisille koknaislvuille a ja b siten, että $ab < mn$. Seuraavaksi edetään samaan tapaan kuin edellisen lauseen todistuksessa, mutta jaetaan funktion h arvon määrittelevä summa siten, että $a = m$ ja $b = n$. Saadaan

$$\begin{aligned}
h(mn) &= \sum_{a|m,b|n,ab<mn} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) + f(mn)g(1) \\
&= \sum_{a|m,b|n,ab<mn} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right) + f(mn) \\
&= \sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) - f(m)f(n) + f(mn) \\
&= h(m)h(n) - f(m)f(n) + f(mn).
\end{aligned}$$

Koska $f(mn) \neq f(m)f(n)$ ja myös $h(mn) \neq h(m)h(n)$, siis h ei ole multiplikatiivinen, mistä seuraa ristiriita.

□

Lause 6.5. *Jos g on multiplikatiivinen, myös sen käänteisfunktio g^{-1} Dirichlet'n tulon suhteen on multiplikatiivinen.*

Todistus (vrt. [1, s. 36]). Väite seuraa suoraan edeltävästä lauseesta 6.4, sillä funktio g on multiplikatiivinen ja tulo $g * g^{-1} = I$ on multiplikatiivinen. □

Lause 6.6. *Jos f on multiplikatiivinen, niin f on täydellisesti multiplikatiivinen, jos ja vain jos*

$$f(p^a) = f(p)^a$$

kaikille alkuluvuille p ja kokonaisluvuille $a \geq 1$.

Todistus (vrt. [1, s. 34]). Oletetaan, että f on täydellisesti multiplikatiivinen. Tällöin kaikille alkuluvun potensseille p^n on voimassa

$$f(p^n) = f(p^{n-1} \cdot p) = f(p^{n-1})f(p) = \ldots = f(p)^n.$$

Oletetaan sitten, että f on multiplikatiivinen ja $f(p^a) = f(p)^a$ kaikille alkuluvun potensseille p^n. Tällöin voidaan funktio f kirjoittaa muotoon $f(n) = f(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k)$, missä $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ on luvun n alkulukuhajotelma. Koska mille tahansa kokonaisluvuille n_1 ja n_2 niiden alkulukuhajotelmien tulo on niiden tulon alkulukuhajotelma, niin $f(n_1 n_2) = f(n_1)f(n_2)$ mille tahansa kahdelle positiiviselle kokonaisluvulle n_1 ja n_2. Siis f on täydellisesti multiplikatiivinen. □

Käänteisfunktio Dirichlet'n tulon suhteen antaa mahdollisuuden tutkia onko multiplikatiivinen funktio tädellisesti multiplikatiivinen. Seuraava lause osoittaa, että funktio on täydellisesti multiplikatiivinen ainoastaan silloin, jos sen käänteisfunktio on multiplikatiivinen.

Lause 6.7. *Olkoon f multiplikatiivinen. Tällöin f on täydellisesti multiplikatiivinen, jos ja vain jos*

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n) \text{ kaikille } n \geq 1.$$

Todistus (vrt. [1, s. 36]). Olkoon $g(n) = \mu(n)f(n)$. Jos f on täydellisesti multiplikatiivinen, niin

$$\begin{aligned} (g * f)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= f(n)\sum_{d|n} \mu(d) \\ &= f(n)I(n) = I(n) \end{aligned}$$

koska $f(1) = 1$ ja $I(n) = 0$, kun $n > 1$. Siis $g = f^{-1}$.
Oletetaan sitten käänteisesti, että $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$. Funktion f täydellisen multiplikatiivisuuden todistamiseksi riittää osoittaa, että $f(p^a) = f(p)^a$jollakin alkuluvun potenssilla. Yhtälöstä $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ seuraa, että

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \text{ kaikille } n > 1.$$

Olkoon nyt $n = p^a$. Tällöin

$$\mu(1)f(1)f(p^a) + \mu(p)f(p)f(p^{a-1}) = 0,$$

mistä saadaan $f(p^a) = f(p)f(p^{a-1})$. Tästä seuraa, että $f(p^a) = f(p)^a$, joten f on tädellisesti multiplikatiivinen. □

7 Täydelliset luvut

Tässä luvussa käsitellään lukujoukkoa, jota kutsutaan täydellisiksi luvuiksi. Aloitetaan määrittelemällä täydellisien lukujen joukko, ja esitetään sen jälkeen, kuinka sigma-funktiota voidaan käyttää täydellisten lukujen tutkimiseen.

