TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Silja Blomqvist

Derivoimissäännöt lukion MAB4- ja MAA7-kurssien opetussisällöissä

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Kesäkuu 2015

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
BLOMQVIST, SILJA: Derivoimissäännöt lukion MAB4- ja MAA7-kurssien opetussisällöissä
Pro gradu -tutkielma, 31 s.
Matematiikka
Kesäkuu 2015

Tiivistelmä

Tässä matematiikan valinnaisten opintojen tutkielmassa tutkitaan derivoimissääntöjen esitystapoja lukion lyhyen matematiikan pakollisella Matemaattinen analyysi (MAB4) -kussin ja pitkän matematiikan pakollisen Derivaatta (MAA7) -kurssin osalta. Tutkielman alussa luodaan katsaus lukion opetussuunnitelman perusteisiin matematiikan osalta. Myöhemmin vertaillaan kurssisiältöjä oppikirjojen avulla. Kummastakin kurssista on valittu tarkastelun kohteeksi kolme oppikirjaa. Huomataan, että kurssit poikkeavat toisistaan sekä sisällöllisesti että esitystapojensa osalta. MAA7-kurssilla derivoimissääntöjä opiskellaan MAB4-kurssia laajemmin ja lisäksi matemaattiset merkinnät ovat pitkässä matematiikassa täsmällisempiä kuin lyhyessä matematiikassa.

Sisältö

1 Johdanto

Matematiikkaa on kautta aikojen pidetty koulussa arvostettuna oppiaineena. Se herättää voimakkaita tunteita: matematiikassa onnistumista pidetään tärkeänä, mutta toisaalta matematiikka aiheuttaa usein myös kielteisiä kokemuksia. Matematiikan oppiaineen antama kvantitatiivisen ajattelun taito on välttämättömyys myös koulun ulkopuolisessa maailmassa. Matematiikkaa tarvitaan jokapäiväisessä elämässä esimerkiksi rahan käsittelyn, kellonaikojen ilmaisun tai ongelmanratkaisutilanteiden muodossa [8, s. 241].

Suomalaisessa lukiossa opetetaan kahden eri oppimäärän mukaisesti matematiikkaa: pitkää matematiikkaa ja lyhyttä matematiikkaa. Näistä oppimääristä opiskelijan on valittava toinen jo ennen lukio-opiskelunsa aloittamista. Oppimäärät eroavat toisistaan sekä kurssimääränsä osalta että sisällöllisesti. Pitkään matematiikan oppimäärään kuuluu nimensä mukaisesti enemmän sekä opiskeltavia kursseja sekä opetussuunnitelmaan kuuluvia oppisisältöjä kuin lyhyeen matematiikkaan.

Olen itse opettanut lukiossa neljä kokonaista lyhyen matematiikan kurssia sekä tehnyt paljon sijaisuuksia sekä lyhyen että pitkän matematiikan opettajana. Koska opetettavanani on ollut paljon eritasoisia opiskelijoita, huomasin pohtivani joidenkin kohdalla, olisiko toinen matematiikan oppimäärä ollut sittenkin heille sopivampi. Niinpä huomasin pohtivani, kuinka hyvin lukion lyhyen ja pitkän matematiikan oppimäärät vastaavat toisiaan. Jos lukiolainen suorittaa lyhyen matematiikan oppimäärän, jääkö häneltä monta sellaista asiaa oppimatta, jotka pitkässä matematiikassa oltaisiin opiskeltu?

Koska koko pitkän matematiikan ja lyhyen matematiikan oppisisältöjen yksityiskohtainen vertailu olisi ollut turhan laaja aihe sivuainetutkielmalle, rajasin tutkimukseni koskemaan yhtä lyhyen ja yhtä pitkän matematiikan kurssia. Aiheeksi valitsin matemaattisen analyysin ja erityisesti derivaatan, sillä omissa yliopiston matematiikan sivuaineopinnoissani olen keskittynyt enimmäkseen analyysin aihepiireihin. Lisäksi olen itse opettanut lukiossa kahdelle ryhmälle lyhen matematiikan pakollisen Matemaattinen analyysi (MAB4) -kurssin. Tarkastelen tässä tutkielmassa kolmea lyhyen matematiikan MAB4-kurssin ja kolmea pitkän matematiikan MAA7-kurssin oppikirjaa yksityiskohtaisesti.

2 Lukion matematiikan opetussisällöt

Suomalainen lukio on toisen asteen koulutusmuoto, joka jatkaa perusopetuksen opetus- ja kasvatustehtävää. Lukiokoulutuksen tehtävänä on antaa laaja-alainen yleissivistys sekä riittävät valmiudet lukion oppimäärään perustuviin jatko-opintoihin. Lukiossa voidaan opiskella matematiikkaa joko lyhyen tai pitkän oppimäärän mukaisesti. Oppimäärät eroavat toisistaan sekä sisällöllisesti että kurssien lukumäärän osalta. Kummankin oppimäärän mukaisen matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja [9, s. 12, 118].

Suomalaisten lukioiden opetussuunnitelmatyötä ohjaa Opetussuunnitelman perusteet [9]. Opetussuunnitelman perusteiden lisäksi lukioiden opetussuunnitelmat pohjaavat lukiolakiin ja -asetukseen sekä valtioneuvoston asetukseen lukiolaissa tarkoitetun opetuksen yleisistä valtakunnallisista tavoitteista ja lukiokoulutuksen tuntijaosta. Opetussuunnitelmassa päätetään lukion opetus- ja kasvatustyöstä. Opetussuunnitelman pohjalta jokainen lukio laatii oman lukuvuosittaisen suunnitelmansa opetuksen käytännön järjestämisestä. Opiskelija puolestaan laatii henkilökohtaisen opiskelusuunnitelmansa lukion opetussuunnitelman sekä lukuvuosittaisen suunnitelman pohjalta [9, s. 8].

Koska eri oppiaineilla on selkeästi omat erityiset luonteensa, on niiden opettamisessakin käytettävä erilaisia menetelmiä. Koulumatematiikan lähtökohtana on usein löytää yritysten ja erehdysten kautta käyttötarkoitukseen sopivia sääntöjä. Matematiikka on abstrakti aine, eikä siinä käsiteltäville olioille tarvitse olla todellisia vastineita. Matematiikan luonteeseen liittyy vahvasti ongelmanratkaisu sekä loogisuus. Siinä toimivat aina tietyt periaatteet järjestelmällisesti ilman poikkeuksia. Yksinkertaiset matemaattiset mallit nivoutuvat kokonaisuuksiksi, joiden avulla voidaan ratkaista aina vain monimutkaisempia ongelmia. Matematiikassa harjoitus ja harjaantuneisuus palkitaan nopeasti onnistumisen tunteella.

2.1 Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän (MAA) opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle sellaiset matemaattiset valmiudet, joista on hyötyä ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa [9, s. 118].

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa. Hänen tulisi rohkaistua kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin. Oppilaan tulisi ymmärtää ja osata käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppia arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä. Hänen tulisi oppia näkemään matemaattinen tieto loogisena rakenteena ja kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan [9, s. 118].

