

**TAMPEREEN YLIOPISTO**

Joukko-oppi 2000-luvun suomalaisissa yleissivistävän  
koulun oppikirjoissa ja opetussuunnitelmissa

Kasvatustieteiden yksikkö  
Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma  
JOHANNA RAUTALAHTI  
Marraskuu 2014

Tampereen yliopisto

Kasvatustieteiden yksikkö

JOHANNA RAUTALAHTI: Joukko-oppi 2000-luvun suomalaisissa yleissivistävän koulun oppikirjoissa ja opetussuunnitelmissa

Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma, 63 sivua, 2 liitesivua

Marraskuu 2014

---

Joukko-oppi rantautui suomalaiseen matematiikan opetukseen samanaikaisesti peruskoulun käynnistyessä 1970-luvulla. Sen perusteet opetettiin kaikille peruskoululaisille alkaen ensimmäisestä luokasta. 2000-luvun peruskoulujen oppikirjoissa tai Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 2004 ei joukko-oppia enää esitellä.

Tämän tutkimuksen aiheena oli “Joukko-oppi 2000-luvun suomalaisissa yleissivistävän koulun oppikirjoissa ja opetussuunnitelmissa”. Tarkoituksena oli selvittää, millä suomalaisen yleissivistävän koulun luokka-asteella joukko-oppia opetetaan ja millä tavalla se on näkyvissä 2000-luvun oppikirjoissa sekä opetussuunnitelmissa.

Tutkimusaineisto koostui 1970-luvun alun neljästä matematiikan viidennen ja kuudennen luokan matematiikan oppikirjoista, kuudesta 2000-luvun lukion pitkän matematiikan kurssin 6, todennäköisyys ja tilastot, sekä yhdestä kurssin 11, lukuteoria ja logiikka, oppikirjasta. Lisäksi aineistona on käytetty Opetussuunnitelmakomitean mietintöä vuodelta 1970, Peruskoulun opetussuunnitelman perusteita vuodelta 2004 ja Lukion opetussuunnitelman perusteita vuodelta 2003. Oppikirjojen sisältämää joukko-oppia tarkasteltiin kuvailevan sisällönanalyysin avulla.

Tuloksista nähdään, että Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 2004 ja lukion opetussuunnitelman perusteissa 2003 ei joukko-opin opetuksesta tai sisällöistä ole mainintaa. Joukko-oppia kuitenkin opetetaan tästä huolimatta 2000-luvulla lukiossa ja erityisesti pitkän matematiikan kursseilla MAA6 ja MAA11. Joukko-opin laajuus kuitenkin vaihtelee huomattavasti eri kirjasarjojen välillä. Oppikirjasarjasta ja kurssivalinnoistaan riippuen opiskelija saa siis joko vankan tai olemattoman pohjan ymmärtää joukko-opin perusteita.

Avainsanat: joukko-oppi, oppikirja, opetussuunnitelmat

# SISÄLLYS

<b>1</b>	<b>JOHDANTO</b> .....	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>OPETUS MUUTOKSEN KOURISSA – 1970-LUVUN PERUSKOULU-UUDISTUS</b> .....	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>OPETUSSUUNNITELMIEN HISTORIAA SUOMEN KOULUJÄRJESTELMÄSSÄ</b> .....	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>”UUSI MATEMATIIKKA” SUOMALAISESSA KOULUJÄRJESTELMÄSSÄ</b> .....	<b>10</b>
4.1	KYLMÄN SODAN KILPAVARUSTELU JOHTI MATEMATIIKAN OPETUKSEN MUUTOKSEEN .....	10
4.2	ASiantuntijat matematiikan muutoksen puolesta ja sitä vastaan .....	11
4.3	MATEMATIIKAN OPETUS 2010-LUVULLA JA TOIVEET OPETUKSEN TULEVAISUUDESTA .....	13
<b>5</b>	<b>MATEMATIIKAN OPPIKIRJA</b> .....	<b>16</b>
5.1	OPPIKIRJOISTA YLEISESTI JA MATEMATIIKAN OPPIKIRJAN ERITYISPIIRTEET .....	16
5.2	Aiemmat tutkimukset matematiikan oppikirjoista .....	18
<b>6</b>	<b>TUTKIMUSKYSYMYKSET</b> .....	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	<b>21</b>
7.1	LAADULLINEN TUTKIMUS.....	21
7.2	SISÄLLÖNANALYYSI .....	22
7.3	TUTKIMUKSEN KULKU JA LUOTETTAVUUS .....	23
<b>8</b>	<b>AINEISTON ESITTELY JA TULOKSET</b> .....	<b>27</b>
8.1	TUTKIMUSMATERIAALIN YLEISESITTELY .....	27
8.2	OPETUSSUUNNITELMAT JOUKKO-OPIN NÄKÖKULMASTA.....	27
8.2.1	<i>Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö 1970</i> .....	27
8.2.2	<i>Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2004</i> .....	28
8.2.3	<i>Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003</i> .....	29
8.3	1970-LUVUN ALA-ASTEEN MATEMATIIKAN OPPIKIRJASARJA ”MATEMATIIKKA” .....	30
8.4	2000-LUVUN LUKION PITKÄN MATEMATIIKAN OPPIKIRJASARJAT.....	34
8.4.1	<i>Laudatur</i> .....	35
8.4.2	<i>Lukion Calculus</i> .....	37
8.4.3	<i>Matematiikan taito</i> .....	41
8.4.4	<i>Pitkä matematiikka</i> .....	44
8.4.5	<i>Pitkä Sigma</i> .....	46
8.4.6	<i>Pyramidi</i> .....	49
<b>9</b>	<b>YHTEENVETO JA POHDINTAA</b> .....	<b>53</b>
	<b>LÄHTEET</b>	
	<b>LIITTEET</b>	

# 1 JOHDANTO

Tämä tutkimus käsittelee joukko-opin esiintymistä 2000-luvun suomalaisen yleissivistävän koulun matematiikan oppikirjoissa. Joukko-oppi herätti, kuten myöhemmin luvussa 4 nähdään, suuria tunteita rantautuessaan 1970-luvun alussa Pohjois-Amerikasta ja Länsi-Euroopasta Suomen koulumaailmaan. Joukko-opin mukanaan tuoma matematiikan muutos ei kuitenkaan ollut ainoa, joka myllersi koulujamme, sillä sattumalta samanaikaisesti Suomessa oltiin siirtymässä vanhasta koulujärjestelmästä peruskouluun. Siirtyminen tapahtui asteittain vuosina 1972–1977 alkaen pohjoisesta ja päättyen eteläisimpään Suomeen.

Joukko-oppi erosi perinteisestä laskennosta siten, että se korosti matematiikan rakenteellisuutta ja sen keskeisiä sisältöalueita olivat joukko-oppi ja logiikka. Sille haluttiin tehdä tilaa muun muassa siksi, että eräs uuden matematiikan opettamisen tavoitteista oli oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittyminen saumattomasti ensimmäisestä luokasta alkaen ymmärtämiseen pohjautuvan opettamisen kautta, ja silloiset matematiikan opetuksen keinot eivät tähän vastanneet (Kupari 1999, 49).

Radikaalein aines joukko-opista karsiutui jo pian 1970-luvun lopulla pois, ja nyt 2010-luvulla, neljäkymmentä vuotta myöhemmin, joukko-opin sisältöjä ei enää esiinny yleissivistävän koulutuksemme voimassa olevissa opetussuunnitelmissa. Lukion pitkässä matematiikassa kirjasarjasta riippuen sitä opetetaan, vaikka Lukion opetussuunnitelman perusteissa ei joukko-opista ole mainintaa. 1970-luvulla puolestaan kaikki oppilaat heti ensimmäiseltä peruskoulun luokalta lähtien opiskelivat perusteita joukko-opista ja tällöin viidennellä ja kuudennella luokalla osaamisen olisi pitänyt olla jo nykyisten lukion syventävien kurssien opetuksen tasolla.

Jo pienestä pitäen olen ollut erityisen kiinnostunut historiasta, joten oli selvää, että tutkimukseni tulee jollakin tapaa liittymään matematiikkaan historiallisesta perspektiivistä katsottuna. *Uuden matematiikan* saapuminen koulumatematiikan piiriin peruskoulun syntyvaiheissa on tutkimuskohteena hyvin mielenkiintoinen. Kun tähän lisätään näkökulma nykyisten oppikir-

jojen sisältämästä joukko-opista, on asetelma oiva. Tässä tutkimuksessa pyrin siis selvittämään joukko-opin roolia opetuksessa sekä historiallisesta perspektiivistä että nykytilanteesta käsin. Tutkimukseni on luonteeltaan laadullinen ja tutkin tekstilähtöisen sisällönanalyysin avulla sitä, millä luokka-asteella ja miten 1970-luvulla esitetyt joukko-opin asiat esiintyvät nykyoppikirjoissa sekä opetussuunnitelmassa. 1970-luvun kohdalla keskityn peruskoulun viidenteen ja kuudenteen luokkaan, sillä tällöin joukko-opin sisällöt vastasivat hyvin sitä, mitä joukko-opista nykyisin opetetaan. Tästä päästäänkin toiseen aikakauteen, 2000-luvulle, josta tutkimuksen kohteeksi joukko-opillisten sisältöjensä vuoksi valikoin lukio-oppikirjat – aihepiiriin opetuksen painopiste on siis siirtynyt huomattavasti myöhemmäksi 40 vuodessa. Tutkimuksessani käsitellään joukko-oppia, mutta varsinaisesti en erikseen lähde selvittämään, mitä kaikkea joukko-oppi matemaattisesti pitää sisällään; oletuksena on, että lukija ymmärtää joukko-opin peruskäsitteitä.

Seuraavissa luvuissa tulen tutustuttamaan lukijan aiheeseen liittyviin aiempiin tutkimuksiin, tuntemaan peruskoulu-uudistuksen historiaa sekä eri vuosikymmenten ja koulutusasteiden opetussuunnitelmia, käymään läpi uuden matematiikan historiaa ja käyttöä koulujärjestelmässämme sekä tutustumaan oppikirjojen määrittelmään. Teoriaosion jälkeen siirrytään tarkastelemaan tutkimuskysymyksiä, metodologiaa, tutkimusmateriaalia, tuloksia sekä tutkimuksen luotettavuutta. Lopuksi esittelen tutkimukseeni liittyvää pohdintaa.

## 2 OPETUS MUUTOKSEN KOURISSA – 1970- LUVUN PERUSKOULU-UUDISTUS

”Uuden matematiikan” (ks. tarkemmin luku 4) opetus Suomessa nivoutuu keskeisesti siihen ajankohtaan 1970-luvun alussa, jolloin peruskoulu korvasi kansa-, keski- ja oppikoulujärjestelmän, vaikka sen saapuminen suomalaiseen matematiikan opetukseen ei sinänsä olekaan ollut peruskoulun synnystä riippuvaista. On kuitenkin paikallaan luoda lyhyt katsaus suomalaisen peruskoulun syntyyn, sen kehitysvaiheisiin ja peruskoulu-uudistuksen taustaan, sillä peruskoulu-uudistuksella oli vaikutuksensa ”uuden matematiikan” opetukseen. Lisäksi koulun ja opetuksen eri kehitysvaiheet heijastelevat yhteiskunnallisia muutoksia, ja merkittävät kouluratkaisut syntyvät ennen kaikkea vastauksina yhteiskunnallisiin tarpeisiin.

Suomalaisen koulutusjärjestelmän rakenne oli ollut muutospaineiden alaisena jo useita kertoja ennen 1970-luvun peruskoulu-uudistusta. Pienillä parannuksilla ei ollut päästy toivottavalla tavalla eroon koulutuksen vakavista ongelmista. Puutelista oli huolestuneiden mielestä pitkä, ja siihen kuuluivat niin koulunkäyntiin liittyvät maksut, koulutuksen eriarvoisuus kuin koulumuotojen välinen huono koordinaatiokin. Kaikki osapuolet tunnustivat, että järjestelmässä oli epäkohtia, mutta osan mielestä niihin ei kaivattu rajua puuttumista. Kansan enemmistön mielestä oppilaat pitikin jakaa silloisen järjestelmän tapaan osaamisen mukaan, sillä suurin osa oppilaista oli käytännöllisesti lahjakkaita ja vain pieni osa teoreettisesti lahjakkaita. Uudistushaluja jarrutti myös rahapula – koulumaailman uudistukset ovatkin usein kiteytyneet budjettikysymyksiksi. (Sarjala 2008, 70.)

Koulutuspolitiikan kenttä aktivoitui osittain poliittisten toimien vuoksi, mutta osittain myös olosuhteiden pakosta. Vaatimukseen vastaamaan perustettiin muun muassa kouluohjelmakomitea, mutta koulualan asiantuntijat jahkailivat, eivätkä he suunnitelmista huolimatta saaneet ratkaisuja aikaan. Vuonna 1963 eduskunnan sivistysvaliokunta hermostui uudistusten hitauteen. Se laati mietinnön, joka sisälsi poikkeuksellisen kovaa kritiikkiä koululaitosta kohtaan.

Kun mietintö otettiin eduskunnan suuren salin käsittelyyn, oli ensimmäisistä puheenvuoroista asti aistittavissa, että enemmistö kannatti kattavaa uudistusta. (Sarjala 2008, 92–117.) Edustaja Tiekson sanoma istunnosta kiteyttää hyvin eduskunnan enemmistön kannan peruskouluasiaan:

*”Kukaan ei kiellä sitä, etteikö yksityisillä kouluilla olisi ollut suuria ansioita Suomen opetuslaitoksen kehittämisessä. Se ei kuitenkaan toisaalta ole riittävä syy sellaisen instituution säilyttämiseksi, jonka aika alkaa olla ohi. Kivikirveellä oli aikanaan huomattava merkitys ihmiskunnan kehityksessä. Ei voida kuitenkaan vaatia, että atomiajan ihmisen olisi käytettävä kivikirvestä pelkästään kunnioituksesta traditiota kohtaan.”* (Sarjala 2008, 118.)

Kun ensimmäinen parlamentaarinen askel kohti peruskoulua oli otettu vuonna 1963, saatiin uudistuksen toimeenpanoon vaadittava lainsäädäntö yllättävän nopeasti tehtyä. Vuonna 1964 helmikuussa asetettiin toimeen peruskoulukomitea, jonka tehtävänä oli laatia säännösethdotukset yhtenäiskoulujärjestelmän rakenteesta ja sen toteutuksesta. Peruskoulukomitea linjasi, että 9-vuotisessa koulussa tuli olemaan vain kaksi osaa: kuusivuotinen ala-aste ja kolmevuotinen yläaste. Kunnan osuus koululaitoksen järjestämisessä nousi keskeiseksi, kun taas valtion koulujen ja yksityiskoulujen merkitys pieneni miltei olemattomaksi. Komitea luovutti mietintönsä vuonna 1965, ja sen keskeinen sisältö oli ehdotus laiksi koulujärjestelmän perusteista. Laki säädettiin puitelain muotoon, ja se astui voimaan 1. elokuuta 1970. (Somerkivi 1983, 14–15.) Toimeenpanosuunnitelmien mukaisesti maassamme siirryttiin peruskoulujärjestelmään vuosina 1972–77. Toteutus alkoi maan pohjoisosista ja eteni asteittain etelään; pääkaupunkiseudulla uudistus toteutettiin viimeisenä. (Somerkivi 1983, 27.)

Peruskoulun yläasteella jaettiin sen alkuvaiheessa 1980-luvun alkuun asti oppilaat tasoryhmiin matematiikassa ja vieraisissa kielissä. Näissä aineissa oppilaan tuli suorittaa keskikurssin tai laajan kurssin oppimäärä, jotta ovet jatkokoulutukseen lukiossa tai keskikoulupohjaisissa ammatillisissa oppilaitoksissa aukesivat. Myös suppea kurssi näissä aineissa oli mahdollista suorittaa, mutta tällöin pyrkiminen korkeampaan jatkokoulutukseen ei ollut mahdollista. (Malinen 1992, 29.) Kouluhallitus jätti kuitenkin 1978 opetusministeriölle peruskoulun opetuksen kehittämisohjelman, johon sisältyi muun muassa yläasteen toiminnan eheyttäminen. Siinä kehoitettiin luopumaan eritasokursseista ja muutoinkin välttämään eriarvoisiin ryhmiin jakaantumista. (Somerkivi 1983, 32.) Jakojärjestelmästä luovuttiinkin 1983, koska sen koet-

tiin peruskoulun hengen vastaisesti vahvistavan koulutuksellista eriarvoisuutta – kaikilta kursseilta kun ei päässyt ylemmille jatkokoulutusväylille. Tilalle otettiin nykyinen tuntikehysjärjestelmä. (Malinen 1992, 29.) Somerkivi (1983, 46) kuitenkin paheksui sitä, että etenkin lahjakkaat lapset kärsisivät tuolloin tehdystä päätöksestä, ja hän muun muassa mainitsee peruskoulun keskittyneen liian yksipuolisesti alimman tason kohottamisen ongelmiin.

Kaikesta myllerryksestä huolimatta perusrakenteet ovat peruskoulussamme säilyneet suhteellisen muuttumattomina näihin päiviin saakka. Opetussuunnitelmat ja sitä myötä myös opetus ovat kuitenkin matkan varrella muuttuneet monta kertaa.



# 3 Opetussuunnitelmien historiaa Suomen koulujärjestelmässä

Tutkimukseeni kuuluu myös opetussuunnitelmien tarkastelua joukko-opin näkökulmasta 1970-luvulla sekä 2000-luvulla. Opetussuunnitelmat ovat myös läheisesti kytköksissä oppimateriaaleihin, sillä ne ohjaavat oppikirjojen suunnittelijoita. Lisäksi tutkimukseeni aineistosta olennainen osa koostuu juuri oppikirjoista, joten myös tästä syystä opetussuunnitelmien historiaa suomalaisessa opetuksessa on hyvä käydä läpi.

