
TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Valtteri Isaksson

Möbius-kuvaukset

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Kesäkuu 2015

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

Isaksson, Valtteri: Möbius-kuvaukset

Pro gradu -tutkielma, 31 s., 0 liites.

Matematiikka

Kesäkuu 2015

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoitus on perehdyttää lukija Möbius-kuvauksiin ja niiden ominaisuuksiin. Tutkielman alussa kerrataan kompleksilukujen perusominaisuudet ja niihin liittyvät laskutoimitukset sekä kompleksitason määrittelmä. Sitten laajennetaan kompleksitaso siten, että se sisältää myös äärettömän ja esitetään tämä myös graafisesti Riemannin pallona. Tämän jälkeen tarkastellaan itse Möbius-kuvauksia ja niiden perusominaisuuksia. Seuraavaksi perehdytään Möbius-kuvauksiin matriiseina, sekä kiintopisteiden ja kaksoissuhteen määrittelmiin ja ominaisuuksiin. Tämän jälkeen tarkastellaan vielä symmetriaa kompleksitasossa ja Möbius-kuvausten vaikutusta symmetrisiin pisteisiin. Lopuksi tarkastellaan Möbius-kuvausten luokittelua sekä niiden graafista ilmettä Riemannin pallon kuorella.

Lukijalta edellytetään matriisilaskennan ja ryhmäteorian tuntemista. Lisäksi aiempi kompleksianalyysin tuntemus on hyödyllistä. Tutkielman päälähteinä on käytetty teoksia Alan F. Beardon Algebra and Geometry, Lars V. Ahlfors Complex Analysis ja Tristan Needham Visual Complex Analysis.

Sisältö

1 Johdanto	4
2 Kompleksiluvut ja kompleksitaso	4
2.1 Yleistä kompleksiluvuista	4
2.2 Suoran ja ympyrän yhtälöt kompleksilukujen avulla	5
2.3 Laajennettu kompleksitaso	6
2.4 Stereografinen projektio	7
3 Möbius-kuvauksista	9
3.1 Möbius-kuvaukset	9
3.2 Suorat ja ympyrät	13
4 Möbius-kuvaukset ja matriisit	15
5 Kiintopisteet ja kaksoissuhde	17
5.1 Kiintopisteet	17
5.2 Kaksoissuhde	20
6 Symmetria	22
7 Möbius-kuvausten luokittelu	27
7.1 Kiintopisteet ja äärettömyys	27
7.2 Luokittelu muilla kiintopisteillä	28
Viitteet	31

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa perehdytään Möbius-kuvauksiin sekä niiden ominaisuuksiin ja luokitteluun. Ennen Möbius-kuvauksiin perehtymistä kerrataan kuitenkin kompleksilukujen perusominaisuudet ja niihin liittyvät laskutoimitukset. Tämän jälkeen otetaan käyttöön laajennetun kompleksitason määritelmä ja sen graafinen esitys Riemannin pallona sekä tutkitaan perinteisen kompleksitason pisteiden kuvaamista Riemannin pallon pinnalle.

Luvussa 3 siirrytään tarkastelemaan itse Möbius-kuvauksia ja niiden perusominaisuuksia. Luvussa tarkastellaan myös yksinkertaisia Möbius-kuvauksia, Möbiuksen ryhmää sekä Möbius-kuvausten vaikutusta suoriin ja ympyröihin.

Seuraavaksi perehdytään tarkemmin Möbius-kuvausten esittämiseen 2×2 -matriisien avulla ja verrataan kuvausten ja matriisien yhtäläisyyksiä. Luvussa 5 taas tutkitaan tarkemmin Möbius-kuvausten erikoisempia ominaisuuksia eli kiintopisteitä ja kaksoissuhdetta. Lisäksi katsotaan kuinka kaksoissuhdetta hyödyntäen voidaan ratkaista tuntemattoman Möbius-kuvauksen kertoimet edellyttäen, että tiedetään kolmen eri pisteen kuvat.

Kuudennessa luvussa tarkastellaan symmetriaa kompleksitasossa ja tutkitaan pisteiden peilaamista joko suorien tai ympyrän kehän suhteen. Lisäksi katsotaan, kuinka Möbius-kuvaukset vaikuttavat symmetrisiin pisteisiin. Viimeisessä kappaleessa tutustutaan vielä konjugaattien määritelmään, Möbius-kuvausten luokitteluun ja siihen, miltä kuvaukset näyttävät Riemannin pallon kuorella.

2 Kompleksiluvut ja kompleksitaso

2.1 Yleistä kompleksiluvuista

Määritelmä 2.1. Kompleksilukujen joukko \mathbb{C} koostuu kaikista pareista $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, joille määritellään yhteen- ja kertolasku seuraavasti:

Olkoon $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ ja $w = (u, v) \in \mathbb{C}$ ja

$$z + w = (x + u, y + v)$$

$$zw = (xu - yv, xv + yu).$$

Tässä joukossa $(x, 0)$ on reaaliakseli ja $(0, y)$ imaginaariakseli. Nämä kaksi akselia muodostavat yhdessä *kompleksitason*.

Määritelmä 2.2. Olkoon $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, missä

$$\begin{aligned} x &:= \operatorname{Re}(z) = \text{pisteen } z \text{ reaaliosa} \\ y &:= \operatorname{Im}(z) = \text{pisteen } z \text{ imaginaariosa.} \end{aligned}$$

Määritelmä 2.3. $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ on imaginääriyksikkö.

Määritelmän 2.3 perusteella saadaan

$$i^2 = (0, 1) * (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.$$

Lause 2.1. Jos $z \in \mathbb{C}$, niin on olemassa yksikäsitteiset $x, y \in \mathbb{R}$, joille

$$z = x + iy.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $z \in \mathbb{C}$. Nyt

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i \\ (x_1, y_1) &= x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2). \end{aligned}$$

□

Määritelmä 2.4. Luvun $z = x + yi \in \mathbb{C}$ kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = x - yi \in \mathbb{C}$.

Määritelmä 2.5. Luvun $z = x + yi \in \mathbb{C}$ itseisarvo on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.2 Suoran ja ympyrän yhtälöt kompleksilukujen avulla

Kompleksitasossa $|z - a|$ kuvaa pisteiden z ja a välistä etäisyyttä. Tällöin ympyrän yhtälö voidaan helposti kirjoittaa muotoon $|z - a| = r$. Tässä yhtälössä ympyrän keskipiste on pisteessä a ja sen säde on r . Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon $r^2 = (z - a)\overline{(z - a)}$, josta saadaan ympyrälle yhtälö

$$(2.1) \quad z\bar{z} - (\bar{a}z + a\bar{z}) + |a|^2 - r^2 = 0.$$

Tämä voidaan kirjoittaa vielä muotoon $z\bar{z} - (\bar{a}z + a\bar{z}) + k = 0$. Yhtälöllä ei tosin ole ratkaisuja, jos $k > |a|^2$ ja vain yksi ratkaisu, jos $k = |a|^2$. Jos taas $k < |a|^2$, niin ratkaisut muodostavat ympyrän.

Mikä tahansa suora L on joukko pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana pisteistä u ja v . Täten suoran L :n yhtälöksi saadaan $|z - u|^2 = |z - v|^2$, joka voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$(2.2) \quad \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0,$$

missä b on reaaliluku.

Koska sekä suoran että ympyrän yhtälöt voidaan kertoa millä tahansa reaaliluvulla, molempien yhtälöt tulevat muotoon

$$(2.3) \quad Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0,$$

jossa A ja D ovat reaalilukuja ja B ja C ovat toistensa kompleksikonjugaatteja. Suoran tapauksessa yhtälössä A on 0. Jos tähän sijoitetaan vielä $z = x + yi$, saadaan yhtälö

$$(2.4) \quad A(x^2 + y^2) + (B + C)x + (B - C)iy + D = 0.$$

2.3 Laajennettu kompleksitaso

Monia laskutoimituksia varten on tarpeellista laajentaa kompleksilukujen joukkoa \mathbb{C} siten, että siihen lisätään ääretön, jota merkitään symbolilla ∞ . Ääretöntä koskevat seuraavat ominaisuudet:

$$a + \infty = \infty + a = \infty \text{ kaikille äärellisille } a\text{:n arvoille,}$$

$$b * \infty = \infty * b = \infty \text{ kaikille } b \neq 0, \text{ mukaanlukien } b = \infty.$$

Lisäksi voidaan kirjoittaa, että $a/0 = \infty$, kun $a \neq 0$, ja $b/\infty = 0$, kun $b \neq \infty$. Toisaalta on mahdotonta määritellä, mitä on $\infty + \infty$ ja $0 * \infty$. Äärettömyyttä vastaamaan kompleksitasoon lisätään piste, jota kutsutaan äärettömyyspisteeksi. Tämän pisteen ajatellaan sijaitsevan äärettömän kaukana missä tahansa suunnassa. Kompleksitaso muodostaa yhdessä tämän pisteen kanssa *laajennetun kompleksitason*, jota merkitään \mathbb{C}_∞ .