Pitkän matematiikan opiskelija harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä. Tärkeätä on myös harjaantuminen mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita sekä tarkoituksenmukaisten matemaattisten menetelmien, teknisten apuvälineiden ja tietolähteiden käyttäminen [9, s. 118].

2.2 Matematiikan lyhyt oppimäärä

Matematiikan lyhyen oppimäärän (MAB) opetuksen tehtävänä on tarjota valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa. Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä. Opiskelija myös saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään sekä oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa. Tavoitteena on, että hän rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen [9, s. 125].

Oppilaan tulisi hankkia sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille. Hänen tulisi sisäistää matematiikan merkitys välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä. Opinnoissaan oppilas saa käsityksen matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta sekä harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatioita ja arvioimaan sen luotettavuutta. Opetuksessa tutustutaan myös matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä ja opitaan käyttämään esimerkiksi erilaisia kuvioita ja kaavioita ajattelun apuna [9, s. 125].

2.3 Oppimäärien yhteneväisyyksiä ja eroavaisuuksia

Näkyvin ero pitkän ja lyhyen matematiikan oppimäärien välillä Lukion opetussuunnitelmien perusteissa 2003 [9, s. 118–128] on kurssien määrä: pitkässä matematiikassa pakollisia kursseja on kymmenen ja valtakunnallisia syventäviä kursseja kolme, kun taas lyhyessä matematiikassa pakollisia kursseja on kuusi ja valtakunnallisia syventäviä kursseja kaksi. Kun yksi lukion kurssi vastaa karkeasti 38 opetustuntia, pitkän matematiikan opiskelija opiskelee pakollisia kursseja 152 opetustuntia lyhyen matematiikan opiskelijaa enemmän. Kolmevuotisessa lukiossa se tarkoittaa noin 50 opetustuntia vuodessa.

Lukion pitkän matematiikan opetuksen tavoitteena on antaa lyhyttä matematiikkaa selvästi teoreettisemmat ja syvällisemmät tiedot ja taidot opiskelijalle. Vaikka myös lyhyessä matematiikassa tulisi saada käsitys matemaattisen tiedon luonteesta, keskitytään lyhyen matematiikan opetuksessa pitkää matematiikkaa enemmän jokapäiväisiin käytännön matemaattisiin taitoihin [9, s. 118–128].

Joillekin pitkän matematiikan kursseille voidaan löytää lähes vastaavat sisällöt lyhyen matematiikan kursseista. Lyhyen matematiikan kurssien sisältö on kuitenkin suppeampi kuin vastaavissa pitkän matematiikan kursseissa. Kurssin Matemaattisia malleja II (MAB6) sisältö on lisäksi pitkän matematiikan puolella sisällytetty useisiin eri kursseihin. Opetussuunnitelmia vertaillessa voidaan todeta, että sellaisia aiheita, joita pitkän matematiikan opiskelijat pakollisissa kursseissa käyvät läpi, mutta lyhyen matematiikan lukijat eivät, ovat esimerkiksi analyyttinen geometria ja integraalilaskenta. Sen sijaan talousmatematiikka ei kuulu pitkän matematiikan oppimäärään, vaikka lyhyen matematiikan lukijoille tarjotaan valtakunnallinen syventävä kurssi Talousmatematiikka (MAB7) [9, s. 118–128]. Monissa kouluissa on kuitenkin päädytty ratkaisuun, jossa talousmatematiikan kurssi on sekä pitkän että lyhyen matematiikan lukijoille yhteinen, ja edellä mainituille kurssi on koulukohtainen soveltava kurssi.

Yleisesti ottaen voidaan todeta, että pitkän matematiikan oppimäärä sisältää lyhyen matematiikan oppimäärän mutta myös paljon muuta. Ainoa poikkeus tästä on jo mainittu talousmatematiikka, joka valtakunnallisesti kuuluu vain lyhyen matematiikan oppimäärään valinnaisena syventävänä kurssina. Sekä pitkän että lyhyen matematiikan opetukseen kuuluu oleellisesti jatko-opintovalmiuden antaminen [9, s. 118, 125]. Mielenkiintoista voisikin olla tutkia, millaisten opiskelijoiden tarpeisiin nämä oppimäärät vastaavat ja mitä jatko-opintomahdollisuuksia lyhyen matematiikan valitseminen pitkän sijaan sulkee pois tai vaikeuttaa.

2.4 MAB4- ja MAA7-kurssit

Tässä tutkielmassa vertaillaan lukion lyhyen matematiikan pakollisen Matemaattinen analyysi (MAB4) -kussin ja pitkän matematiikan pakollisen Derivaatta (MAA7) -kurssin opetussisältöjä derivoimissääntöjen osalta. Kummassakin kurssissa derivaatta kuuluu keskeisiin sisältöihin. Molemmissa kursseissa käsitellään erityisesti polynomifunktion derivaattaa.

MAB4-kurssin tavoitteena on, että opiskelija tutkii funktion muutosnopeutta numeerisin ja graafisin menetelmin, ymmärtää derivaatan käsitteen muutosnopeuden mittana, osaa tutkia polynomifunktion kulkua derivaatan avulla sekä oppii sovellusten yhteydessä määrittämään polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon. Kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu polynomifunktion derivaatta, polynomifunktion merkin ja kulun tutkiminen, polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen sekä erilaisten graafisten ja numeeristen menetelmien käyttäminen [9, s. 126].

MAA7-kurssin opiskeltuaan opiskelijan tulisi osata määrittää rationaalifunktion nollakohdat ja ratkaista yksinkertaisia rationaaliepäyhtälöitä, omaksua havainnolliset käsitykset funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta sekä määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaattoja. Tavoitteena on myös osata tutkia derivaatan avulla polynomifunktion kulkua ja määrittää sen ääriarvot sekä osata määrittää rationaalifunktion suurin ja pienin arvo sovellusongelmien yhteydessä. Kurssin keskeisimpiä sisältöjä ovat rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö, funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta, polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen sekä polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen [9, s. 121–122].

Lukion lyhyessä matematiikassa derivaattaa ei käsitellä MAB4-kurssin lisäksi muissa kursseissa. Pitkässä matematiikassa sen sijaan derivaatan käsittelemistä jatketaan myös pakollisissa MAA8- ja MAA9-kursseissa. Myös integraalilaskennan kurssi MAA10 liittyy läheisesti derivaattaan. Pitkän matematiikan syventävillä kursseilla MAA12 ja MAA13 syvennetään lisäksi differentiaalilaskennan osaamista [9, s. 122–128]. Näin ollen tässä tutkielmassa esitetyt derivoimissäännöt eivät pitkän matematiikan osalta ole ainoita, jotka koko lukion oppimäärään sisältyvät. Sen sijaan lyhyen matematiikan osalta derivoimissääntöjä ei lukion matematiikassa käsitellä muita kuin ne, jotka tässä tutkielmassa esitellään.