Opetussuunnitelman asema Suomen kouluissa ja matematiikan opetuksessa on perinteisesti ollut vahva (Haapasalo 1993a, 7). Opetussuunnitelman käsite ei kuitenkaan ole aina tarkoittanut samaa, vaan on sisällöltään ja merkitykseltään muuttunut ajan myötä. Suomessa nimitystä opetussuunnitelma käytti ensimmäisenä Mikael Soininen saksalaisen J. F. Herbartin mallin mukaan opetusopin kirjoissaan, joista ensimmäinen ilmestyi vuonna 1901. Herbartin malli oli nk. *Lehrplan-malli*. Siinä oppiaineet esitetään tavoitteineen ja opetussisältöineen, joten hyvä suomennos mallille on lukusuunnitelma. Herbart korostikin järjen ja tiedon merkitystä mallissaan. Samoihin aikoihin rantautui amerikkalaisen John Deweyn kasvatustilfilosofia Suomeen. Hänen käsityksensä opetussuunnitelmasta perustui lapsen kokonaisukehityksen kuvaamiseen, ja siitä käytetty termi *curriculum* tarkoittaa puolestaan lapsen oppimiskokemusten suunnittelua. (Malinen 1992, 11–13.)

Ennen peruskoulua opetussuunnitelmien tavoitteiden tarkkuus, sitovuus sekä asiakirjan laadinta ja hyväksymisprosessi olivat kovin erilaiset vaatimuksiltaan kansakoulun ja oppikoulun välillä. Oppikouluissa koulukohtaista variaatiota sallittiin vain vähän ja oppiennätykset sekä kouluhallituksen metodiset ohjeet suitsivat opetusta. Kansakoulussa opetussuunnitelmat olivat ennemminkin suosituksia kuin velvoittavia asiakirjoja. Opettajilla oli siis hyvinkin vapaat kädet ratkaista, miten oppilaat saatiin oppimaan parhaiten. Valtakunnallisesti kansakouluoppilaiden tasoa ja kehitystä ei juuri seurattu. (Sarjala 2008, 146–147.)

Asiaan kaivattiin muutosta. Edellisessä kappaleessa 2 on esiteltynä peruskoulun perustamis-historiaa. Tähän liittyy myös opetussuunnitelman kokoaminen peruskoulua varten. Sitä val-mistelemaan asetettiin 1966 kouluneuvos Urho Somerkiven johtama peruskoulun opetus-suunnitelmakomitea. Komitean tehtävänä oli selvittää peruskoulun opetussuunnitelman pe-rusteita sekä siirtymävaiheen erityiskysymyksiä. Näiden pohjalta sen tuli laatia yksityiskoh-tainen opetussuunnitelma, jota voitaisiin soveltaa kaikkiin kouluihin koosta riippumatta. Ko-mitean mietintöjen seurauksena peruskoulun opetussuunnitelmasta tuli valtakunnallinen, keskitetty opetussuunnitelma. Alun perin tarkoitus oli soveltaa kansakoulusta periytyvää opetussuunnitelmamallia (*curriculum*), mutta lopulta päädyttiin kuitenkin jäykähköön sisä-palveluohjesääntöön (*Lehrplan*). Samalla kansanopetuksen didaktisen autonomian perinne katkaistiin: ratkaisu oli hallinnon toimivuuden kannalta järkevä, mutta periaatteellisesti arve-luttava, sillä didaktiikka korvautui monin paikoin hallintojuridiikalla. Kunnat kokivat, että niiden tehtäväksi jäi kopioida opetussuunnitelman tekstit oman kunnan opetussuunnitel-maan. (Sarjala 2008, 147–152.)

Peruskoulun edellytettiin Somerkiven (1983) mukaan muodostuessaan vastaavan samoihin tarpeisiin kuin kansakoulu, kansalaiskoulu ja keskikoulu. Siksi monen tahon odotukset perus-koulun opetussuunnitelman aineksia kohtaan olivat samansisältöisiä kuin edellisien opetus-suunnitelmien. Samalla usealta koulumuutokseen sitoutuneelta taholta jäi ymmärtämättä, että peruskoulu oli kuitenkin aivan uuden tyyppinen koulu, jolla oli omat tavoitteensa. (Sarja-la 2008, 47.)

Säännösten perusteella opetussuunnitelma oli siis tärkeä asiakirja, mutta käytäntö kuitenkin puhui toista: opettajat noudattivat oppikirjan mukaista järjestystä, ja luottivat siihen, että op-pikirjan tekijät tuntevat opetussuunnitelman (Sarjala 2008, 153), erityisesti, koska oppikirjoja koski tarkastusmenettely vuoteen 1992 asti (luku 5.1). Tämänkaltaisesta ”oppikirjadidaktii-kasta” eivät suomalaiset opettajat ainakaan matematiikan osalta ole edelleenkaan irtautuneet (ks. luku 5.1). Sarjala (2008, 159) myös jatkaa, että ongelma päätettiin ratkaista seuraavalla tavalla: vuonna 1985 eduskunnan perustuslakivaliokunta määräsi koululainsäädännön koko-naisuudistuksen yhteydessä opettajan opetuksessaan seuraamaan opetussuunnitelmaa, joka säätelee opetuksen sisällön. Opetussuunnitelman vastaista opetusta oli päätöksen myötä pi-dettävä opettajan virkavirheenä.

Kun Sarjala (2008) aiemmin kertoi kuntien taannoin kokevan tehtäväkseen vain kopioida opetussuunnitelma omakseen, saatiin asiaan muutos vuonna 1994. Varsinainen opetussuunnitelmatyö siirtyi nimittäin kunnan ja koulun tasolle saman vuoden opetussuunnitelman perusteista lähtien. (Meisalo & Lavonen 1994, 5.) Paikallisen tason päätösvallan lisääntyminen merkitsi myös koulukohtaista vapautta opetussuunnitelman muokkaamiseen. Koulut kehittivätkin omia painotusalueitaan opetussuunnitelmiin. Vuonna 1994 uudistunut peruskoulun opetussuunnitelman perusteet toi lisäksi mukanaan uuden oppimiskäsityksen, jossa kritisoi behaviorismia ja kannustettiin konstruktivistisen oppimiskäsityksen omaksumiseen. Opetussuunnitelman kurssi muuttui pitkän ajan jälkeen kohti *curriculumia*. (Johnson 2007, 23–24.)

Myöhemmin kuitenkin huomattiin, että vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteet olivat liian väljät eikä asiakirja tavoitteensa vastaisesti tukenutkaan riittävästi paikallista opetussuunnitelmatyötä. Myös eri koulujen välillä saattoi olla suuriakin eroja opetussuunnitelmien noudattamisen tarkkuudessa, ja lisäksi opetussuunnitelman perustana ollut konstruktivistinen oppimiskäsitys ei aina vastannut työtodellisuutta kouluissa. Vuonna 1999 koululainsäädäntö kävi läpi kokonaisuudistuksen, jonka myötä hallinnollinen raja ylä- ja ala-asteen väliltä poistettiin. Tämä merkitsi velvoitetta yhtenäisen perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteille ja uudentyläiselle tuntijaolle. Vastauksena velvoitteelle saatiin vuonna 2004 valmiiksi uusi opetussuunnitelman perusteet peruskouluun. Asiakirja on aikaisempia perusteita yksityiskohtaisempi ja lisäksi siinä kuvataan eri oppiaineiden hyvän osaamisen tasot arvioinnin yhtenäistämiseksi valtakunnallisesti. (Johnson 2007, 23–24, 28.)

# 4 ”UUSI MATEMATIIKKA” SUOMALAISESSA KOULUJÄRJESTELMÄSSÄ

Tutkimukseni kannalta oleellinen asia on ”uusi matematiikka” ja erityisesti sen sisältämä joukko-oppi, joista kerron seuraavaksi tarkemmin yleissivistävän koulutuksen parissa Suomessa.

## *4.1 Kylmän sodan kilpavarustelu johti matematiikan opetuksen muutokseen*

Yleisen opetussuunnitelman ohella opetussuunnitelma ja samalla myös opetus matematiikan osalta on käynyt läpi huomattavia muutoksia erityisesti viimeisten 50–60 vuoden aikana. 1950-luvulle asti matematiikan opetussuunnitelma oli monin paikoin yhtenäinen sekä lännessä että idässä, mutta toisen maailmansodan jälkeen Neuvostoliitto ja Yhdysvallat ryhtyivät kilpavarusteluun niin aseiden kuin taloudenkin saralla. Kun Neuvostoliitto 1957 laukaisi Sputnikin avaruuteen, Yhdysvallat koki sen suurena tappiona luonnontieteiden ja matematiikan osaamisessaan, ja siksi amerikkalaisten matematiikan opetusta uudistettiin radikaalisti. Uudistuksen aalto levisi nopeasti myös muualle läntiseen maailmaan. Matematiikan opetuksen uudistusten perusteella muotoutui matematiikan rakenteellisuutta korostava ”uusi matematiikka”, joka rantautui Suomeen Pohjois-Amerikasta ja Länsi-Euroopasta. Sen keskeisiä sisältöalueita olivat joukko-oppi ja logiikka. ”Uuden matematiikan” myötä muun muassa perinteikäs euklidinen geometria sai väistyä opetuksesta. (Malaty 1998, Mashaal 2006, 138.) Kuparin (1999, 49) mukaan uuden matematiikan opettamisen keskeinen tavoite oli, että ”ymmärtämiseen pohjautuvan opettamisen kautta oppilaiden matemaattinen ajattelu kehittyisi saumattomasti ensimmäisestä luokasta alkaen”. ”Uuden matematiikan” ajateltiin myös luovan erinomaisen pohjan muun matematiikan ymmärtämiselle.

”Uuden matematiikan” eräänä eurooppalaisena johtohahmona pidetään yhteisöllistä nimerkkiä *N. Bourbaki*. Sen takana oli joukko ranskalaisia yliopisto-opettajia, jotka yhdessä pe-

rustivat puoliksi salaisen seuran kantaen keksittyä Bourbakin nimeä. Bourbakistit kokivat, että heitä oli opetettu kauhistuttavalla, jopa antiikkisella tavalla. He halusivat modernisoida matematiikan opetusta, ja siksi he tuottivatkin sarjan matematiikan oppikirjoja muodostaen täydellisesti uuden suunnan koko matematiikan opetukselle. (Hodgkin 2005, 240.)

Bourbaki kutsui matematiikkaa universaaliksi kieleksi, jota tuli käyttää joka tieteenalalla – jopa sosiaalitieteissä ja humanisissa tieteissä. Ajatus ”uudesta matematiikasta” kulki käsi kädessä modernin käsityksen kanssa siitä, miten asiat oli esitettävissä objektien välisten relaatioiden kautta. Bourbakin jalanjäljillä akateemikot innostuivat julistamaan, miten matematiikka on kaikkialla, eli kuinka matematiikka on olennainen osa jokaisen yksilön akateemista ja kulttuurista tietoutta. (Mashaal 2006, 138–139.)

#### ***4.2 Asiantuntijat matematiikan muutoksen puolesta ja sitä vastaan***

”Uuden matematiikan” opetuksen aloittaminen Suomessa nivoutuu sattumoisin yhteen 1970-luvun alussa suomalaisen peruskoulun syntyyn. Somerkivi (1983, 48) kuvailee, että ”uusi matematiikka” oli tavallaan oma uusi oppiaineensa, jonka opettamiseen olisi etukäteen tullut erityisellä tavalla valmistautua. Sen opettamista kokeiltiin ennakoivasti vuosina 1960–1966 Suomessa 11 kansakoulussa ja 16 oppikoulussa. Somerkiven mukaan opettajia kurssitettiin siirtymää varten siten, että perusvalmius opettamiseen oli yleensä saavutettu peruskoulun alkamiseen mennessä. Junnila (1995, 117) ei kuitenkaan ole toimien riittävydestä samaa mieltä. Hänen mukaansa sillä, että ”uuden matematiikan” ja peruskoulun uudistamisprosessit aloitettiin miltei samanaikaisesti, oli selvästi häiritsevää vaikutus toisiinsa. Junnilan näkemyksen mukaan opettajilla oli täysi työ pysyä mukana jo peruskoulu-uudistuksen tahdissa, joten he eivät voineet paneutua täysipainoisesti ”uuden matematiikan” käytännön toteuttamiseen. Samaa pahoittelee myös Kupari (1989), ja toteaa, että valitettavasti hallinnollisten muutosten painaessa päälle opetus ajautui pintapuoliseksi ja joukko-opin symboliikkaa korostavaksi.

”Uudessa matematiikassa” oppikoulun käytäntöön verrattuna lukualueen laajentaminen varhentui koskemaan aiempaa nuorempia oppilaita. Erityisesti oppilaita oudoksuttivat uudenlaiset funktioiden käsittely ja koordinaatiston käyttö. Matematiikan opetus lähti nyt liikkeelle relaatioista ja lukupareista ja siirtyi vasta myöhemmin suoran viivan graafiseen esitykseen. ”Uuteen matematiikkaan” kuului myös se, että sanallisten tehtävien käyttöön ottamista myö-

hennettiin. Muutokseen sisältyi opettajille ja kirjantekijöille paljon outoa, uutta terminologiaa. (Junnila 1995, 118.)

Uudistuksen aloituksesta ei selvitty ilman jatkuvaa – ajoittain kovaakin – keskustelua niin sen puolesta kuin sitä vastaan. Asiantuntijana peruskoulun kehittämisesä toiminut Paavo Malinen pyrki ymmärtämään ”uutta matematiikkaa” kohtaan osoitettua kritiikkiä. Hän tiivisti arvostelijoiden ajatukset yhdeksään teesiin vuonna 1971. Teesit sisälsivät muun muassa seuraavat asiat: liika teoreettisuus (tehtävien vaatima korkea abstrahointi- eli erottelukyky), rutiinilaskujen puute, käytännöllisyyden ja oppilaan kokemusmaailman kadottaminen, liika symbolien käyttö (matematiikan mekaaninen suorittaminen), Eukleideen geometrian hylkääminen sekä oppimistulosten osittainen huonontuminen. (Junnila 1995, 118.)

Uudistuksen puoltaja, lehtori Yrjö Yrjönsuuri varoitti kuitenkin tekemästä päätelmiä yksittäisten seikkojen nojalla ja neuvoi opettajia lähestymään ”uutta matematiikkaa” aineena, mutta ennen muuta välineenä kasvatukselle:

*”[Joukko-opin käsitteet] ovat ihmisen ajatteluun joka tapauksessa kuuluvia riippumatta siitä, opetetaanko joukko-oppia vai ei. Kun ne nyt matematiikan opetuksen yhteydessä tietoisesti otetaan esille ja vähitellen abstrahoidaan yleiskäsitteiksi, niiden käyttö helpottuu ja siten niitä voidaan yhä vaivattomammin käyttää uusissa yhteyksissä. Nyt on selvästi alkanut näkyä, kuinka oppilaat käyttävät niitä yleisesti matematiikan opiskelussa ja sen lisäksi äidinkielen, maantieteen, biologian ym. aineiden opiskelussa...”* (Junnila 1995, 119.)

Urpo Kuuskoski heitti vettä kiukaalle myöhemmin artikkelissaan ”Koulumatematiikan uudistamisesta” kärkkäästi muotoillen seuraavasti:

*”Joukko-opin ja logiikan alkeiden osuutta on jatkuvasti lisätty ja niin voidaankin meillä puhua joukko-opin opetuksesta matematiikan avulla eikä enää matematiikan opetuksesta joukko-opin avulla”* (Junnila 1995, 121).

Myös arvostettu suomalainen matemaatikko, Rolf Nevanlinna, asetti 1970-luvun puolivälissä joukko-opin opettamisen ainakin silloisessa laajuudessaan kyseenalaiseksi. Hän pahoitteli erityisesti perinteisen geometrian hylkäämistä ja sitä, että matematiikan konkreettisesta puolesta oli luovuttu. Etenkin juuri Nevanlinnan moitteet tyrmistyttivät ”uuden matematiikan”

tukijat. Hänen jäljissään kuitenkin myös opettajakunta alkoi epäillä uudistunutta sisältöä julkisesti. (Junnila 1995, 127–128.)

Radikaalein aines joukko-opin opetuksessa karsiutui pikku hiljaa pois uusiutuvista oppikirjoista. Nevanlinnankin peräänkuuluttama geometrian osuus lisääntyi jälleen hieman. Kouluhallitus antoi vuonna 1982 uuden matematiikan oppimäärän ja oppimääräsuunnitelman peruskoulun matematiikalle. Ainesta karsittiin, mikä mahdollisti erilaisten painotuksien määrittämisen. Myös erilaiset opetusmenetelmät ja lähestymistavat opetukseen sekä joustavat ryhmitysratkaisut lisääntyivät. Ala-asteella uudistus astui voimaan 1983 ja yläasteella 1984. Eriyisesti muutos näkyi juuri ”uuden matematiikan” kohdalla. Joukko-oppi omana alueenaan poistettiin opetussisällöistä ja muun muassa funktion käsittely siirrettiin yläasteelle. Oppiminen yhdistettiin tuttuihin tilanteisiin ja lapsen omaan elämänpiiriin ja sanalliset tehtävät sekä sen myötä myös vihkotyöskentely lisääntyi. (Junnila 1995, 128.)

Uusi matematiikka sai siis väistyä ”takaisin perusteisiin” -ajattelun tieltä. Ajatuksena oli turvata oppilaiden peruslaskutaidot, mikä pyrittiin saamaan aikaan runsaalla määrällä harjoitustehtävien laskemista. Tavoitteessa kuitenkin epäonnistuttiin, sillä oppilaiden peruslaskutaidot eivät parantuneet ja muun muassa ongelmanratkaisutaidot jäivät puutteellisiksi. Katseet kääntyivät jälleen uuteen matematiikan opetuksen suuntaukseen, jota kutsutaan ”ongelmanratkaisun ajaksi”. Siinä nimityksen mukaisesti ongelmanratkaisua sekä taitojen soveltamista painotettiin, ja oppilaille pyrittiin luomaan aitoja ongelmanratkaisutilanteita. Tämä vaihe on säilynyt opetuksessa näihin päiviin asti. (Kupari 1999, 52.)