2.4 Stereografinen projektio

Perinteisesti laajennettua kompleksitasoa ajatellaan geometrisesti seuraavalaisena pallona: Olkoon

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Tätä palloa kutsutaan *Riemannin palloksi*. Yksikköpallon S pinta samaistetaan kompleksitason \mathbb{C} kanssa. Tarkastellaan nyt pallon S ”pohjoisnavan” eli pisteen $(0, 0, 1)$ kautta kulkevaa suoraa L . Jos L ei ole pallon tangenttitasossa, niin se leikkaa pallon kuoren täsmälleen yhdessä pisteessä (x_1, x_2, x_3) ja kompleksitason täsmälleen yhdessä pisteessä z . Näiden kolmen pisteen kautta kulkeva suora voidaan kirjoittaa muodossa

$$L(t) = (0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3 - 1)$$

ja tämä suora leikkaa kompleksitason, kun

$$1 + t(x_3 - 1) = 0.$$

Eli kun

$$t = (1 - x_3)^{-1}.$$

Tästä saadaan muodostettua

$$z = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right).$$

Eli täten

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Nyt jokainen kompleksitason piste z voidaan siis yhdistää Riemannin pallon kuoren pisteeseen (x_1, x_2, x_3) tämän suoran avulla. Nyt kun

$$(2.5) \quad z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3},$$

niin saadaan

$$(2.6) \quad |z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

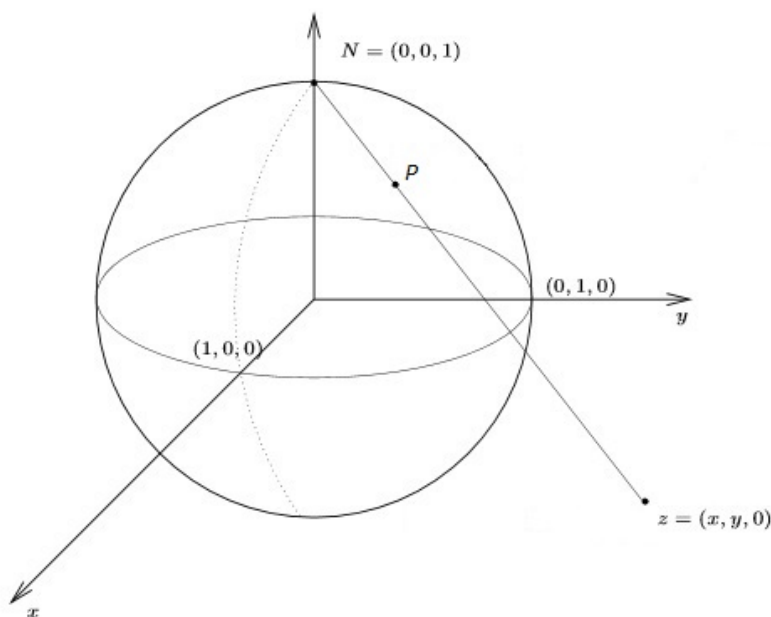
ja edelleen

$$(2.7) \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Lisäksi voidaan laskea, että

$$(2.8) \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}.$$

Vastaavuus voidaan vielä täydentää asettamalla äärettömyyspiste vastaamaan pistettä $(0, 0, 1)$. Edellä mainitun yhtälön avulla voidaan siis kuvata mikä tahansa kompleksitason piste pallon S kuorelle. Tätä kuvausta kutsutaan *stereografiseksi projektiksi*.



Kuva 1: Riemannin pallo ja stereografinen projektio.[4]

Kuvassa piste P on piste z kuvattuna Riemannin pallon pinnalle ja sen koordinaatit ovat

$$P = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Geometrisesti on selvää, että stereografinen projektio kuvaa kaikki kompleksitason suorat Riemannin pallon kuorelle, navan $(0, 0, 1)$ lävistäväksi ympyräksi. Tämän lisäksi myös kompleksitason ympyrät kuvautuvat ympyröiksi.

Lause 2.2. *Stereografinen projektio kuvaa kompleksitason suorat ja ympyrät ympyröiksi.*

Todistus. Tarkastellaan Riemannin pallon pinnalla olevaa ympyrää, joka sijaitsee tasossa $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = \alpha_0$, jossa voidaan olettaa, että $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Kun tähän sijoitetaan termit z ja \bar{z} , saadaan yhtälö

$$\alpha_1(z + \bar{z}) - \alpha_2i(z - \bar{z}) + \alpha_3(|z|^2 - 1) = \alpha_0(|z|^2 + 1).$$

Tästä saadaan

$$(\alpha_0 - \alpha_3)(x^2 + y^2) - 2\alpha_1x - 2\alpha_2y + \alpha_0 + \alpha_3 = 0.$$

Kuten aiemmin todettiin, kaikki suorien ja ympyröiden yhtälöt voidaan kirjoittaa juuri tähän muotoon. Jos $\alpha_0 = \alpha_3$, kyseessä on suora. Jos taas $\alpha_0 \neq \alpha_3$, kyseessä on ympyrä. \square

3 Möbius-kuvauksista

3.1 Möbius-kuvaukset

Määritelmä 3.1. *Möbius-kuvaus* on kompleksimuuttujan z funktio f , joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

jossa a, b, c ja d ovat kompleksilukuja ja $ad - bc \neq 0$. Ehto $ad - bc \neq 0$ vaaditaan, koska muulloin funktion kahden eri arvon erotus olisi aina

$$f(z) - f(w) = \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} = 0.$$

Tähän määritelmään sisältyy kuitenkin kaksi ongelmaa. Ensimmäinen on se, että Möbius-kuvaus f voidaan kirjoittaa määritelmän 3.1 määrittelemään muotoon monilla eri tavoilla. Täten vaikka tiedettäisiin $f(z)$:n arvo, niin sen perusteella ei pystytä kertomaan, mitkä ovat kertoimien a, b, c ja d arvot. Esimerkiksi jos f kuvaa kompleksiluvun z $5z$:ksi, voivat sen kertoimet esimerkiksi olla $5, 0, 0$ ja 1 tai $5\pi, 0, 0$ ja π .

Lause 3.1. *Oletetaan, että $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ ja δ ovat kompleksilukuja, joille pätee $(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$ ja, että on olemassa ainakin kolme $z \in \mathbb{C}$ arvoa,*

joille pätee $cz + d \neq 0$, $\gamma z + \delta \neq 0$ ja

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Tällöin on olemassa kompleksiluku λ , jolle pätee

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Todistus. Merkitään niitä $z \in \mathbb{C}$ arvoja, joilla ylläolevat ehdot pätevät z_1, z_2 ja z_3 . Tällöin toisen asteen yhtälöllä

$$(az + b)(\gamma z + \delta) = (cz + d)(\alpha z + \beta)$$

on kolme eri ratkaisua. Lisäksi yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$a\gamma z^2 + (a\delta + b\gamma)z + b\gamma = c\alpha z^2 + (c\beta + d\alpha)z + d\beta,$$

josta saadaan $a\gamma = c\alpha$, $a\delta + b\gamma = c\beta + d\alpha$ ja $b\gamma = d\beta$. Näiden perusteella on olemassa kompleksiluku μ , jolle pätee

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Tällöin determinanttien perusteella $\mu^2 = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$. Tämä voidaan kuitenkin kirjoittaa vielä muotoon

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \frac{\mu}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

□

Ensimmäinen ongelma on siis näin ollen ratkaistu.

Määritelmä 3.2. Möbius-kuvausta $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, jolle pätee $ad - bc = 1$, kutsutaan Möbius-kuvauksen *normitetuksi muodoksi*.