3 Matemaattinen teoria

Tässä luvussa esitetään derivointisääntöihin liittyvä matemaattinen teoria siten, kun se Tampereen yliopiston Informaatiotieteiden yksikön matematiikan ja tilastotieteen perusopintoihin kuuluvan MTTMP1 Analyysi 1 -opintojakson yhteydessä on esitetty. Lukuvuonna 2013–2014 kyseisen opintojakson opetus perustui luentomateriaaleihin [5], joita on myös tässä tukielmassa käytetty lähteenä matemaattiselle teorialle.

3.1 Funktion raja-arvo

Olkoon f funktio, joka on määritelty avoimella välillä I lukuun ottamatta mahdollisesti yhtä pistettä $a \in I$.

Määritelmä 3.1. Funktiolla f on pisteessä a *raja-arvo* A, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Huomautus. Toinen mahdollinen raja-arvon merkintätapa on

$$f(x) \to A, \text{ kun } x \to a$$

Huomautus. Funktion raja-arvon määritelmästä seuraa, että

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h).$$

Esimerkki 3.1. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = c$. Tällöin

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (ja kaikilla $\delta > 0$), joten funktion raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 3.2. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ ja $a \in \mathbf{R}$. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to a} f(x) = a.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, ja oletetaan, että $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$. Tällöin

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta_\varepsilon = \varepsilon,$$

joten tulos seuraa suoraan funktion raja-arvon määritelmästä.

Esimerkki 3.3. Olkoon $f : \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}.$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{3}.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\delta_\varepsilon = \min\{1, 6\varepsilon\}$, ja oletetaan, että

$$0 < |x-1| < \delta_\varepsilon.$$

Tällöin $|x-1| < 6\varepsilon$. Lisäksi $|x-1| < 1$, joten $x > 0$. Jos $x \neq -2, 1$, niin

$$\frac{x-a}{x^2+x-2} = \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

joten

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3} \right| \\
&= \left| \frac{3-(x+2)}{3(x+2)} \right| \\
&= \frac{|1-x|}{3\,|x+2|} \\
&= \frac{1}{3(x+2)} \cdot |x-1| \\
&< \frac{1}{6} \cdot |x-1| \\
&< \frac{1}{6} \cdot 6\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Määritelmä 3.2. Funktiolla f on pisteessä a *oikeanpuoleinen raja-arvo* A, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } a < x < a + \delta.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A.$$

Määritelmä 3.3. Funktiolla f on pisteessä a *vasemmanpuoleinen raja-arvo* A, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } a - \delta < x < a$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A.$$

Lause 3.1. *Funktiolla f on raja-arvo, jos ja vain jos sillä on samat toispuoleiset raja-arvot. Toisin sanoen*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = A.$$

Todistus. Suunta '$\Rightarrow$' on raja-arvon määritelmän perusteella ilmeinen. Tarkastellaan suuntaa '$\Leftarrow$'. Valitaan $\varepsilon > 0$. Jos

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \text{ ja } \lim_{x \to a-} f(x) = A,$$

niin toispuoleisten raja-arvojen määritelmien nojalla
on olemassa sellaiset

$$\begin{aligned} &\delta_1 > 0, \quad \text{jolle } |f(x) - A| < \varepsilon, \text{kun } a < x < a + \delta_1 \\ ja \quad &\delta_2 > 0, \quad \text{jolle } |f(x) - A| < \varepsilon, \text{kun } a - \delta_2 < x < a. \end{aligned}$$

Merkitään $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ja valitaan sellainen x, että $0 < |x - a| < \delta$. Jos $x > a$, niin

$$a < x < a + \delta \leq a + \delta_1,$$

ja jos $a < x$, niin

$$a - \delta_2 \leq a - \delta < x < a.$$

Kummassakin tapauksessa

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

joten funktion raja-arvon määritelmän perusteella

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

□

3.2 Funktion jatkuvuus

Määritelmä 3.4. Olkoon funktio f määritelty jossakin pisteen a ympäristössä (piste a mukaan luettuna). Tällöin f on *jatkuva pisteessä* a, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a) < \varepsilon| \text{ aina, kun } |x - a| < \delta,$$

eli jos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Määritelmä 3.5. Funktio f on *oikealta jatkuva pisteessä* a, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a) < \varepsilon| \text{ aina, kun } a \leq x < a + \delta,$$

eli jos

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a),$$

ja *vasemmalta jatkuva pisteessä* a, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a) < \varepsilon| \text{ aina, kun } a - \delta < x \leq a$$

eli jos

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a).$$

Huomautus. Edeltävien määritelmien ja lauseen 3.1 nojalla f on jatkuva pisteessä a silloin ja vain silloin, kun f on sekä vasemmalta että oikealta jatkuva pisteessä a.

3.3 Funktion derivaatan määritelmiä ja perusominaisuuksia

Määritelmä 3.6. Olkoon funktio f määritelty pisteen x jossakin ympäristössä piste x mukaan luettuna. Jos raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa, sanotaan, että funktio f on *derivoituva* pisteessä x. Kyseistä raja-arvoa kutsutaan tällöin funktion f *derivaataksi* pisteessä x ja merkitään $f'(x)$.

Huomautus. Edellisessä määritelmässä esiintyvää osamäärää

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

sanotaan funktion f erotusosamääräksi pisteessä x.

Huomautus. Derivaatan määritelmässä esiintyvä raja-arvo voidaan esittää myös muodossa

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Huomautus. Muita mahdollisia derivaatan merkitsemistapoja ovat esimerkiksi

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad Df(x), \quad D_x f(x).$$

Esimerkki 3.4. Olkoon $f(x) = x^2$. Tällöin $f'(x) = 2x$, sillä

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \frac{h^2 + 2xh}{h} \\
&= h + 2x \to 2, \text{kun } h \to 0.
\end{aligned}$$

Määritelmä 3.7. Mikäli raja-arvo

$$f'(x+) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa, sanotaan sitä funktion f oikeanpuoliseksi derivaataksi pisteessä x. Vastaavasti mikäli raja-arvo

$$f'(x-) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa, sanotaan sitä funktion f vasemmanpuoliseksi derivaataksi pisteessä x.

Määritelmä 3.8. Funktiota f sanotaan derivoituvaksi avoimella välillä (a, b), jos se on derivoituva välin jokaisessa pisteessä, ja derivoituvaksi suljetulla välillä $[a, b]$, jos lisäksi $f'(a+)$ ja $f'(b-)$ ovat olemassa.

Lause 3.2. *Jos funktio f on derivoituva pisteessä x, niin f on jatkuva pisteessä x.*

Todistus. Jos f on derivoituva pisteessä x, niin

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Olkoon $h \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x+h) &= h \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \\ &\to 0 \cdot f'(x) + f(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

kun $h \to 0$. Siis f on jatkuva pisteessä x. □

3.4 Derivoimissääntöjä

Seuraavana esitetyt esimerkit ovat sellaisia, jotka Analyysi 1 -monisteessa [5] annetaan esimerkkeinä derivaatoista, mutta lukiokursseissa ne on annettu lauseina. Lukiokursseissa niitä kutsutaan derivoimissäännöiksi tai -kaavoiksi.