### ***4.3 Matematiikan opetus 2010-luvulla ja toiveet opetuksen tulevaisuudesta***

Joukko-opin ajoista matematiikan opetus on ehtinyt kokea monta muutosta. Edellä kerrottiin siirtymisestä ns. ongelmanratkaisun aikaan, joka on jatkunut 2010-luvulle saakka. Miten siihen päädyttiin ja mihin tästä suomalainen matematiikan opetus on jatkamassa?

Perinteinen opettajajohtoinen tapa opettaa ja oppia matematiikkaa ei miellyttänyt kaikkia asiantuntijoita. Nykyisin Itä-Suomen yliopistossa matematiikan didaktiikan professorina toimiva Haapasalo peräänkuulutti konstruktivistista matematiikan oppimista 1990-luvulla. Haapasalo (1993a, 2, 4–5) esimerkiksi kyseli, miksi matemaatikot ovat hyväksyneet, että

”kouluissa käsitellään matematiikkaa, tätä kaunista inhimillistä konstruktiota, niin väkivaltaisella ja alokasmaisella tavalla”. Haapasalon mielestä koulumatematiikka oli etäännytnyt matematiikan alkuperäisestä luonteesta ja merkityksestä. Oppilaat eivät päässeet kokemaan, että matematiikka syntyy ongelmanratkaisuprosessien seurauksena. Haapasalo myös esitti, että matematiikkaa ei siksi ymmärretä, ja samalla matematiikkaa kohtaan kehittyy mitä omituisimpia uskomuksia.

Haapasalo (1993a, 32–33) kertoo Frankin (1988) havainnollistaneen samaa ajattelua, että yleisesti oppilaiden mielestä matematiikka on vain laskemista, jolla saavutetaan oikea vastaus. Frank totesi ongelmanratkaisun olevan vierasta oppilaille, jolloin he haluavat muutaman yksinkertaisen vaiheen kautta ratkaistavia tehtäviä. Tässä mallissa oppilaat ovat tiedon vastaanottajia ja opettaja yksinomaan välittää ja tarkistaa tätä tiedonsiirtoa. Vaikka aikaa näistä ajatuksista on kulunut jo kaksi vuosikymmentä, ne tuntuvat edelleen tutuilta todellisessa koulumaailmassa.

Haapasalo (1993a, 5–6) haluaa kiinnittää huomiota siihen, että matematiikkaan liittyy luonnostaan konstruktivistisia piirteitä, ja painottaa siksi, että perinteinen opetus sopii matematiikkaan huonosti. Haapasalo peräänkuuluttaa luovempia, oppilaan aktiivisuutta korostavia, tutkivia oppimisympäristöjä, joissa oppilaat voivat toimia sosiaalisemmin ja määrätä itse etenemisensä. Haapasalo myös peilaa 1990-luvun alun Suomen peruskoulujen matematiikan oppimisen tilaa useiden tutkimustulosten (mm. Haapasalo 1991, 1992, 1993b; Kangasniemi 1989; Kupari 1981, 1983, 1988; Silfverberg 1986) kautta siten, että ajattelua, ymmärtämistä ja soveltamista vaativissa tehtävissä on suurempia puutteita kuin mekaanisten laskutehtävien hallitsemisessa. Oppilaiden tehtävien ratkaisutapa sisältää siis pääasiassa rutiininomaista algoritmista ajattelua.

Haapasalon ajatukset yllä ovatkin se suuntaus, johon matematiikan opetuksessa on nykyisin pyritty: osittain tavoite on saavutettu, mutta matka on yhä kesken. Kupari (1993, 49) pohtiikin tavoitteiden saavuttamista eri maiden menneiden opetussuunnitelmaprosessien perusteella ja toteaa, että muutoksen aikaansaaminen matematiikan opetuksessa on hidasta: ongelma-keskeisen opetuskäytännön läpi lyöminen kesti muun muassa Britanniassa kymmenisen vuotta, eikä syvempää muutosta ole silti välttämättä tapahtunut. Kupari myös tulkitsee Ernestiä (1989) mukaillen, että keskeisimpiä kysymyksiä matematiikan opetuksessa ja sen



tulevissa muutoksissa tulee olemaan se, minkälaisena ilmiönä koulumatematiikka ymmärretään: käsitetäänkö matematiikka staattisena, yhtenäisenä rakennelmana, jonka opettaminen on tiedon siirtämistä uudelle sukupolvelle, vai onko se mieluummin dynaaminen ja laajeneva aines, jolloin opiskelu on tuloksia uudelleen keksivä, jopa sosiaalinen tutkimusprosessi?

Asetettujen tavoitteiden täyttäminen ei siis ole helppoa, sen saivat ajan myötä jo peruskoulu-uudistajatkin kokea. Tuore peruskoulun oppimistuloksia peilaava raportti vuoden 2012 PISA-tuloksiin liittyen (Kupari, Välijärvi, Andersson, Arffman, Nissinen, Puhakka & Vettenranta 2013, 19–21) näyttää, millaista on suomalainen matematiikan osaaminen nykytilassaan. Tuloksista voisi varovasti sanoa matematiikan opetuksen pysähtyneen jokseenkin staattiseen tilaan. Suoraan tuloksista nähdään, että Suomessa parhaiten osattu sisältöalue on ”määrällinen ajattelu”. Tämän alueen tehtävät käsittelivät suurelta osin luvuilla työskentelyä ja peruslaskutoimitusten soveltamista erilaisissa tilanteissa, eli juuri yllä mainittua rutiinimaista, mekaanista laskemista. Selvästi heikoimmin osattu matematiikan sisältöalue suomalaisilla oli ”tila ja muoto”, jonka tehtävät kohdistuivat mittaamiseen sekä geometrisiin kuvioihin ja kappaleisiin ja niiden ominaisuuksiin. Raportin kirjoittajat ehdottavat erityisesti kehittämiskohteeksi matematiikan opetuksessa geometrian ja mittaamisen taidot sekä niiden soveltamisen, ja lisäksi peräänkuuluttavat melko painokkaasti matematiikan huipputaajia.

Myös aiempien PISA-tutkimusten pohjalta on saatu hienoisia signaaleja matematiikan tason laskusta Suomessa. Kupari ym. (2013, 70–71) kertovat tuoreimmassa PISA-raportissa, että suomalaisten nuorten matematiikan osaamisessa on tapahtunut selvä heikentyminen vuosina 2003–2012. Edellä kerrottujen huipputaajien puutteen lisäksi huolestuneisuus kohdistuu erityisesti matematiikkaa heikosti osaaviin nuoriin, joiden määrän kasvu on hälyttävää. Kupari ym. kysyvätkin raportissaan osuvasti, olemmeko olleet liian tyytyväisiä peruskoulumme hyvään maineeseen ja kansainvälisesti korkeaan suoritustasoon. Erityisesti motivaatiota matematiikan opiskeluun halutaan saada nostettua. Kuparin ym. mukaan matematiikan opetuksessa on selkeästi tarvetta uudentilaiselle pedagogiselle ajattelulle ja mallille, joka pitkälti mukaillee Haapasalon jo 1990-luvulla esittämiä ajatuksia (ks. luvun alkupuoli).

# 5 MATEMATIIKAN OPPIKIRJA

Oppikirja on yleisimmin käytetty oppimateriaali kaikessa formaalissa opetuksessa. Erityisesti matematiikan oppikirjat ovat arvostettuja suomalaisten opettajien keskuudessa. Eräs tärkeimmistä opetussuunnitelmaa koskevista päätöksistä useimpien opettajien kohdalla onkin juuri oppikirjan valinta.

## *5.1 Oppikirjoista yleisesti ja matematiikan oppikirjan erityispiirteet*

Oppimateriaalina oppikirja on opetuksessa usein keskeisin opetusväline. Oppimateriaalilla viitataan Lahdeksen (1997, 234) mukaan oppiainesta sisältäviin tietolähteisiin. Tällaisia ovat muun muassa kirjat, kuvat, kartat tai diat, kankaat ja muut samankaltaiset lähteet. Tarkempi määritelmä, *oppikirja*, tarkoittaa teosta, joka on opetus- ja oppimistarkoitukseen laadittu (Häkkinen 2002, 11). Tässä tutkimuksessa oppimateriaalilla tarkoitetaan oppikirjaa. Lajityyppinä oppikirja pyrkii neutraaliin ja objektiiviseen esitystapaan, sillä kirjoittajan ääni ei ole kuuluvissa ja faktat esitetään neutraalisti. Se myös antaa kuvan lukijalleen, mitä on tärkeää oppia. Samalla oppikirja ohjaa oppimaan tekstien, kuvien ja tehtävien ominaisuuksien kautta; lukija saa niiden välityksellä vihjeitä siitä, miten asioita oletetaan oppivan. (Mikkilä-Erdmann, Olkinuora & Mattila 1999, 436–437.)

Suomenkielisten koulukirjojen tuotanto alkoi 1800-luvulla (Ahtineva 2000, 11). Oppikirjan suuri kasvukausi koitti 1970-luvulla, kun peruskoulut aloittivat toimintansa. Koulujen määrärahat olivat alkuvuosina suhteellisen runsaat, joten kirjahankintoihin riitti rahaa. Moni teos oli myös kertakäyttökirja, johon oppilas sai tehdä omia merkintöjään ja kirjoittaa vastauksia tehtäviin. (Häkkinen 2002, 78.) Peruskoulun käynnistyttyä opetukseen alettiin myös kustantaa erilaisia materiaalipaketteja. Muun muassa matematiikassa paketti sisälsi oppilaan kirjan, opettajan oppaan ja tuloskirjan. Oppilaan kirja sisälsi malliesimerkkejä, teoriaosuuksia ja harjoitustehtäviä sekä toisinaan myös lisätehtäviä. (Ahtineva 2000, 11.) Merkittävää muutosta 1970-luvulta ei siis nykyaikaan verrattuna ole tapahtunut matematiikan oppimateriaalin suh-

teen. On huomattavaa, että sähköisten viestimien painoarvon jatkuvasti lisääntyessä oppikirja on edelleen keskeisessä asemassa kouluopetuksessa.

Vielä peruskoulun synnyn aikaan koulussa saatiin käyttää vain kouluhallituksen (nyk. ope-  
tushallitus) hyväksymiä oppikirjoja. Erillinen valvonta loppui 1990-luvun alussa, kun oppikir-  
jojen ennakkotarkastuksesta luovuttiin. Opettajat saivat samalla vallan päättää itse käyttämis-  
tään oppimateriaaleista, ja siten heille myös muodostui vapaus valita ja yhdistellä parhaat  
oppimateriaalit opetussuunnitelman toteuttamiseksi. Nykyisin siis käytännön kokemukset  
ratkaisevat, mitkä kirjat ja sarjat valikoituvat menestyneimpiin. Valvonnan loppumisen jäl-  
keen oppikirjan on myös periaatteessa voinut kirjoittaa ja julkaista kuka tahansa. (Sarjala  
2008, 179, 182; Häkkinen 2002, 78; Meisalo & Lavonen 1994, 5.) Heinonen (2005, 34) haluaa  
tähän vedoten erityisesti muistuttaa jokaista oppikirjojen parissa työskentelevää, että vaikka  
oppikirjat mukailevat yhteiskunnassa vallitsevia arvoja, ovat ne samanaikaisesti kaupallisia  
tuotteita, joista kustantaja haluaa päästä myös taloudellisesti hyötymään.

Matematiikan oppikirja puolestaan on Vaahtokarin & Vähäpassin (1998, 214–215) mukaan  
täysin omanlaisensa oppikirja, sillä se poikkeaa etenkin reaaliaineiden kirjoista. Matemati-  
kassa opettajat myös käyttävät lähes poikkeuksetta oppikirjaa muun oppimateriaalin sijaan  
(ks. myös alempana Joutsenlahti & Vainionpää 2010). Tämä on samalla johtanut siihen, että  
oppilaat ja heidän vanhempansa pitävät oppikirjaa matematiikassa selvästi tärkeämpänä kuin  
monessa muussa oppiaineessa – oppilas myös luo kuvan itselleen matematiikasta ja sen op-  
pimisesta oppikirjan kautta. Matematiikan oppikirjat usein muistuttavat ulkoisesti toisiaan  
paljonkin, mutta lähempi tarkastelu osoittaa niiden tekijöillä selvästi olevan erilaisia arvoja,  
asenteita ja käsityksiä oppimisesta ja oppilaiden ajattelusta. Oppikirjaa orjallisesti noudatta-  
essaan opettaja saattaa siirtää kirjojen arvomaailmaa oppilailleen, usein tietämättään. Kuten  
Heinonen (2005) yllä jo muistutti, on oppikirjoihin syytä suhtautua tietynlaisella kriittisellä  
asenteella. Mikkilä-Erdmann ym. (1999, 446) myös korostavat, että mikäli opettaja opetuk-  
sessaan päätyy konstruktivistiseen näkökulmaan, yksioikoinen oppimateriaalikonseptin mää-  
rittely ei pitäisi edes olla vaihtoehtona opettajalle.

Painettu oppimateriaali on erityisesti matematiikan opetuksessa erittäin keskeisessä asemas-  
sa. Tämän osoittaa muun muassa Joutsenlahden & Vainionpään (2010, 137–139) tutkimus,  
jossa suomalaisista opettajista (N = 362) jopa 76,0 prosenttia piti oppikirjaa ”erittäin tärkeä-

nä” ja 21,2 prosenttia ”melko tärkeänä”, eli yhteensä hieman yli 97 prosenttia. Samaa tai täysin samaa mieltä väittämän ”Etenen matematiikan opetuksessa oppikirjan mukaisesti sivu sivulta järjestyksessä eteenpäin tarjoten nopeille laskijoille lisätehtäviä” kanssa oli vastanneista 84,7 prosenttia. Joutsenlahti & Vainionpää summaavatkin, että oppikirjojen ja opettajan oppaiden sisältö- ja rakenneratkaisut vaikuttavat keskeisesti matematiikan opiskeluun. Tämä nähdään myös joukko-opin kohdalla, sillä kaikki 2000-luvun pitkän matematiikan kirjasarjat eivät sisällä joukko-opin perusteita (luku 8.4).

## **5.2 *Aiemmat tutkimukset matematiikan oppikirjoista***

Suomessa on tehty verrattain vähän matematiikan oppikirjoihin liittyvää tutkimusta, ja lähinnä tarkastelu on rajattu koskemaan kirjojen harjoitustehtäviä. 1970-luvun oppikirjoja koskevaa tutkimusta en tavannut etsiessäni tietoa aiemmista tutkimuksista. Uudempia oppikirjoja on kuitenkin jonkin verran tutkittu. Strang (1989) ja Pakarinen & Rinkinen (1992) ovat muun muassa tehtäviä analysoimalla tarkastelleet murtolukujen käsittelyä. Perkkilä (1998, 2002) taas tarkasteli alkuopetuksen oppikirjoja konstruktivistisen tiedonkäsityksen kannalta. Tämäkin tutkimus painottui harjoitustehtäviin. Hannus (1996) taas tarkasteli oppikirjojen kuvitusta ja erityisesti sitä, miten oppilaat hyödynsivät matematiikan kirjojen kuvitusta opiskellessaan. Näiden tutkimusten perusteella oppikirjojen tekstit ovat faktapitoisia, ja ne on pitkälti koottu toisistaan irrallisiksi jäävistä asialistoista. Törnroos (2004) puolestaan tutki useampaa oppikirjaa, ja sai selville, että erityisesti 7. luokan opetuksen sisältö vaihtelee sen mukaan, mitä oppikirjoja kouluissa on käytetty – Törnroos jopa väittää, että oppikirjasarjojen väliset erot ovat niin suuret, että oppilaiden tasa-arvoinen oppiminen on joiltakin osin vaakalaudalla. (Ks. myös tämän tutkimuksen tulokset joukko-opin sisältöjen eroista lukion oppikirjasarjoissa luvusta 8.4 ja 9). Kaikilla Törnroosin tutkimilla luokka-asteilla (5.–7. lk) oppikirjojen välillä oli silti eroja käsiteltyjen sisältöjen suhteen sekä 6. ja 7. luokalla käytetyn lähestymistavan suhteen. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden opettajat kertoivat oppikirjan toimineen pitkälti opetuksen pohjana.

Sepän (2013) Pro Gradu -työ puolestaan painottuu joukko-oppiin ja oppikirjoihin. Seppä etsi tutkielmansa sanoilla ”Joukko-opin rooli suomalaisessa koulumatematiikassa”, mikä ajatuksen tasolla on hyvin lähellä omaa tutkielmaani, mutta on sisällöltään eri asioihin keskittyvä. Hän itse sanoo vertailevansa tutkimuksessaan silloisen opetuksen eroja tämän päivän ope-

tukseen opetussuunnitelmien, oppikirjoihin sekä opetuksen vaiheisiin liittyvien mielipiteiden kautta, mutta vertailun osuus jää suppeaksi ja pintapuoliseksi. Tutkimusta on muutenkin vaikeaa seurata, sillä selkeitä tutkimuskysymyksiä ei ole asetettu. Seppä kertoo tavoitteekseen tutkimuksessa pohtia myös sitä, kaatuisiko uuden matematiikan kaltainen opetus myös tänä päivänä samoihin ongelmiin kuin se aikanaan kaatui – tosin tähän kysymykseen lukija ei varsinaisesti saa vastausta. Tutkielmansa keskeisimpänä tuloksena Seppä pitää sitä, että joukko-opin osuutta voisi lisätä tulevaisuudessa varsinkin yläkoulun valinnaisessa matematiikassa. Hän jäi myös tutkimuksensa myötä pohtimaan, aloitetaanko joukko-opin käsittely lukiossa liian myöhään, sillä sen aiempi esittely voisi tukea myöhemmin myös muita oppisisältöjä.

