TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Teemu Pitkänen

Modaalilogiikan täydellisyyslauseesta

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2015

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee modaalilogiikkaa ja erityisesti sen täydellisyyslausetta, jonka osalta rajoitutaan tutkimaan heikkoa täydellisyyttä. Modaalilogiikka on oma logiikan tutkimusalansa ja sen tarkoituksena on tutkia modaliteettien, eli välttämättömyyden ja mahdollisuuden, ominaisuuksia loogisessa tarkastelussa. Tutkielmaan käytettyjä lähdeteoksia on hyödynnetty vaihtelevissa määrin tutkielman eri luvuissa, joskin usein saman luvun sisällä on käytetty monia eri lähteitä. Lähdeteosta *Johdatus modaalilogiikkaan* ([1]) on käytetty lähteenä erityisesti luvuissa 2, 3 ja 4, minkä lisäksi teosta *Modal Logic* ([2]) on hyödynnetty tutkielman luvuissa 3, 4 ja 5. Nämä olivat tutkielman tärkeimmät lähdeteokset. Edellä mainittujen lisäksi lähdeteosta *A New Introduction to Modal Logic* ([3]) käytettiin lähteenä luvuissa 3 ja 5, kun taas lähdeteosta *Modal Logic: An Introduction* ([4]) hyödynnettiin luvuissa 2 ja 4.

Modaalilogiikka perustuu ajatukseen siitä, että on olemassa monia epätyhjiä ja toisistaan erillään olevia maailmoja, joissa jokaisessa eri kaavojen totuusarvot ovat tapauskohtaisesti määräytyviä. Nämä maailmat muodostavat rakenteen, johon sisältyvän kaksipaikkaisen relaation avulla ilmaistaan, ovatko kaksi eri maailmaa relaatiossa keskenään. Mikäli näin on, niin relaatiossa jälkimmäisenä mainittu maailma on vaihtoehto siinä ensimmäisenä ilmoitetulle maailmalle. Mikäli jotkin maailmat eivät ole relaatiossa keskenään, niin nämä maailmat eivät ole saavutettavissa toisistaan. Näissä relaatiosuhteiden määräämissä tilanteissa käytetään modaalioperaattoreita ilmaisemaan sitä, koska eri kaavat ovat tietystä maailmasta katsoen välttämättä tosia tai mahdollisesti tosia.

Modaalilogiikka on monimutkainen logiikan ala ja sitä voidaan tarkastella monin eri tavoin, mutta aina siinä kuitenkin esiintyy kolme peruspiirrettä. Näistä ensimmäinen on, että modaalilogiikan kieli on yksinkertainen, mutta silti sen avulla on helppo puhua relaatioita sisältävistä rakenteista. Tämä johtuu siitä, että modaalilogiikan kieli koostuu normaalin propositiologiikan symboleista ja loogisista konnektiiveista sekä näiden joukkoon lisätyistä modaalioperaattoreista. Modaalioperaattorit siis ilmentävät lauseiden välttämättömyyttä ja mahdollisuutta tietyssä maailmassa. Näiden käsitteiden logiikan tarkasteleminen onkin modaalilogiikan päämääränä. Toinen peruspiirre modaalilogiikalle on se, että modaalilogiikan kieli mahdollistaa tapauskohtaisen ja sisältä käsin tarkasteltavan näkökulman relaatioita sisältäviin rakenteisiin. Tämä tarkoittaa sitä, että modaalilogiikan kaavoja tarkastellaan rakenteiden sisällä ja tietyssä tilassa, joka riippuu yksilöllisesti tilanteesta. Modaalioperaattorin tarkoituksena on tällöin kertoa, että mistä maailmoista on sallittua hakea tietoa kyseessä olevan kaavan totuusarvosta. Toisin sanoen modaalioperaattorilla varustetun kaavan totuusarvo riippuu siitä, mitkä maailmat ovat vaihtoehtoisia sille maailmalle, jossa kaavan totuutta tarkastellaan. Kolmas periaate on, että modaalilogiikan kieli ei ole vain eristäytynyt ja formaali järjestelmä. 1970-luvulta alkaen on ollut selvää, että on hyödyllistä tutkia modaalilogiikan yhteyttä muihin matemaattisen logiikan tutkimusaloihin. Näiden kolmen perusperiaatteen johdosta modaalilogiikkaa on helppoa ja hyödyllistä soveltaa myös muihin matematiikan aloihin ja näin ollen se on keino saada niihin uusia näkökulmia. Edellä mainittujen periaatteidensa ansiosta se on myös joustava ja tehokas työkalu relaatioita sisältävien rakenteiden kanssa työskentelyyn.

Tämän tutkielman päämääränä on käydä läpi olennaisimmat modaalilogiikan peruskäsitteet ja lähtökohdat, joiden avulla päädytään lopulta koko modaalilogiikan osa-alueen kannalta tärkeisiin luotettavuuden ja täydellisyyden käsitteisiin. Täydellisyyttä käsiteltäessä rajoitutaan tarkastelemaan vain heikkoa täydellisyyttä; on siis olemassa myös vahva täydellisyys, mutta sen tarkasteleminen sivuutetaan tutkielmassa. Lindenbaumin lemma tulee olemaan tutkielmassa tärkeässä osassa; se nimittäin käsittelee modaalilogiikan kannalta olennaisten ristiriidattomien kaavajoukkojen laajentamista maksimaalisesti ristiriidattomiksi kaavajoukoiksi. Varsinaisena tutkielman huipentumana ja tärkeimpänä lauseena toimii modaalilogiikan täydellisyyslause, joka puolestaan perustelee modaalilogiikassa käytettävien systeemien luotettavuuden ja täydellisyyden.

2 Peruskäsitteistö ja semantiikka

2.1 Peruskäsitteistö

Puhuttaessa modaalilogiikasta on ensimmäiseksi määriteltävä siinä käytettävä *perusaakkosto*. Tähän aakkostoon kuuluvien *perussymbolien* avulla voidaan muodostaa jokainen *kaava*, joka kuuluu tarkastelemaamme modaalilogiikan kieleen. Toisaalta se myös sisältää kaikki mahdolliset symbolit, joista kaava voidaan muodostaa: täten aakkostoon kuulumattomia symboleita sisältävät merkkijonot eivät kuulu modaalilogiikan kieleen. Tämä aakkosto ei kuitenkaan ole aina sama, vaan sen laajuus riippuu tilanteesta ja se voidaan näin ollen aina valita tapauskohtaisesti. Usein ei ole tarpeen käyttää koko aakkostoa, jolloin on tapana valita sen suppeampi osajoukko, joka on tilanteeseen riittävä.

Määritelmä 2.1. Modaalilogiikan kielen perussymbolit ovat seuraavat:

1. lausemuuttujat: q_1, q_2, q_3, $\ldots$,
2. konnektiivit: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,
3. välttämättömyysoperaattori: $\Box$,
4. mahdollisuusoperaattori: $\Diamond$ ja
5. sulut: (,).

Tästä perussymbolien listasta kohtien 1, 2 ja 5 symbolit ovat aiemmin tuttuja propositiologiikasta ja niiden kanssa toimiminen sekä perusominaisuudet oletetaan tässä tutkielmassa tunnetuksi. Sen sijaan kohtien 3 ja 4 välttämättömyys- ja mahdollisuusoperaattorit ovat tyypillisiä lähinnä modaalilogiikalle ja määritellään niiden merkitys seuraavaksi.

Määritelmä 2.2. Mahdollisuusoperaattori $\Diamond q$ luetaan ”tarkasteltavassa maailmassa mahdollisesti q” tai ”q on mahdollisesti totta tarkasteltavassa maailmassa”. Symbolia $\Diamond$ voidaan kutsua nimellä ”timantti”.

Määritelmä 2.3. Välttämättömyysoperaattori $\Box q$ luetaan ”tarkasteltavassa maailmassa välttämättä q” tai ”q on välttämättä totta tarkasteltavassa maailmassa”. Symbolia $\Box$ voidaan kutsua nimellä ”laatikko”.

Näistä edellä mainituista aakkoston symboleista voidaan edelleen muodostaa erilaisia modaalilogiikan kieleen kuuluvia kaavoja erityisten *kaavanmuodostussääntöjen* avulla. Ne määräävät yksiselitteisesti kieleen kuuluvat kaavat, sillä muulla tavoin ei kyseessä olevaan kieleen kuuluvia kaavoja voida muodostaa. Seuraavaksi esiteltävän määritelmän tarkoituksena on esitellä nämä kaavojen muodostamista koskevat säännöt.

Määritelmä 2.4. Säännöt kaavojen muodostamiseen perussymboleita käyttäen kuuluvat seuraavasti:

1. Lausemuuttujat q_1, q_2, q_3, ... ovat kaavoja.
2. Mikäli Q on kaava, niin tällöin myös $\neg Q$, $\Box Q$ ja $\Diamond Q$ ovat kaavoja.
3. Jos P ja Q ovat molemmat kaavoja, niin tällöin kaavoja ovat myös $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \rightarrow Q)$ ja $(P \leftrightarrow Q)$.
4. Näin saadaan kaikki kaavat; mitään muita kaavoja ei ole.

Käytetään kaavojen joukolle tässä tutkielmassa merkintää ML.

2.2 Semantiikka

Modaalilogiikassa kaavojen totuusarvoja tutkittaessa keskeistä on se, että kaavoja tarkastellaan jostakin tietystä *maailmasta* käsin. Näiden maailmojen lukumäärää ei ole rajoitettu ja niiden lukumäärä sekä niiden välillä vallitsevat relaatiot määräytyvät tapauskohtaisesti. Näistä maailmoista taasen muodostuu kyseisen tapauksen kaikkien mahdollisten maailmojen joukko.

Määritelmä 2.5. *Kripke-kehys* on sellainen rakenne $\langle W, R \rangle$, jossa W on epätyhjä kaikkien mahdollisten maailmojen joukko ja R on näiden maailmojen välillä vallitseva kaksipaikkainen relaatio, joka kertoo sen, että mitkä maailmat voidaan saavuttaa tarkasteltavasta maailmasta.

Esimerkki 2.6. Tarkastellaan tapausta $\langle W, R \rangle = \langle \{1, 2, 3\}, \{(1, 3), (2, 3)\} \rangle$. Tällöin kaikkien mahdollisten maailmojen joukko käsittää kolme maailmaa: 1, 2 ja 3. Relaatio R kertoo esimerkiksi sen, että näistä maailmoista maailmat 1 ja 3 ovat relaatiossa keskenään ja että maailma 3 on saavutettavissa maailmasta 1. Merkinnän $(1, 3) \in R$ sijasta voidaan käyttää myös seuraavaa vaihtoehtoista merkintätapaa: $1R3$.