Esimerkki 3.5 (Vakiofunktion derivaatta)**.** Olkoon $f(x) = c$, missä $c \in \mathbf{R}$. Tällöin $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, sillä jos $h \neq 0$, niin

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0.$$

Esimerkki 3.6 (Identtisen funktion derivaatta)**.** Olkoon $f(x) = x$. Tällöin $f'(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, sillä jos $h \neq 0$, niin

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Esimerkki 3.7 (Vakion siirtosääntö)**.** Olkoon $f(x) = cg(x)$, missä $c \in \mathbf{R}$ ja $g(x)$ on kaikkialla derivoituva funktio. Tällöin $f'(x) = cg'(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, sillä jos $h \neq 0$, niin

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{cg(x+h)-cg(x)}{h} = c \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = c \cdot g'(x).$$

Lause 3.3. *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia pisteessä x. Tällöin myös funktiot*

$$f+g,\ f-g,\ fg,\ kf (k \in \mathbf{R}) \text{ ja } \tfrac{f}{g} \text{ (kun } g(x) \neq 0)$$

ovat derivoituvia pisteessä x ja
(i) $(f+g)' = f' + g'$,
(ii) $(f-g)' = f' - g'$,
(iii) $(fg)' = f'g + g'f$
(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Todistus. (i) Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}$$

(ii) Tulos seuraa kohdista (i) ja (iii), kun funktioksi g valitaan $-g$.
(iii) Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] \\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

(iv) Osoitetaan, että

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

Laskemalla saadaan

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)' &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} \\
&= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

Tällöin väite seuraa kohdasta (iv), sillä

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + \frac{-g'}{g^2} \cdot f = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

□

Esimerkki 3.8 (Potenssifunktion derivaatta)**.** Olkoon $f(x) = x^n$, $n \geq 2$. Osoitetaan induktiota käyttäen, että $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \geq 2$.

Perusaskel. Esimerkin 3.4 nojalla tiedämme, että $Dx^2 = 2x = 2x^{2-1}$.

Induktioaskel. Teemme induktio-oletuksen, jonka mukaan

$$Dx^k = kx^{k-1}, \text{kun } k \geq 2.$$

Tällöin tulon derivoimissäännön (Lause 3.3, kohta (iv)) mukaan myös funktio

$$g(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k$$

on kahden derivoituvan funktion tulona derivoituva ja

$$Dx^{k+1} = D(x \cdot x^k) = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}.$$

Johtopäätös. Induktioperiaatteen mukaan

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

kaikilla kokonaisluilla $n \geq 2$.

4 Lisäesimerkkejä

Esimerkki 4.1. Olkoon funktio $f = (3x^2 - 4)(6x - 5)$. Tällöin f on derivoituva kaikkialla, ja $f'(x) = 54x^2 - 30x - 24$, sillä

$$\begin{aligned}
D(3x^2 - 4)(6x - 5) &= [D(3x^2 - 4)] \cdot (6x - 5) + [D(6x - 5)] \cdot (3x^2 - 4) \\
&= 6x \cdot (6x - 5) + 6 \cdot (3x^2 - 4) \\
&= 36x^2 - 30x + 18x^2 - 24 \\
&= 54x^2 - 30x - 24.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.2. Olkoon funktio $f = \frac{1+x}{1+x^2}$. Tällöin f on derivoituva kaikkialla, ja

$$f'(x) = \frac{1 - 2x - x^2}{(1 + x^2)^2}, \text{ sillä}$$

$$\begin{aligned}
D\frac{1 + x}{1 + x^2} &= \frac{D(1 + x) \cdot (1 + x^2) - (1 + x) \cdot D(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} \\
&= \frac{1 \cdot (1 + x^2) - (1 + x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} \\
&= \frac{1 - 2x - x^2}{(1 + x^2)^2}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.3. Olkoon funktio $f = \frac{1}{(1+x^2)^3}$. Tällöin f on derivoituva kaikkialla, ja

$$f'(x) = -\frac{6x}{(1 + x^2)^4}, \text{ sillä}$$

$$\begin{aligned}
D\frac{1}{(1 + x^2)^3} &= D(1 + x^2)^{-3} \\
&= -3 \cdot (1 + x^2)^{-4} \cdot 2x \\
&= -\frac{6x}{(1 + x^2)^4}.
\end{aligned}$$

5 Derivoimissääntöjen tarkastelua

Tässä luvussa esitellään, mitkä derivoimissäännöt esitellään kolmessa eri lukion lyhyen matematiikan ja kolmessa eri lukion pitkän matematiikan oppikirjoissa. Lyhyen matematiikan oppikirjoista tarkastelun kohteena ovat kirjat Kertoma 4! [10], Lyhyt matikka 4 [1] ja Sigma 4 [2]. Pitkän matematiikan osalta tarkastellaan kirjoja Matematiikan taito 7 [3], Pitkä matematiikka 7 [4] ja Pyramidi 7 [6].

5.1 Derivoimissäännöt lukion lyhyessä matematiikassa

Kertoma 4!

Kertoma-kirjassa määritellään graafisten esitysten avulla ensin funktion keskimääräinen ja hetkellinen muutosnopeus funktion sekantin ja tangentin kulmakertoimina. Tämän jälkeen derivaatta esitetään funtion muutosnoputena tietyssä pisteessä [10, s. 83].

Määritelmä 5.1. Funktion muutosnopeutta tietyssä pisteessä kutsutaan funtion derivaataksi. Derivaatta määrittelee funktion, jonka arvo tietyssä pisteessä kertoo funktion tangentin kulmakertoimen arvon. Funktion derivaatan arvoa pisteessä $(x_0, f(x_0))$ merkitään $f'(x_0)$.

Kertoma-kirjassa esitellään ensin graafinen derivointi ja jatketaan sitten polynomifunktion derivaattaan. Funktion kulkua tutkitaan derivaatan avulla. Kirjassa puhutaan myös funktion ääriarvokohdista, joiden lähellä funktion muutosnopeus lähenee nollaa. Ääriarvokohdassa derivaatta saa arvon nolla, ja ääriarvokohtaan piirretty tangentti on x-akselin suuntainen suora. Kirjassa kerrotaan, että korkeamman asteen polynomifunktioiden kuvaajien piirtäminen on vaikeaa, joten graafisen derivoinnin avulla saadaan vain derivaatan likiarvoja. Niinpä polynomifunktioita tutkitaan derivaattafunktion avulla. Näin päästään derivoimissääntöihin [10, s. 88–89].

Lause 5.1. *Potenssifunktion* $f(x) = x^n$ *derivaattafunktio on* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Lause 5.2. *Vakiofunktion* $f(x) = a$ *derivaattafunktio on* $f'(x) = 0$.

Lause 5.3 (Vakion siirtosääntö)**.** *Funktion* $f(x) = ax^n$ *derivaattafunktio on* $f'(x) = anx^{n-1}$.