Kuvauksen toinen ongelma on se, että se ei ole määritelty kaikissa pisteissä. Esimerkiksi $\frac{1}{z - z_0}$ ei ole määritelty pisteessä z_0 . Täten ei ole olemassa joukon \mathbb{C} osajoukkoa, jossa kaikki Möbius-kuvaukset olisivat määriteltyjä. Tämä tuottaa vaikeuksia Möbius-kuvauksia yhdistettäessä.

Esimerkki 3.1. Valitaan Möbius-kuvaukset

$$f(z) = \frac{z+3}{z-1} \text{ ja } g(z) = \frac{z}{z+2}.$$

Tällöin

$$f(g(z)) = \frac{g(z)+3}{g(z)-1} = \frac{z+3(z+2)}{z} = \frac{4z+6}{z}.$$

Nyt vaikuttaisi siltä, että fg on määritelty pisteessä $z = -2$, vaikka g ei ole määritelty tässä pisteessä. Lisäksi, jos valitaan vielä $h(z) = \frac{1}{z}$, niin saadaan

$$h(f(g(z))) = \frac{z}{4z+6},$$

joka taas on määritelty edellä mainitussa pisteessä, mutta ei ole määritelty pisteessä $z = -1,5$. Yleisesti ottaen, kun muodostetaan $n:n$ Möbius-kuvauksen yhdistetty funktio $f_1 \dots f_n$, niin se ei ole määritelty $n:ssä$ pisteessä kompleksitasolla.

Tämä ongelma voidaan kuitenkin ratkaista ottamalla käyttöön laajennetun kompleksitason määritelmä $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Tällöin jos $c \neq 0$, niin

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \text{ ja}$$

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

Määritelmä 3.3. Olkoon f Möbius-kuvaus. Tällöin jos $c \neq 0$, niin

$$f(\infty) = a/c \text{ ja } f(-d/c) = \infty \text{ ja}$$

$$\text{jos } c = 0, \text{ niin } f(\infty) = \infty.$$

Nyt jokainen Möbius-kuvaus on määritelty kaikkialla.

Lause 3.2. Jokaisella Möbius-kuvauksella on käänteisfunktio.

Todistus. Valitaan

$$g(w) = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Tämä on Möbius-kuvaus, sillä $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$. Lisäksi voidaan laskea, että $g(f(z)) = z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}_\infty$ ja $f(g(w)) = w$ kaikilla $w \in \mathbb{C}_\infty$. Täten $g = f^{-1}$. □

Lause 3.3. Kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on Möbius-kuvaus.

Todistus. Olkoot

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ ja } g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Möbius-kuvauksia. Nyt selkeästi nähdään, että

$$(f(g(z))) = \frac{ag(z) + b}{cg(z) + d} = \frac{(\alpha a + \gamma b)z + \beta a + \delta b}{(\alpha c + \gamma d)z + \beta c + \delta d}.$$

Tämä on myös Möbius-kuvaus. □

Lause 3.4. Jokainen Möbius-kuvaus on bijektio joukosta \mathbb{C}_∞ itseensä ja Möbius-kuvaukset muodostavat Möbiuksen ryhmän \mathcal{M} .

Todistus. Koska on jo todistettu käänteiskuvauksen olemassaolo ja se, että kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on Möbius-kuvaus, riittää osoittaa neutraalialkion olemassaolo. Neutraalialkio

$$I(z) = \frac{z + 0}{0z + 1}$$

on selkeästi Möbius-kuvaus ja täten saadaan muodostettua Möbiuksen ryhmä \mathcal{M} . □

Esimerkki 3.2. Yksinkertaista Möbius-kuvausta

$$(3.1) \quad f(z) = z + a, \text{ jossa } a \in \mathbb{C},$$

sanotaan translaatioksi eli *siirroksi*. Se siirtää kompleksitason \mathbb{C} pisteitä luvun a verran ja pitää äärettömyyspisteen paikallaan, eli $f(\infty) = \infty$. Toinen yksinkertainen Möbius-kuvaus on

$$(3.2) \quad f(z) = bz, \text{ jossa } b \in \mathbb{C}, b \neq 0.$$

Nyt jos $|b| = 1$, kyseessä on kompleksinen *kierto*. Tällöin Möbius-kuvaus f kiertää kompleksitason pisteitä kulman $\arg(f)$ verran ja pitää äärettömyyspisteen paikallaan. Jos $b \in \mathbb{R}$ ja $b > 0$, kuvaus on *dilaatio*. Se on *venytys*, jos $b \geq 1$ ja *kutistus*, jos $0 < b \leq 1$. Yleinen tapaus $b \in \mathbb{C}, b \neq 0$ saadaan yhdistämällä kierto ja dilaatio, koska

$$b = |b| \frac{b}{|b|}.$$

Kolmas alkeellinen Möbius-kuvauksen tyyppi on *inversio* eli

$$(3.3) \quad f(z) = \frac{1}{z}.$$

Inversio siirtää äärettömyyden origoon $f(\infty) = 0$ ja origon äärettömyyteen $f(0) = \infty$.

Lause 3.5. *Jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää esimerkin 3.2 kuvausten yhdisteenä.*

Todistus. Valitaan ensin mielivaltainen Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Nyt jos $c = 0$, niin $d \neq 0$. Tällöin voidaan valita Möbius-kuvaukset $g_1(z) = (a/d)z$ ja $g_2(z) = z + b/d$. Tästä saadaan helposti osoitettua, että $f = g_1g_2$. Jos taas $c \neq 0$, niin valitaan Möbius-kuvaukset

$$f_1(z) = z + d/c, \quad f_2(z) = 1/z, \quad f_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \quad \text{ja} \quad f_4(z) = z + ac.$$

Tällöin $f = f_4f_3f_2f_1$. □

Lause 3.6. *Möbius-kuvaukset säilyttävät kulmat.*

Todistus. Todistus löytyy kirjasta [3, s.131-132]. □

3.2 Suorat ja ympyrät

Tässä luvussa todistetaan, että Möbius-kuvaus kuvaa sekä ympyrän että suoran joko ympyräksi tai suoraksi. Kuten jo aiemmin todistettiin stereografisessa projektiossa, Riemannin pallon kuoren pohjoisnavan kautta kulkevat ympyrän kaaret vastaavat laajennetun kompleksitason suoria ja kuorella sijaitsevat ympyrät kompleksitason ympyröitä. Tästä syystä laajennetun kompleksitason ympyröitä ja suoria kutsutaan *yleistetyiksi ympyröiksi*.

Lause 3.7. *Olkoon f Möbius-kuvaus ja C yleistetty ympyrä. Tällöin $f(C)$ on yleistetty ympyrä.*

Todistus. Aluksi todistetaan, ettei $f(C)$ ole minkään ympyrän C_1 osajoukko, vaan $f(C) = C_1$. Oletetaan, että jollekin ympyrälle C on olemassa ympyrä C_1 siten, että $f(C) \subset C_1$. Tällöin $C \subset f^{-1}(C_1)$. Koska $f^{-1}(C)$ on jollakin ympyrällä, niin tämän ympyrän täytyy olla C . Täten $f^{-1}(C_1) = C$ ja $f(C) = C_1$.

Nyt täytyy vain todistaa, että $f(C)$ on jollain ympyrällä C_1 . Lauseen 3.5 perusteella tulee tarkastella vain tapauksia, joissa kuvaus f on joko $z \rightarrow az$, $z \rightarrow z + a$ tai $z \rightarrow 1/z$. Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa on selvää, että f kuvaa ympyrät ympyröiksi ja suorat suoriksi. Lisäksi näissä tapauksissa $f(\infty) = \infty$, joten f kuvaa ympyrät ympyröiksi. Seuraavaksi tarkastellaan tapausta $f(z) = 1/z$. Aiemmin todettiin, että sekä suorien että ympyröiden yhtälöt kompleksitasossa voidaan kirjoittaa muodossa

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0,$$

missä suoran tapauksessa $a = 0$. Merkitään nyt suoraa kirjaimella L eli yleistetty ympyrä on $C = L \cup \{\infty\}$. Jos z on tällä suoralla, niin $f(C) \subset f(L) \cup \{f(\infty)\} \subset C_1 \cup \{0\} = C_1$, missä

$$C_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid b\bar{w} + \bar{b}w + c\bar{w}w\}.$$

Jos $c = 0$, niin kyseessä on origon kautta kulkeva suora. Jos suora ei kulje origon kautta, kyseessä on ympyrä, jonka säde on $|b|/|c|$ ja keskipiste $-b/c$. Ympyrällä olevan pisteen z kuvapiste $w = 1/z$ toteuttaa yhtälön $a + b\bar{w} + \bar{b}w + cw\bar{w} = 0$. Eli $f(C) = C_1$, missä

$$C_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid a + b\bar{w} + \bar{b}w + cw\bar{w} = 0\}.$$

Jos ympyrä kulkee origon kautta, niin $c = 0$. Tällöin saatu yhtälö on suoran yhtälö. Muilla vakion c arvoilla saatu yhtälö on ympyrän yhtälö. \square

Tämän lauseen avulla voidaan etsiä Möbius-kuvauksen antama kuva tiedetylle yleistetylle ympyrälle.