Modaalilogiikassa tutkittavilla kaavoilla on tutkittavasta maailmasta riippuva totuusarvo eli *valuaatio*. Tämä valuaatio kertoo jokaisen eri maailman kohdalla tutkittavan kaavan totuusarvon kyseisessä maailmassa. Merkitään tästä eteenpäin valuaatiota lyhenteellä V.

Määritelmä 2.7. Kun jo aiemmin määriteltyyn Kripke-kehykseen lisätään valuaatio V, saadaan aikaiseksi *Kripke-malli* $M = \langle W, R, V \rangle$.

Kun tarkastellaan kaavojen totuusarvoja Kripke-mallissa, niin kaavojen totuuksia merkitään vakiintuneilla tavoilla. Mikäli kaava Q on tosi mallin M maailmassa 1, merkitään $M, 1 \models Q$. Vastaavasti, jos kaava Q on epätosi mallin M maailmassa 1, merkitään $M, 1 \not\models Q$. Usein kontekstista on kuitenkin selvää, että missä mallissa M kaavojen totuusarvoja tarkastellaan,

jolloin voidaan käyttää lyhyempää merkintätapaa: $1 \models Q$ tai $1 \not\models Q$. Näiden merkintöjen avulla voidaankin määritellä konnektiivien ja operaattoreiden totuusehdot modaalilogiikalle tyypillisellä tavalla.
Kaavan Q *totuusjoukko* mallin M puitteissa on se mallin M mahdollisten maailmojen joukko, jossa kaava Q on tosi. Tätä merkitään notaatiolla $\|Q\|^M$, joka on siis joukko $\{w \in W \mid M, w \models Q\}$.

Määritelmä 2.8. Seuraavassa on lueteltu konnektiivien sekä välttämättömyysoperaattorin ja mahdollisuusoperaattorin totuusehdot:

1. $M, w \models \neg Q \Leftrightarrow M, w \not\models Q$,
2. $M, w \models (P \vee Q) \Leftrightarrow M, w \models P$ tai $M, w \models Q$,
3. $M, w \models (P \wedge Q) \Leftrightarrow M, w \models P$ ja $M, w \models Q$,
4. $M, w \models (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow M, w \not\models P$ tai $M, w \models Q$,
5. $M, w \models (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow M, w \models P$ ja $M, w \models Q$ tai $M, w \not\models P$ ja $M, w \not\models Q$,
6. $M, w \models \Box Q \Leftrightarrow Q$ on totta jokaisessa maailmassa w', jolle wRw',
7. $M, w \models \Diamond Q \Leftrightarrow Q$ on totta jossakin maailmassa w', jolle wRw'.

Määritelmä 2.9. Mikäli kaava Q on tosi jokaisessa mallin $M = \langle W, R, V\rangle$ maailmassa w, sanotaan kaavan Q tällöin olevan *validi* mallissa M. Tällöin merkitään $M \models Q$. Toisin sanoen $M \models Q \Leftrightarrow \forall w \in W : M, w \models Q$.

Kaavan validisuutta voidaan kuitenkin edellä mainitun tarkastelun lisäksi tutkia myös kehyksessä: kaava Q on validi kehyksessä $\langle W, R\rangle$, jos kaava Q on validi jokaisessa mallissa $\langle W, R, V\rangle$.

Määritelmä 2.10. Kaava Q on validi, jos se on validi kaikissa malleissa (tai yhtäpitävästi kaikissa kehyksissä). Tällöin merkitään $\models Q$.

Kaavan Q validisuutta ei ole pakko tarkastella kaikissa malleissa tai kaikissa kehyksissä, vaan voidaan myös rajoittua suppeampaan joukkoon eli johonkin mallien tai kehysten *luokkaan*. Tarkasteltaessa mallien luokkaa $\mathcal{M}$ pätee, että $\mathcal{M} \models Q$, jos $M \models Q$ aina, kun $M \in \mathcal{M}$. Kehysten luokassa $\mathcal{F}$ vastaavasti $\mathcal{F} \models Q$, jos $F \models Q$ aina, kun $F \in \mathcal{F}$. Lauselogiikan mukaan kaavat P ja Q ovat loogisesti ekvivalentit täsmälleen silloin, kun kaava $P \leftrightarrow Q$ on tautologia. Tämä ei kuitenkaan päde modaalilogiikan operaattoreiden kanssa toimittaessa, sillä ne eivät ole totuusfunktioita eikä niille siten voida muodostaa totuustauluja. Modaalilogiikan puolella määritelläänkin kaavojen P ja Q olevan keskenään loogisesti ekvivalentteja, jos niistä muodostettu ekvivalenssi $P \leftrightarrow Q$ on validi kaikissa kehyksissä. Tällöin merkitään, että $P \equiv Q$.

Välttämättömyys- ja mahdollisuusoperaattorit ovat myös ominaisuuksiltaan sellaisia, että niitä kutsutaan toistensa *duaaleiksi*. Tämä tarkoittaa sitä, että ne voidaan esittää toistensa avulla niin, että nämä kaksi erilaista esitystä ovat keskenään loogisesti ekvivalentit.

Lause 2.11. *Kun Q on kaava, niin seuraavat ominaisuudet pätevät:*

1. $\Box Q \equiv \neg\Diamond\neg Q$.
   Todistus*: olkoon $M = \langle W, R, V\rangle$ ja $w \in W$.*
   Oletetaan ensiksi, että $M, w \models \Box Q$, jolloin kaikissa niissä maailmoissa w', jotka ovat relaatiossa R maailman w kanssa, pätee $M, w' \models Q$. Näin ollen pätee myös, että kaikissa edellä mainituissa maailmoissa $M, w' \not\models \neg Q$, jolloin $M, w \not\models \Diamond\neg Q$ eli $M, w \models \neg\Diamond\neg Q$.
   Toisen suunnan todistuksessa oletetaan aluksi, että $M, w \models \neg\Diamond\neg Q$. Tällöin ei voi olla niin, että jossakin maailmassa w', joka on relaatiossa R maailman w kanssa, pätisi $M, w' \models \neg Q$. Tästä seuraa, että kaikissa edellä mainituissa maailmoissa $M, w' \models Q$, jolloin pätee $M, w \models \Box Q$. Näiden kahden päättelyketjun perusteella $M, w \models \Box Q \leftrightarrow \neg\Diamond\neg Q$. Nyt, koska mallista M ja maailmasta w ei oletettu mitään, on todistettu, että $\Box Q \equiv \neg\Diamond\neg Q$.

2. $\Diamond Q \equiv \neg\Box\neg Q$.
   Todistus*: olkoon $M = \langle W, R, V\rangle$ ja $w \in W$. Ensiksi oletetaan, että pätee $M, w \models \Diamond Q$, jolloin siis jossakin maailmassa w', joka on relaatiossa R maailman w kanssa, pätee $M, w' \models Q$. Täten pätee myös, että tässä maailmassa $M, w' \not\models \neg Q$, jolloin $M, w \not\models \Box\neg Q$ eli $M, w \models \neg\Box\neg Q$.*
   Lähdetään sitten toisesta suunnasta liikkeelle eli toiseksi oletetaan, että $M, w \models \neg\Box\neg Q$. Tällöin ei voi olla niin, että kaikissa maailmoissa w', jotka ovat relaatiossa R maailman w kanssa, pätisi $M, w' \models \neg Q$. Tästä seuraa, että vähintään yhdessä edellä mainituista maailmoista pätee $M, w' \models Q$, jolloin pätee myös, että $M, w \models \Diamond Q$. Näiden kahden päättelyketjun perusteella $M, w \models \Diamond Q \leftrightarrow \neg\Box\neg Q$. Nyt, koska mallista M ja maailmasta w ei oletettu mitään, on todistettu, että $\Diamond Q \equiv \neg\Box\neg Q$.

Kaavoja voidaan siis manipuloida ja muuttaa esitettäväksi toisten operaattoreiden tai loogisten konnektiivien avulla, kunhan alkuperäinen kaava ja muunneltu kaava ovat keskenään loogisesti ekvivalentteja. Tähän on myös määritelty tiettyjä kaavoja, joita esitellään hieman enemmän seuraavaksi. Lisäksi, päinvastoin kuin loogisten konnektiivien tapauksessa (lukuunottamatta negaatiota), modaalioperaattoreita voi esiintyä kaavassa useita peräkkäin, mitä käsitteleekin seuraava määritelmä.

Määritelmä 2.12. Modaalilogiikan kaavassa mahdollisesti olevia peräkkäisiä mahdollisuus- ja välttämättömyysoperaattorin esiintymiä kutsutaan *modaliteeteiksi*.

Kaksi peräkkäistä negaatiomerkkiä kumoaa aina toisensa, joten niiden peräkkäiset esiintymät voidaan aina sieventää muotoon, jossa ei esiinny modaliteetteja. Mahdollisuus- ja välttämättömyysoperaattoreiden kohdalla tilanne on monimutkaisempi, sillä niiden modaliteetteja sisältäviä kaavoja on joskus mahdollista sieventää, toisinaan taas ei. Tämä on täysin tapauskohtaista eli riippuu siitä, millaisessa systeemissä kaavoja tarkastellaan.

Esimerkki 2.13. Tässä esimerkissä havainnollistetaan, kuinka modaliteetteja ja duaaleja voidaan hyödyntää kaavojen muokkaamisessa.

1. $\neg\neg\Box(p \to q) \equiv \Box(p \to q) \equiv \neg\Diamond\neg(p \to q)$.
2. $\neg\Diamond((p \wedge q) \leftrightarrow p) \equiv \neg\neg\Box\neg((p \wedge q) \leftrightarrow p) \equiv \Box\neg((p \wedge q) \leftrightarrow p)$.

Modaalioperaattorit timantti $\Diamond$ ja laatikko $\Box$ toimivat myös toistensa lyhennysmerkintöinä seuraavassa lauseessa esiteltävällä tavalla.

Lause 2.14. *Seuraavat loogiset ekvivalenttisuudet ovat voimassa:*

1. $\neg\Diamond Q \equiv \Box\neg Q$.

2. $\neg\Box Q \equiv \Diamond\neg Q$.