Tutkimuksessaan Seppä (2013, 38) myös toteaa, että joukko-oppia ei sinällään lukiossa enää opeteta itsenäisesti. Itsenäisiä kursseja joukko-opista ei tosin enää järjestetä, mutta oman tutkimukseni perusteella (ks. luku 8.4) Sepän toteamus ei pidä paikkansa, ainakaan kaikkien lukion kirjasarjojen kohdalla. Seppä tosin sisällytti tutkimukseensa vain yhden kirjan (ja samalla kirjasarjan) lukion pitkästä matematiikasta, *Matematiikan taito 1–2:n* (2006), joka käsittää vain kaksi ensimmäistä pitkän matematiikan kurssia. Aineiston vaillinaisuus siis johdatti tutkimuksen tekijän vääriin yleistyksiin. Omassa tutkimuksessani kuitenkin ilmenee (ks. luku 8.4.3), että samainen kirjasarja esittelee laajasti joukko-opin perusteet muun muassa kurssilla 6, ja mikäli mukaan lasketaan myös muiden sarjojen oppikirjoja samalta kurssilta ja sen lisäksi kurssilta 11, ei joukko-oppia kaikilta osin ole unohdettu lukiossakaan.

## 6 TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tutkimukseni aiheena on *Joukko-oppi 2000-luvun suomalaisissa yleissivistävän koulun oppikirjoissa ja opetussuunnitelmissa*. Pyrin siis selventämään tutkimusongelmanani sitä, missä yleissivistävän koulutuksen (peruskoulu ja lukio) vaiheessa ja miten 1970-luvulla suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa opetettava ”uusi matematiikka”, erityisesti joukko-oppi, esiintyy suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa 2000-luvulla. 1970-luvun kirjoissa keskityn peruskoulun viidenteen ja kuudenteen luokkaan, sillä tällöin joukko-opin sisällöt vastasivat hyvin sitä, mitä joukko-opista nykyisin opetetaan. 2000-luvun kirjat ovat lukion pitkän matematiikan kurssien 6 ja 11 oppikirjoja. Olen lähtenyt purkamaan tutkimusongelmaa seuraavien tutkimuskysymyksien avulla:

- 1) Miten joukko-oppi on esillä 1970-luvun ja 2000-luvun suomalaisen yleissivistävän koulun opetussuunnitelmissa ja oppikirjoissa?
- 2) Millä luokka- tai koulutusasteella 1970-luvun peruskoulun ala-asteen joukko-opin perusteet on esitetty 2000-luvun matematiikan oppikirjoissa?

# 7 METODOLOGIA

Tässä kappaleessa esittelen tutkimustani koskevia metodologisia valintoja. Siihen kuuluu laadullisen tutkimuksen ja sisällönanalyysin taustojen selvittäminen sekä tutkimukseni kulun ja samalla sen luotettavuuden läpikäynti.

Kuten Krippendorf (2004, xxi) osuvasti toteaa, ei metodologia ole arvo itsessään. Se tarjoaa kielen puhua tutkimusprosessista, ei tutkimuksen asiasisällöstä. Metodologian tarkoitus on mahdollistaa tutkijalle tutkimusmetodien kriittinen suunnittelu ja tarkastelu niin logiikan, luonteen kuin protokollankin suhteen. Samoin metodologian avulla tutkija voi tarkastella yksittäisten tekniikoiden tehokkuutta ja arvioida tiettyjen mallien vaikutusta tiedon lisääntymiseen. Jokaisen tutkijan on myös pystyttävä perustelevaan ja oikeuttamaan valitsemansa askeleet tutkimuksen teossa ja hänen toimenpiteensä tutkimuksessa käytetyn analyysin suhteen.

## *7.1 Laadullinen tutkimus*

Laadullista tutkimusta on hankalaa määritellä yksiselitteisesti. Tuomen ja Sarajärven (2009, 5, 9, 20, 22) mukaan se ei olekaan yksittäinen, yhtenäinen kokonaisuus, vaan se nähdään ennemminkin sateenvarjomaisena käsitteenä, jonka alle voidaan sijoittaa suuri kirjo erilaisia laadullisia tutkimuksia. Laadullinen tutkimus pohjautuu havaintojen teoriapitoisuuteen. Se tarkoittaa, että tutkimuksen tuloksissa näkyvät tutkimusvälineiden valinta, yksilön käsitys ilmiöstä ja hänen ilmiölle antamansa merkitykset. Tulokset eivät siis voi olla käyttäjistä tai menetelmästä täysin irrallisia, ja ylipäänsä koko tutkimusasetelma syntyy tutkijan oman subjektiivisen ymmärryksen vaikutuksesta, vaikka objektiivisuus olisikin tavoitteena. Tutkimustyyppiltään laadullinen tutkimus luokitellaan empiiriseksi.

Laadullisessa tutkimuksessa kohdejoukko on yleensä tarkoituksenmukaisesti valittu, eli tutkittavia ei määrällisen tutkimuksen tapaan valita satunnaisotoksella. Tutkimuksella pyritään kuvaamaan yhtä ilmiötä ilman tieteellisiä todennäköisyyksiä, joten valittujen tapausten määrä

on myös usein pieni. (Alasuutari 2011, 29–30.) Hirsjärven, Remeksen ja Sajavaaran (2005, 155) mukaan tapauksia käsitellään ainutlaatuisina, eli analyysissä ei pyritä testaamaan teoriaa vaan siinä pikemminkin tuodaan esille yllättäviä piirteitä tutkitussa joukossa. Omassa tutkimuksessani on myös käytetty harkinnanvaraista otosta, sillä valinta 1970-luvun matematiikan oppikirjojen suhteen on tehty niiden saatavuuden perusteella. Lisäksi näistä olen rajannut tutkittavan aineksen ajatellen päätutkimuskohdettani, joukko-oppia. Tulokset siis kuvaavat ainoastaan valittuja kirjoja ja osakokonaisuuksia.

Laadullisen tutkimuksen käytetyimmät aineistonkeruumenetelmät ovat haastattelu, kysely, havainnointi ja erilaisiin dokumentteihin perustuva tieto (Tuomi & Sarajärvi 2009, 71). Alasuutarin (2011, 84, 156) mukaan kerätessä tutkimuksen tekijästä riippumatta olemassa olevaa aineistoa (engl. *naturally occurring data*) voidaan käyttää termiä *unobtrusive measures*, johon myös edellä mainittu dokumentteihin perustuva tieto lasketaan. Tällainen ulkokohtainen havaintojen tekeminen ja aineiston keräämisen tapa ei häiritse tutkimuksen kohdetta. Erilaisia dokumentteja voivat olla muun muassa mainokset, elokuvat, kirjat ja lehdet. Tässä tutkimuksessa raaka-aineisto koostuu matematiikan oppikirjoista, joten luonnollisesti se on ollut olemassa tutkimuksen tekijästä riippumatta.

Laadulliselle tutkimukselle ominaista on myös perusteellinen luotettavuuden arviointi. Eskolan ja Suorannan (2003, 210) mukaan pääasiallisin luotettavuuden kriteeri on tutkija itse ja luotettavuuden arviointi koskee koko tutkimusprosessia. Krippendorff (2004, xxi–xxii) kertoo myös, että muun muassa sanomalehden lukija voi soveltaa yksilöllistä maailmankuvaansa lukemiinsa teksteihin ja antaa niille omia merkityksiään, mutta mikäli hän tekee laadullista tutkimusta, on hän velvollinen tekemään parhaansa selventääkseen, mitä hän tekee ja mistä hänen päättelynsä juontaa juurensa. Tutkimuksen on myös oltava tarvittaessa toistettavissa. Tutkimukseni lähtökohtia ja luotettavuutta olen käsitellyt tarkemmin kappaleen 7.3 yhteydessä.

## **7.2 Sisällönanalyysi**

Sisällönanalyysi on laadullista tutkimusta. Krippendorffin (2004, xiii) mukaan sisällönanalyysi on mahdollisesti yksi kaikkein tärkeimmistä tutkimusmetodeista sosiaalitieteissä. Sisällönanalyysi käsittelee tietoa sellaisten tekstien, kuvien ja ilmaisuiden kautta, mitkä on tarkoitettu



nähtäviksi, luettaviksi, tulkittaviksi ja käytettäviksi. Siksi niitä tulisi myös tutkia seuraava ajatus mielessä: tekstien analyysi niiden käyttökontekstissaan erottaa sisällönanalyysin muista metodeista.

Omassa tutkimuksessani olen käyttänyt tekstilähtöistä sisällönanalyysia. Tekstilähtöinen analyysi alkaakin erimuotoisista teksteistä: henkilökohtaisista kirjeistä, kokoelmasta nauhoitettuja haastatteluja, kuuluisan henkilön päiväkirjamerkinnöistä, sarjakuva-albumikokoelmasta, muistiin kirjoitetuista luonnollisista keskusteluista, konferenssijulkaisuista, tietyn ajanjakson aikana ilmestyneistä julkaisuista (sanomalehdet, ammattilehdet, elokuvat), vaalikampanjapuheista, jonkin tietyn rikoksen uutisoinnista, puhelinluetteloista, perhevalokuvista ja niin edelleen – tässä tapauksessa matematiikan oppikirjoista. Analyysitapa sopii siis monentyyppiseen aineistoon. Tekstilähtöisessä analyysissä tutkijalla ei tarvitse olla valmista kysymystä mielessä, vaan hän lähtee tekstiä jäsentämällä tutkimaan, mitä mielenkiintoisia, tutkimisen arvoisia asioita materiaalista kumpuaa. (Krippendorf 2004, 341.)

Vaihtoehtoinen lähestymistapa sisällönanalyysiin on ongelmalähtöinen analyysi. Tässä tapauksessa analyysi puolestaan alkaa halusta löytää vastauksia tiettyihin kysymyksiin. Ne saadaan selville tutkimalla systemaattisesti käytössä olevia tekstejä. Usein tämäntyyppisesti aineistoa lähestyvä tutkija on kosketuksissa todellisten ongelmien kanssa – esimerkiksi lakimies etsimässä todistusaineistoa tukemaan asiakkaansa lausuntoa tai historioitsija etsimässä vastausta historiallisten tapahtumien kulun taustoista. Ongelma pitää tällöin vain muotoilla tutkimuskysymyksiksi. (Krippendorf 2004, 342–343.)

### ***7.3 Tutkimuksen kulku ja luotettavuus***

Ronkainen, Pehkonen & Lindblom-Ylänne (2011, 129–130) selventävät, että monesti tutkimuksen laadusta puhuttaessa käytetään yleisiä tieteellisen tutkimuksen arviointiperusteita. Erityisesti kvantitatiivisessa tutkimuksessa tämä tarkoittaa validiteetin ja reliabiliteetin tarkastelua. Validiteetti eli pätevyys tarkoittaa sitä, miten hyvin tutkimus tai valittu mittari kuvaa tutkittavaa ilmiötä (eli tutkimuksessa todella tutkitaan sitä, mitä on luvattu), reliabiliteetti puolestaan mittaustarkkuutta eli tutkimustulosten toistettavuutta. Tuomen ja Sarajärven (2013, 136) mielestä nämä käsitteet ovat kuitenkin syntyneet määrällisen tutkimuksen piirissä ja niiden käyttöä laadullisessa tutkimuksessa on kritisoitu toisinaan voimakkaastikin, joten

käsitteinä ne vastaavat täydellisesti vain määrällisen tutkimuksen tarpeisiin. Mikäli kuitenkin tämän tutkimuksen osalta tarkastellaan sen validiteettia, on viimeistään pohdinnassa (luku 9) nähtävissä, että kaikkiin tutkimuskysymyksiin on vastattu ja tutkimuksen tavoite on ohjannut koko toimintaa. Reliabiliteetin tapauksessa on käsiteltävä muutamia eri seikkoja. Käyttämäni aineisto on julkista ja siten kaikille saatavissa, eli tutkimus on toistettavissa. Uskon myös, että tulokset olisivat kenen tahansa toisenkin tutkijan tekemänä hyvin samankaltaiset. Reliabiliteetin tapauksessa on myös puuttuttava tutkimuksen objektiivisuuteen: olen pyrkinyt tietoisesti jättämään ennako-oletukseni sivuun muodostaessani tulkintoja aiheesta.

Tutkija on aina uskottavan selityksen velkaa aineiston kokoamisesta ja analysoinnista tutkimustuloksien selkeyttämiseksi ja saattamiseksi ymmärrettävämpään muotoon. Toisin sanoen lukijalle on annettava riittävästi tietoa siitä, miten tutkimus on toteutettu, jotta hän voi arvioida itsenäisesti tutkimuksen tuloksia. (Tuomi & Sarajärvi 2013, 141.) Tuomi ja Sarajärvi jatkavatkin, että laadullisen tutkimuksen luotettavuuden arviointiin ei ole olemassa yksiselitteisiä ohjeita. Kokenut kaksikko kuitenkin tarjoaa tutkijaa varten eri seikkoja sisältävän listan laadun varmistamiseksi (mt., 140–141). Tätä listaa mukaillen selvitän seuraavaksi lukijalle tutkimuksen kulkua, jotta tutkimuksen luotettavuus ja omien ennakkokäsitysteni tiedostus olisi jokaisen avoimesti arvioitavissa.

Kaiken kaikkiaan tämän tutkimuksen tekeminen on ollut mielenkiintoinen matka menneisiin ja nykyisiin oppikirjoihin sekä niitä pohjustamassa olleisiin opetussuunnitelmiin. Suuria oletuksia tutkimuksen tuloksista ennen sen aloittamista minulla ei ollut, sillä 70-luvun oppikirjojen maailma sekä koulutuksen tuulet olivat entuudestaan itselleni vieraita. Tutkimukseeni valmistautumisen aloitin käytännössä syyskuussa 2013 aihepiirin valinnalla. Tarkkaa rajausta aiheelle en tällöin vielä ollut tehnyt, joten vasta myöhemmin matematiikan oppikirjoihin tutustumalla se alkoi tarkentua. Joukko-oppi itsessään oli entuudestaan minulle jollakin tavalla tuttua lukioajan syventävältä pitkän matematiikan kurssilta sekä eräältä yliopistomatematiikan kurssilta. 1970-luvun peruskoulun alun matematiikan oppikirjoja en ollut kuitenkaan koskaan aiemmin nähnyt. Kun ensimmäisen kerran selasin tällaista ohjaajani tuomaa 6. luokan matematiikan oppikirjaa, olin ihmeissäni sen sisällöistä. Mielenkiintoni heräsi.

Varsinaiset tutkimusongelmat kumpusivat aineistosta sitä mukaa, kun siihen perehdyin. Koska materiaali oli valmista, ja sen lisäksi julkista ja painettua, se oli kaikille saatavilla samanlai-

sena. Muun muassa haastatteluihin perustuvat tutkimukset pitävät sisällään asiakirjojen säilyttämistä ja tiedonantajiin liittyvät eettisiä kysymyksiä, joita tämän tutkimuksen kohdalla ei tarvinnut huomioida.

Tutkimuksessani mukana olevat opetussuunnitelma-asiakirjat oli helppo löytää, sillä 2000-luvun opetussuunnitelmat ovat saatavilla internetin kautta, ja vanhempi, 1970-luvun opetussuunnitelmakomitean mietinnön molemmat osat olivat saatavilla Tampereen yliopiston kirjaston kautta. 1970-luvun oppikirjat puolestaan sain kaikki lainaksi Pro gradu -työni ohjaajan kirjakokoelmista, kun taas lukion matematiikan kirjoja oli eri kirjasarjoista saatavilla Tampereen normaalikoululla. Viidennen ja kuudennen luokan kirjat valitsin mukaan tutkimukseeni 1970-luvun peruskoulun kirjoista siksi, että ne sisältävät jo kattavasti joukko-oppia, ja kuitenkin taas neljännen luokan kirjassa joukko-oppi oli selvästi vähäisemmässä roolissa, vaikka POKMII:n perusteella voisi neljännen luokan osalta odottaa laajempia joukko-opin sisältöjä (ks. luku 8.2.1). *Matematiikka*-sarjan kirjojen lisäksi en kokenut tarpeelliseksi sisällyttää tutkimukseeni muita käytössäni ollutta 1970-luvun neljää kuudennen luokan kirjaa (*Koululaisen matematiikka 6* (kevät ja syksy), *Matematiikka P6a* ja *Peruskoulun matematiikka 6*), koska niissä joukko-opin eli tutkimuskohteeni merkitys oli vähäinen, enkä saanut viidennen luokan kirjoja näistä muista kyseessä olleista sarjoista käsiini. Sinänsä tämä on harmillista, sillä nykyajan lukiokirjojen edustajia on useita, ja 1970-luvun osuus on suppeahko. Tästä syystä myös 1970-luvun kirjojen tulokset eivät ole täysin yleistettävissä.

2000-luvun peruskoulun oppikirjoissa ei joukko-oppia enää ole. Lukion puolella taas vuoden 2003 Lukion opetussuunnitelman perusteissa ei mainita joukko-oppia yhdenkään kurssin sisällöissä (ks. luku 8.2.3), mutta joukko-oppia on silti vaihtelevasti esillä kahdella 2000-luvun lukion pitkän matematiikan kurssilla. Huomasinkin pitkän matematiikan oppikirjoja tutkiesani melko nopeasti, että ainoat huomionarvoiset kurssit tutkielmaani ajatellen ovat pitkän matematiikan kurssien 6 ja 11 oppikirjat, eli *Todennäköisyys ja tilastot* sekä *Lukuteoria ja logiikka*. Näistä jälkimmäinen on syventävä kurssi, eli kaikki opiskelijat eivät sitä sisällytä opintoihinsa. Lisäksi kurssin 11 osuus monesta kirjasarjasta ei sisältänyt lainkaan joukko-opin asioita.