Esimerkki 3.3. Olkoon $f(z) = (z - i)/(z + i)$. Mikä on $f(C)$, kun C on imaginääriakselin ja ∞ :n yhdiste? Nyt tiedetään, että pisteet $0, i$ ja ∞ sisältyvät C :hen. Kun nämä pisteet sijoitetaan kuvaukseen f , saadaan selville, että pisteet $-1, 0$ ja 1 sisältyvät $f(C)$:hen. Tällöin $f(C)$ on reaaliakselin ja äärettömän yhdiste $\mathbb{R} \cup \infty$.

4 Möbius-kuvaukset ja matriisit

Kuten jo lauseen 3.1 yhteydessä näytettiin, voidaan Möbius-kuvauksia kuvata myös 2×2 -matriiseilla.

Määritelmä 4.1. Möbius-kuvaus $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ voidaan kirjoittaa matriisimuodossa 2×2 -matriisina

$$[f] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Tätä voidaan merkitä myös kuvauksena $\Phi : GL(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathcal{M}$,

$$\Phi : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto f, f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

jossa $GL(2, \mathbb{C})$ tarkoittaa kääntyvien kompleksisten 2×2 -matriisien joukkoa.

Koska Möbius-kuvausten kertoimien arvot eivät ole yksikäsitteisiä, niin sama pätee myös matriisimuodolle. Jos k on mielivaltainen vakio, niin matriisi $k[f]$ vastaa samaa Möbius-kuvausta kuin $[f]$. Tosin jos matriisilla pätee $(ad - bc) = 1$, niin on olemassa vain kaksi matriisia, jotka vastaavat annettua Möbius-kuvausta. Nämä matriisit ovat $[f]$ ja $-[f]$.

Käsiteltäessä Möbius-kuvauksia matriiseina tulee muistaa, että matriisin alkiot ovat kompleksilukuja ja vaikka matriisit muistuttavat lineaarikuvauksia joukossa \mathbb{R}^2 , eivät ne sitä kuitenkaan ole. Esimerkiksi matriisi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vastaa joukossa \mathbb{R}^2 tason kääntöä $\pi/2$:lla. Sen sijaan Möbius-kuvauksena sitä vastaa $f(z) = -(1/z)$. Möbius-kuvauksilla ja niitä vastaavilla matriiseilla on olemassa seuraavat rinnastettavuudet:

Identistä Möbius-kuvausta $f(z) = z$ vastaa identiteettimatriisi $[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Möbius-kuvauksella $f(z)$, jota vastaa matriisi $[f] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on käänteiskuvaus, jos ja vain jos matriisille on olemassa käänteismatriisi eli, jos $\det[f] = (ad - bc) \neq 0$.

Kun katsotaan lausetta 3.1, huomataan, että Möbius-kuvauksen käänteisfunktio $f^{-1}(z)$ vastaa käänteismatriisia $[f]^{-1}$. Eli lyhyesti

$$[f]^{-1} = [f^{-1}].$$

Lause 4.1. *Kuvaus Φ on homomorfismi.*

Todistus. Valitaan matriisit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ siten, että $f = \Phi(A)$ ja $g = \Phi(B)$. Olkoon $h = \Phi(AB)$. Nyt h on siis matriisien A ja B tulo ja tulee osoittaa, että $h = \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B) = fg$. Tämä kuitenkin osoitettiin lauseen 3.3 todistuksessa eli Φ on homomorfismi. \square

Eli yleisesti ottaen Möbius-matriisien kertolasku vastaa Möbius-kuvausten yhdistettä

$$[f_2][f_1] = [f_2 \circ f_1].$$

Nämä matriisit siis vaikuttavat käyttäytyvän lineaarikuvausten tavoin. Tutkittaessa tätä tarkemmin, tarkastellaan kompleksitasoa uudella koordinaatistolla. Sen sijaan, että ilmaistaan kompleksiluku $z = x + yi$ reaalilukujen avulla, niin kirjoitetaan se kahden kompleksiluvun osamääränä

$$z = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \text{ missä } \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{C}.$$

Kompleksilukujen järjestettyä paria $[\delta_1, \delta_2]$ sanotaan kompleksiluvun z *homogeeniseksi koordinaateiksi*. Aluksi vaaditaan, että $[\delta_1, \delta_2] \neq [0, 0]$. Tällöin jokainen järjestetty pari $[\delta_1, \delta_2]$, jossa δ_1 on mielivaltainen ja δ_2 eri kuin 0, vastaa täsmälleen yhtä pistettä $z = \frac{\delta_1}{\delta_2}$. Sen sijaan jokainen piste z vastaa ääretöntä joukkoa homogeenisia koordinaatteja, $[k\delta_1, k\delta_2] = k[\delta_1, \delta_2]$, missä k on mielivaltainen nollasta eroava kompleksiluku.

Entä jos δ_2 olisikin 0? Jos tarkastellaan tilannetta, jossa δ_1 on vakio ja δ_2 lähestyy arvoa 0, huomataan, että pari $[\delta_1, 0]$ vastaa äärettömyyspistettä. Eli kokonaisuudessa järjestetty pari $[\delta_1, \delta_2]$ antaa laajennetun kompleksitason koordinaatit. Nyt voidaan käyttää merkintää \mathbb{C}^2 kuvaamaan kompleksilukuparien $[\delta_1, \delta_2]$ joukkoa, samoin kuin \mathbb{R}^2 kuvaa reaalilukuparin (x, y) joukkoa.

Lineaarikuvausta joukossa \mathbb{C}^2 kuvataan nyt kompleksisella 2x2-matriisilla, samoin kuin joukossa \mathbb{R}^2 sitä kuvataan reaalisella 2x2-matriisilla. Eli

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\delta_1 + b\delta_2 \\ c\delta_1 + d\delta_2 \end{bmatrix}.$$

Tosin koska $[\delta_1, \delta_2]$ ja $[\zeta_1, \zeta_2]$ vastaavat pisteen $z = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ ja sen kuvan $w = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ homogeenisia koordinaatteja joukossa \mathbb{C}^2 , niin yllä oleva lineaarikuvaus saadaan muotoon

$$z = \frac{\delta_1}{\delta_2} \rightarrow w = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{a\delta_1 + b\delta_2}{c\delta_1 + d\delta_2} = \frac{a(\delta_1/\delta_2) + b}{c(\delta_1/\delta_2) + d}.$$

Tämä on selkeästi Möbius-kuvaus. Eli Möbius-kuvaukset ovat lineaarikuvausjoukossa \mathbb{C} , mutta käyttävät joukon \mathbb{C}^2 homogeenisia koordinaatteja joukon \mathbb{C} pisteiden sijaan.

5 Kiintopisteet ja kaksoissuhde

5.1 Kiintopisteet

Määritelmä 5.1. Pistettä $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, jolle pätee $f(z_0) = z_0$, sanotaan kuvauksen f kiintopisteeksi.

Lause 5.1. Möbius-kuvauksella $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ on joko yksi tai kaksi kiintopistettä, ellei kyseessä ole identiteettifunktio $f(z) = z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}_\infty$.

Todistus seuraa suoraan toisenasteen yhtälön

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

ratkaisujen lukumäärästä tai seuraavasta lauseesta.

Lause 5.2. Olkoot $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ kolme eri pistettä. Jos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ ovat toiset kolme eri pistettä, niin on olemassa täsmälleen yksi Möbius-kuvaus, jolle pätee $f(z_j) = w_j$, kun $j = 1, 2, 3$.