Todistus. Todistus löytyy lähdeteoksesta *Johdatus modaalilogiikkaan* ([1]). $\Box$

Määritelmä 2.15. Kaavojen muuntamisessa voidaan käyttää hyödyksi yleisesti tunnettuja ja päteviksi todettuja *päättelysääntöjä*. Modaalilogiikassa nämä säännöt toimivat niin, että ne säilyttävät kaavan validisuuden tarkastelun kohteena olevassa systeemissä. Tämä tarkoittaa sitä, että aina, kun premissit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ovat valideja, niin näistä tehty johtopäätös Q on myös validi. Seuraavassa yleisesti tunnetut päättelysäännöt.

1. Modus ponens (MP):

$$\frac{P,\, P \to Q}{Q}.$$

2. Rule of Necessitation (RN):

$$\frac{Q}{\Box Q}.$$

3. Rule of Monotonicity (RM):

$$\frac{P \to Q}{\Box P \to \Box Q}.$$

4. Rule of Extensionality (RE):

$$\frac{P \leftrightarrow Q}{\Box P \leftrightarrow \Box Q}.$$

Modaalilogiikassa päättelysäännöt johtavat annettujen aksioomien avulla määritellyistä valideista kaavoista aina uusia valideja kaavoja. Kaavan validisuutta voidaan Kripke-semantiikassa tarkastella monista eri näkökulmista; tällaisia eri näkökulmia ovat mallit, mallien luokat, kehykset ja kehysten luokat. Sitä vastoin kaavan totuutta tarkastellaan mallin jossakin yksittäisessä maailmassa. Täten on helppo päätellä, että kaavan validisuus mallissa on vahvempaa astetta kuin sen validisuus esimerkiksi kyseessä olevan mallin jossakin luokassa. Jotkin validisuuden asteet ovat siis vahvempia kuin toiset ja näin ollen kaavan ollessa validi laajemmassa tarkastelussa, on se validi myös suppeammassa tilanteessa.

3 Modaalilogiikan systeemeistä

Modaalilogiikassa termillä *systeemi* tarkoitetaan sellaista kaavajoukkoa, joka on määritelty joko syntaktisten tai semanttisten sulkeumaehtojen avulla. Syntaktisessa vaihtoehdossa toimitaan niin, että kyseiselle kaavajoukolle annetaan sopivat aksioomat ja päättelysäännöt, jotka yhdessä muodostavat *aksioomasysteemin*. Tarkasteltavana oleva modaalilogiikan systeemi on tällöin joukko, jossa on alkioina edellä mainitun aksioomasysteemin teoreemat. Myöhemmin määritellään semanttisen vaihtoehdon toimintaperiaatteet. Tällaisen systeemin nimeäminen perustuu usein siihen, että mitkä aksioomat kyseisessä systeemissä ovat voimassa. Tämän lisäksi historiallisten syiden takia joillekin systeemeille on olemassa omat vakiintuneet nimityksensä. Tässä tutkielmassa esitellään tarkemmin modaalilogiikan historian kannalta erityisen merkitykselliset systeemit K, T, $S4$ ja $S5$.

Määritelmä 3.1. Olkoon ML kaikkien kaavojen joukko. Tällöin modaalilogiikan aksioomasysteemi on rakenne $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \mathcal{F} \rangle$, missä $\mathcal{L}$ on kaavojen joukon ML osajoukko ja $\mathcal{F}$ on joukko funktioita $(ML)^m \to ML$, $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Joukon $\mathcal{L}$ alkiot ovat aksioomia, kun taas joukon $\mathcal{F}$ alkiot ovat päättelysääntöjä.

Aksioomat ovat joko yksittäisiä kaavoja tai aksioomaskeemoja, joista ensimmäinen tapaus on itsensä selittävä. Jälkimmäinen vaihtoehto taas tarkoittaa sitä, että kyseessä oleva aksiooma voidaan esittää käyttäen siinä lausemuuttujien sijasta metavariaabeleja eli lyhennemerkintöjä. Kun aksioomaskeemassa kaikki metavariaabelit korvataan niitä vastaavilla objektikielen kaavoilla, saadaan aikaan objektikieleen kuuluva kyseisen aksioomaskeeman edustaja eli instanssi. Aksioomien (tai vaihtoehtoisesti kaikkien aksioomaskeeman instanssien) tulee olla loogisesti tosia kaavoja, jotta aksiomatisointi olisi mielekäs. Seuraavaksi esiteltävässä määritelmässä esitellään ehdot niin sanotulle *normaalille systeemille*, joka näyttelee tärkeätä osaa modaalilogiikassa.

Määritelmä 3.2. Joukkoa, jonka alkioina ovat tietyt aksioomat toteuttavat kaavat, kutsutaan *normaaliksi systeemiksi*, mikäli se sisältää kaikki tautologiat ja tämän lisäksi se noudattaa neljää seuraavassa esiteltyä ehtoa.

1. Joukko sisältää kaikki instanssit aksioomaskeemasta
   (K): $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$,
   minkä lisäksi se on suljettu seuraavien kolmen säännön suhteen:

2. välttämättömyyssääntö (RN): $\dfrac{Q}{\Box Q}$,

3. modus ponens (MP): $\dfrac{P,\, P \to Q}{Q}$ ja

4. universaali substituutio (US): $\dfrac{Q}{Q[P/r]}$.

Universaalin substituution kaavassa esiintyvä merkintä $Q[P/r]$ tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että kaikki kaavassa Q esiintyvät lausemuuttujan r esiintymät korvataan kaavalla P.

Esimerkki 3.3. Havainnollistetaan aksioomaskeeman käsitettä normaalissa systeemissä esiintyvän aksioomaskeeman (K): $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ avulla. Se siis kuvastaa seuraavaa ääretöntä joukkoa: $\{\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q) \mid$ Q ja P ovat modaalilogiikan kaavoja.$\}$. Tässä tapauksessa esimerkiksi kaava $\Box((q \wedge p) \to (p \leftrightarrow q)) \to (\Box(q \wedge p) \to \Box(p \leftrightarrow q))$ on aksioomaskeeman (K) instanssi.

Aksioomasysteemin rakenteeseen sisältyvät päättelysäännöt vuorostaan kertovat, kuinka joistakin kaavoista voidaan päätellä jokin toinen kaava. Mikäli päättelysäännön f perusteella pystytään annetuista kaavoista $S_1, S_2, \ldots, S_m$ päättelemään uusi kaava $f(S_1, S_2, \ldots, S_m) = T$, voidaan kyseistä päättelysääntöä merkitä seuraavilla kahdella vaihtoehtoisella tavalla:

tapa 1: $\frac{S_1, S_2, \ldots, S_m}{T}$ tai tapa 2: $S_1, S_2, \ldots, S_m/T$.

Sekä aksioomien joukon että päättelysääntöjen joukon tulee olla *rekursiivinen*, jotta aksiomatisointi olisi mielekäs ja näin ollen siis hyödyllinen. Ensinnäkin aksioomien kohdalla tämä tarkoittaa sitä, että on oltava mahdollista selvittää aksioomien joukon $\mathcal{L}$ kaikki alkiot tietyn algoritmin avulla. Toisin sanoen: mikäli tunnetaan kaava L, on voitava selvittää, onko voimassa $L \in \mathcal{L}$.
Päättelysääntöjen tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että jos on annettu kaavat $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$ ja P, niin tulee olla mahdollista selvittää, onko olemassa päättelysääntöä $f \in \mathcal{F}$, jolle pätee $f(Q_1, Q_2, \ldots Q_m) = P$.

Määritelmä 3.4. *Deduktiolla* tarkoitetaan kaavan todistusta aksioomasysteemissä $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \mathcal{F} \rangle$. Tutkitaan esimerkiksi kaavan Q deduktiota, jolloin se on äärellinen jono, joka muodostuu kaavoista $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Tämän jonon viimeinen kaava $Q_m = Q$ ja kaikki jonossa olevat kaavat Q_j, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, toteuttavat täsmälleen toisen seuraavista ehdoista:

1. Q_j on aksiooma eli $Q_j \in \mathcal{L}$ tai
2. on olemassa päättelysääntö $f \in \mathcal{F}$, jolle pätee, että $f(Q_{j_1}, Q_{j_2}, \ldots, Q_{j_k}) = Q_j$, missä $j_i < j$ jokaisella $i = 1, 2, \ldots, k$.

Tällöin kaavan Q voidaan todeta olevan aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ *teoreema* ja tilannetta voidaan merkitä notaatiolla $\vdash_{\mathcal{S}} Q$.

Mikäli $\vdash_{\mathcal{S}} Q$, niin sanotaan, että kaava Q on pääteltävissä systeemissä $\mathcal{S}$ tai todistuva siinä. Usein on asiayhteydestä selvää, minkä aksioomasysteemin suhteen kaavaa tarkastellaan ja tällöin merkintä voidaan lyhentää muotoon $\vdash Q$. Aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ teoreemojen joukkoa $\Sigma = \{Q \mid \vdash_{\mathcal{S}} Q\}$ kutsutaan sen määräämäksi systeemiksi. Modaalilogiikassa tarkastellaan vain sellaisia deduktioita, joissa ei käytetä ollenkaan oletuksia. Tästä syystä määritelläänkin, että kaava Q on johdettavissa aksioomasysteemissä $\mathcal{S}$ kaavajoukosta Ψ, mikäli joko pätee, että $\vdash_{\mathcal{S}} Q$ tai jos on olemassa sellaiset alkiot $P_1, P_2, \ldots P_m$ joukossa Ψ, joille pätee $\vdash_{\mathcal{S}} (P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m \rightarrow Q)$. Seuraavaksi esitellään erilaisia systeemejä Kripke-malleihin $\langle W, R, V \rangle$ pohjaten.

Määritelmä 3.5. Kripke-semantiikan näkökulmasta minimaalinen systeemi K on pienin sellainen kaavajoukko, joka täyttää seuraavat neljä ehtoa.

1. (PL): mikäli kaava Q on tautologia, niin kaava $Q \in K$.
   Tämä pätee siitä huolimatta, että modaalioperaattoreita sisältävien kaavojen tautologisuutta ei voida tarkastella. Lauselogiikan tautologioihin saa nimittäin sijoittaa lausemuuttujien paikalle myös modaalilogiikan kaavoja ilman, että sen tautologisuus katoaa.
2. (K): jos kaavat P ja Q ovat kaavoja, niin tällöin niiden avulla muodostettu kaava $(\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)) \in K$.
3. (MP): jos kaavat $Q \in K$ ja $(Q \rightarrow P) \in K$, niin kaava $P \in K$.
4. (RN): jos kaava $Q \in K$, niin myös kaava $\Box Q \in K$.