Kirjasarjoista entuudestaan minulle tuttuja olivat *Pyramidi* ja *Matematiikan taito*, jotka olivat käytössä käymässäni lukiossa vuosina 2000–2003, edellinen pitkän matematiikan peruskurs-

seilla ja jälkimmäinen syventävillä kursseilla. Nämä kirjat ovat kuitenkin lukioajoistani muuttuneet niin sisällöltään kuin ulkoasultaankin, sillä uusin lukion opetussuunnitelma on vuodelta 2003. Lisäksi kerratessani matematiikkaa myöhemmin 2007 iltalukiossa oli käytössä *Pitkä matematiikka* -sarja, joka on säilynyt käytännössä muuttumattomana. *Lukion Calculus, Laudatur* ja *Pitkä Sigma* sekä 1970-luvulla painettu ala-asteen *Matematiikkaa* olivat oppikirjasarjoina minulle ennen tutkimukseni tekemistä täysin tuntemattomia.

Tutkimuskysymyksiini päädyin perehdyttyäni tarkemmin opetussuunnitelmien sekä oppikirjojen sisältöihin. Tutkimukseen liittyvän kirjallisuuden tarve hahmottui tutkimuskysymysten myötä suhteellisen nopeasti, vaikka matkan varrella karsinkin joukosta tarpeetonta teoriaa. Teorian kirjoittamisen lomassa aloin myös systemaattisesti käydä läpi opetussuunnitelmia ja oppikirjoja. Oppikirjojen tarkasteleminen tuotti opetussuunnitelmia selkeästi enemmän työtä, sillä jälkimmäisten suhteen huomasin nopeasti, että tutkimaani joukko-oppia ei niissä ollut vanhinta, 1970-luvulta peräisin ollutta asiakirjaa lukuun ottamatta.

Joukko-opin suhteen kävin kirjojen sivut yksitellen läpi tutkien sekä teoriaosat että tehtävät. Mikäli havaitsin jotakin mielenkiintoista, kirjasin sen heti muistiin. Edetessäni otin tarvittaessa kuvia tuloksien esittelemistä havainnollistaakseni. Koska tekstilähtöinen sisällönanalyysini on luokittelemisen sijasta kuvailevaa, en ole jokaista yksityiskohtaa poiminut mukaan, vaan pikemminkin pyrkinyt tuottamaan lukijalle kokonaiskuvan jokaisessa kirjassa esiintyneistä joukko-opin esittelykeinoista sen kautta, onko kirjassa aihetta käsittelevää teoriaa, esimerkkejä tai tehtäviä. Teorian osalta olen tuonut esille myös sitä, millaisin kuvin, merkinnöin ja sanoin joukko-oppia opiskelijalle kussakin kirjasarjassa opetetaan.

# 8 AINEISTON ESITTELY JA TULOKSET

## 8.1 Tutkimusmateriaalin yleisesittely

Tutkimusaineistoni raakamuoto koostuu kahdesta osasta: opetussuunnitelmista ja matematiikan oppikirjoista. Ensimmäinen osa koostuu *Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnöstä* ja erityisesti sen toisesta osasta vuodelta 1970 sekä nykyisin voimassaolevista asiakirjoista, eli *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteista* vuodelta 2004 ja *Lukion opetussuunnitelman perusteista* vuodelta 2003. Toinen osa koostuu 1970-luvun viidennen ja kuudennen luokan matematiikan kirjoista sekä voimassaolevan opetussuunnitelman (LOPS 2003) mukaisista lukion pitkän matematiikan kurssien MAA6 (Todennäköisyys ja tilastot) ja MAA11 (Lukuteoria ja logiikka) oppikirjoista.

## 8.2 Opetussuunnitelmat joukko-opin näkökulmasta

### 8.2.1 Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö 1970

1970-luvulla peruskoulumuutoksen kynnyksellä ei ollut olemassa asiakirjaa nimeltä peruskoulun opetussuunnitelma. Sen sijaan opettajat turvautuivat vastaavaan teokseen, joka on *Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö* vuodelta 1970. Asiakirja oli kaksiosainen: ensimmäinen osa käsitteli yleisesti koulunpitoa ja opetussuunnitelman taustoja, toinen osa (teokseen viitataan jatkossa POKMII 1970), jota tässäkin tutkimuksessa on käytetty aineistona, yksityiskohtaisemmin eri ainekokonaisuuksia.

Matematiikkaa opetettiin peruskoulun alkaessa kaikilla luokilla ensimmäisestä yhdeksänteen neljä viikkotuntia (POKMII 1970, 24). Matematiikan sisällöistä ”uuden matematiikan” kruununjalokiveä, joukko-oppia, opetettiin 1970-luvulla peruskoulun alkaessa kaikilla peruskoulun luokka-asteilla (taulukko 1). Vaikka sitä opetettiin jo alusta pitäen kaikille oppilaille, suo-

siteltiin metodisissa oppaissa kuitenkin opetukseen joustavuutta joukko-opin käsittelyn laajuuteen ja erityisesti viidennelle luokalle, jolloin oppilaiden joukko-opilliset valmiudet arvioitiin heterogeenisiksi. Seitsemännän kouluvuoden perusteet taas oli tarkoitettu niille oppilaille, joille joukko-oppia ei oltu viidennellä luokalla opetettu. (Junnila 1995, 120.)

*Taulukko 1. Yleiskatsaus aineksen sijoittumisesta eri luokka-asteille. Joukko-oppi ja loogiset perusteet. (POKMII 1970, 141–142.)*

Aines / kouluvuosi	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Joukko-opin peruskäsitteitä	X	X	X						
Joukko-opin käsitteitä ja symboleja				X	X	X	X	X	X
Tulojoukko, relaatio ja funktio					X	X	X	X	X
Avoin ja suljettu lause			X	X	X	X	X	X	X
Yhdistettyjä lauseita				X	X	X	X	X	X
Ratkaisujoukko			X	X	X	X	X	X	X

Liitteessä 1 olen esittänyt joukko-opin sisällöt myös jokaisen peruskoulun luokan kohdalla erikseen. Siinä viidennen ja kuudennen luokan kohdalla todetaan seuraavaa: ”Joukko-opin ja logiikan perustietoja käytetään hyväksi kaikissa tällä luokalla käsiteltävissä asioissa mahdollisuuksien mukaan”. Tämä on myös nähtävissä tutkimuksen tuloksista luvussa 8.3, jossa esitellään 1970-luvun viidennen ja kuudennen luokan matematiikan kirjojen sisältämää joukko-oppia.

Kuten taulukosta 1 käy myös ilmi, tutkimukseni kannalta relevanttien viidennen ja kuudennen luokan ainekseen kuului joukko-oppia hyvinkin laaja-alaisesti. Peruskäsitteet joukko-opista oli opetettu jo kolmena ensimmäisen kouluvuonna. Viidennen luokan opiskeltava aines oli kirjattuna sama kuin kuudennellakin luokalla, mutta jälkimmäinen syvensi edellisenä vuonna opittua. Pelkästään opetussuunnitelman perusteella tarkasteltuna joukko-opin opetus on ollut kattavaa jo ala-asteella.

### 8.2.2 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2004

*Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet* vuodelta 2004 eroaa aikaisemmista opetussuunnitelmadokumenteista siten, että asiakirja on aikaisempia perusteita yksityiskohtaisempi ja li-

säksi siinä kuvataan eri oppiaineiden hyvän osaamisen tasot arvioinnin yhtenäistämiseksi valtakunnallisesti. Yksityiskohdistaan huolimatta tässä asiakirjassa joukko-oppia ei ole mainittu. Vuoden 2004 peruskoulun opetussuunnitelman perusteet on tällä hetkellä voimassa oleva opetussuunnitelma, vaikka korvaavan asiakirjan hahmottelu on jo pitkällä, ja se julkaistaan vuonna 2016.

### **8.2.3 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003**

Suomen lukioissa toiminnan ja opetuksen perustana on *Lukion opetussuunnitelman perusteet*, jonka tuorein versio on vuodelta 2003 (viitataan jatkossa LOPS 2003). Opetushallitus on valmistelemassa uusia lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteita siten, että uudet opetussuunnitelmat voidaan ottaa käyttöön syksyllä 2016. Voimassa olevat lukion opetussuunnitelman perusteet ovat siis 11 vuotta vanhat.

Todennäköisyys ja tilastot -kurssin (MAA6) osalta LOPS 2003 asettaa tavoitteiksi, että opiskelija

- oppii havainnollistamaan diskreettejä ja jatkuvia tilastollisia jakaumia sekä määrittämään ja tulkitsemaan jakaumien tunnuslukuja
- perehtyy kombinatorisiin menetelmiin
- perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja todennäköisyyksien laskusääntöihin
- ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja soveltamaan sitä
- perehtyy jatkuvan todennäköisyysjakauman käsitteeseen ja oppii soveltamaan normaalijakaumaa. (LOPS 2003, 121.)

Lukuteoria ja logiikka -kurssin (MAA11) osalta puolestaan LOPS 2003 asettaa tavoitteiksi, että opiskelija

- oppii formalisoimaan väitelauseita ja tutkimaan niiden totuusarvoja totuustaulujen avulla
- ymmärtää avoimen lauseen käsitteen ja oppii käyttämään kvanttoreita
- oppii todistusperiaatteita ja harjoittelee todistamista

- oppii lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla
- osaa määrittää kokonaislukujen suurimman yhteisen tekijän Eukleideen algoritmilla. (LOPS 2003, 123.)

Joukko-opin näkökulmasta siis myös LOPS 2003 tuottaa pettymyksen. Vaikka monessa oppikirjasarjassa joukko-opin sisältöjä onkin mukana pitkän matematiikan kursseilla MAA6 ja MAA11 (ks. luku 8.4), eli *Todennäköisyys ja tilastot* sekä *Lukuteoria ja logiikka*, ei opetussuunnitelmissa näiden kurssien kohdalla ole mainintoja joukko-opista.

Lukion opinnot muodostuvat pakollisista, syventävistä ja soveltavista kursseista. Syventävät kurssit nimensä mukaisesti syventävät pakollisilla kursseilla opittuja asioita, ja ne ovat opiskelijalle valinnaisia, tosin niitä on opiskeltava vähintään kymmenen. (LOPS 2003, 15.) Matematiikassa valitaan joko lyhyen tai pitkän oppimäärän pakolliset kurssit, ja opiskelija voi tämän lisäksi valita halutessaan syventäviä kursseja. Tutkimukseni kannalta olennainen kurssi 6, *Todennäköisyys ja tilastot*, on pakollinen, kun taas kurssi 11, *Lukuteoria ja logiikka*, puolestaan valinnanvarainen syventävänä kurssina. Jälkimmäisen kurssin sisältöjä eivät siis edes kaikki pitkän matematiikan opiskelijatkaan käy läpi lukio-opinnoissaan.

### **8.3 1970-luvun ala-asteen matematiikan oppikirjasarja ”Matematiikkaa”**

Alakoulun eli silloisen ala-asteen oppikirjoista 1970-luvulta mukaan valikoin lopulta vain *Matematiikkaa*-sarjan, sillä ainoastaan siitä minulla oli saatavissa sekä viidennen että kuudennen luokan kirjat. Muiden sarjojen osalta sain käyttööni pelkästään kuudennen luokan kirjoja tai puolet kuudennen luokan oppisisällöstä (jälkimmäisissä tapauksissa 5. luokan oppikirja sarjasta ei ollut saatavissa). 2000-luvun peruskoulun kirjoja ei mukana ole, sillä joukko-oppia ei niissä opeteta.

*Matematiikkaa*-sarjan viidennen ja kuudennen luokan oppimäärät on jaettu kahteen osaan, *a* ja *b*, eli sarjan tutkimukseen kuuluvat osat ovat *5a*, *5b*, *6a* ja *6b*. Viidennen luokan oppikirjojen taustalla on nelikko Terttu Penttilä, Lasse Österdahl, Martti Kaikkonen ja Seppo Rikala. Kuudennen luokan oppikirjojen tekijät puolestaan ovat Terttu Penttilä, Ilkka Simolin ja Martti

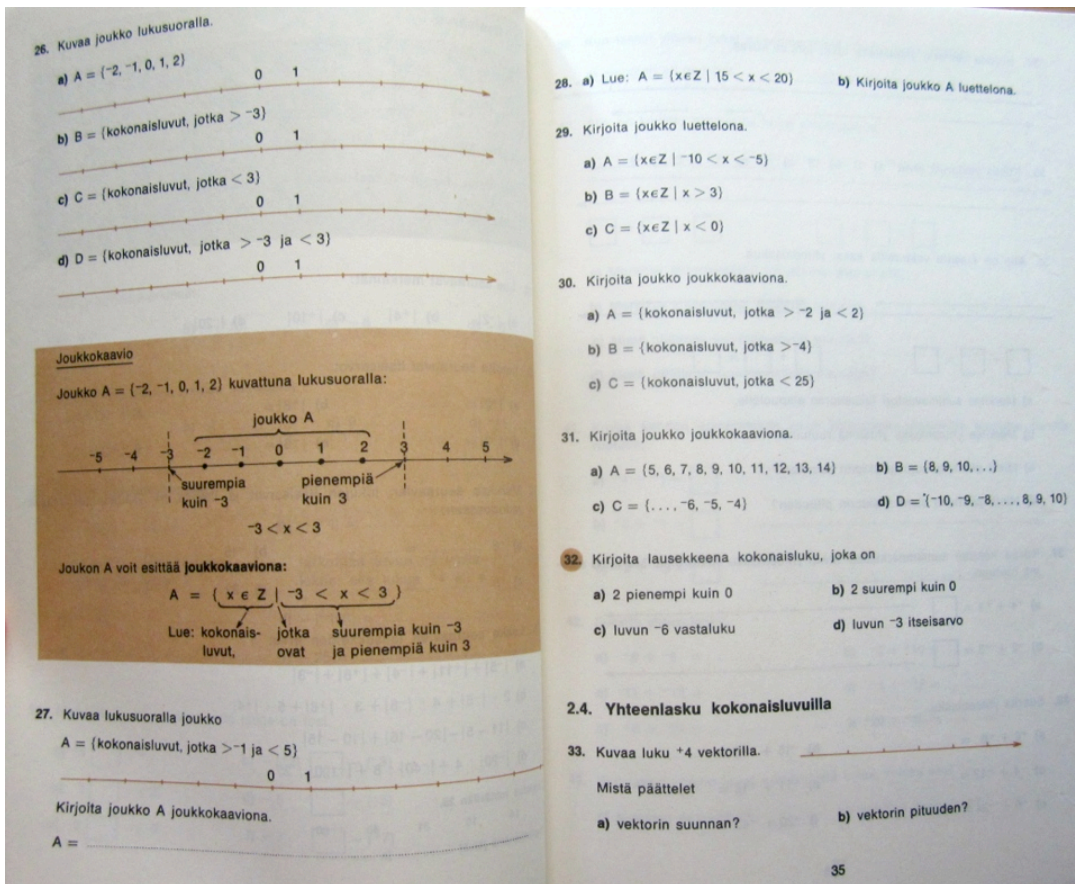


Kaikkonen, joista siis Penttilä ja Kaikkonen olivat mukana työstämässä jo viidennen luokan kirjoja. 5a on painettu 1974 (3. painos), 5b vuonna 1975 (5. painos), 6a on painettu vuonna 1975 (4. painos) ja 6b vuonna 1973 (1. painos). Koska oppikirjojen tarkastusmenettelystä ei ollut vielä luovuttu (ks. luku 5.1), on kaikissa kirjoissa merkintä etulehdillä siitä, että ne ovat kouluhallituksen hyväksymiä teoksia. *Matematiikkaa*-sarjan kirja 5a sivuja on yhteensä 164 ja 5b:ssä niitä on 168 (yhteensä 332 sivua). Osassa 6a sivuja taas on 162 ja osassa 6b niitä on 177 (yhteensä 339 sivua). Erikoista sarjan kirjojen sivunumeroinneissa on se, että *b*-osan sivunumerointi jatkuu *a*-osan viimeisestä sivunumerosta. Kirjojen kannet (kuva 1) ovat kummankin vuosikurssin eri osissa samat: viidennen vuosikurssin kirjoissa on geometriaan liittyvä kuvitus sekä etu- että takakannessa, kun taas kuudennen vuosikurssin kannet edustavat etukannessa koordinaatistoa ja takakannessa tilastollista pylväsdiagrammia.



Kuva 1. "Matematiikkaa"-oppikirjasarjan kansia: 5a (1974), 5b (1975), 6a (1975) ja 6b (1973). Viidennen luokan kirjojen tekijät ovat Terttu Penttilä, Lasse Österdahl, Martti Kaikkonen ja Seppo Rikala, kun taas kuudennen luokan kirjojen kirjoittajina on edellä mainittujen Penttilän ja Kaikkosen lisäksi Ilkka Simolin. Kirjasarjan on kustantanut Valistus.

Oppikirjat koostuvat teoriasta, esimerkeistä ja tehtävistä, jotka jokaisessa kappaleessa ovat limittyneet toisiinsa. Teoriaosa on siis pilkottu keskelle kappaleita pieniin osiin sopivissa väleissä esitettäväksi. Tämä on helppo havaita myös tyypillisen aukeaman kuvasta 2, jossa käsitellään joukko-oppia.