Lause 5.4 (Summan derivoimissääntö)**.** $D(f + g) = Df + Dg$

Lyhyt matikka 4

Lyhyt matikka -kirjassa funktion muutosnopeudesta käytetään nimitystä funktion kasvunopeus [1, s. 32].

Määritelmä 5.2 (Kasvunopeus)**.** Kasvukäyrästä saadaan selville kasvunopeus jollakin hetkellä, kun piirretään kasvukäyrää sivuava suora, niin sanottu *käyrän tangentti*. Kasvunopeuden ilmaisee tangentin kulmakerroin

$$\frac{\text{y:n muutos}}{\text{x:n muutos}}.$$

Kirjan seuraavassa luvussa määritellään funktion derivaatta [1, s. 38].

Määritelmä 5.3 (Funktion derivaatta)**.** Funktion f kuvaajalle muuttujan arvon a kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on *funktion f derivaatta kohdassa a*.

Huomautus. Ehtona derivaatan olemassaololle kohdassa a on, että funktion kuvaajalle voidaan piirtää muuttujan a arvon kohdalle yksikäsitteinen tangentti.

Seuraavassa luvussa Lyhyt matikka -kirjassa määritellään derivaattafunktio sekä sen yhteydessä derivoimissääntöjä [1, s. 47–49].

Määritelmä 5.4 (Derivaattafunktio)**.** Funktio $f'(x)$, jonka arvo kohdassa x on funktion f derivaatta kohdassa x, on funktion f *derivaattafunktio*.
Jos tunnetaan funktion f derivaattafunktion lauseke, sen avulla voidaan laskea funktion f derivaatta missä tahansa kohdassa.

Lause 5.5 (Funktioiden x^2 ja x sekä vakiofunktion derivaattafunktiot)**.**

- *Funktion x^2 derivaattafunktio on $2x$.*
- *Funktion x derivaattafunktio on vakiofunktio 1.*
- *Vakiofunktion c derivaattafunktio on vakiofunktio 0.*

Huomautus (Derivointimerkki D). Kun funktio ilmaistaan pelkästään lausekkeella nimeämättä sitä f, g tms., derivoiminen voidaan merkitä derivointimerkin D avulla. Esimerkiksi $\mathrm{D}(x^2 + x) = 2x + 1$.

Tämän jälkeen Lyhyt matikka -kirjassa käsitellään toisen asteen polynomifunktion kulkua ja käydään läpi geometrisiä sovelluksia. Myöhemmin määritellään potenssin derivoimiskaava [1, s. 78].

Lause 5.6 (Potenssifunktion x^n derivoiminen)**.** *Jokainen potenssifunktio x^n, missä n on positiivinen kokonaisluku, voidaan derivoida käyttäen kaavaa*

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

.

Lause 5.7 (Polynomifunktion derivoiminen)**.** *Polynomifunktio derivoidaan termeittäin niin, että derivoidaan jokainen muuttujan potenssi.*

Sigma 4

Myös Sigma-kirjassa käsitellään aluksi funktion muutosnopeutta. Derivaatta määritellään tangentin kulmakertoimen avulla [2, s. 45]

Määritelmä 5.5 (Funktion derivaatta)**.** Funktion f derivaatta kohdassa $x = a$ on sama kuin kohtaan $x = a$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin k.

$$f'(a) = k$$

Graafisen derivoinnin jälkeen esitetään derivoimissääntöjä ja -kaavoja [2, s. 54–60].

Lause 5.8. *Ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax$ (a on vakio) derivaatta:*

$$f'(x) = a$$

Huomautus. Jos funktio on vakiofunktio $f(x) = k$ (k on vakio), kuten $f(x) = 4$, on sen derivaatta aina 0.

Lause 5.9. *Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = x^2$ derivaatta:*

$$f'(x) = 2x$$

Lause 5.10. *Potenssifunktion $f(x) = x^n$ derivaatta:*

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Lause 5.11 (Vakion siirtosääntö)**.**

$$Dkf = kDf, \textit{ missä } k \textit{ on vakio}$$

Lause 5.12 (Summan ja erotuksen derivointi)**.**

$$D(f + g) = Df + Dg$$

5.2 Derivoimissäännöt lukion pitkässä matematiikassa

Matematiikan taito 7

Kuten lyhyen matematiikan kirjoissakin pitkän matematiikan oppikirjoissa derivaatan käsitettä lähestytään funktion muutosnopeuden ja graafisen merkityksen kautta. Määritelmät ovat kuitenkin lyhyttä matematiikkaa teoreettisempia. Matematiikan taito -kirja määrittelee ensin sekantin kulmakertoimen ja erotusosamäärän, minkä jälkeen päästään derivaatan määritelmään [3, s. 65].

Määritelmä 5.6 (Derivaatta)**.** Funktion $y = f(x)$ *derivaatta kohdassa* x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mikäli tämä raja-arvo on olemassa. Tällöin f on kohdassa x_0 *derivoituva*.

Huomautus. Derivaatan geometrinen merkitys on funktion f kuvaajan pisteestä $(x_0, f(x_0))$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Derivaatta ilmoittaa funktion f muutosnopeuden kohdassa x_0.

Matematiikan taito -kirjassa käsitellään myös funktion jatkuvuutta, joka lyhyen matematiikan kirjoissa sivuutetaan [3, s. 67].

Lause 5.13 (Derivoituvuus ja jatkuvuus)**.** *Derivoituva funktio on aina jatkuva. Jatkuva funktio ei ole välttämättä derivoituva.*

Derivointisääntöjä varten määritellään myös derivaattafunktio [3, s. 70–71].

Määritelmä 5.7 (Derivaattafunktio)**.** Funktion $y = f(x)$ *derivaattafunktion* f' arvo $f'(x)$ on funktion f derivaatta kohdassa x. *Derivoiminen* tarkoittaa derivaattafunktion muodostamista. Derivaattafunktio f' on määritelty kaikissa niissä kohdissa x, joissa f on derivoituva. Derivaattafunktiota voidaan kutsua lyhyesti myös derivaataksi, ellei väärinkäsityksen vaaraa ole.

Lause 5.14 (Vakiofunktion ja identtisen funktion derivaatta)**.** *Vakiofunktion $f(x) = c$ derivaatta on 0. Identtisen funktion $f(x) = x$ derivaatta on 1. Toisin sanoen*

$$Dc = 0, Dx = 1$$

Matematiikan taito -kirjassa esitellään myös korkeamman kertaluvun derivaatat. Seuraavassa luvussa käsitellään derivoimissääntöjä [3, s. 77–82].