Systeemiin (tai vaihtoehtoisesti ilmaistuna joukkoon) K kuuluvat siis kaikkien tautologioiden lisäksi myös kaikki ehdon (K) toteuttavat kaavat, minkä lisäksi se on suljettu sääntöjen (MP) ja (RN) suhteen. Näitä ehtoja soveltamalla voidaan siis muodostaa kaikki joukon K kaavat.

Esimerkki 3.6. Koska systeemiin K kuuluvat kaikki tautologiat, niin sen alkioita ovat muun muassa kaavat $(q \vee \neg q)$ ja $((q \vee p) \to (q \vee p))$. Tämän jälkeen voidaan todeta, että ehdon (K) perusteella systeemiin K kuuluu myös kaava $\Box(((q \vee p) \to (q \vee p)) \to (q \vee \neg q)) \to (\Box((q \vee p) \to (q \vee p)) \to \Box(q \vee \neg q))$. Edelleen, säännön (RN) perusteella, kaava $\Box(q \vee \neg q) \in K$.

Systeemi K on aksioomistaan johtuen verrattain heikko systeemi, mutta siihen ehtoja lisäämällä saadaan muodostettua vahvempia ja paremmin erilaisiin sovelluksiin sopivia systeemeitä. Se siis toimii eräänlaisena pohjana muille monimutkaisemmille systeemeille, joista seuraavassa esitellään systeemin T aksiomatisointi.

Määritelmä 3.7. Kun edellisessä määritelmässä esitettyihin systeemin K aksioomiin lisätään skeema (T), saadaan aikaiseksi systeemin T määrittelevä ehtojoukko:

(T): jos Q on kaava, niin $\Box Q \to Q \in T$ saadaan aikaiseksi systeemin T määrittelevä ehtojoukko.

Huomautus. Edellä esitellyssä systeemin K määritelmässä esiintyvät ehdot tulkitaan määritelmässä 3.7. niin, että niissä korvataan kaikki symbolin K esiintymät symbolilla T. Tämän lisäksi ehtoihin lisätään ehto (T), jolloin saadaan aikaan systeemin T aksiomatisointi. Täysin vastaavanlainen menettely toistetaan myöhemmin käsiteltävien systeemeiden $S4$ ja $S5$ määritelmien kohdalla.

Esimerkki 3.8. Skeema (T) on validi kehyksessä $\langle W, R \rangle$, jos ja vain jos relaatio R on refleksiivinen.
Todistetaan ensiksi väitteen se puoli, jossa oletuksena on relaation R refleksiivisyys: olkoon $w \in W$ sellainen maailma, jossa pätee $M, w \models \Box Q$. Relaation R refleksiivisyyden perusteella wRw, joten $M, w \models Q$. Siis jokaisessa mallin M maailmassa w pätee $M, w \models \Box Q \to Q$.
Todistetaan sitten väitteen toinen puoli, jossa pitää osoittaa, että jos kaava (T) on validi, niin relaation R on oltava refleksiivinen. Tehdään tämä vastaoletuksen avulla: oletetaan, että relaatio R ei ole refleksiivinen. Tarkastellaan maailmaa $w \in W$, jolle ei päde wRw. Lisäksi määritellään kaavan Q valuaatio V siten, että $V(Q) = W \backslash \{w\}$, jolloin $M, w \not\models Q$. Tällöin $M, w \models \Box Q$, mutta koska $M, w \not\models Q$, niin $M, w \not\models \Box Q \to Q$. Mutta koska oletuksen mukaan kaava $\Box Q \to Q$ on validi, niin vastaoletus on väärä ja relaatio R on refleksiivinen.

Edellä konstruoidusta systeemistä T voidaan edelleen muodostaa seuraava modaalilogiikan kannalta tärkeä systeemi, josta käytetään nimitystä $S4$. Tämä tapahtuu samalla menettelyllä kuin edellä eli jo määriteltyyn systeemin T aksiomatisointiin lisätään uusi aksioomaskeema.

Määritelmä 3.9. Kun siis systeemin T aksiomatisointiin lisätään uusi ehto (4), saadaan esitys systeemin $S4$ aksiomatisoinnille:

(4): jos Q on kaava, niin $(\Box Q \to \Box\Box Q) \in S4$.

Systeemiin $S4$ kuuluu siis jo yhteensä kuusi eri aksioomaa, joiden perusteella voidaan muodostaa kyseiseen systeemiin kuuluvien kaavojen joukko.

Esimerkki 3.10. Aksioomaskeema (4) on validi kehyksessä $M = \langle W, R\rangle$, jos ja vain jos relaatio R on transitiivinen.
Ensiksi esitetään todistus skeeman (4) validisuudelle sillä oletuksella, että relaatio R on transitiivinen: oletetaan, että $w_1 \in W$ on maailma, jossa $M, w_1 \models \Box Q$. On siis osoitettava, että $M, w_1 \models \Box\Box Q$, jolloin on siis osoitettava, että jokaiselle maailmalle w_2, jolle pätee $w_1 R w_2$, on voimassa $M, w_2 \models \Box Q$. Olkoon lisäksi w_3 sellainen maailma, jolle $w_2 R w_3$. Relaation R transitiivisuuden perusteella $w_1 R w_3$, jolloin $M, w_3 \models Q$. Täten siis $M, w_2 \models \Box Q$ ja näin ollen $M, w_1 \models \Box\Box Q$, jolloin $M \models \Box Q \to \Box\Box Q$.
Todistetaan väitteen toinen puoli eli se, että jos kaava (4) on validi, niin relaation R on oltava transitiivinen. Todistetaan tämä vastaoletuksen avulla eli oletetaan, että relaatio R ei ole transitiivinen. Tarkastellaan maailmoja $w_1, w_2, w_3 \in W$, joille pätee $w_1 R w_2$ ja $w_2 R w_3$, mutta ei päde, että $w_1 R w_3$. Määritellään nyt kaavaa Q koskeva valuaatio V siten, että $V(Q) = W \setminus \{w_3\}$, jolloin siis pätee $M, w \models Q$ kaikilla sellaisilla maailmoilla w, joille pätee $w_1 R w$ ja lisäksi $M, w_3 \not\models Q$. Nyt $M, w_1 \models \Box Q$, mutta $M, w_1 \not\models \Box\Box Q$, mutta koska oletuksen mukaan kaava $(\Box Q \to \Box\Box Q)$ on validi, niin vastaoletus on väärä ja relaatio R on transitiivinen.

Lopulta systeemistä $S4$ päästään siihen jälleen yksi uusi aksiooma lisäämällä systeemiin $S5$. Tätä viimeiseksi lisättävää aksioomaa merkitään symbolilla (B) ja sen avulla saadaan siis aikaan systeemi $S5$, joka on modaalilogiikan mielessä hyvin kiinnostava systeemi.

Määritelmä 3.11. Systeemi $S5$ pitää siis sisällään kaikki samat aksioomat, kuin edellä esitetyt systeemit (K), (T) ja $(S4)$, mutta näiden lisäksi vielä yhden uuden aksiooman (B), joka kuuluu seuraavasti:

(B): jos Q on kaava, niin kaava $(Q \to \Box\Diamond Q) \in S5$.

Esimerkki 3.12. Aksioomaskeema (B) on validi kehyksessä $\langle W, R\rangle$, jos ja vain jos relaatio R on symmetrinen. Todistetaan kuten edellisissä esimerkeissä, että tämä väite pitää paikkansa.
Esitetään ensiksi todistus skeeman (B) validisuudelle sillä oletuksella, että relaatio R on symmetrinen: olkoon $w_1 \in W$ ja oletetaan, että $M, w_1 \models Q$. Oletetaan tämän lisäksi, että on olemassa jokin toinen maailma w_2, jolle $w_1 R w_2$ (mikäli näin ei olisi, niin siinä tapauksessa väite on aina triviaalisti totta). Olkoon siis tämä w_2 sellainen maailma, että $w_1 R w_2$. Koska relaatio

R on symmetrinen, niin pätee myös w_2Rw_1. Siis täten $M, w_2 \models \Diamond Q$ ja koska tämä pätee aina, kun w_1Rw_2, niin voidaan päätellä, että $M, w_1 \models \Box\Diamond Q$. Näin ollen $M \models Q \to \Box\Diamond Q$.
Toiseksi esitetään todistus sille, että jos kaava (B) on validi, niin relaation R on oltava symmetrinen. Todistetaan tämä vastaoletuksella, jonka mukaan relaatio R ei ole symmetrinen. Tarkastellaan maailmoja $w_1, w_2 \in W$, joille pätee w_1Rw_2, mutta ei ole voimassa w_2Rw_1. Lisäksi määritellään valuaatio V kaavalle Q siten, että $V(Q) = \{w_1\}$. Tällöin $M, w_1 \models Q$, mutta $M, w_2 \not\models \Diamond Q$, jolloin $M, w_1 \not\models \Box\Diamond Q$. Tämä on mahdotonta, sillä kaava $(Q \to \Box\Diamond Q)$ on oletuksen mukaan validi, joten vastaoletus on väärä ja täten relaatio R on symmetrinen.

Määritelmä 3.13. Kehys F kelpaa systeemille S silloin, kun kaikki systeemin S kaavat ovat valideja kehyksessä F.

Edellä suoritetut tarkastelut osoittavat, että systeemiin $S5$ kelpaavilla Kripke-malleilla on oltava relaationaan *ekvivalenssirelaatio*; relaation on siis oltava *refleksiivinen* $(\forall w_1 \in W : w_1Rw_1)$, *transitiivinen* $(\forall w_1, w_2, w_3 \in W : (w_1Rw_2 \wedge w_2Rw_3) \Rightarrow w_1Rw_3)$ ja *symmetrinen* $(\forall w_1, w_2 \in W : w_1Rw_2 \Rightarrow w_2Rw_1)$. Semanttisesti määriteltynä systeemi $S5$ on siis pienin sellainen joukko, jolla on alkioinaan kaikki kaikki sellaiset kaavat, jotka ovat valideja kaikissa Kripke-malleissa $M = \langle W, R, V\rangle$, joissa relaatio R on ekvivalenssirelaatio. Tämä todistetaan tutkielman myöhemmässä vaiheessa.
Aiemmin on todettu, että Kripke-mallin $\langle W, R, V\rangle$ osarakennetta $\langle W, R\rangle$ kutsutaan Kripke-kehykseksi ja sitä voidaan tarkastella omana kokonaisuutenaan. Edellä suoritettu tarkastelu voidaan siis perustaa mallien sijasta niitä vastaaviin kehyksiin niin, että kun V on valuaatio, on $\langle W, R, V\rangle$ kehykseen $\langle W, R\rangle$ liittyvä malli.