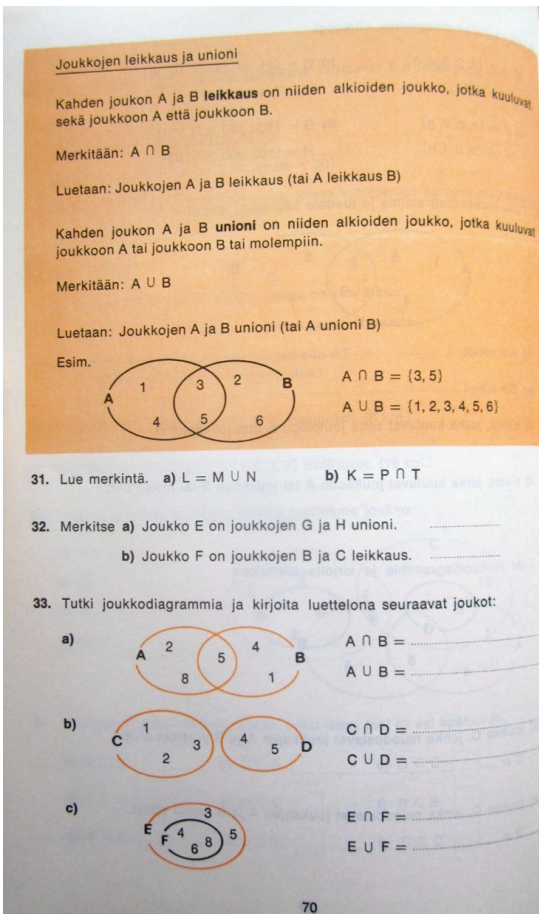


Kuva 2. Esimerkkiuukeama "Matematiikkaa" -sarjasta. Kuva kirjasta "Matematiikkaa 6a". (Penttilä, Kaikkonen & Simolin 1975.)

Erillisiä merkittyjä johdantoja ja alustuksia kirjoissa ei ole, ja kaikissa kirjoissa ensimmäiseltä sivulta lähtien otsikon jälkeen alkaa tehtäväharjoittelu. Tekijöidensä mukaan nämä aloitus-tehtävät kuitenkin liittyvät uuteen asiaan johdattamiseen. Kirjassa on myös syventäviä tehtäviä, joita on ripoteltu sinne tänne tehtävien joukkoon. Varsinaista vastausosiota kirjassa ei ole, mutta suureen osaan tehtävistä on tarkistuskohtia, ja tämän lisäksi vaikeammissa tehtävissä saattaa olla mukana ohjeita tai vihjeitä.

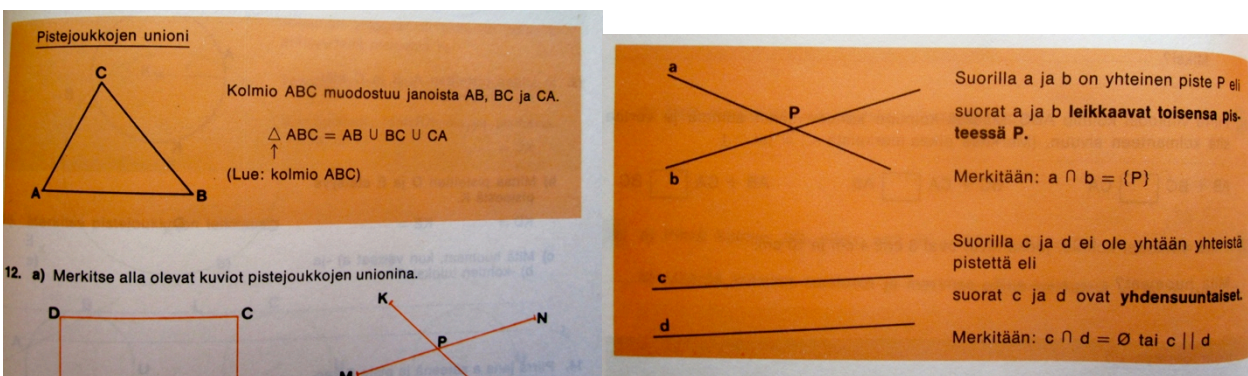
Viidennen luokan kirjoissa joukko-oppia on runsaasti. Osassa 5a on joukko-opille varattu jopa kokonainen kappale, "Joukko-oppia. Kertausta". Kuten jo taulukosta 1 (luku 8.2.1) havaitaan samoin kuin otsikon sanasta "kertausta", on joukko-oppia todella harjoiteltu jo ennen viidettä luokkaa, itse asiassa ensimmäisestä luokasta lähtien. Joukko-oppiin liittyvät merkinnät alkavat jo *Matematiikkaa 5a:n* ensimmäisiltä kertaussivuilta ja muutamia on nähtävissä myös ennen joukko-opin kertauskappaletta osioissa "Kokonaislukujen peruslaskutoimituksia" ja "Potenssit". Joukko-opin kertaus alkaa termistöstä ja joukkodiagrammeista ja jatkuu tyhjän jou-

kon, identtisten joukkojen sekä osajoukkojen käsittelyyn, ja päätty lopulta vielä leikkaukseen sekä unioniin (ks. kuva 3).



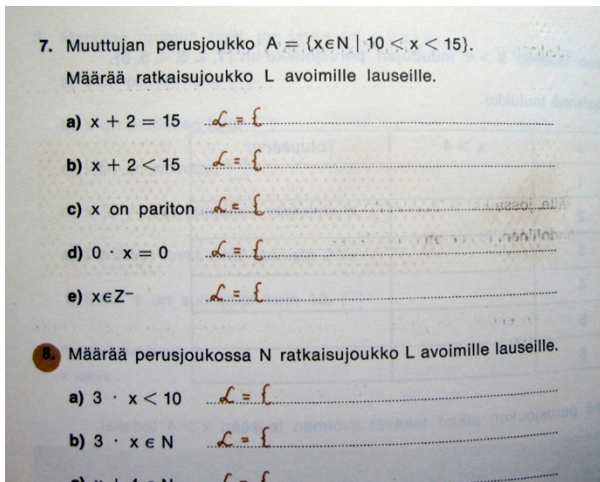
Kuva 3. Unionin ja leikkauksen kertausta viidennellä luokalla. Kuva kirjasta "Matematiikkaa 5a". (Penttilä, Österdahl, Kaikkonen & Rikala 1974.)

Joukot eivät lopu tähän. Niitä on esillä myös muun muassa geometriassa, muuttujan käsitteilyssä, lauseissa, murtoluvuissa sekä tulojoukoissa (ks. esim. kuva 4).



Kuva 4. Geometriaan sisältyviä joukkomerkintöjä. Kirjassa kappaleen otsikko onkin "Geometrisiä joukkoja". Kuva kirjasta "Matematiikkaa 5a". (Penttilä ym. 1974.)

Kuudennen luokan oppimäärissä joukko-oppi on kirjasarjassa yllättävän vähäisessä roolissa, vaikka sitä onkin molemmissa kyseisen vuosikurssin kirjoissa. Esimerkkejä joukko-opin merkinnöistä on nähtävissä mm. aiemmin esitetyssä tyypillisen aukeaman kuvassa 2 sekä seuraavassa kuvassa 5. Yleisesti ottaen ne ovat kuitenkin paljon harvinaisempia kuin viidennellä luokalla, vaikka *Peruskoulun opetussuunnitelma*komitean mietinnössä vuodelta 1970 joukko-opin perustietojen kerrotaankin kuuluvan opetettaviin sisältöihin (ks. liite 1).



Kuva 5. Joukko-opin merkintöjä, kuva kirjasta "Matematiikkaa 6a" (Penttilä ym. 1975).

Sen lisäksi, että joukko-oppia esiintyy runsaasti *Matematiikkaa*-sarjan kirjoissa, joukko-oppia myös käsitellään kirjasarjassa monipuolisesti, ja jopa – kuten seuraavan luvun 8.4 aikana nähdään – monessa tapauksessa laajemmin kuin nykylukiokirjoissa. Perusmerkinnät sekä käsitteet tulevat (ja osittainhan ne sitä jo ovatkin) oppilaille tutuiksi, samoin kuin Venn-diagrammit sekä unioni ja leikkaus merkintöineen ja nimityksineen.

#### 8.4 2000-luvun lukion pitkän matematiikan oppikirjasarjat

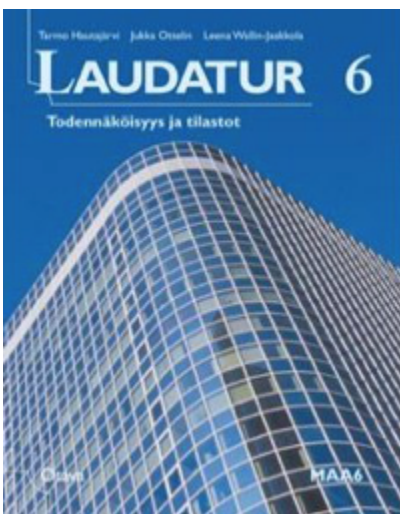
Lukion oppikirjoista pitkän matematiikan kahdella kurssilla esitetään joukko-opin sisältöjä laajemmin. Ensimmäinen on pakollisiin kursseihin kuuluva kurssi 6, *Todennäköisyys ja tilastot*, ja toinen syventäviin kursseihin kuuluva *Lukuteoria ja logiikka*, eli kurssi 11.

Tutkimuksessani lukiokirjoissa eri kustantajia edustavat WSOY, Tammi ja Otava. Käytössäni olleissa versioissa kustantajat näyttäytyvät hieman erilaisina siihen nähden, mitä ne ovat vuonna 2014, sillä joidenkin oppikirjojen julkaisemisen jälkeen WSOYpro ja Tammi Oppima-

terialit ovat yhdistyneet ollen nykyisin yhdessä SanomaPro. *Lukion Calculus* ja *Laudatur* edustavat Otavaa. *Pitkä matematiikka* ja *Matematiikan taito* edustavat WSOY:tä ja *Pitkä Sigma* Tammea, mutta yhdistymisen vuoksi nämä kirjasarjat kuuluvat nykyään SanomaPro:n alaisuuteen, lukuun ottamatta *Matematiikan taitoa*, jota ei enää kustanneta, mutta saatetaan silti edelleen käyttää joissakin lukioissa oppikirjana. Tutkimuskäytössä olleista kirjoista vain *Pyramidi*-sarjaan kuuluva teos oli niin uusi, että sen kustantajana oli SanomaPro. Kaikki kirjat ovat kuitenkin LOPS2013:n mukaisia, joten olen ne sisällyttänyt tutkimusmateriaaliini.

#### 8.4.1 Laudatur

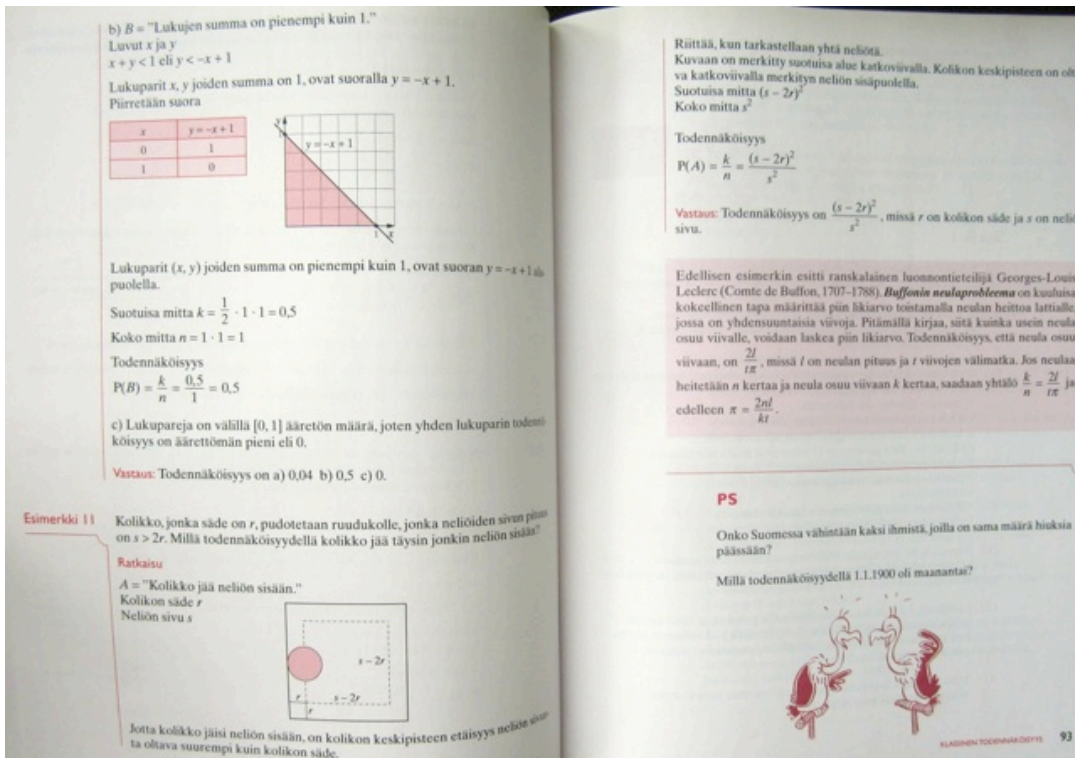
Otavan kustantama *Laudatur*-kirjasarja on Tarmo Hautajärven, Jukka Ottelinin ja Leena Wallin-Jaakkolan käsialaa. Kurssin 6 oppikirja, 238-sivuinen *Todennäköisyys ja tilastot*, on julkaistu vuonna 2006, ja se on ensimmäinen painos kirjasta. *Laudatur*-sarjan kurssin 11 kirja ei ole mukana tutkimuksessa siitä puuttuneen joukko-opin vuoksi. Sarjan oppikirjojen kannet esittelevät arkkitehtonisia rakennelmia alaviistosta kuvattuna (ks. kuva 6).



**Kuva 6.** "Laudatur"-oppikirjasarjan oppikirjan 6 kansi vuodelta 2006. Oppikirjan kirjoittajat ovat Tarmo Hautajärvi, Jukka Ottelin ja Leena Wallin-Jaakkola. Kirjasarjan on kustantanut Otava.

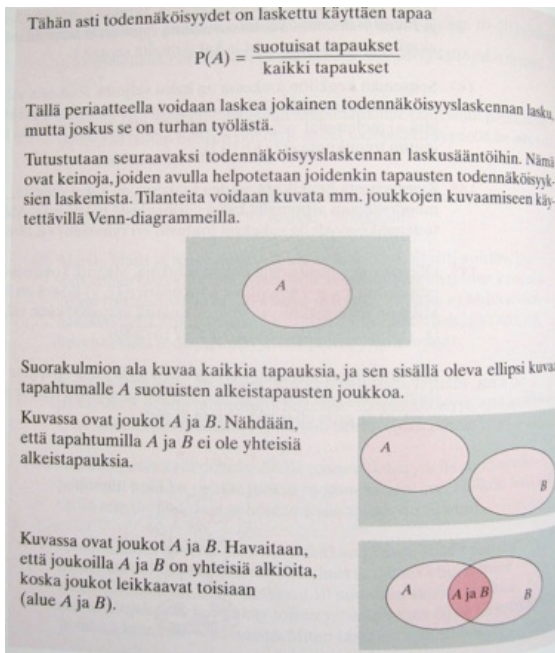
Kirjan kappaleet koostuvat johdannonomaisesta ranskalaisten viivojen muodostamasta osasta, teoriaosasta esimerkkeineen (ks. kuva 7) sekä tehtävistä. Toisin kuin lukion joidenkin muiden sarjojen oppikirjoissa, *Laudaturissa* pohtiva ongelmatehtävä on sijoitettu aina teoriaosan loppuun. Kappaleet lopettaa kaksisarjainen osio harjoitustehtäviä: perusaineksen ja syventävän aineksen tehtävät. Kirjassa on peruselementtien lisäksi muutama omien taitojen

testausosio. Loppupuolella on myös kertausosa, joka sisältää teoriaa ja esimerkkejä kirjan aihepiireistä, ja tähän liittyy kirjan kappaleisiin liittyviä kertausharjoituksia. Opiskelija voi myös harjoitella lähestyvää koetta varten oppikirjan lopussa sijaitsevien kolmen harjoituskokeen avulla. Kirjan viimeiset sivut sisältävät vastaukset kaikkiin tehtäviin sekä hakemiston keskeisistä käsitteistä.



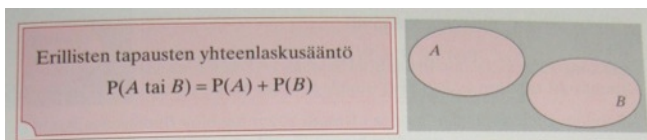
Kuva 7. Tyypillinen aukeama "Laudatur"-kirjasarjasta. Kuvassa kurssin 6 kirja. (Hautajarvi, Ottelin & Wallin-Jaakkola 2006.)

Joukko-oppia *Laudaturin* kurssilla 6 esitellään kovin lyhyesti todennäköisyyksien laskusääntöjen yhteydessä lähinnä Venn-diagrammien avulla. Myöskään nimitystä joukko-oppi ei mainita lainkaan, ja ainoat asiaa sivuavat lauseet kirjassa kuuluvat kaksi seuraavasti: "Tilanteita voidaan kuvata mm. joukkojen kuvaamiseen käytettävillä Venn-diagrammeilla", "Kuvassa ovat joukot A ja B" ja "Havaitaan, että joukoilla A ja B on yhteisiä alkioita, koska joukot leikkaavat toisiaan." Viimeisessä toteamuksessa on ainoa kirjan viittaus leikkaukseen. Sana "osajoukko" mainitaan ainoan kerran kombinaation määritelmän yhteydessä. Mm. unionia eli yhdistettä ja tyhjää joukkoa ei mainita lainkaan *Laudaturissa*. Kuten kuvasta 8 nähdään, Venn-diagrammien yhteydessä puhuta perusjoukosta lainkaan, vaan kirja mainitsee tässä kohdassa sanat "kaikki tapaukset".



Kuva 8. Joukko-opillisia esityksiä kirjassa "Laudatur 6" (Hautajärvi ym. 2006).

Joukko-opillisia merkintöjä, eli joukkoja kaarisulkeissa tai unionin ja leikkauksen matemaattisia merkintöjä ei käytetä. Kirjassa suositetaan "ja"- sekä "tai"-sanoja (kuva 9). Joukko-opillisia kuvia ja sanoja käytetään yhteensä viidellä sivulla kirjassa. Kirjan tehtävät ovat siis suoritettavissa ilman syvempää tietämystä joukko-opista.