Todistus. Oletetaan ensin, että mikään z_j ei ole ∞ ja valitaan

$$g(z) = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \right) \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Tällöin $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$ ja $g(z_3) = 1$. Oletetaan nyt, että jokin $z_j = \infty$. Valitaan z_4 , joka on eri kuin z_1, z_2 tai z_3 ja $s(z) = 1/(z - z_4)$. Tällöin $s(z) = \infty$, jos ja vain jos $z = z_4$. Täten mikään $s(z_1), s(z_2)$ tai $s(z_3)$ ei ole ∞ . Tällöin on olemassa Möbius-kuvaus g_1 , joka kuvaa nämä arvot arvoiksi $0, 1$ ja ∞ .

Eli joka tapauksessa on olemassa Möbius-kuvaus, joko g tai g_1s , joka kuvaa luvut z_1, z_2 ja z_3 luvuiksi $0, 1$ ja ∞ . Samalla tavalla voidaan osoittaa, että on olemassa Möbius-kuvaus h , jolle pätee $h(w_1) = 0, h(w_2) = \infty$ ja $h(w_3) = 1$. Valitaan nyt $f = h^{-1}g$. Tällöin f on etsitty kuvaus, koska jokaiselle j :lle pätee $f(z_j) = h^{-1}g(z_j) = w_j$.

Yksikäsitteisyys: Todistetaan ensin, että Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet $0, 1$ ja ∞ pisteiksi $0, 1$ ja ∞ , on identtinen kuvaus. Eli

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

on Möbius-kuvaus, jolle pätee

$$f(0) = 0 \text{ eli } b = 0$$

$$f(\infty) = \infty \text{ eli } c = 0$$

$$f(1) = 1 \text{ eli } a/d = 1.$$

Täten

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az + 0}{0 * z + d} \\ &= \frac{a}{d} * z = z \end{aligned}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}_\infty$ eli $f(z)$ on identtinen kuvaus. Oletetaan nyt, että on olemassa kaksi kuvausta, joille pätee

$$f_1(z_1, z_2, z_3) = (w_1, w_2, w_3) \text{ ja } f_2(z_1, z_2, z_3) = (w_1, w_2, w_3).$$

Valitaan nyt Möbius-kuvaus $g(z)$ siten, että $g(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$ ja Möbius-kuvaukset $h_1(z)$ ja $h_2(z)$ siten, että $h_1 = g \circ f_1$ ja $h_2 = g \circ f_2$. Nyt molemmat kuvaukset h_1 ja h_2 kuvaavat pisteet z_1, z_2 ja z_3 pisteiksi $0, 1$ ja ∞ . Tällöin $h_1^{-1} \circ h_2$ kuvaa pisteet $0, 1$ ja ∞ pisteiksi $0, 1$ ja ∞ ja on täten identtinen kuvaus. Nyt $h_1^{-1} \circ h_1$ on selkeästi myös identtinen kuvaus. Täten $h_1^{-1} \circ h_2 = h_1^{-1} \circ h_1$, mistä seuraa, että $h_1 = h_2$. Täten saadaan $g \circ f_1 = g \circ f_2$, minkä perusteella $f_1 = f_2$. \square

Jos Möbius-kuvaus on normitettu, niin sen kiintopisteet saadaan toisen

asteen yhtälön kaavasta, eli

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$cz^2 + (a - d)z - b = 0$$

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{a^2 - 2ad + 4bc + d^2}}{2c}.$$

Nyt koska $ad - bc = 1$, niin

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{a^2 + 2ad + d^2 - 4(ad - bc)}}{2c}$$

$$= \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Näitä kiintopisteitä merkitään symboleilla ξ_- ja ξ_+ , joten yleisesti kiintopisteiden kaava on

$$(5.1) \quad \xi_{\pm} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Jos $(a + d) = \pm 2$, niin kyseessä on erityistapaus, jossa $\xi_- = \xi_+$ eli kiintopisteitä on vain yksi $\xi = (a - d)/2c$. Tällöin Möbius-kuvaus on *parabolinen*.

Esimerkki 5.1. Luodaan Möbius-kuvaus f siten, että $f(1) = \infty$, $f(i) = 1 + i$ ja $f(2) = 0$. Nyt näiden perusteella tiedetään, että halutun kuvauksen osoittajan tulee olla 0 pisteessä 2, ja että kuvauksen nimittäjän tulee olla 0 pisteessä 1. Tällöin kuvauksen yhtälöksi tulee $f(z) = k \frac{z-2}{z-1}$, missä k on jokin vakio. Tämän vakion arvoksi saadaan määritettyä ehdon $f(i) = 1 + i$ perusteella $k = \frac{-2}{i-2}$.

Esimerkki 5.2. Luodaan Möbius-kuvaus f siten, että $f(0) = 5$, $f(1) = 2 - i$ ja $f(2) = 1 + 2i$. Kuten lauseen 5.2 todistuksessa, merkitään nyt $f = h^{-1}g$, missä g kuvaa luvut 0, 1 ja 2 luvuiksi 0, 1 ja ∞ , ja h kuvaa luvut 5, $2 - i$ ja $1 + 2i$ luvuiksi 0, 1 ja ∞ . Nyt g ja h voidaan löytää samalla tavalla kuin esimerkissä 5.1 ja niiden lausekkeiksi saadaan $g(z) = \frac{-z}{z-2}$ ja $h(z) = \frac{zi-5i}{z-(1-2i)}$. Tällöin $h^{-1} = \frac{z(1+2i)-5i}{z-i}$ ja

$$f(z) = \frac{(4 + 3i)z - (5 - 5i)}{z - (1 + i)}.$$

5.2 Kaksoissuhde

Lauseen 5.2 perusteella on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, joka kuvaa kolmen eri pisteen muodostaman kolmikon toiseksi vastaavanlaiseksi kolmikoksi. Tästä seuraa, että jos tutkitaan kahden neljän eri pisteen muodostamia joukkoja z_1, z_2, z_3, z_4 ja w_1, w_2, w_3, w_4 , niin on olemassa maksimissaan yksi Möbius-kuvaus, jolle pätee $f(z_i) = w_i$ jokaisella $i = 1, 2, 3, 4$. Seuraavaksi annetaan tarvittava ehto kuvauksen olemassaololle.

Määritelmä 5.2. Olkoot $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ neljä eri pistettä. Lukua

$$(5.2) \quad [z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

sanotaan pisteiden z_1, z_2, z_3, z_4 *kaksoissuhteeksi*.

Jos kaksoissuhteen jokin $z_i = \infty$, niin kaksoissuhteen arvo on sen raja-arvo, kun z_i lähestyy arvoa ∞ . Tästä saadaan

$$[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}$$

$$[z_1, \infty, z_3, z_4] = -\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_4}$$

$$[z_1, z_2, \infty, z_4] = -\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_2}$$

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

Tästä saadaan kaava $[0, 1, z, \infty] = z$, jonka avulla voidaan vastata luvun alussa esitettyyn ongelmaan. Kaksoissuhde on invariantti Möbius-kuvauksissa.

Lause 5.3. *Olkoot z_1, z_2, z_3, z_4 neljä eri pistettä ja w_1, w_2, w_3, w_4 neljä eri pistettä. Möbius-kuvaus f , siten että $f(z_i) = w_i$, kun $i = 1, 2, 3, 4$, on olemassa, jos ja vain jos*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4].$$

Erityisesti jokaiselle Möbius-kuvaukselle f pätee

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Todistus. Oletetaan ensin, että on olemassa Möbius-kuvaus f , jolla $f(z_i) = w_i$. Jos $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, niin $cz_i + d \neq 0$ ja

$$w_i - w_j = f(z_i) - f(z_j) = \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}.$$

Kun tämä sijoitetaan kaksoissuhteen määritelmään, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_3 - w_2)} &= \frac{\frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)} \frac{(ad-bc)(z_3-z_4)}{(cz_3+d)(cz_4+d)}}{\frac{(ad-bc)(z_1-z_4)}{(cz_1+d)(cz_4+d)} \frac{(ad-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}} \\ &= \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}. \end{aligned}$$

Eli nyt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

pätee.