Määritelmä 3.14. Tarkastellaan kehystä $F = \langle W, R\rangle$, johon liittyy Kripkemalli M ja maailma $w \in W$. Näiden lisäksi tarkastellaan myös kehysten luokkaa $\mathcal{F}$ ja mallien luokkaa $\mathcal{M}$. Tällöin voidaan käyttää seuraavia merkintöjä.

1. $\mathrm{Th}(M, w) = \{Q \mid Q \in ML \wedge M, w \models Q\}$, jota sanotaan mallin M ja maailman w määräämäksi systeemiksi.

2. $\mathrm{Th}(M) = \{Q \mid Q \in ML \wedge M \models Q\}$, joka siis on mallin M määräämä systeemi.

3. $\mathrm{Th}(F) = \{Q \mid Q \in ML \wedge F \models Q\}$, jota sanotaan kehyksen F määräämäksi systeemiksi.

4. $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{Q \mid Q \in ML \wedge M \models Q$ jokaisella $M \in \mathcal{M}\}$, joka on mallien luokan $\mathcal{M}$ määräämä systeemi.

5. $\mathrm{Th}(\mathcal{F}) = \{Q \mid Q \in ML \wedge F \models Q$ jokaisella $F \in \mathcal{F}\}$, jota sanotaan kehysten luokan $\mathcal{F}$ määräämäksi systeemiksi.

4 Luotettavuus ja täydellisyys

4.1 Luotettavuus

Normaaleja systeemejä voidaan siis tutkia sekä semanttisesta että syntaktisesta näkökulmasta. Näistä semanttinen tarkastelu tapahtuu edellisen määritelmän avulla. Toisaalta syntaktisessa tarkastelussa käytetään hyväksi systeemille ominaista aksiomatisointia ja johdetaan teoreemoja sen avulla. Näiden kahden eri näkökulman välille linkin muodostavat käsitteet *luotettavuus* ja *täydellisyys*. Niiden merkitys on se, että niiden ollessa voimassa voidaan olla varmoja, että lopputulos on sama näkökulmasta riippumatta. Jotta luotettavuutta ja täydellisyyttä voitaisiin tarkastella, niin käsiteltävänä on oltava sekä jokin aksiomatisointi että jokin kehysluokka, joita voidaan verrata keskenään. Systeemi on luotettava, jos sen aksiomatisoinnin avulla johdettavien kaavojen joukko sisältyy tätä aksiomatisointia vastaavan kehysten luokan validien kaavojen joukkoon. Systeemin täydellisyys taas tarkoittaa sitä, että aksiomatisointia vastaavassa kehysten luokassa validit kaavat sisältyvät aksiomatisoinnin avulla johdettavien kaavojen joukkoon. Tässä alaluvussa selvitetään perusteellisemmin luotettavuuden käsite; seuraavassa alaluvussa on täydellisyyden vuoro.

Määritelmä 4.1. Olkoon $\mathcal{C}$ kehysten luokka (tai vaihtoehtoisesti mallien luokka, riippuen tarkasteltavasta tilanteesta). Systeemin aksiomatisointi $\mathcal{L}$ on luotettava (voidaan käyttää myös termiä *eheä*) suhteessa kehysten luokkaan (mallien luokkaan) $\mathcal{C}$, jos pätee, että kaikki aksioomasysteemin $\mathcal{L}$ teoreemat ovat valideja kehysten luokassa $\mathcal{C}$. Toisin sanoen $\mathcal{L}$ on luotettava suhteessa kehysten luokkaan $\mathcal{C}$, jos kaikille kaavoille Q ja kaikille struktuureille $C \in \mathcal{C}$ pätee, että kun $\vdash_{\mathcal{L}} Q$, niin tällöin $C \models Q$. Tällöin sanotaan, että aksioomasysteemi $\mathcal{L}$ on kehysten luokan $\mathcal{C}$ suhteen luotettava.

Kun todistetaan systeemin luotettavuutta esimerkiksi jonkin kehysten luokan $\mathcal{C}$ suhteen, tarvitsee osoittaa kaksi asiaa. Näistä ensimmäinen on se, että aksioomat ovat valideja kyseisessä luokassa $\mathcal{C}$ ja toinen on se, että päättelysäännöt säilyttävät validisuuden tässä kehysten luokassa $\mathcal{C}$. Luotettavuuden todistaminen on siis kohtuullisen yksinkertaista ja rutiininomainen toimenpide. Todistetaankin tässä vaiheessa, että kaikki systeemin (K) aksioomat ovat valideja kaikissa malleissa:

1. (PL): mikäli kaava Q on tautologia, niin kaava Q on validi.
   Todistus: kaavan Q tautologisuus tarkoittaa sitä, että vaikka siinä esiintyvien propositiosymboleiden paikalle sijoitetaisiin minkä tahansa totuusarvon omaavia kaavoja, niin silti tämän tautologiaksi tiedetyn kaavan Q totuusarvo säilyy kuitenkin aina samana eli totena. Tästä seuraa automaattisesti, että tautologiaksi tiedetty kaava Q on aina validi riippumatta maailmasta, jossa sitä tarkastellaan.

2. Osoitetaan, että kaava $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ on validi kaikissa kehyksissä.
   Todistus: olkoon malli $M = \langle W, R, V \rangle$ ja oletetaan lisäksi, että $M, w_1 \models \Box(P \rightarrow Q)$ ja $M, w_1 \models \Box P$. Olkoon $w_2 \in W$ mielivaltainen maailma, jolle pätee $w_1 R w_2$. Tällöin oletuksen nojalla $M, w_2 \models P \rightarrow Q$ ja $w_2 \models P$, mistä seuraa, että $M, w_2 \models Q$. Siis $M, w_1 \models \Box Q$. Koska malli M ja siihen kuuluva maailma w ovat mielivaltaisia, niin $\models (\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q))$.

3. Päättelysääntö (MP) säilyttää validisuuden kaikissa kehyksissä.
   Todistus: oletetaan, että kaavat Q ja $(Q \rightarrow P)$ ovat valideja ja tarkastellaan mallia $M = \langle W, R, V \rangle$ sekä sen maailmaa w. Koska kaava Q on validi, niin $M, w \models Q$ ja koska kaava $(Q \rightarrow P)$ on validi, niin $M, w \models (Q \rightarrow P)$. Tällöin implikaation totuusehtojen mukaan on oltava $M, w \models P$. Koska tämä siis pätee kaikilla malleilla ja kaikilla maailmoilla, niin myös kaava P on validi.

4. Välttämättömyyssääntö (RN) säilyttää validisuuden kaikissa kehyksissä.
   Todistus: oletetaan, että kaava Q on validi ja tarkastellaan mallia $M = \langle W, R, V \rangle$ sekä sen maailmoja w_1 ja w_2, joille pätee $w_1 R w_2$. Koska kaava Q on validi, niin erityisesti $M, w_2 \models Q$ ja näin ollen $M, w_1 \models \Box Q$. Siis, koska tämä pätee kaikilla malleilla M ja sen kaikilla maailmoilla w_1, niin kaava $\Box Q$ on myös validi.

4.2 Täydellisyys

Aksioomasysteemin ja sitä vastaavan kehysluokan täydellisyys tarkoittaa sitä, että kaikkien systeemissä olevien validien kaavojen on oltava johdettavissa. Tarkastelu suoritetaan siis suhteessa kehysten tai mallien luokkaan. Tässä tutkielmassa rajoitutaan täydellisyyden käsittelyssä siis vain heikkoon täydellisyyteen; vahvassa täydellisyydessä tarkasteltaisiin kaavajoukkojen loogisia seurauksia.

Määritelmä 4.2. Olkoon $\mathcal{C}$ mallien luokka (vaihtoehtoisesti kehysten luokka, riippuen jälleen tilanteesta). Systeemin aksiomatisointi $\mathcal{L}$ on heikosti täydellinen suhteessa mallien (kehysten) luokkaan $\mathcal{C}$, jos mille tahansa kaavalle Q pätee, että jos $\mathcal{C} \models Q$, niin $\vdash_{\mathcal{L}} Q$. Toisin sanoen: jos tiedetään, että kaava Q on validi mallien (kehysten) luokassa $\mathcal{C}$, niin tällöin tämä kaava Q on myös $\mathcal{L}$-pääteltävissä.
Tämä tarkoittaa sitä, että aksiomatisointi $\mathcal{L}$ on heikosti täydellinen suhteessa rakenteeseen M, jos se on heikosti täydellinen suhteessa joukkoon $\{\Theta\}$.
Systeemin aksiomatisoinnin heikko täydellisyys on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisella äärellisellä ristiriidattomalla kaavajoukolla (myös siis jokaisella ristiriidattomalla kaavalla) Θ on olemassa malli.

4.3 Kanoniset mallit

Täydellisyyslause on pohjimmiltaan lause, joka kertoo sen, että tarkasteltavalle systeemille on aina olemassa sopiva malli. Tämä todistetaan käytännössä siten, että pyritään etsimään jokin sellainen malli, jossa esimerkiksi kaikki systeemin $\mathcal{N}$ kaavat ovat valideja. Tämä tehtävä ei kuitenkaan aina ole helppo, joten syntyy seuraava tärkeä kysymys: kuinka tällaisia sopivia malleja voidaan rakentaa?
Edellä mainittuun kysymykseen on olemassa seuraavanlainen vastaus: haluttuja malleja voidaan rakentaa *maksimaalisesti ristiriidattomista* kaavajoukoista ja erityisesti näistä voidaan rakentaa *kanonisia malleja.* Tällaiset kanoniset mallit taas ovat modaalogiikassa erityisen tärkeitä siksi, että niitä käytetään hyödyksi, kun sovelletaan yleistä menettelyä systeemien täydellisyyksien todistamiseksi. Tätä menettelytapaa tullaan esittelemään tutkielman myöhemmässä vaiheessa.

Määritelmä 4.3. Olkoon $\mathcal{N}$ normaali systeemi. Tällöin määritellään, että mikä tahansa kaavajoukko Θ on $\mathcal{N}$-ristiriitainen, mikäli on olemassa sellainen joukon Θ osajoukko $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, että $\vdash_{\mathcal{N}} \neg(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m)$. Mikäli tämän ehdon toteuttavaa osajoukkoa ei ole olemassa, niin tällöin joukkoa Θ sanotaan $\mathcal{N}$-ristiriidattomaksi.