Lause 5.15 (Summan derivoimissääntö)**.** *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia välillä I. Tällöin funktio $f + g$ on derivoituva tällä välillä. Sen derivaatta on yhteenlaskettavien derivaattojen summa eli*

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x).$$

Lause 5.16 (Tulon derivoimissääntö)**.** *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia välillä I. Tällöin funktio fg on derivoituva tällä välillä. Sen derivaatta saadaan kertomalla tulon kumpikin tekijä toisen tekijän derivaatalla ja laskemalla näin saadut tulokset yhteen eli*

$$D(f(g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Lause 5.17 (Vakiotekijän siirtosääntö)**.** *Olkoon funktio f derivoituva välillä I ja olkoon c vakio. Tällöin funktio cf on derivoituva tällä välillä ja $D(cf(x)) = cf'(x)$.*

Lause 5.18 (Potenssin derivoimissääntö)**.** *Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Potenssifunktio $f(x) = x^n$ on kaikkialla derivoituva ja $f'(x) = nx^{n-1}$. Toisin sanoen*

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Lause 5.19 (Yleistetty potenssin derivoimissääntö)**.** *Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku ja olkoon f välillä I derivoituva funktio. Tällöin funktio $g(x) = f(x)^n$ on derivoituva tällä välillä ja*

$$g'(x) = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

Toisin sanoen

$$Df(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

Lause 5.20 (Osamäärän derivoimissääntö)**.** *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia välillä I. Tällöin funktio* $\frac{f}{g}$ *on derivoituva tämän välin kaikissa niissä kohdissa* x*, joissa* $g(x) \neq 0$*, ja*

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Edellämainitut lauseet myöskin todistetaan Matematiikan taito -kirjassa täsmällisesti. Derivaattaa sovelletaan tehtävissä, joissa määritetään käyrän tangenttia ja normaalia, nopeuteen ja kiihtyvyyteen liittyvissä soveltavissa tehtävissä sekä funktion ääriarvoja ja ja jatkuvan funktion ominaisuuksia tutkittaessa [3].

Pitkä matematiikka 7

Myös Pitkä matematiikka -kirjassa käytetään funktion muutosnopeudella nimitystä funktion kasvunopeus. Derivaattaa lähestytään näin havainnollisuuden kautta [4, s. 42].

Lause 5.21. *Jos funktion* f *kuvaajalle voidaan piirtää yksiselitteisellä tavalla tangentti muuttujan ervon* a *kohdalle, niin funktio* f *on derivoituva kohdassa* a*. Tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa a. Se merkitään* $f'(a)$*.*

Pitkä matematiikka -kirjan seuraavassa luvussa määritellään Matematiikan taito -kirjan tavoin derivaatta erotusosamäärän raja-arvona [4, s. 51].

Määritelmä 5.8 (Erotusosamäärä)**.** Jos suora leikkaa funktion f kuvaajan muuttujan arvojen a ja x kohdalla pisteissä $(s, f(a))$ ja $(x, f(x))$, suoran kulmakerroin on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Lauseke on *funktion f erotusosamäärä kohdassa* a.

Määritelmä 5.9 (Derivaatta)**.** Jos funktion f erotusosamäärällä kohdassa a on raja-arvo kohdassa a, niin funktio f on *derivoituva kohdassa* a.
Raja-arvoa kutsutaan funktion f *derivaataksi kohdassa* a ja sitä merkitään $f'(a)$. Siis

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Samassa kappaleessa käsitellään vielä derivaatan ominaisuuksia [4, s. 54–55].

Lause 5.22 (Vakiolla kerrotun funktion derivaatta)**.**

$$(kf)'(a) = kf'(a),$$

missä merkintä kf *tarkoittaa funktiota, jonka arvo jokaisessa kohdassa on funktion* f *arvo kerrottuna luvulla* k *eli* $(kf)(x) = kf(x)$*.*

Lause 5.23 (Funktioiden summan derivaatta)**.**

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

missä merkitä $f + g$ tarkoittaa funktiota, jonka arvo jokaisessa kohdassa on funktioiden f ja g arvojen summa, eli $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Edelliset lauseet on Pitkä matematiikka -kirjassa myös todistettu erotusosamäärän raja-arvoa käyttäen. Seuraavassa luvussa syvennytään derivaattafunktioon [4, s. 58–62].

Määritelmä 5.10 (Derivaattafunktio)**.** Funktio f', jonka arvo on funktion f derivaatta jokaisessa kohdassa, jossa funktio f on derivoituva, on funktion f *derivaattafunktio*. Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan *derivoimiseksi*.

Lause 5.24 (Vakiofunktion ja potenssifunktion derivoiminen)**.**

- $Dc = 0$ *Vakiofunktion derivaattafunktio on vakiofunktio 0.*
- $Dx = 1$ *Funktion x derivaattafunktio on vakiofunktio 1.*
- $Dx^2 = 2x$ *Funktion x^2 derivaattafunktio on funktio $2x$.*

Yleisesti, kun n on positiivinen kokonaisluku:

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

.

Lause 5.25 (Polynomifunktion derivoiminen)**.** *Polynomifunktio derivoidaan termeittäin niin, että derivoidaan jokainen muuttujan potenssi.*

Tämän jälkeen Pitkä matematiikka -oppikirjassa tutkitaan käyrän tangenttia, polynomifunktion kulkua, polynomifunktion pienimmän ja suurimman arvon määrittämistä sekä soveltavia tehtäviä edellä mainituista aiheista. Vasta sitten esitetään derivoimissäännöt funktioiden tulolle, funktion potenssille ja funktioiden osamäärälle [4, s. 111–120].

Lause 5.26 (Funktioiden tulon derivaatta)**.** *Derivoituvien funktioiden f ja g tulofunktion fg derivaattafunktio on*

$$(fg)' = f'g + fg'$$

eli

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Lause 5.27 (Funktion potenssin derivaatta)**.** *Funktion f potenssi f^n, missä n on positiivinen kokonaisluku, derivoidaan kaavalla*

$$Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x).$$

Lause 5.28 (Funktioiden osamäärän derivaatta)**.** *Funktioiden f ja g osamäärän $\frac{f}{g}$ derivaattafunktio on*

$$D\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Funktio $\frac{f}{g}$ ja sen derivaattafunktio eivät ole määriteltyjä nimittäjän g nollakohdissa.

Pyramidi 7

Pyramidi-oppikirjassa derivaattaa lähestytään ensin graafisesti funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimena. Sen jälkeen annetaan derivaatalle määritelmä [6, s. 125–126].

Määritelmä 5.11. Oletetaan, että funktio f on määritelty välillä $]x_1, x_2[$ ja $x_0 \in]x_1, x_2[$. Jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on olemassa, niin funktio f on *derivoituva kohdassa* x_0.

Erotusosamäärän raja-arvoa sanotaan funktion f *derivaataksi kohdassa* x_0 ja merkitään $f'(x_0)$.

Derivaatta on tangentin kulmakerroin.

Jos funktiolla on derivaatta avoimen välin I jokaisessa kohdassa, funktiota sanotaan *derivoituvaksi avoimella välillä* I.

Funktion derivaatan määritelmä annetaan Pyramidi-kirjassa [6, s. 125] myös muodossa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Seuraavassa luvussa esitellään derivoimissäännöt, joista todistetaan säännöt 1, 2 ja 7. Säännöt 5 ja 8 todistetaan harjoitustehtävissä [6, s. 133, 140].