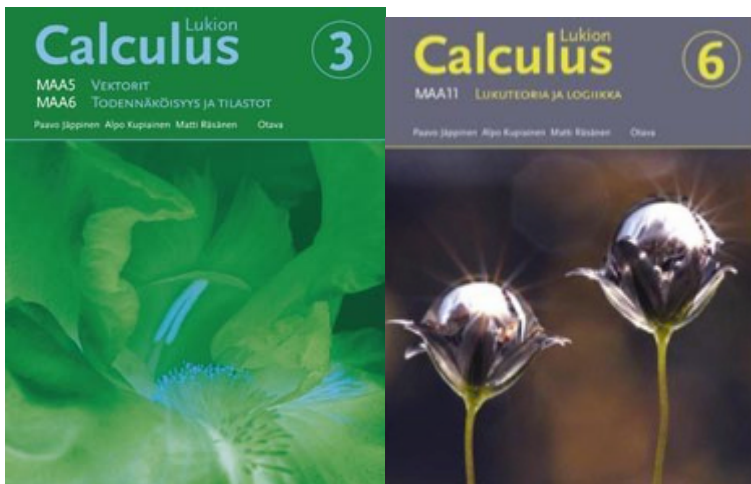


Kuva 9. "Laudatur"-sarjassa suositetaan sanallisia ja- sekä tai- sanoja unionin ja leikkauksen merkintöjen sijaan (Hautajärvi ym. 2006).

#### 8.4.2 Lukion Calculus

Otavan kustantama *Lukion Calculus* -oppikirjasarja on Paavo Jäppisen, Alpo Kupiaisen ja Matti Räisäsen kokoama oppimateriaali. Osa sarjan kurssikirjoista on yhdistelty keskenään, eli samojen kansien sisällä saattaa olla useampi kurssikirja toisistaan kuitenkin selkeästi eroteltuihin kokonaisuuksina. Toinen tutkittavista kirjoista, *Lukion Calculus 3*, oli yhdistelty oppikirja. Se sisälsi sekä kurssin MAA5, *Vektorit*, että kurssin MAA6, *Todennäköisyys ja tilastot*. Olen rajannut kirjasta tutkittavaksi vain *Todennäköisyys ja tilastot* -osion, sillä se voisi rakenteensa puolesta toimia itsenäisenä oppikirjana. Sarjan molemmat tutkitut osat, kolmas ja kuudes kir-

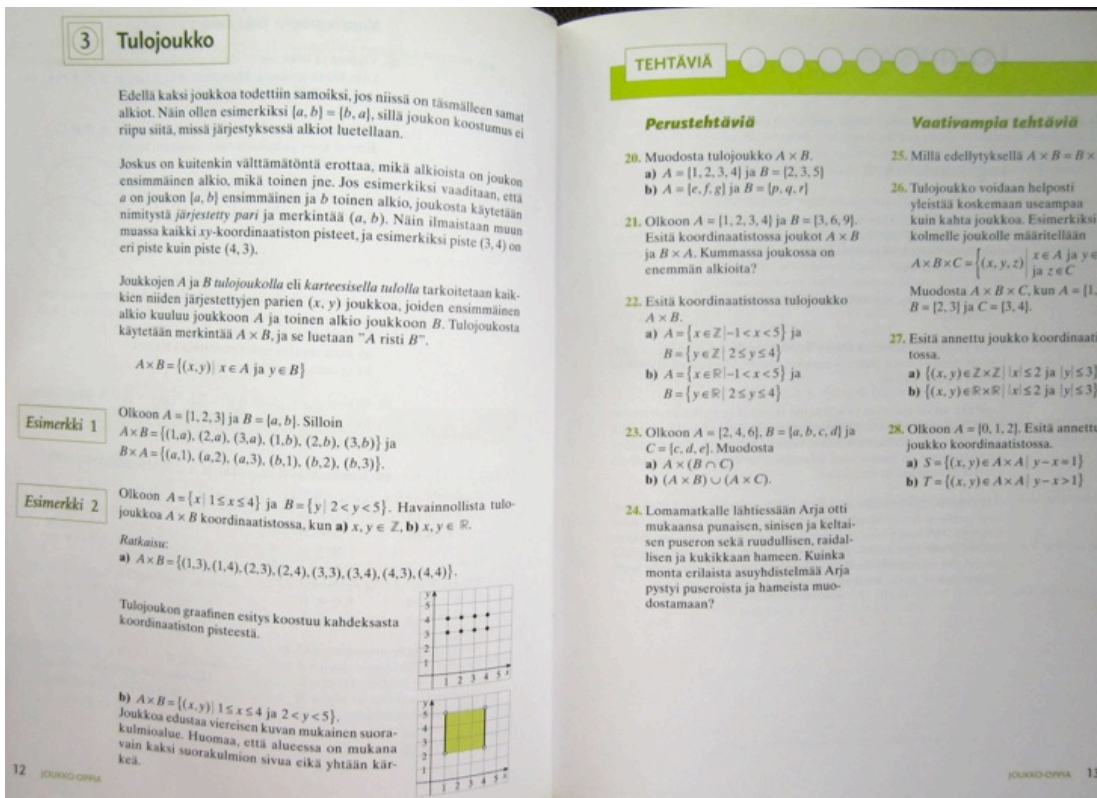
ja, ovat ensimmäisiä painoksia vuodelta 2005. Kurssin 6 osuus *Lukion Calculus 3*:sta on 118-sivuinen ja kurssi 11, eli *Lukion Calculus 6*, on 96-sivuinen. Kansien kuvina on luonnon lähikuvia, kuten näissä tapauksissa kastepisarat kasvilla tai merivuokko (kuva 10).



**Kuva 10.** "Lukion Calculus" -oppikirjasarjan kansia. Molemmat kuvan kirjat, eli "Calculus 3" ja "Calculus 6", ovat vuodelta 2005. Oppikirjojen kirjoittajat ovat Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen ja Matti Räsänen. Kirjasarjan on kustannut Otava.

*Lukion Calculus* -oppikirjojen kappaleet (ks. kuva 11 esimerkkiaukeamasta) koostuvat teoriasista esimerkkeineen ja ne päättyvät tehtäviin. Tehtäviä on kaksi sarjaa, perustehtäviä ja vaativampia tehtäviä. Kirjojen lopussa on jokaisesta suuremmasta kokonaisuudesta lisätehtäviä, joiden merkitystä kirjan tekijät eivät ole kommentoineet: ovatko ne puhtaasti lisätehtäviä vai samalla kertaavia tehtäviä? Näiden lisäksi kirjasarja tarjoaa kaksi kertauskoetta. Viimeiseksi kirjassa on annettu kaikkiin tehtäviin vastaukset sekä hakemisto kirjan keskeisistä käsitteistä.





Kuva 11. Tyypillinen aukeama "Lukion Calculus" -sarjan oppikirjasta. Kuvassa kurssin 6 oppikirja. (Jäppinen, Kupiainen & Räisänen 2005a.)

Lukion Calculus -sarjassa joukko-opin sanallinen ja merkinnällinen käsitteleminen alkaa heti todennäköisyys-aiheen ensimmäisen kappaleen, "Peruskäsitteitä", ensimmäiseltä sivulta. Joukko-oppia esittelevät kolme ensimmäistä virkettä kuuluvatkin näin:

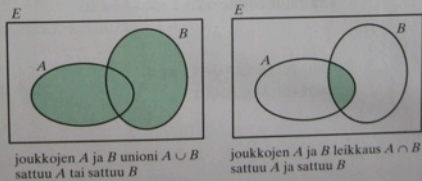
*"Näitä tulosmahdollisuuksia sanotaan alkeistapauksiksi ja niiden muodostamaa joukko perusjoukoksi eli otosavaruudeksi. Joukko-opillisesti napanheittoa kuvaa joukko  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Tavallisesti satunnaisilmiö ja sitä kuvaava joukko samaistetaan." (Jäppinen, Kupiainen & Räisänen 2005a, 116.)*

Kappaleessa 2, "Klassinen todennäköisyys", on ensimmäinen kuva Venn-diagrammista. Samassa yhteydessä esitellään muun muassa käsitteet osajoukko ja tyhjä joukko. Kappaleessa 5, "Yhteenlaskusääntö", esitellään Venn-diagrammien avulla yhdiste eli unioni sekä leikkaus. Samassa yhteydessä käytetään myös unionin ja leikkauksen matemaattisia merkintöjä (kuva 12).

## Yhteenlaskusääntö

Tutustutaan nyt sellaisiin laskusääntöihin, joita käyttäen tapahtuman todennäköisyys voidaan laskea muiden tapahtumien todennäköisyyksien avulla. Otetaan aluksi käyttöön eräitä nimityksiä ja merkintöjä.

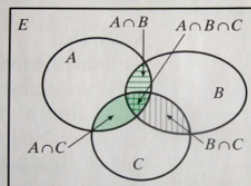
Olkoot  $A$  ja  $B$  satunnaisilmiön  $E$  liittyviä tapahtumia. Muodostetaan niistä uusi tapahtuma ' $A$  tai  $B$ '. Se sisältää kaikki ne alkeistapaukset, jotka kuuluvat tapahtumaan  $A$  tai tapahtumaan  $B$ . Joukko-opillisesti tämä tapahtuma on joukkojen  $A$  ja  $B$  yhdiste eli *unioni*, josta käytetään merkintää  $A \cup B$ . Tämä joukko käsittää kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat joukkoon  $A$  tai joukkoon  $B$ . Yhdistettä havainnollistaa alla oleva vasemmanpuolinen kuva. Oikeanpuolisessa kuvassa on esitetty joukkojen  $A$  ja  $B$  leikkaus  $A \cap B$ . Se koostuu kaikista sellaisista alkiosta, jotka kuuluvat sekä joukkoon  $A$  että joukkoon  $B$ .



Kuva 12. "Lukion Calculus" -sarjassa yhteenlaskusäännön yhteydessä on useita yhteyksiä joukko-oppiin (Jäppinen ym. 2005a).

Myös kappaleen 5 tehtävissä ovat esillä sekä joukko-opilliset merkinnät että käsitteistö. Tästä esimerkkinä on kuva 13.

116. Muodosta oheista kuvaa apuna käyttäen yhteenlaskukaavaa vastaava sääntö todennäköisyyden  $P(A \text{ tai } B \text{ tai } C)$  laskemiseksi.



Laske sovelluksena, millä todennäköisyydellä pakasta umpimähkään otettu kortti on pata tai kuvakortti tai ässä.

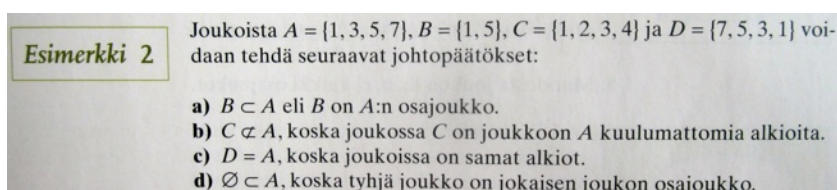
Kuva 13. "Lukion Calculus" -sarjan kurssin 6 tehtävä, jossa on mukana leikkauksen matemaattiset merkinnät (Jäppinen ym. 2005a).

Edellisestä kuvasta poiketen kurssilla 6 käytetään kuitenkin selvästi mieluummin selkeitä "ja" sekä "tai"-sanoja unionin ja leikkauksen matemaattisten merkintöjen sijaan, kuten myös kuvan 14 mukaan voidaan päätellä.

KERTOLASKU- SÄÄNTÖ	Jos $A$ ja $B$ ovat riippumattomia tapahtumia, niin $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$ .
-----------------------	---

Kuva 14. Unionin ja leikkauksen matemaattisten merkien tilalla käytetään mieluummin sanoja "Lukion Calculus" -sarjan kurssin 6 kirjassa (Jäppinen ym. 2005a).

*Lukion Calculus* -sarja esittelee joukko-oppia myös kurssin 11 kohdalla, ja tällä kurssilla joukko-oppiin perehdytään tarkemmin kuin kurssissa 6. Kirjassa on yksi kokonaisuus omistettu täysin joukko-opille (nimetty "Joukko-oppia"), jota esitellään kappaleiden "Peruskäsitteitä", "Yhdiste, leikkaus ja erotus" sekä "Tulojoukko" alla. Yhteensä joukko-oppia käsitellään kahdeksan sivun verran hyvin perusteellisesti (ks. kuva 15 eräästä esimerkistä), ja tähän osioon sisältyy myös 28 tehtävää. Tekijät perustelevat alkusanoissaan joukko-opin sijoittamista kirjaan seuraavalla tavalla: "Joukko-oppia käytetään matematiikassa jokapäiväisenä työkaluna, ja sen perusteiden tuntemus tukee myös tämän kurssin keskeisten aiheiden, logiikan ja lukuteorian, opiskelua."



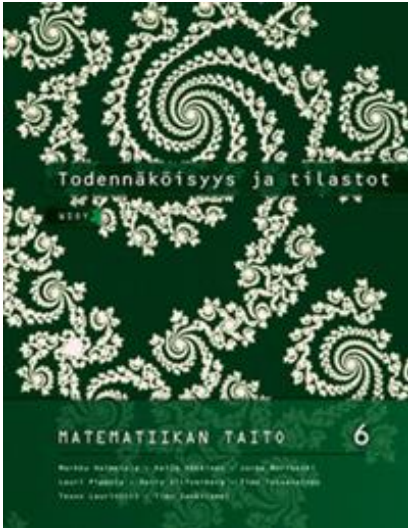
**Esimerkki 2** Joukoista  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{1, 5\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4\}$  ja  $D = \{7, 5, 3, 1\}$  voidaan tehdä seuraavat johtopäätökset:

- a)  $B \subset A$  eli  $B$  on  $A$ :n osajoukko.
- b)  $C \not\subset A$ , koska joukossa  $C$  on joukkoon  $A$  kuulumattomia alkioita.
- c)  $D = A$ , koska joukoissa on samat alkiot.
- d)  $\emptyset \subset A$ , koska tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko.

**Kuva 15. Esimerkki joukko-oppiin liittyen "Lukion Calculus" -oppikirjasarjan kurssin 11 kirjassa (Jäppinen ym. 2005b).**

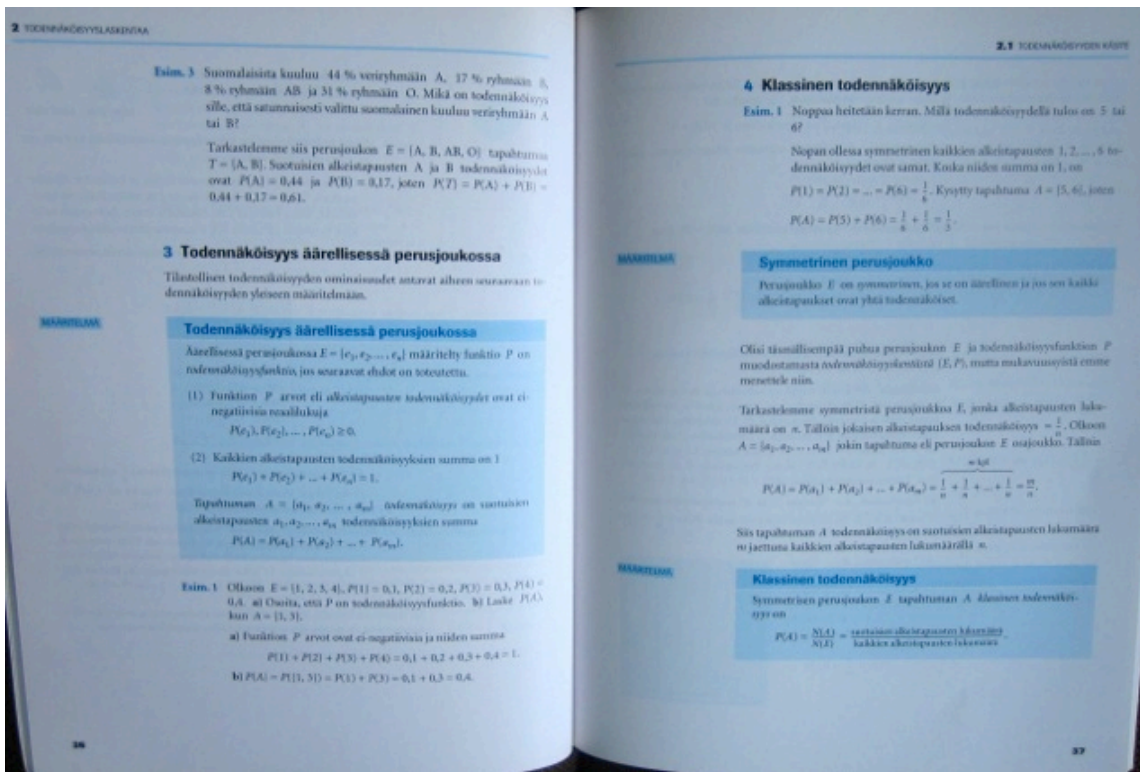
### 8.4.3 Matematiikan taito

*Matematiikan taito* -kirjasarjan tekijät ovat Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli ja Keijo Väänänen. Kurssin 6 kirja on ensimmäinen painos vuodelta 2006 ja kirjan kustantaja on WSOY. Oppikirjassa on 170 sivua. Tämän kirjasarjan kurssin 11 saatesanoissa opettajalle tekijät toteavat jättäneensä joukko-opin kokonaan pois kyseiseltä kurssilta, koska sitä käsitellään kattavasti aiemmalla todennäköisyyslaskennan kurssilla (MAA6). Siksi jätin kirjasarjan kurssin 11 oppikirjan tutkimukseni ulkopuolelle. Kansien kuvitus sarjassa edustaa ilmeeltään graafista maailmaa (ks. kuva 16).