Seuraava lemma pätee yleisesti modaalilogiikassa, mutta tässä tutkielmassa sen todistus kuitenkin sivuutetaan (todistus löytyy lähdeteoksesta *Modal Logic* ([2])):

Lemma 4.4. Kaikille kaavoille Q pätee, että jos $\Theta \nvdash Q$, niin tällöin kaavajoukko $\Theta \cup \{\neg Q\}$ on ristiriidaton.

Määritelmä 4.5. Edellisessä määritelmässä käytetty kaavajoukko Θ on *maksimaalisesti ristiriidaton*, jos ja vain jos se on ristiriidaton ja siihen ei voida lisätä yhtäkään kaavaa ilman, että siitä tulee ristiriitainen.

Lemma 4.6. Oletetaan, että kaavajoukko Θ on maksimaalisesti ristiriidaton. Tällöin seuraavat tulokset pätevät kaikille kaavoille Q ja P:

1. $Q \in \Theta \Leftrightarrow \neg Q \notin \Theta$.
2. $(Q \vee P) \in \Theta \Leftrightarrow Q \in \Theta$ tai $P \in \Theta$.
3. $(Q \wedge P) \in \Theta \Leftrightarrow Q \in \Theta$ ja $P \in \Theta$.

Tähän maksimaalisesti ristiriidattoman kaavajoukon käsitteeseen liittyy seuraavaksi esiteltävä *Lindenbaumin lemma.* Se todistaa, että mikä tahansa $\mathcal{N}$-ristiriidaton kaavajoukko Θ voidaan laajentaa maksimaalisesti $\mathcal{N}$-ristiriidattomaksi kaavajoukoksi Σ.

Lause 4.7. *(Lindenbaumin lemma) Jos kaavajoukko Θ on $\mathcal{N}$-ristiriidaton, niin on olemassa sellainen maksimaalisesti $\mathcal{N}$-ristiriidaton kaavajoukko Σ, että $\Theta \subseteq \Sigma$.*

Todistus. Olkoon nyt $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ tutkielmassa aiemmin määriteltyyn kieleen ML kuuluvien kaavojen luettelo, jossa kaikille tähän kieleen kuuluville kaavoille on annettu oma indeksinsä osoittama järjestysnumeronsa. Muodostetaan kaavajoukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$ seuraavaksi esitellyllä menettelytavalla:

- $\Sigma_0 = \Theta$ ja
- $\Sigma_{m+1} = \begin{cases} \Sigma_m \cup \{Q_m\}, & \text{jos tämä joukko on } \mathcal{N}\text{-ristiriidaton,} \\ \Sigma_m \cup \{\neg Q_m\} & \text{muulloin.} \end{cases}$

Tämän jälkeen todistetaan aluksi induktiolla, että Σ_m, $m \geq 0$, on $\mathcal{N}$-ristiriidaton. Ensinnäkin, kun $m = 0$, niin $\Sigma_0 = \Theta$, joten Σ_0 on oletuksen perusteella $\mathcal{N}$-ristiriidaton.
Oletetaan sitten, että Σ_k on $\mathcal{N}$-ristiriidaton ja tehdään vastaoletus, että Σ_{k+1} on $\mathcal{N}$-ristiriitainen. Tällöin sekä $\Sigma_k \cup \{\neg Q_k\}$ että $\Sigma_k \cup \{Q_k\}$ ovat $\mathcal{N}$-ristiriitaisia joukkoja. Koska Σ_k on oletuksen mukaan $\mathcal{N}$-ristiriidaton, niin on olemassa sellaiset kaavat $P_1, P_2, \ldots, P_i \in \Sigma_k$, joille pätee, että

$$\vdash_{\mathcal{N}} \neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_i \wedge Q_k)$$

ja sellaiset kaavat $O_1, O_2, \ldots, O_j \in \Sigma_k$, että

$$\vdash_{\mathcal{N}} \neg(O_1 \wedge O_2 \wedge \cdots \wedge O_j \wedge \neg Q_k).$$

Otetaan käyttöön seuraavat lyhyemmät merkinnät: $P = (P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_i)$ ja $O = (O_1 \wedge O_2 \wedge \cdots \wedge O_j)$. Nyt, koska

$$(\neg(P \wedge Q_k) \rightarrow (\neg(O \wedge \neg Q_k) \rightarrow \neg(P \wedge O)))$$

tiedetään tautologiaksi, niin $\vdash_{\mathcal{N}} \neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_i \wedge O_1 \wedge O_2 \wedge \cdots \wedge O_j)$. Tästä seuraa, että myös kaavajoukko Σ_k on $\mathcal{N}$-ristiriitainen, mikä tekee vastaoletuksesta väärän ja näin ollen Σ_{k+1} on $\mathcal{N}$-ristiriidaton.
Merkitään, että $\Sigma = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Sigma_m$.
Tällöin $\Theta = \Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja määritelmän perusteella jokaisella kaavalla Q_m pätee, että joko $Q_m \in \Sigma_{m+1} \subseteq \Sigma$ tai $\neg Q_m \in \Sigma_{m+1} \subseteq \Sigma$, missä $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Mikäli edellä mainittu tilanne pätee, niin lisäämällä kyseisiin joukkoihin mikä tahansa kaava saadaan aikaiseksi ristiriita. Tästä syystä kaavajoukko Σ on maksimaalinen.
Tämän jälkeen on vielä todistettava, että kaavajoukko Σ on $\mathcal{N}$-ristiriidaton,

mikä tapahtuu myös vastaoletuksen avulla: oletetaan siis, että kaavajoukko Σ on $\mathcal{N}$-ristiriitainen. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa sellaiset kaavat $Q_{m_1}, Q_{m_2}, \ldots, Q_{m_i} \in \Sigma$, että

$$\vdash_{\mathcal{N}} \neg(Q_{m_1} \wedge Q_{m_2} \wedge \cdots \wedge Q_{m_i}).$$

Nyt, koska kaava $Q_{m_j} \in \Sigma$, niin pätee myös, että $Q_{m_j} \in \Sigma_{m_j+1}$. Lisäksi, olkoon $n = \max\{m_1+1, m_2+1, \ldots, m_i+1\}$, jolloin $\{Q_{m_1}, Q_{m_2}, \ldots, Q_{m_i}\} \subseteq \Sigma_n$. Tämä tarkoittaa sitä, että myös kaavajoukko Σ_n on ristiriitainen, joten vastaoletus on jälleen väärä ja alkuperäinen väite pätee. $\square$

Lindenbaumin lemman avulla voidaan nyt muodostaa malleja maksimaalisesti ristiriidattomista kaavajoukoista. Erityisesti näistä voidaan rakentaa kanonisia malleja, joiden avulla taas pystytään todistamaan yleinen täydellisyystulos normaaleille systeemeille. Tätä tulosta kutsutaan myös nimellä kanonisten mallien lause. Ensiksi kuitenkin määritellään, mikä kanoninen malli oikeastaan on.

Määritelmä 4.8. Kanoninen malli $\mathfrak{M}^{\mathcal{N}}$ normaalille systeemille $\mathcal{N}$ on struktuuri $(W^{\mathcal{N}}, R^{\mathcal{N}}, V^{\mathcal{N}})$, missä

- $W^{\mathcal{N}}$ on kaikkien maksimaalisesti $\mathcal{N}$-ristiriidattomien kaavajoukkojen joukko,
- $R^{\mathcal{N}}$ on kaksipaikkainen relaatio joukolta $W^{\mathcal{N}}$ itselleen ja siitä käytetään nimitystä kanoninen relaatio. Kaavajoukot ovat kanonisessa relaatiossa keskenään seuraavan ehdon mukaisesti: $tR^{\mathcal{N}}u$, jos kaikille kaavoille Q pätee, että jos $Q \in u$, niin tällöin $\Diamond Q \in t$,
- $V^{\mathcal{N}}$ on kanoninen (tai luonnollinen) valuaatio, joka määräytyy seuraavan ehdon mukaisesti: $V^{\mathcal{N}}(p) = \{t \in W^{\mathcal{N}} \mid p \in t\}$.

Kanoninen kehys systeemille $\mathcal{N}$ taas on rakenne $(W^{\mathcal{N}}, R^{\mathcal{N}})$.

Lause 4.9. *Kaikille normaaleille systeemeille $\mathcal{N}$ pätee, että $wR^{\mathcal{N}}v$, mikäli kaikille kaavoille Q pätee, että jos $\Box Q \in w$, niin $Q \in v$.*

Todistus. Todistetaan lause lähtemällä liikkeelle oletuksesta, että $wR^{\mathcal{N}}v$. Lisäksi oletetaan, että $Q \notin v$. Koska v on maksimaalisesti ristiriidaton kaavajoukko, niin tällöin $\neg Q \in v$. Nyt, koska oletuksen perusteella $wR^{\mathcal{N}}v$, niin $\Diamond\neg Q \in w$. Koska myös w on maksimaalisesti ristiriidaton kaavajoukko, niin $\neg\Diamond\neg Q \notin w$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\Box Q \notin w$. Täten kontraposition nojalla väite pätee. $\square$

Voidaan todistaa, että seuraava tulos pätee kaikille modaalilogiikan kaavoille (todistus löytyy lähdeteoksesta *Modal Logic* ([2])):

Lemma 4.10. Olkoon $\mathcal{N}$ normaali systeemi ja Q kaava. Tällöin:

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\Box Q_1 \wedge \Box Q_2 \wedge \cdots \wedge \Box Q_m) \rightarrow \Box(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m).$$

Lause 4.11. *(Olemassaolon lemma) Mille tahansa normaalille systeemille $\mathcal{N}$ ja kaavajoukolle $t \in W^{\mathcal{N}}$ pätee, että jos $\Diamond Q \in t$, niin silloin on olemassa kaavajoukko $u \in W^{\mathcal{N}}$ siten, että $tR^{\mathcal{N}}u$ ja $Q \in u$.*

Todistus. Oletetaan, että $\Diamond Q \in t$ ja rakennetaan kaavajoukko u siten, että $tR^{\mathcal{N}}u$ ja $Q \in u$. Olkoon $v = \{Q\} \cup \{P \mid \Box P \in t\}$. Osoitetaan, että v on ristiriidaton.
Tehdään vastaoletus, että se on ristiriitainen: tällöin on olemassa kaavat $P_1, P_2, \ldots, P_m \in v$ siten, että

$$\vdash_{\mathcal{N}} (P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m) \rightarrow \neg Q.$$