Lause 5.29 (Derivoimissääntöjä)**.** *Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia ja c on vakio.*

1. $Dc = 0$ — *vakiofunktion derivaatta*
2. $Dx = 1$ — *identtisen funktion derivaatta*
3. $Dx^n = nx^{n-1}, n \in \mathbf{Z}$ — *potenssifunktion derivaatta*
4. $D(cf) = c(Df)$ — *vakion siirto*
5. $D(f + g) = Df + Dg$ — *summan derivaatta*
6. $D(f - g) = Df - Dg$ — *erotuksen derivaatta*
7. $D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f$ — *tulon derivaatta*
8. $D(\frac{f}{g}) = \frac{(Df) \cdot g - (Dg) \cdot f}{g^2}$ — *osamäärän derivaatta*

Huomautus.

- Edellisten sääntöjen mukaan polynomifuktio ja rationaalifunktio ovat derivoituvia (määrittelyjoukossaan).
- Derivoituva funktion on *aina* jatkuva.
- Kaikki jatkuvat funktiot eivät ole derivoituvia.

- Mikään epäjatkuva funktio ei ole derivoituva.

Tämän jälkeen Pyramidi-kirjassa derivaatan avulla määritetään käyrien tangenttien ja normaaleiden yhtälöitä ja tutkitaan derivoituvan funktion kasvamista ja vähenemistä. Lisäksi tutkitaan funktion kulkua ääriarvojen avulla. Kirjaan kuuluu myös erityiset Lisätietoa-sivut, joissa esitellään muun muassa potenssifunktion derivoimiskaavan todistus sekä Rollen lause ja väliarvolause todistuksineen [6, s. 221–228].

5.3 Vertailua

Lyhyen matematiikan oppikirjat

Yleisesti ottaen kaikkien kolmen tarkastelun kohteena olleen lukion lyhyen matematiikan oppikirjan sisältö derivoimissääntöjen osalta on hyvin samankaltainen. Sama pätee myös kaikkiin tarkasteltuihin kolmeen pitkän matematiikan oppikirjaan. Kirjoissa on kuitenkin myös joitakin eroavaisuuksia.

Lyhyen matematiikan oppikirjat lähestyvät derivaatan käsitettä graafisen esityksen kautta, vaikka sanamuodot ja esitystavat hieman poikkeavatkin toisistaan. Kaikki kirjat esittävät derivaatan funktion hetkellisenä muutos- tai kasvunopeutena. Jokaisessa kirjassa funktion derivaatta tietyssä pisteessä määritellään kyseisessä kohdassa funktiolle piirretyn tangentin kulmakertoimena.

Derivoimissäännöistä kaikissa lyhyen matematiikan oppikirjoissa esitellään samat: potenssifunktion derivaatta, vakiofunktion derivaatta, vakion siirtosääntö ja summan derivoimissääntö. Kertoma-kirjasssa esitetään suoraan yleinen potenssifunktion derivoimissääntö, kun taas Sigma- ja Lyhyt matikka -kirjoissa annetaan esimerkinomaisesti ensin säännöt ensimmäisen ja toisen asteen polynomifunktioiden sekä vakiofunktion derivoimiselle.

Derivoimissääntöjä ei tarkastelun kohteena olleissa lyhyen matematiikan oppikirjoissa todisteta. Sigma-kirjassa ensimmäisen ja toisen asteen polynomifunktioiden derivoimissääntö perustellaan kuitenkin graafisesti. Esitystavoiltaan selkeimmältä lyhyen matematiikan oppikirjoista omasta mielestäni tuntuu Lyhyt matematiikka, mutta ulkoasultaan eniten miellyttää Kertoma. Kertomaa voisi kutsua myös matemaattisesti täsmällisimmäksi tarkastelluista oppikirjoista. Sigma-kirja, joka on ainoa lukion lyhyen matematiikan oppikirja, jota olen itse käyttänyt opetuksessa, on kuitenkin myös jäsentelyltään looginen.

Myös derivoimissääntöihin liittyvien tehtävien osalta lukion lyhyen matematiikan oppikirjoissa on eroja. Lyhyt matikka -kirjan tehtävissä derivoidaan aluksi vain ensimmäisen ja toisen asteen polynomifunktioita sekä vakiofunktioita. Tämän jälkeen seuraa soveltavampia tehtäviä esimerkiksi toisen asteen polynomifunktion kulkuun liittyen. Vasta myöhemmin käsitellään korkeamman asteen polynomifunktioiden derivointia. Sigma- ja Kertoma-kirjoissa sen sijaan yleisen polynomifunktion derivoiminen esitetään jo aikaisemmassa vaiheessa, joten jo ensimmäisissä derivointitehtävissä käsitellään myös kolmannen ja sitä korkeamman asteen polynomifunktion derivaattoja.

Polynomifunktioiden derivoimissääntöjä käytetään lyhyen matematiikan oppikirjoissa erityisesti funktion kulun tutkimiseen. Sääntöjä sovelletaan muun muassa tasogeometriaan, avaruusgeometriaan, talouteen ja fysiikkaan liittyvissä tehtävissä. Lisäksi Kertoma-kirja esittelee sovelluksia myös maantieteeseen ja biologiaan.

Pitkän matematiikan oppikirjat

Kaikissa pitkän matematiikan oppikirjoissa käsitellään useampia derivoimissääntöjä kuin lyhyen matematiikan oppikirjoissa: potenssifunktion derivaatan, vakiofunktion derivaatan, vakion siirtosäännön ja summan derivoimissäännön lisäksi pitkässä matematiikassa esitetään myös funktioiden tulon ja osamäärän derivaatta. Lisäksi Matematiikan taito ja Pitkä matematiikka -oppikirjoissa esitetään myös derivoimissääntö funktion potenssille. Pyramidi-kirjassa ei tätä sääntöä anneta. Lisäksi pitkässä matematiikassa käsitellään derivaattoja myös myöhemmissä kursseissa. Niissä annetaan derivoimissäännöt esimerkiksi trigonometrisille funktioille, käänteisfunktioille ja yhdistetylle funktiolle.

Pyramidi-kirjassa derivoimissäännöt on koottu yhdelle sivulle [6, s. 133]. Myös Matematiikan taito -kirjassa derivoimissäännöt ovat vain yhden luvun keskeisenä sisältönä [3, s. 77–83], kun taas Pitkä matematiikka -kirjassa derivoimissääntöjen käsittely on jaettu selkeästi kahteen osaan: aluksi annetaan peruskaavat polynomifunktion derivoimiselle [4, s. 58–63] ja sovelletaan niiden käyttöä, ja myöhemmin käsitellään myös derivoimissäännöt funktioiden tulolle ja osamäärälle ja funktion potenssille [4, s. 111–123].