Oletetaan nyt, että

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

pätee. Olkoot g ja h Möbius-kuvaukset, joilla pätee $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = 1$, $g(z_4) = \infty$, $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = 1$ ja $h(w_4) = \infty$. Nyt

$$\begin{aligned} g(z_3) &= [0, 1, g(z_3), \infty] \\ &= [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] \\ &= [z_1, z_2, z_3, z_4] \\ &= [w_1, w_2, w_3, w_4] \\ &= [h(w_1), h(w_2), h(w_3), h(w_4)] \\ &= [0, 1, h(w_3), \infty] \\ &= h(w_3). \end{aligned}$$

Valitaan $f = h^{-1}g$. Tällöin jokaisella j pätee $f(z_j) = w_j$. □

Lauseen 6.1 avulla löydetään nopeasti se yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, joka kuvaa annetut kolme pistettä $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ annetuiksi kolmeksi pisteeksi $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$. Tämä ratkaistaan kaksoissuhteesta

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z].$$

Esimerkki 5.3. Muodostetaan Möbius-kuvaus f , jolle pätee $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow i$. Eli lasketaan

$$[1, 3, i, f(z)] = [0, 1, 2, z].$$

Tällöin

$$\frac{(1-i)(3-f(z))}{(1-3)(i-f(z))} = \frac{(0-2)(1-z)}{(0-1)(2-z)},$$

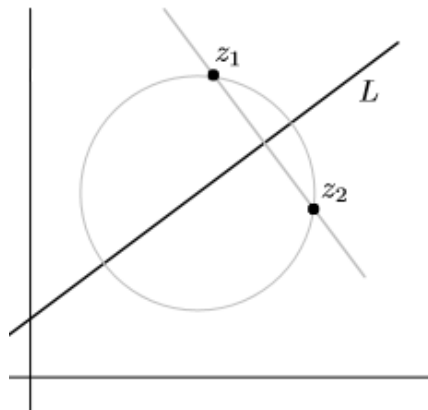
josta saadaan

$$f(z) = \frac{(3+i)z - 6 + 2i}{(5-i)z - 6 + 2i}.$$

6 Symmetria

Määritelmä 6.1. Sanotaan, että pisteet z_1 ja $z_2 \in \mathbb{C}_\infty$ ovat *symmetrisiä* suoran L suhteen, mikäli tämä puolittaa kohtisuoraan pisteiden z_1 ja z_2 välisen janan.

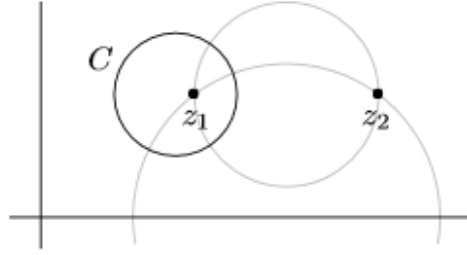
Oletetaan nyt, että pisteet $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty$ ovat symmetrisiä suoran L suhteen. Tällöin on helppoa nähdä, että kaikki suorat ja ympyrät, jotka kulkevat molempien pisteiden kautta, leikkaavat suoran L suorassa kulmassa.



Kuva 2: Symmetria suoran L suhteen[5]

Tämän avulla voidaan tehdä seuraava määritelmä.

Määritelmä 6.2. Sanotaan, että kaksi pistettä $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty$ ovat symmetriset ympyrän C suhteen, mikäli kaikki suorat ja ympyrät, jotka kulkevat pisteiden z_1 ja z_2 kautta, leikkaavat ympyrän C suorassa kulmassa.



Kuva 3: Symmetria ympyrän C suhteen[5]

Lause 6.1. *Olkoon*

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

z_0 -keskinen r -säiteinen ympyrä ja toisistaan eroavat pisteet $z, z^* \in \mathbb{C}$ samalla pisteestä z_0 lähtevällä puolisuoralla L . Tällöin pisteet z ja z^* ovat symmetrisiä ympyrän C_1 suhteen, jos ja vain jos $|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = r^2$.

Todistus. Oletetaan ensin, että z ja z^* ovat symmetrisiä. Tällöin on olemassa pisteiden z ja z^* kautta kulkeva ympyrä $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_1| = r_2\}$, joka on ortogonaalinen ympyrän C_1 kanssa. Eli suora L leikkaa ympyrän C_2 pisteissä z ja z^* . Nyt [6, lause 4.1.8, s.135] perusteella

$$|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = |z_0 - z_1|^2 - r_2^2$$

ja [6, lause 4.1.11, s.138] perusteella

$$r^2 = |z_0 - z_1|^2 - r_2^2.$$

Tällöin

$$|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = r^2.$$

Oletetaan nyt, että $|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = r^2$ pätee. Piirretään nyt pisteiden z ja z^* kautta kulkeva mielivaltainen ympyrä $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_1| = r_2\}$. Koska pisteet z ja z^* ovat samalla pisteestä z_0 lähtevällä puolisuoralla, niin nämä kolme pistettä ovat joko järjestyksessä z_0, z, z^* tai z_0, z^*, z . Tällöin [6, lause 2.6.6, s.74] perusteella z_0 on ympyrän C_2 ulkopuolella ja [6, lause 4.1.11, s.138] perusteella C_2 ja C_1 ovat ortogonaalisia, mikäli

$$r^2 = |z_0 - z_1|^2 - r_2^2.$$

Nyt [6, lause 4.1.8, s.135] perusteella

$$|z^* - z_0| * |z - z_0| = |z_0 - z_1|^2 - r_2^2,$$

johon sijoitettaessa $|z^* - z_0| * |z - z_0| = r^2$, saadaan vaadittu tulos

$$r^2 = |z_0 - z_1|^2 - r_2^2.$$

Täten C_1 ja C_2 ovat ortogonaaliset ja tällöin z ja z^* ovat symmetriset. \square

Sanotaan, että pisteen z *peilipiste* kehän C suhteen on z^* ja sen arvo saadaan kaavasta

$$z^* = \begin{cases} z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}, & \text{jos } z \neq z_0, \infty \\ \infty, & \text{jos } z = z_0 \\ z_0, & \text{jos } z = \infty. \end{cases}$$

Tällöin voidaan myös sanoa, että piste z on peilattu ympyrän C suhteen.

Lause 6.2. *Pisteet z ja z^* ovat symmetrisia pisteiden z_1, z_2 ja z_3 läpi menevän yleistetyn ympyrän C suhteen, jos ja vain jos*

$$[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}, \text{ kaikilla } z_1, z_2, z_3 \in C.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}$ pätee ja C on suora. Tällöin voidaan valita, että z_3 on ∞ ja symmetrian ehdoksi tulee

$$\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}.$$

Tällöin $|z^* - z_2| = |z - z_2|$, missä z_2 voi olla mikä tahansa äärellinen suoralla C oleva piste. Täten pisteet z ja z^* ovat yhtä kaukana kaikista suoran C pisteistä. Lisäksi saadaan tulos

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} &= \operatorname{Im} \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \\ &= -\operatorname{Im} \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}. \end{aligned}$$

Eli nyt saadaan

$$\begin{aligned} \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} &= s + ti \text{ ja} \\ \frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} &= s - ti. \end{aligned}$$

Tällöin

$$z = z_2 + s(z_1 - z_2) + t(z_1 - z_2)i \text{ ja}$$

$$z^* = z_2 + s(z_1 - z_2) - t(z_1 - z_2)i.$$

Tässä $z_1 - z_2$ on suoran C suuntavektori ja $z_2 + s(z_1 - z_2)$ suoran C piste. Lisäksi imaginääriyksiköllä i kertominen vastaa kiertoa 90 asteen verran. Täten z ja z^* ovat suoran C jakaman tason eri puolilla ja pisteiden z ja z^* kautta kulkeva suora leikkaa suoran C kohtisuorasti.

Jos taas C on ympyrä, jonka keskipiste on z_0 ja säde r , niin kaksoissuhteen invarianssia hyödyntäen saadaan tulos

$$\begin{aligned} \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} &= \overline{[z - z_0, z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0]} \\ &= \left[\overline{z - z_0}, \frac{r^2}{z_1 - z_0}, \frac{r^2}{z_2 - z_0}, \frac{r^2}{z_3 - z_0} \right] \\ &= \left[\frac{r^2}{\overline{z - z_0}}, z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0 \right] \\ &= \left[\frac{r^2}{\overline{z - z_0}} + z_0, z_1, z_2, z_3 \right], \end{aligned}$$

minkä perusteella pisteen z symmetriapisteenä on $z^* = \frac{r^2}{\overline{z - z_0}} + z_0$ ja pisteiden z ja z^* etäisyyksien keskipisteestä tulo on

$$|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = r^2.$$

Lisäksi $(z^* - z_0)/(z - z_0)$ on positiivinen eli z ja z^* ovat samalla ympyrän keskipisteestä z_0 lähtevällä puolisuoralla. Eli nyt lauseen 6.1 perusteella z ja z^* ovat symmetrisiä.