Soveltamalla tähän sääntöä (RN) saadaan, että

$$\vdash_{\mathcal{N}} \Box((P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m) \rightarrow \neg Q).$$

Käytetään tämän jälkeen aksioomasta (K) hyödyksi seuraavaa tapausta:

$$\vdash_{\mathcal{N}} \Box((P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m) \rightarrow \neg Q) \rightarrow (\Box(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m) \rightarrow \Box\neg Q).$$

Lemman 4.10. perusteella tiedetään myös, että seuraava tulos pätee:

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\Box P_1 \wedge \Box P_2 \wedge \cdots \wedge \Box P_m) \rightarrow \Box(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m),$$

joka on jokaisen normaalin systeemin teoreema. Soveltamalla sääntöä (MP) voidaan nyt päätellä, että

$$\vdash_{\mathcal{N}} \Box(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m) \rightarrow \Box\neg Q.$$

Tämän jälkeen soveltamalla propositiologiikkaa ja lemmassa 4.10. saatua tulosta, saadaan että:

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\Box P_1 \wedge \Box P_2 \wedge \cdots \wedge \Box P_m) \rightarrow \Box\neg Q.$$

Nyt

$$(\Box P_1 \wedge \Box P_2 \wedge \cdots \wedge \Box P_m) \in t,$$

sillä $\Box P_1, \Box P_2, \ldots, \Box P_m \in t$ ja t on maksimaalisesti $\mathcal{N}$-ristiriidaton kaavajoukko. Tästä seuraa, että $\Box\neg Q \in t$, mikä on määritelmän 2.14. mukaan yhtäpitävää sen kanssa, että $\neg\Diamond Q \in t$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä t on oletuksen mukaan maksimaalisesti $\mathcal{N}$-ristiriidaton kaavajoukko, joka sisältää kaavan $\Diamond Q$. Täten kaavajoukko v on siis ristiriidaton.
Olkoon kaavajoukko w mikä tahansa kaavajoukkoa v laajentamalla saatava maksimaalisesti $\mathcal{N}$-ristiriidaton kaavajoukko (Lindenbaumin lemman nojalla tällainen kaavajoukko on olemassa). Tällöin $Q \in w$ ja lisäksi kaikille kaavoille P pätee, että jos $\Box P \in t$, niin $P \in w$. Täten lauseen 4.9. mukaan pätee, että $tR^{\mathcal{N}}u$. $\Box$

Lause 4.12. *(Totuuslemma): Mille tahansa normaalille systeemille $\mathcal{N}$ ja kaavalle Q pätee, että $\mathfrak{M}^{\mathcal{N}}, t \models Q$, jos ja vain jos $Q \in t$.*

Todistus. Suoritetaan todistus induktiolla kaavan Q asteen suhteen: perusaskeleen todistus seuraa suoraan kanonisen valuaation $V^{\mathcal{N}}$ määritelmästä. Samoin tapausten, joissa kaava Q on muotoa $\neg Q$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$ tai $P \leftrightarrow Q$, todistus seuraa aiemmista määritelmistä. Käsiteltäväksi jäävät siis modaliteettien tapaukset, jonka todistuksen suunta vasemmalta oikealle seuraa melko suoraan relaation $R^{\mathcal{N}}$ määritelmästä:
$\mathfrak{M}^{\mathcal{N}}, t \models \Diamond Q$, jos ja vain jos $\exists u(tR^{\mathcal{N}}u$ ja $\mathfrak{M}^{\mathcal{N}}, u \models Q)$. Induktio-oletuksen perusteella tämä pätee, jos ja vain jos $\exists u(tR^{\mathcal{N}}u \wedge Q \in u)$, joka pätee, jos ja vain jos $\Diamond Q \in t$.
Todistuksen suunta oikealta vasemmalle: oletetaan, että $\Diamond Q \in t$, jolloin yllä esitettyjen ekvivalenssien perusteella riittää löytää sellainen maksimaalisesti ristiriidaton kaavajoukko u, jolle pätevät $tR^{\mathcal{N}}u$ ja $Q \in u$. Tämä onkin juuri se, minkä aiemmin todistettu Olemassaolon lemma takaa. $\square$

Lause 4.13. *(Täydellisyyslause eli kanonisten mallien lause): Olkoon $\mathcal{N}$ normaali systeemi. Tämä systeemi on heikosti täydellinen suhteessa omaan kanoniseen malliinsa.*

Todistus. Oletetaan, että Θ on normaalin systeemin $\mathcal{N}$ ristiriidaton kaavajoukko. Lindenbaumin lemman perusteella on olemassa maksimaalisesti $\mathcal{N}$-ristiriidaton kaavajoukko Σ, joka saadaan laajentamalla kaavajoukkoa Θ. Edellä esitetyn Totuuslemman perusteella $\mathfrak{M}^{\mathcal{N}}, \Sigma \models \Theta$.
Siis $\mathfrak{M}^{\mathcal{N}}, \Sigma \models \Sigma$. Lemmassa 4.4 on aiemmin todettu, että jos $\nvdash Q$, niin tällöin kaavajoukko $\{\neg Q\}$ on ristiriidaton ja täten sillä on olemassa kanoninen malli. Tästä seuraa, että $\nvDash Q$ ja näin ollen on todistettu täydellisyystulos: jos $\models Q$, niin $\vdash Q$. $\square$

5 Sovelluksia

Täydellisyyslause saattaa vaikuttaa hieman abstraktilta, mutta ensivaikutelma on tässä tapauksessa harhaanjohtava. Lauseen avulla voidaan nimittäin johtaa muiden muassa seuraavaksi esiteltäviä tuloksia, jotka ovat hyvin mielenkiintoisia ja hyödyllisiä.

Lause 5.1. *Systeemi K on heikosti täydellinen suhteessa kaikkien kehysten luokkaan.*

Todistus. Oletetaan, että kaava Q on validi kaikkien kehysten luokassa. Tehdään nyt vastaoletus, että kyseinen Q ei ole todistuva systeemissä K. Tästä seuraa, että lemman 4.4 perusteella pätee, että $\neg Q$ muodostaa yksinään ristiriidattoman kaavajoukon. Nyt tilanteeseen voidaan soveltaa Lindenbaumin lemmaa, joka kertoo, että on olemassa maksimaalisesti ristiriidaton kaavajoukko Θ, jolle pätee $\{\neg Q\} \subseteq \Theta$. Tätä kaavajoukkoa vastaava kanoninen malli taas on olemassa ja siihen sisältyy maailma w, jolle pätee $\mathfrak{M}, w \models \neg Q$. Tästä syntyy ristiriita oletuksen kanssa, sillä sen mukaan kaava Q on validi. $\square$

Tärkeää on myös se, että kanonisten kehysten rakenteista saadaan usein helposti erittäin hyödyllistä ja konkreettista informaatiota: esimerkiksi systeemin T kanoninen kehys on refleksiivinen. Tämä tieto vuorostaan johtaa edelleen vielä kiinnostavampaan tulokseen, että systeemi T on täydellinen suhteessa refleksiivisten kehysten luokkaan. Vaikka kanoninen malli olisi monimutkaisempikin, niin se pitää aina sisällään suuren määrän tarpeellista tietoa siihen liittyvästä systeemistä. Lienee siis itsestäänselvää, että tämä on yksi syistä, joiden ansiosta kanoniset mallit ovat modaalilogiikassa olennaisessa osassa.
Mikäli tavoitteena on todistaa, että normaalin systeemin aksiomatisointi $\mathcal{L}$ on heikosti täydellinen suhteessa johonkin kehysten luokkaan $\mathcal{C}$, niin tähän ei ole mitään täysin pettämätöntä ratkaisumetodia. Sen sijaan on olemassa eräs strategia, joka toimii monesti erilaisten mielenkiintoisten tapausten tutkimisessa. Tässä kyseisessä menettelytavassa osoitetaan, että normaalin systeemin aksiomatisointia $\mathcal{L}$ vastaava kanoninen kehys kuuluu kyseiseen kehysten luokkaan $\mathcal{C}$.

Lause 5.2. *Systeemi T on heikosti täydellinen suhteessa refleksiivisten kehysten luokkaan.*

Todistus. Nyt riittää siis osoittaa, että systeemin T kanoninen kehys on refleksiivinen. Olkoon tämän todistamiseksi w sellainen maailma, joka kuuluu tähän kanoniseen kehykseen. Skeema (T) vaatii, että kaikille kaavoille Q pätee, että jos $Q \in w$, niin $\square Q \to Q \in w$. Oletetaan siis, että $Q \in w$. Koska w on maksimaalisesti T-ristiriidaton kaavajoukko, niin siitä seuraa, että seuraava implikaatio pätee: $\square Q \in w \Rightarrow Q \in w$. Tämän johdosta $\{Q \mid \square Q \in w\} \subseteq w$, mikä tarkoittaa sitä, että lauseen 4.7. perusteella wRw eli tämän kehyksen relaatio on refleksiivinen.
Koska kanonisen kehyksen relaatio on edellä suoritetun tarkastelun perusteella todistettu refleksiiviseksi, niin tämä tulos tarkoittaa sitä, että systeemi T on vahvasti täydellinen suhteessa kaikkien refleksiivisten kehysten luokkaan. $\square$

Lause 5.3. *Systeemi $S4$ on heikosti täydellinen suhteessa refleksiivisten ja transitiivisten kehysten luokkaan.*

Todistus. Edellisessä lauseessa käsitelty refleksiivisyyden tarkastelu toimii sinällään tässäkin tapauksessa: relaatio on siis refleksiivinen.
Refleksiivisyyden lisäksi systeemin $S4$ kanonisen kehyksen tulee olla transitiivinen, joten osoitetaan seuraavaksi sen olevan sitä. Oletetaan, että kyseisen

kanonisen kehyksen maailmoille w_1, w_2, w_3 pätee, että w_1Rw_2 ja w_2Rw_3. Tämä tarkoittaa sitä, että $\{Q \mid \Box Q \in w_1\} \subseteq w_2$ ja $\{Q \mid \Box Q \in w_2\} \subseteq w_3$. Olkoon P kaava siten, että $\Box P \in w_1$, jolloin skeeman (4) mukaan pätee, että $\Box P \to \Box\Box P \in w_1$, mistä seuraa maailman w_1 maksimaalisen ristiriidattomuuden perusteella, että myös $\Box\Box P \in w_1$. Nyt, koska $\{P \mid \Box P \in w_1\} \subseteq w_2$, niin $\Box P \in w_2$. Edelleen, koska $\{P \mid \Box P \in w_2\} \subseteq w_3$, niin $P \in w_3$. Täten on osoitettu, että $\{P \mid \Box P \in w_1\} \subseteq w_3$ ja lauseen 4.7. nojalla pätee siis, että w_1Rw_3. Täten tämän kyseisen kanonisen kehyksen relaatio on transitiivinen. Koska kanonisen kehyksen relaatio on näin todistettu sekä refleksiiviseksi että transitiiviseksi, niin systeemi $S4$ on vahvasti täydellinen suhteessa refleksiivisten ja transitiivisten kehysten luokkaan. $\Box$