Pitkä matematiikka -kirjassa derivoimissäännöt todistetaan erotusosamäärää käyttäen. Pyramidi-kirjassa säännöistä todistetaan osa erotusosamäärän raja-arvon avulla. Matematiikan taito -kirjassa perustelu tehdään vielä täsmällisemmin. Matematiikan taito -kirjan matemaattisen teorian esitystapa on tarkastelluista kolmesta kirjasta täsmällisin. Siinä käytetään nimityksiä määritelmä ja lause, ja lauseita seuraa niiden todistus. Kyseisessä kirjassa derivoimissääntöjen johdot on haluttu esittää, vaikka ne eivät opetussuunnitelman mukaan kuulu kurssiin keskeisimpiin sisältöihin. Kirjan kirjoittajat nimittäin ovat sitä mieltä, että sellaisten opiskelijoiden, jotka tavoittelevat jatko-opintokelpoisuutta matemaattis-luonnontieteellis-teknisillä aloilla, on perehdyttävä niihin [3, s. 3].

6 Pohdintaa

Lukion matematiikassa uusia aiheita lähestytään usein käytännönläheisesti ja havainnollistamisen kautta. Pitkän matematiikan oppikirjat käyttävät lyhyen matematiikan oppikirjoja täsmällisempiä matemaattisia merkintöjä. Täsmällisyys vaihtelee kuitenkin myös saman oppimäärän eri kirjasarjojen välillä. Lisäksi pitää tietysti ottaa huomioon, että oppikirjat toimivat vain opetuksen tukena ja että myös opettajan esitys- ja merkintätavat nousevat suureen rooliin lukiokurssien puitteissa.

Pelkästään oppikirjoja keskenään vertailemalla ei vielä välttämättä voida antaa tarkkaa kuvaa lukion kurssien oppisisällöistä;. Opetussuunnitelman mukainen opetus voidaan antaa muutoinkin kuin oppikirjoja käyttäen tai kirjaa voidaan käyttää kurssilla vain osittain. Kunkin kurssin opiskelukäytänteet valitsee viimekädessä kurssia pitävä opettaja itse, ja oman kokemukseni mukaan moni opettaja pitää oppikirjoja tärkeinä työvälineinä. Näin ollen oppikirjan roolikin on yhä edelleen lukion matematiikan opiskelemisessa merkittävä.

Monilla aloilla lukion jälkeissä koulutuksessa tarvitaan matematiikan osaamista. Esimerkiksi yliopistossa matematiikkaa tarvitaan erityisesti tekniikan, luonnontieteiden, lääketieteen ja kauppatieteen opinnoissa. Pitkän matematiikan opintoja lukiossa pidetäänkin usein edellytyksenä joillekin aloille, ja pitkän matematiikan päättöarvosanasta tai ylioppilaskokeen arvosanasta voi saada enemmän lisäpisteitä kuin lyhyen matematiikan arvosanoista. Lisäksi pääsykoetehtävät saattavat liittyä pitkän matematiikan oppimäärään tai opintojen alussa voidaan olettaa, että pitkän matematiikan oppimäärä on uudella opiskelijalla hallussa, ja lyhyttä matematiikkaa lukiossa opiskelleille voidaan tarjota täydentäviä kursseja.

Kuitenkin jatko-opintokelpoisuus sekä lyhyttä matematiikka että pitkää matematiikkaa opiskelleilla on teoriassa yhtäläinen, vaikka tämänkin tutkimuksen perusteella voidaan todeta, että asiasisällöt lukion lyhyessä ja pitkässä matematiikassa poikkeavat jonkin verran toisistaan. Pitkä matematiikka on jonkin verran kasvattanut suosiotaan: vuodesta 2002 vuoteen 2010 on matematiikan pitkän oppimäärän suorittaneiden määrä lievästi kasvanut ja lyhyen oppimäärän suorittaneiden määrä vastaavasti laskenut. Naisten osuus pitkän matematiikan suorittaiden joukosta on hivenen kasvanut [7, s. 108].

Tämän tutkimuksen perusteella voidaan huomata eroja lukion lyhyen ja pitkän matematiikan derivoimissääntöjen opetuksessa. Ensinnäkin: lyhyen matematiikan opiskelijat oppivat derivoimaan vain polynomifunktioita, kun taas pitkässä matematiikassa derivoitavat funktiot voivat olla monimutkaisempiakin. Pitkän matematiikan MAA7-kurssilla käsitellään tulon ja osamäärän derivaattaa, jotka lyhyen matematiikan MAB4-kurssilta puuttuvat. Lisäksi pitkässä matematiikassa derivoimissääntöjä ja -kaavoja opiskellaan myös MAA7-kurssia seuraavilla muilla kursseilla – sekä pakollisilla kursseilla että valtakunnallisilla syventävillä kursseilla. Toki koulukohtaisilla soveltavilla kursseilla voidaan opiskella differentiaalilaskentaan liittyviä asioita niin lyhyessä kuin pitkässäkin matematiikassa, mutta tämä lienee harvinaista.

Toisena näkyvänä erona lyhyen ja pitkän matematiikan derivoimissääntöjen opetuksessa on merkintöjen matemaattinen täsmällisyys. Vaikka kursseillä käytetyt esitystavat riippuvat tietysti sekä kurssin opettajasta että käytössä olevasta oppikirjasta, voidaan yleisesti ottaen todeta, että pitkässä matematiikassa matemaattiset merkinnät ovat täsmällisempiä. Lisäksi pitkässä matematiikassa ainakin osa annetuista lauseista todistetaan, kun taas lyhyessä matematiikassa lauseita ei perustella tai ne perustellaan havainnollisesti.

Viitteet

[1] A. Aalto, J. Kangasho, O. Kylliäinen, A. Metiäinen, J. Mäkinen & J. Tahvanainen, Lyhyt matikka 4. 1. painos, WSOY Oppimatemariaalit Oy, 2006.

[2] M. Ekonen, S. Hassinen, K. Hemmo & T. Taskinen, Sigma 4. 1. painos, Sanoma Pro Oy, 2012.

[3] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, T. Laurinolli & T. Sankilampi, Matematiikan taito 7. 1. painos, WSOY Oppimatemariaalit Oy, 2006.

[4] J. Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, M- Salmela & J. Tahvanainen, Pitkä matematiikka 7. 1. painos, WSOY Oppimatemariaalit Oy, 2006.

[5] P. Koivisto, Analyysi 1 -kurssimoniste. Tampereen yliopisto, 2013. <http://www.uta.fi/sis/mtt/mttmp1/moniste.html>. Luettu 10.6.2014.

[6] P. Kontkanen, J. Lehtonen, R. Liira, K. Luosto & A. Ronkainen, Pyramidi 7. 1. painos, Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2006.

[7] Kumpulainen, T. (toim.) Koulutuksen tilastollinen vuosikirja 2011. Årsbok för utbildningsstatistik 2011. Koulutuksen seurantaraportit 2012:5. Opetushallitus, 2012. <http://www.oph.fi/download/141011_Koulutuksen_tilastollinen_vuosikirja_2011.pdf>. Luettu 17.6.2014.

[8] K. Linnanmäki, Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka – Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2., uudistettu painos, Niilo Mäki Instituutti, 241–254, 2004.

[9] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet. Vammalan kirjapaino Oy, 2003.

[10] K. Parmanen, P. Portaankorva-Koivisto & S. Sirviö, Kertoma 4!. 2. korjattu painos, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2012.