Oletetaan nyt, että pisteet z ja z^* ovat symmetrisiä ympyrän C suhteen. Nyt

$$z_j^* = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z_j - z_0}} = z_0 + \frac{(z_j - z_0)(\overline{z_j - z_0})}{\overline{z_j - z_0}} = z_j, \text{ kun } z_j \in C.$$

Tästä saadaan

$$z^* - z_j = \frac{r^2(\overline{z_j - z_0})}{(\overline{z_j - z_0})(\overline{z - z_0})},$$

ja siten

$$\begin{aligned}
[z^*, z_1, z_2, z_3] &= \frac{(z^* - z_2)(z_1 - z_3)}{(z^* - z_1)(z_2 - z_3)} \\
&= \frac{\frac{r^2(\bar{z}_2 - \bar{z})}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}(z_1 - z_3)}{\frac{r^2(\bar{z}_1 - \bar{z})}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}(z_2 - z_3)} \\
&= \frac{(\bar{z}_2 - \bar{z})(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)(z_1 - z_3)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(\bar{z}_1 - \bar{z})(z_2 - z_3)} \\
&= \frac{(\bar{z}_2 - \bar{z})(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)\left(\frac{r^2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0} - \frac{r^2}{\bar{z}_3 - \bar{z}_0}\right)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(\bar{z}_1 - \bar{z})\left(\frac{r^2}{\bar{z}_2 - \bar{z}_0} - \frac{r^2}{\bar{z}_3 - \bar{z}_0}\right)} \\
&= \frac{(\bar{z}_2 - \bar{z})(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)\left(\frac{r^2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)(\bar{z}_3 - \bar{z}_0)}\right)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(\bar{z}_1 - \bar{z})\left(\frac{r^2(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(\bar{z}_3 - \bar{z}_0)}\right)} \\
&= \frac{(\bar{z}_2 - \bar{z})(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(\bar{z}_1 - \bar{z})} \\
&= \frac{(\bar{z} - \bar{z}_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)}{(\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)} \\
&= \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}.
\end{aligned}$$

□

Lause 6.3. (Peiliperiaate) Olkoon f Möbius-kuvaus, C jokin yleistetty ympyrä ja $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ ympyrän C suhteen symmetriset pisteet. Tällöin $f(z)$ ja $f(z^*)$ ovat symmetrisiä ympyrän $f(C)$ suhteen.

Todistus. Koska yleistetyt ympyrät kuvautuvat yleistetyiksi ympyröiksi ja kulmat säilyvät Möbius-kuvauksissa, niin f kuvaa pisteen z kautta kulkevan yleistetyn ympyrän C ortogonaaliympyröiden joukon pisteen $f(z)$ kautta kulkevaksi yleistetyn ympyrän $f(C)$ ortogonaaliympyröiden joukoksi. Vastaavasti pisteen z peilipiste z^* kuvautuu pisteeksi $f(z^*)$, joka on toinen yleistetyn ympyrän $f(C)$ ortogonaaliympyröiden leikkauspiste. □

Lyhyesti tämä tulos tarkoittaa sitä, että Möbius-kuvaus säilyttää pisteiden symmetrisyyden.

7 Möbius-kuvausten luokittelu

7.1 Kiintopisteet ja äärettömyys

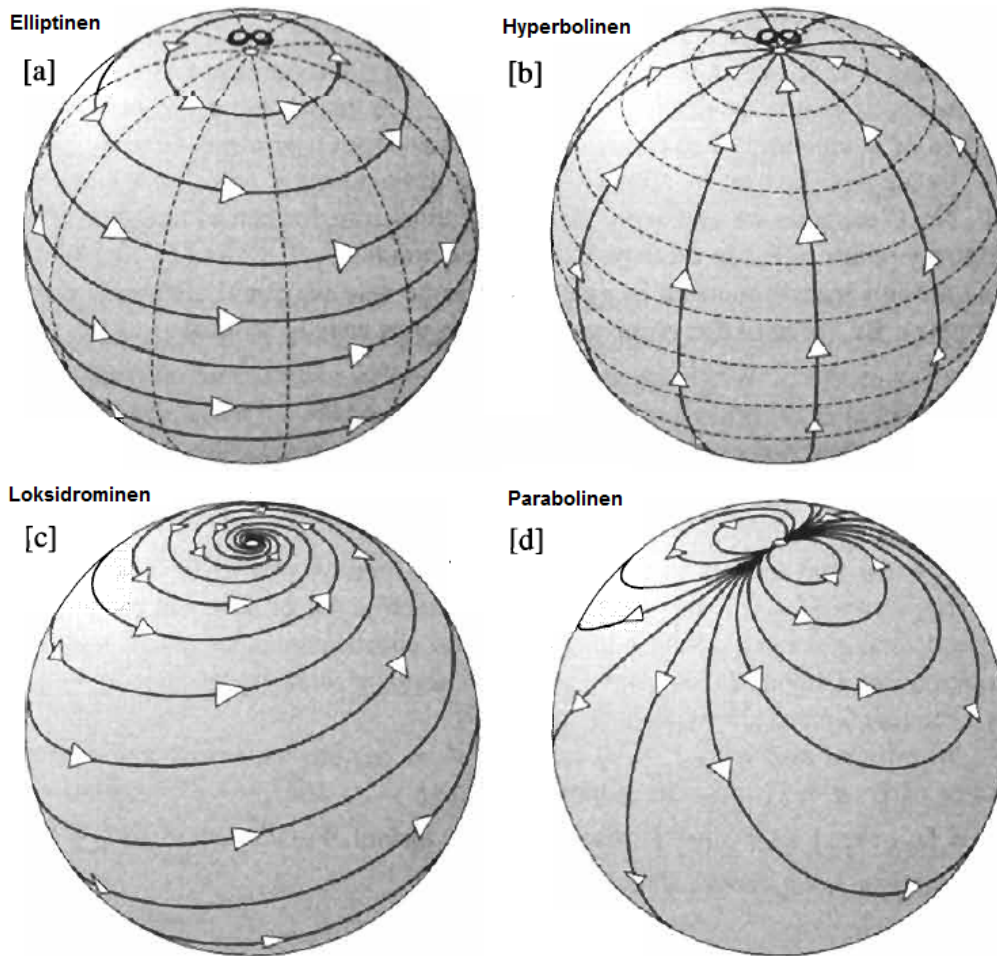
Jos Möbius-kuvauksen kerroin $c \neq 0$, niin kiintopisteet ovat molemmat äärellisiä. Jos taas $c = 0$, niin ainakin yksi kiintopisteistä on ∞ . Lisäksi tällöin Möbius-kuvaus on muotoa $f(z) = az + b$. Jos nyt merkitään $a = \rho e^{i\alpha}$, niin tätä voidaan ajatella origokeskeisenä kiertona kulman α verran, venytyksenä vakion ρ verran ja siirtona vakion b verran. Visualisoidaan nyt nämä kolme kuvausta Riemannin pallossa.

Jos $\alpha > 0$, niin kierto $z \rightarrow e^{i\alpha}z$ on Riemannin pallossa pallon kuoren kierto pystysuoran akselin ympäri. Tämä on esitetty kuvassa 3a. Vaakatasossa olevat ympyrät kiertyvät nuolien mukaisesti itseensä ja niitä kutsutaan kuvauksen *invariantiksi käyriksi*. Kuvan perusteella on selvää, että tämän kuvauksen kiintopisteet ovat 0 ja ∞ . Tätä kutsutaan *elliptiseksi* Möbius-kuvaukseksi.

Kuva 3b vastaa tapausta, jossa $\rho > 1$. Tämä vastaa kompleksitason origokeskeistä venytystä $z \rightarrow \rho z$. Jos $\rho < 1$, niin kyseessä olisi origokeskeinen kutistus ja nuolien suunta olisi päinvastainen. Taas on selvää, että kiintopisteet ovat 0 ja ∞ . Näitä kutsutaan *hyperbolisiksi* Möbius-kuvauksiksi. Tässä tapauksessa invariantit käyrät ovat kiintopisteiden kautta kulkevat pystysuorat ympyrät. Kuva 3c kuvaa kahden edellä mainitun kuvauksen yhdistettyä kuvausta ja tällöin invariantit käyrät ovat spiraalin omaisia. Tätä kutsutaan *loksodromiseksi* Möbius-kuvaukseksi ja elliptinen kuvaus sekä hyperbolinen kuvaus ovat sen erikoistapauksia.