Määritelmä 7.1. Positiivinen kokonaisluku n on täydellinen luku, jos se on itseään pienempien jakajiensa summa. Siis n on täydellinen luku, jos

$$\sigma(n) - n = n,$$

eli

$$\sigma(n) = 2n.$$

Esimerkki 7.1 (Esimerkki (vrt. [2, s. 362]))**.** Ensimmäiset kolme täydellistä lukua ovat:

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 28 &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \\ 496 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248. \end{aligned}$$

Seuraavan lauseen avulla voidaan tutkia, onko parillinen positiivinen kokonaisluku täydellinen luku.

Lause 7.1. *Jos n on kokonaisluku ja $n \geq 2$ siten, että $2^n - 1$ on alkuluku, niin $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ on täydellinen luku.*

Todistus (vrt. [2, s. 363]). Koska $2^n - 1$ on alkuluku, niin

$$\begin{aligned} \sigma(2^n - 1) &= 1 + (2^n - 1) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Koska σ-funktio on multiplikatiivinen,

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \sigma(2^{n-1})\sigma(2^n - 1) \\ &= (2^n - 1)(2^n) \\ &= 2^n(2^n - 1) \\ &= 2 \cdot 2^{n-1}(2^n - 1) \\ &= 2m. \end{aligned}$$

Siis m on täydellinen luku. □

Lause on myös käänteisesti tosi.

Lause 7.2. *Jokainen parillinen täydellinen luku m on muotoa $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$, missä $2^n - 1$ on alkuluku.*

Todistus (vrt. [2, s. 363]). Olkoon m muotoa $2^e s$, missä s on pariton luku ja $e \geq 1$. Koska m on täydellinen luku,

$$\sigma(m) = 2m = 2^{e+1}s.$$

Selvästi $(2^e, s) = 1$, eli luvut 2^e ja s ovat keskenään jaottomia. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \sigma(2^e s) \\ &= \sigma(2^e)\sigma(s), \end{aligned}$$

siis

$$2^{e+1}s = (2^{e+1} - 1)\sigma(s).$$

Nyt $(2^{e+1}, 2^{e+1} - 1) = 1$ ja $2^{e+1} \mid \sigma(s)$, joten $\sigma(s) = 2^{e+1}t$ jollain positiivisella kokonaisluvulla t. Tällöin

$$\begin{aligned} 2^{e+1}s &= (2^{e+1} - 1)2^{e+1}t \\ s &= (2^{e+1} - 1)t. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $t \mid s$ ja $t < s$, sillä jos olisi $t = s$, täytyisi olla $e = 0$, mistä seuraisi ristiriita.
Osoitetaan, että $t = 1$. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned} s + t &= 2^{e+1}t \\ s + t &= \sigma(s). \end{aligned}$$

Tämä osoittaa, että t on luvun s sellaisten jakajien d, joille $d < s$, summa. Jotta tämä pitäisi paikkansa, luvun t täytyy olla 1. Siis luvulla s on täsmälleen kaksi positiivista jakajaa, 1 ja s. Tästä seuraa, että luvun s täytyy olla alkuluku. Siis $m = 2^e(2^{e+1} - 1)$, missä $2^{e+1} - 1$ on alkuluku. □

Esimerkki 7.2 (Esimerkki (vrt. [2, s. 362]))**.** Ensimmäiset kolme täydellistä lukua 6, 28 ja 496 ovat muotoa $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$:

$$6 = 2^{2-1}(2^2 - 1) = 2(2^2 - 1) = 2 \cdot (4 - 1) = 6,$$

$$28 = 2^{3-1}(2^3 - 1) = 2^2(2^3 - 1) = 4 \cdot (8 - 1) = 28 \text{ ja}$$
$$496 = 2^{5-1}(2^5 - 1) = 2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot (32 - 1) = 496.$$

Esimerkki 7.3 (Esimerkki (vrt. [2, s. 367]))**.** Olkoon $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ parillinen täydellinen luku, missä p on alkuluku. Osoita, että $\phi(n) = n - 2^{2p-2}$.

Ratkaisu (vrt. [2, s. 673]).

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= \phi(2^{p-1})\phi(2^{p-1}-1) \\
&= (2^{p-1}-2^{p-2})((2^{p-1}-1)-1) \\
&= 2^{p-2}(2^p-2) \\
&= 2^{2p-2}-2^{p-1} \\
&= 2^{2p-2}+n-2^{2p-1} \\
&= n-2^{2p-2}.
\end{aligned}$$

3

□

Lähteet

[1] Apostol, Tom M. *Introduction to analytic number theory* Springer, 1976.

[2] Koshy, Thomas *Elementary number theory with applications*. Harcourt/Academic press, 2002.

[3] Rosen, Kenneth H. *Elementary number theory and its applications*. Addison Wesley, 2000.