Lause 5.4. *Systeemi $S5$ on heikosti täydellinen suhteessa refleksiivisten, symmetristen ja transitiivisten kehysten luokkaan.*

Todistus. Aiemmin (lauseen 5.2. todistuksessa) käsitelty refleksiivisyyden todistaminen toimii edelleen tässäkin todistuksessa samalla tavalla; on siis jo todistettu, että relaatio on refleksiivinen.
Samoin relaation transitiivisuuden todistaminen noudattaa samaa kaavaa, kuin mitä käytettiin lauseen 5.3. kohdalla. Täten voidaan todeta, että relaation transitiivisuuskin on jo aiemmin todistettu.
Jäljelle jää vielä kanonisen kehyksen relaation symmetrisyyden todistaminen: oletetaan tätä varten, että maailmat w_1 ja w_2 kuuluvat kyseiseen kehykseen ja w_1Rw_2 eli $\{Q \mid \Box Q \in w_1\} \subseteq w_2$. Osoitetaan sitten, että w_2Rw_1 eli $\{Q \mid \Box Q \in w_2\} \subseteq w_1$. Tehdään tämä vastaoletuksella, joka kuuluu seuraavasti: on olemassa kaava Q siten, että $\Box Q \in w_2$, mutta $Q \notin w_1$. Tämä tarkoittaa sitä, että $\neg Q \in w_1$. Nyt, koska maailma w_1 on maksimaalisesti ristiriidaton ja skeeman (B) nojalla pätee, että $\neg Q \to \Box\Diamond\neg Q \in w_1$, niin $\Box\Diamond\neg Q \in w_1$. Kun tähän sovelletaan aksioomaa (T), niin saadaan, että myös $\Diamond\neg Q \in w_1$. Nyt, koska $\vdash_K \Diamond\neg Q \leftrightarrow \neg\Box Q$, niin $\neg\Box Q \in w_2$. Oletuksen mukaan kuitenkin $\Box Q \in w_2$, joten syntyy ristiriita ja näin ollen vastaoletus on väärä ja väite pätee. Siis w_2Rw_1 ja täten kanonisen kehyksen relaatio on symmetrinen.
Koska kanonisen kehyksen relaatio on näin ollen edellä todistettu refleksiiviseksi, transitiiviseksi ja symmetriseksi, niin systeemi $S5$ on vahvasti täydellinen suhteessa refleksiivisten, transitiivisten ja symmetristen kehysten luokkaan. $\Box$

6 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa oli tarkoituksena johdatella lukija modaalilogiikan maailmaan ja perehdyttää tämä siellä käytettyihin käsitteisiin ja perustuloksiin tavalla, joka olisi mahdollisimman helppolukuinen ja ymmärrettävä. Tarkoituksena oli lähteä liikkeelle aivan perusteista ja rakentaa niiden pohjalta kokonai-

suus, jota pystyisi seuraamaan matematiikassa hieman kokemattomampikin lukija. Tavoitteena oli lopulta päätyä modaalilogiikan täydellisyyslauseeseen ja todistaa se rajoittuen heikkoon täydellisyyteen sekä tämän lisäksi esitellä muutama siihen liittyvä sovellus.
Mielestäni nämä lähtökohdat ja tavoitteet toteutuivat tutkielmassa kohtalaisen hyvin ja uskon, että jokainen tutkielman lukeva henkilö oppii siitä jotakin. Tämä on mielestäni tärkeä seikka tutkielmassa, koska kyseessä on matematiikan opettajalinjan pro gradu -tutkielma ja näin ollen siihen olisi mielestäni hyvä sisältyä hieman opetuksenomainen linja ja lukijan tulisi voida oppia siitä jotakin. Uskoisin tutkielman kuitenkin tarjoavan myös matematiikan opiskelijoille ja muillekin matemaattisesti lahjakkaille sekä siitä enemmän kiinnostuneille lukijoille mielenkiintoista sisältöä, mikä on yhtä lailla tärkeä asia.

Viitteet

[1] Veikko Rantala & Ari Virtanen, *Johdatus modaalilogiikkaan.* Gaudeamus, 2004.

[2] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde Venema, *Modal Logic.* Cambridge University Press, 2001.

[3] G. E. Hughes & M. J. Creswell, *A New Introduction to Modal Logic.* Routledge, 1996.

[4] Brian F. Chellas, *Modal Logic: An Introduction.* Cambridge University Press, 1980.

Tiivistelmä

Tämä tutkielma käsittelee modaalilogiikkaa ja erityisesti sen täydellisyyslausetta, jonka osalta rajoitutaan tutkimaan heikkoa täydellisyyttä. Modaalilogiikka on oma logiikan tutkimusalansa ja sen tarkoituksena on tutkia modaliteettien, eli välttämättömyyden ja mahdollisuuden, ominaisuuksia loogisessa tarkastelussa. Tutkielmaan käytettyjä lähdeteoksia on hyödynnetty vaihtelevissa määrin tutkielman eri luvuissa, joskin usein saman luvun sisällä on käytetty monia eri lähteitä. Lähdeteosta *Johdatus modaalilogiikkaan* ([1]) on käytetty lähteenä erityisesti luvuissa 2, 3 ja 4, minkä lisäksi teosta *Modal Logic* ([2]) on hyödynnetty tutkielman luvuissa 3, 4 ja 5. Nämä olivat tutkielman tärkeimmät lähdeteokset. Edellä mainittujen lisäksi lähdeteosta *A New Introduction to Modal Logic* ([3]) käytettiin lähteenä luvuissa 3 ja 5, kun taas lähdeteosta *Modal Logic: An Introduction* ([4]) hyödynnettiin luvuissa 2 ja 4.

Modaalilogiikka perustuu ajatukseen siitä, että on olemassa monia epätyhjiä ja toisistaan erillään olevia maailmoja, joissa jokaisessa eri kaavojen totuusarvot ovat tapauskohtaisesti määräytyviä. Nämä maailmat muodostavat rakenteen, johon sisältyvän kaksipaikkaisen relaation avulla ilmaistaan, ovatko kaksi eri maailmaa relaatiossa keskenään. Mikäli näin on, niin relaatiossa jälkimmäisenä mainittu maailma on vaihtoehto siinä ensimmäisenä ilmoitetulle maailmalle. Mikäli jotkin maailmat eivät ole relaatiossa keskenään, niin nämä maailmat eivät ole saavutettavissa toisistaan. Näissä relaatiosuhteiden määräämissä tilanteissa käytetään modaalioperaattoreita ilmaisemaan sitä, koska eri kaavat ovat tietystä maailmasta katsoen välttämättä tosia tai mahdollisesti tosia.

Modaalilogiikka on monimutkainen logiikan ala ja sitä voidaan tarkastella monin eri tavoin, mutta aina siinä kuitenkin esiintyy kolme peruspiirrettä. Näistä ensimmäinen on, että modaalilogiikan kieli on yksinkertainen, mutta silti sen avulla on helppo puhua relaatioita sisältävistä rakenteista. Tämä johtuu siitä, että modaalilogiikan kieli koostuu normaalin propositiologiikan symboleista ja loogisista konnektiiveista sekä näiden joukkoon lisätyistä modaalioperaattoreista. Modaalioperaattorit siis ilmentävät lauseiden välttämättömyyttä ja mahdollisuutta tietyssä maailmassa. Näiden käsitteiden logiikan tarkasteleminen onkin modaalilogiikan päämääränä. Toinen peruspiirre modaalilogiikalle on se, että modaalilogiikan kieli mahdollistaa tapauskohtaisen ja sisältä käsin tarkasteltavan näkökulman relaatioita sisältäviin rakenteisiin. Tämä tarkoittaa sitä, että modaalilogiikan kaavoja tarkastellaan rakenteiden sisällä ja tietyssä tilassa, joka riippuu yksilöllisesti tilanteesta. Modaalioperaattorin tarkoituksena on tällöin kertoa, että mistä maailmoista on sallittua hakea tietoa kyseessä olevan kaavan totuusarvosta. Toisin sanoen modaalioperaattorilla varustetun kaavan totuusarvo riippuu siitä, mitkä maailmat ovat vaihtoehtoisia sille maailmalle, jossa kaavan totuutta tarkastellaan. Kolmas periaate on, että modaalilogiikan kieli ei ole vain eristäytynyt ja formaali järjestelmä. 1970-luvulta alkaen on ollut selvää, että on hyödyllistä tutkia modaalilogiikan yhteyttä muihin matemaattisen logiikan tutkimusaloihin. Näiden kolmen perusperiaatteen johdosta modaalilogiikkaa on helppoa ja hyödyllistä soveltaa myös

muihin matematiikan aloihin ja näin ollen se on keino saada niihin uusia näkökulmia. Edellä mainittujen periaatteidensa ansiosta se on myös joustava ja tehokas työkalu relaatioita sisältävien rakenteiden kanssa työskentelyyn.

Tämän tutkielman päämääränä on käydä läpi olennaisimmat modaalilogiikan peruskäsitteet ja lähtökohdat, joiden avulla päädytään lopulta koko modaalilogiikan osa-alueen kannalta tärkeisiin luotettavuuden ja täydellisyyden käsitteisiin. Täydellisyyttä käsiteltäessä rajoitutaan tarkastelemaan vain heikkoa täydellisyyttä; on siis olemassa myös vahva täydellisyys, mutta sen tarkasteleminen sivuutetaan tutkielmassa. Lindenbaumin lemma tulee olemaan tutkielmassa tärkeässä osassa; se nimittäin käsittelee modaalilogiikan kannalta olennaisten ristiriidattomien kaavajoukkojen laajentamista maksimaalisesti ristiriidattomiksi kaavajoukoiksi. Varsinaisena tutkielman huipentumana ja tärkeimpänä lauseena toimii modaalilogiikan täydellisyyslause, joka puolestaan perustelee modaalilogiikassa käytettävien systeemien luotettavuuden ja täydellisyyden.