Viimeisenä tapauksena on siirto, joka on esitetty kuvassa 3d. Koska invariantit käyrät kompleksitasossa ovat joukko yhdensuuntaisia suorja siirron suunnassa, niin Riemannin pallon kuoren invariantit käyrät ovat joukko ympyröitä, joilla on yhteinen tangentti äärettömyyspisteessä siten, että tämä tangentti on yhdensuuntainen kompleksitason invarianttien suorien kanssa. Tässä tapauksessa ainoa kiintopiste on ∞ ja kyseessä on *parabolinen* Möbius-kuvaus.

Nyt osoitetaan, että jokainen Möbius-kuvaus voidaan luokitella täsmälleen yhdeksi kuvassa 3 esiintyväksi kuvaustyyppiä.

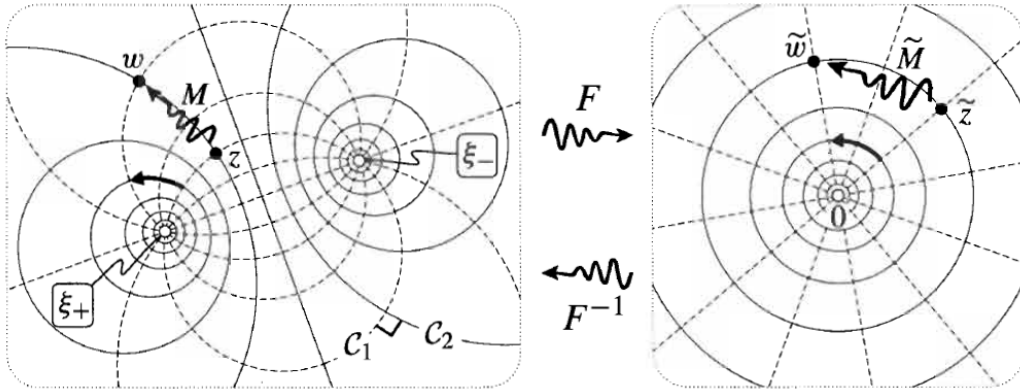


Kuva 4: Kuvauksien luokat[3]

7.2 Luokittelu muilla kiintopisteillä

Oletetaan, että on olemassa toisistaan eroavat kiintopisteet ξ_+ ja ξ_- . Nyt on olemassa ympyröiden joukko \mathcal{C}_1 , johon kuuluvat ympyrät kulkevat molempien kiintopisteiden kautta. Tätä joukkoa havainnollistetaan kuvan 5 vasemmalla puolella katkoviivoilla piirretyillä ympyröillä. Lisäksi on olemassa Möbius-kuvaus $M(z) = w$ siten, että se kuvaa jokaisen joukon \mathcal{C}_1 ympyrän pisteen jonkin toisen tämän joukon ympyrän pisteeksi. Valitaan kiintopisteet lävistävältä suoralta mielivaltaisen piste p siten, että se ei kuitenkaan sijoitu kiintopisteiden väliin. Jos tämän pisteen ympärille piirretään ympyrä C siten,

että sen säde on $\sqrt{[p\xi_+][p\xi_-]}$, niin pisteet ξ_+ ja ξ_- ovat symmetrisiä tämän ympyrän suhteen ja tällöin C leikkaa jokaisen joukkoon \mathcal{C}_1 kuuluvan ympyrän kohtisuorasti. Koska pisteen p sijainti kiintopisteet lävistävällä suoralla on mielivaltainen, niin sen sijaintia muuttamalla saadaan luotua sellaisten ympyröiden joukko \mathcal{C}_2 , joiden suhteen pisteet ξ_+ ja ξ_- ovat aina symmetrisiä ja jotka ovat ortogonaalisia joukon \mathcal{C}_1 ympyröiden kanssa.



Kuva 5: Kuvaus $F(z)$ [3]

Luodaan nyt Möbius-kuvaus $F(z)$ siten, että se kuvaa toisen kiintopisteistä ξ_+ ja ξ_- pisteeksi ∞ ja toisen pisteeksi 0 . Kuvan 5 oikealla puolella on esitettyä kuvan 5 vasen puoli tämän Möbius-kuvauksen jälkeen. Tämä Möbius-kuvaus voi esimerkiksi olla

$$F(z) = \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-}.$$

Koska Möbius-kuvaus kuvaa ympyrät aina yleistetyiksi ympyröiksi, täytyy joukon \mathcal{C}_1 ympyröiden kuvautua nyt pisteden 0 ja ∞ lävistäviksi yleistetyiksi ympyröiksi eli tässä tapauksessa suoriksi. Näitä on havainnollistettu kuvan 5 oikealla puolella katkoviiivoilla. Tämän avulla saadaan myös yksinkertaisempi kuvaus joukolle \mathcal{C}_2 .

Nyt origokeskeiset ympyrät ovat selvästi ortogonaalisia origon lävistävien suorien kanssa. Tällöin kuvattaessa ne Möbius-kuvauksella F^{-1} , niiden kuvien tulee edelleen olla ortogonaalisia joukon \mathcal{C}_1 kanssa.

Olkoon nyt $\tilde{z} = F(z)$ ja $\tilde{w} = F(w)$ Möbius-kuvauksen F antamat kuvat pisteille z ja $w = M(z)$. Nyt siis F kuljettaa alkuperäisen Möbius-kuvauksen

$z \rightarrow w = M(z)$ kuvaukseksi \widetilde{M} , $\tilde{z} \rightarrow \tilde{w} = \widetilde{M}(\tilde{z})$. Eli

$$\tilde{w} = F(w) = F(M(z)) = F(M(F^{-1}(\tilde{z}))),$$

josta saadaan

$$\widetilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}.$$

Määritelmä 7.1. Kaksi Möbius-kuvausta f_1 ja f_2 ovat toistensa *konjugaatteja*, mikäli on olemassa Möbius-kuvaus M siten, että

$$f_2 = M \circ f_1 \circ M^{-1}.$$

Koska \widetilde{M} on yhdistetty kuvaus kolmesta Möbius-kuvauksesta, on se itsekin Möbius-kuvaus. Lisäksi siitä, miten \widetilde{M} konstruotoitiin seuraa, että sen kiintopisteet ovat 0 ja ∞ . Nämä kiintopisteet omaava Möbius-kuvaus voi olla vain muotoa

$$\widetilde{M}(\tilde{z}) = \mathbf{m}\tilde{z},$$

missä $\mathbf{m} = \rho e^{i\alpha}$ on jokin kompleksiluku. Geometrisesti \widetilde{M} on siis kierto kulman α verran ja venytys vakion ρ verran. Tämä kompleksiluku \mathbf{m} siis kuvaa täysin Möbius-kuvausta \widetilde{M} ja myös alkuperäistä Möbius-kuvausta M . Tätä lukua \mathbf{m} sanotaan Möbius-kuvauksen $M(z)$ *multiplikaattoriksi*. Nyt Möbius-kuvaukset voidaan luokitella vakion \mathbf{m} perusteella elliptisiksi, hyperbolisiksi tai loksodormisiksi. Tällöin käytetään samoja määritelmiä kuin luvussa 7.1. Parabolisen Möbius-kuvauksen tapauksessa \widetilde{M} on siirto

$$\widetilde{M}(\tilde{z}) = \tilde{z} + T.$$

Mikä johtuu siitä, että kuvauksen \widetilde{M} ainoa kiintopiste on ∞ . Tarkemmat kuvaukset ja graafiset esitykset näiden Möbius-kuvausten käyttäytymisestä muilla kiintopisteillä löytyvät kirjasta [3, s.164-169]

Viitteet

- [1] Alan F. Beardon *Algebra and Geometry*. Cambridge University Press, 2005.
- [2] Lars V. Ahlfors *Complex Analysis* McGraw-Hill, 1979.
- [3] Tristan Needham *Visual Complex Analysis* Oxford University Press, 1997.
- [4] Tero Kilpeläinen *Kompleksianalyysi, Luentomateriaalinpanoja keväälle 2005*. Viitattu 13.6.2015.
<http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATS120.pdf>
- [5] William Chen *Introduction to Complex Analysis*. Viitattu 13.6.2015.
<https://rutherglen.science.mq.edu.au/wchen/lmicafolder/ica13.pdf>
- [6] Lassi Kurittu *Geometriaa luentomoniste 2006*. Viitattu 13.6.2015.
<http://users.jyu.fi/laurikah/Geometria/Geometria2006.pdf>