**Kuva 16. "Matematiikan taito" -sarjan kurssin 6 oppikirjan kannot (2006). Oppikirjan kirjoittajat ovat Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli ja Keijo Väänänen. Kirjasarjan on kustantanut WSOY.**

Jokainen *Matematiikan taito* -sarjan kappale alkaa jonkinlaisella päättelytehtävällä tai ongelmalla. Sen jälkeen siirrytään teoriaan, jossa esitellään määritelmät ja esimerkit (ks. kuvan 17 esimerkkiaukeama). Jokaisen kappaleen lopussa on osio harjoitustehtäviä, jotka *Matematiikan taito* -sarjassa on jaettu perustehtäviin ja syventäviin tehtäviin. Oppikirjan lopulla on kertaosana, joka sisältää lähinnä aihepiireihin liittyviä kaavoja. Sen jälkeen on kaksi eri pikatestiä ja kaksi kertauskoea. Kirja tukee myös edistyneempiä oppilaita tutkimus- ja harrastetehtävillä. Kirjan lopussa on lisäksi vastaukset kaikkiin kirjan tehtäviin sekä suomalais-englantilainen sanasto ja hakemisto tärkeimmistä kirjan aihepiireihin liittyvistä käsitteistä.



Kuva 17. Tyypillinen aukeama kirjasarjasta "Matematiikan taito". Kuva kurssin 6 kirjasta. (Halmetoja, Häkkinen, Merikoski, Pippola, Silfverberg, Tossavainen, Laurinolli ja Väänänen 2006.)

Joukko-oppia kurssilla 6 käsitellään laajasti. Kirja alkaa kappaleella "Joukko-opin alkeita". Aiheeseen liittyvien alakappaleiden nimet puolestaan ovat "Joukko ja alkio", "Osajoukko ja Venn-diagrammi", "Joukko-opin laskutoimitukset" ja "Summaperiaate". Aihepiiriä lähestytään sekä kuvallisesti (Venn-diagrammein), sanallisesti että erilaisin joukko-opillisin merkinnöin. Kappaleissa käytetään runsaasti joukko-opillisiä merkkejä mm. unionin ja leikkauksen yhteydessä (ks. kuva 18), eikä pelkästään "ja" sekä "tai"-sanoja, joita puolestaan on monessa muussa lukion kirjasarjassa käytetty korvaamaan näiden matemaattisia merkintöjä.

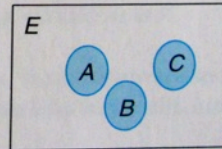
**Esim. 3** Luokan 30 oppilaasta 20 harrastaa lenkkeilyä, 12 uintia ja 5 molempia. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu oppilas harrastaa lenkkeilyä tai uintia (tai molempia)?

Olkoon  $L =$  ”saadaan lenkkeilijä” ja  $U =$  ”saadaan uimari”, jolloin  $L \cup U =$  ”saadaan lenkkeilijä tai uimari” ja  $L \cap U =$  ”saadaan lenkkeilijä, joka on myös uimari”. Yhteenlaskusäännön mukaan

$$P(L \cup U) = P(L) + P(U) - P(L \cap U) = \frac{20}{30} + \frac{12}{30} - \frac{5}{30} = \frac{27}{30} = 0,9.$$

Jos tapahtumat  $A, B$  ja  $C$  ovat *pareittain erillisiä* eli jos  $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$ , niin

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$



Tämä voidaan yleistää useammallekin kuin kolmelle tapahtumalle.

Kuva 18. ”Matematiikan Taito” -sarjan kappaleissa käytetään runsaasti joukko-opillisia merkkejä ja merkintöjä (Halmetoja ym. 2006).

Joukko-opin käsitteet ja merkinnät kattavat kirjan koko todennäköisyys-osion. Joukkojen käytöstä oppikirjan tehtävissä esimerkkeinä ovat seuraavan kuvan 19 tehtävät 128–130 ja 161–165.

2.2 KOMPLEMENTTISÄÄNTÖ JA YHTENLASKUSÄÄNTÖ	2.3 RIIPPUMATTOMUUS JA KERTOLASKUSÄÄNTÖ
<p>128. Perusjoukon <math>E</math> tapahtumille <math>A</math> ja <math>B</math> on <math>P(A) = \frac{5}{12}</math>, <math>P(B) = \frac{1}{4}</math> ja <math>P(A \cap B) = \frac{1}{6}</math>. Piirrä vastaava Venn-diagrammi ja laske</p> <p>a) <math>P(A \cup B)</math>,    b) <math>P(\bar{A})</math>,    c) <math>P(\bar{B})</math>,    d) <math>P(\bar{A} \cap \bar{B})</math>.</p> <p>129. Korttipakassa on 52 korttia, joista 4 on ässiä. Pelaaja ottaa pakasta umpimähkään 4 korttia. Mikä on todennäköisyys, että i) kaikki ovat ässiä, ii) mikään ei ole ässi? [S92]</p> <p>130. Erään satunnaiskokeen alkeistapausten <math>e_1, e_2, e_3, e_4, e_5</math> ja <math>e_6</math> todennäköisyydet ovat <math>P(e_k) = \frac{k}{21}</math> (<math>1 \leq k \leq 6</math>). Tarkastellaan tapahtumia <math>A = \{e_1, e_2, e_3\}</math>, <math>B = \{e_5, e_6\}</math> ja <math>C = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}</math>. Laske</p> <p>a) <math>P(A \cup B)</math>,    b) <math>P(A \cap C)</math>,    c) <math>P(A \cup C)</math>,    d) <math>P(A \cup B \cup C)</math>.</p>	<p>161. Tapahtumille <math>A</math> ja <math>B</math> on <math>P(A) = \frac{1}{5}</math>, <math>P(B) = \frac{1}{2}</math> ja <math>P(A \cup B) = \frac{7}{10}</math>. Laske</p> <p>a) <math>P(A   B)</math>,    b) <math>P(B   A)</math>.</p> <p>162. Mitä voidaan sanoa äärellisen perusjoukon <math>E</math> tapahtumien <math>A</math> ja <math>B</math> riippumattomuudesta, jos <math>B</math> on a) <math>A</math> (<math>\neq \emptyset, E</math>), b) <math>E</math>?</p> <p>163. Olkoot <math>A</math> ja <math>B</math> riippumattomia tapahtumia (<math>0 &lt; P(B) &lt; 1</math>). Todista, että tapahtumat</p> <p>a) <math>\bar{A}</math> ja <math>B</math>,    b) <math>A</math> ja <math>\bar{B}</math> ovat riippumattomia.</p> <p>164. Todista, että erilliset tapahtumat, joilla on positiivinen todennäköisyys, ovat riippuvia.</p> <p>165. Rahaa heitetään kolme kertaa. Olkoon <math>0 =</math> kruunu, <math>1 =</math> klaava, <math>A = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}</math>, <math>B = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0)\}</math> ja <math>C = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}</math>. Ovatko tapahtumat</p> <p>a) <math>A</math> ja <math>B</math>,    b) <math>A</math> ja <math>C</math>,    c) <math>B</math> ja <math>C</math> riippumattomia?</p>

Kuva 19. Myös ”Matematiikan Taito” -sarjan tehtävissä joukko-oppi on runsaasti esillä (Halmetoja ym. 2006).

### 8.4.4 Pitkä matematiikka

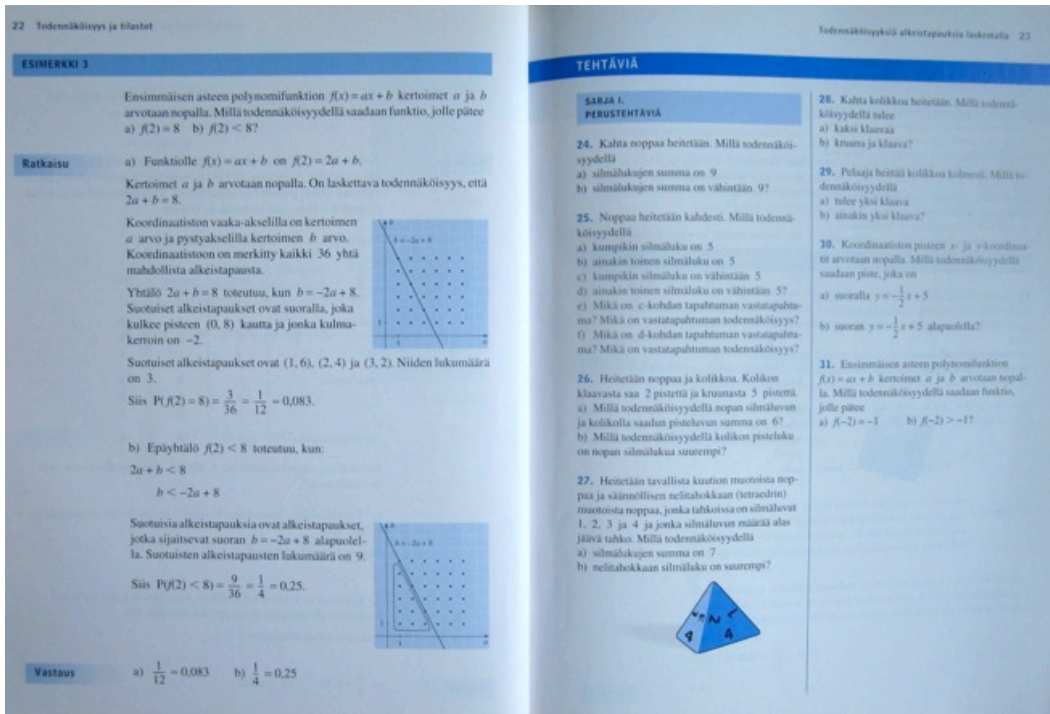
*Pitkä matematiikka* -sarjan kuudennen kurssin kirja, *Todennäköisyys ja tilastot*, on Jukka Kangasahon, Jukka Mäkisen, Jukka Oikkosen, Johannes Paasosen, Maija Salmelan ja Jorma Tahvanaisen kirjoittama oppikirja. Tämä 216-sivuinen kirja on ensimmäinen painos vuodelta 2005. Sarjan on kustantanut WSOY. Sarjan kirjojen kannet käsittelevät taivas- ja merimaisemia (ku-

va 20): peruskurssien eli lukion pakollisten kurssien osalta kuva on sama taivasmaisema kaikissa kirjoissa, kun taas syventävien kurssien kirjoissa kuvana on jokaisessa sama merimaisema.



**Kuva 20. "Pitkä matematiikka" -oppikirjasarjan kurssin 6 kirja (2005). Oppikirjan kirjoittajat ovat Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Jukka Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela ja Jorma Tahvanainen. Kirjasarjan on kustantanut WSOY.**

Kirjojen kappaleet alkavat aina aihepiiriin liittyvällä ongelmalla, joskus kahdellakin, ja lisäksi tietyissä kappaleissa on myös esitetty johdantoesimerkkejä. Tämän jälkeen seuraa teoriaa esimerkkeineen, ja kappaleet loppuvat harjoitustehtäviin (ks. kuvan 21 esimerkkiaukeama). Harjoitustehtävät on jaettu kahteen sarjaan, perustehtäviin sekä vaativampiin tehtäviin. Kirjan lopussa varsinaisen opeteltavan aineksen lisäksi on tiivistettynä kertauspakettina aiemmin esitetty teoria ja tehtäviä jokaisesta kirjan kappaleesta sekä näiden jälkeen vielä kolme laskettavaa tehtäväsarjaa. Viimeisenä kirjoissa on sekä vastaukset kaikkiin tehtäviin – joissakin tapauksissa myös selityksineen – että hakemisto oppikirjojen keskeisistä käsitteistä.



Kuva 21. Tyypillinen "Pitkä matematiikka" -sarjan aukeama. Kuva kurssin 6 kirjasta. (Kangasaho, Mäkinen, Oikkonen, Paasonen, Salmela & Tahvanainen 2005.)

*Pitkä matematiikka* -sarjan kurssilla 6 joukko-oppia ei käsitellä käytännössä lainkaan niin merkintöjen kuin sanastonkaan puolella. Läheisin viittaus joukko-oppiin on otsikointi kappalessa "Osajoukkojen lukumäärä", jossa esitellään kaava  $n$  alkion joukon  $k$ -alkioisten osajoukkojen lukumäärälle. Osajoukoista ja joukoista puhutaan vain kaavan ja sen johtamisen yhteydessä, ei kuitenkaan enää esimerkeissä ja tehtävissä. Toisin sanoen on turvallista sanoa, että *Pitkä matematiikka* -sarjassa joukko-oppia ei käsitellä.

### 8.4.5 Pitkä Sigma

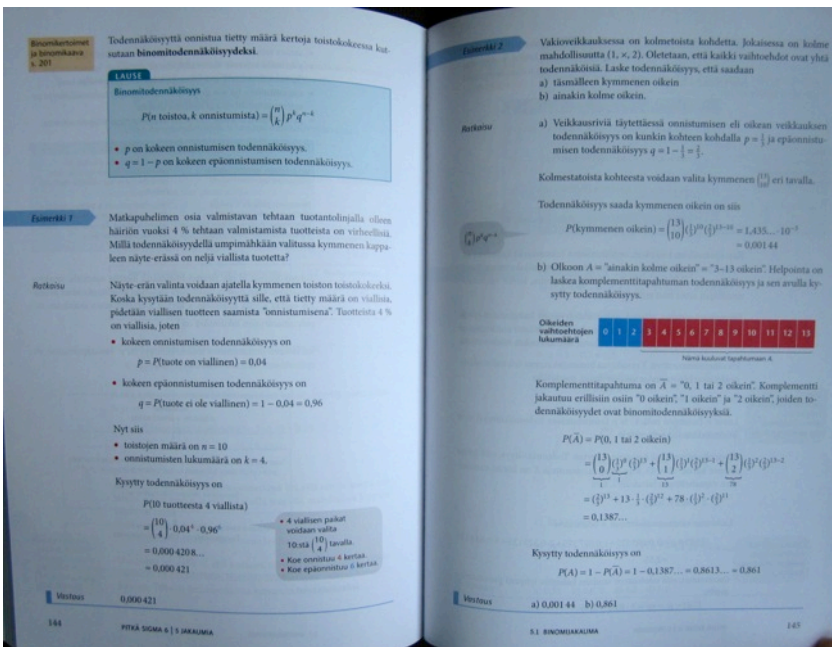
Tammen kustantama *Pitkä Sigma 6* -oppikirja on ensimmäinen painos vuodelta 2010. Kirjan tekijät ovat Sami Alatupa, Sanna Hassinen, Mika Leikas, Timo Taskinen ja Tapani Tolonen. 223-sivuinen todennäköisyyksiin ja tilastoihin keskittyvä *Pitkä Sigma 6* -kirjan kansi on graafinen ja se on väritykseltään oranssi (kuva 22).





Kuva 22. "Pitkä Sigma" -sarjan kurssin 6 oppikirjan kansi (2010). Oppikirjan kirjoittajat ovat Sami Alatupa, Sanna Hassinen, Mika Leikas, Timo Taskinen ja Tapani Tolonen. Kirjasarjan on kustantanut Tammi.

Tyypillinen *Pitkä Sigma* -kirjan kappale alkaa yhdellä tai kahdella aiheeseen liittyvällä pohdintatehtävällä. Sen jälkeen siirrytään tarkastelemaan teoriaa ja esimerkkejä (ks. kuva 23 kirjan tyypillisestä aukeamasta), ja jokaisen kappaleen lopettaa tehtäväosio. Tehtävät on jaettu kolmeen eri ryhmään: perustehtävät, syventävät tehtävät ja jokeritehtävät. Kirjan loppupuolella on erillisenä kokonaisuutenaan kertausosa, jonka jälkeen kirjassa on kaksi testiä mallintamaan koetta. Kirjan lopussa on vastaukset kaikkiin tehtäviin ja kaikkiin tehtäviin vastaukset.

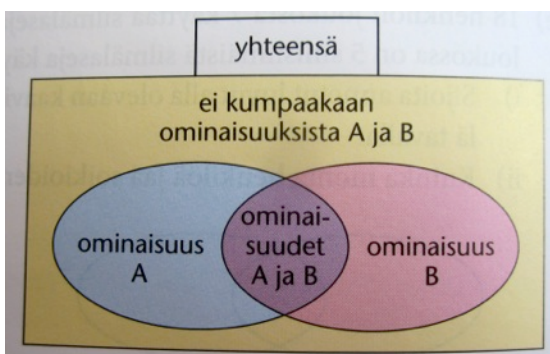


Kuva 23. "Pitkä Sigma 6" -kirjan tyypillinen aukeama (Alatupa, Hassinen, Leikas, Taskinen & Tolonen 2010).

*Pitkä Sigma 6* ei käsittele joukko-oppia omana kappaleenaan. Ensimmäiseksi joukko-oppi nostetaan esiin Venn-diagrammien muodossa kappaleessa ”Malleja alkeistapausten määrittämiseksi”, ja se esitellään seuraavin sanoin: ”[Venn-diagrammin] tehtävä on lähinnä esittää tilanne yksinkertaistettuna.” Kappaleeseen liittyy kaksi tehtävää Venn-diagrammista. Samassa kappaleessa etsitään myös opiskelijapareja, ja ne esitetään aaltosulkeissa. Asian yhteydessä ei kuitenkaan mainita joukkoja tai selitetä, puhutaan vain pareista. Aaltosulkeissa merkittävät joukkoja käsitellään yhdessä kohdassa myös kappaleessa ”Satunnaismuuttuja”, kun esitellään satunnaismuuttujan arvojoukkoja. Tässä kappaleessa arvojoukot liittyvät 8 tehtävään.

Kombinaatioiden yhteydessä (kappale ”Kombinaatiot”) esitellään teoriaosassa joukkoja osajoukkojen muodossa sekä kuvallisesti (Venn-diagrammi), sanallisesti että merkinnällisesti. Tähän kappaleeseen liittyvissä tehtävänäannoissa tosin ei mainita lainkaan joukko-oppiin liittyviä asioita. Myös kappaleissa ”Komplementtisääntö” ja ”Kertolaskusääntö” ja ”Yhteenlaskusääntö” joukko-oppi on mukana kuvallisesti Venn-diagrammien muodossa. Muita yhteyksiä joukko-oppiin ei näissä kappaleissa ole.

*Pitkä Sigma 6* ei käytä termejä unioni tai leikkaus. Huomattavaa on myös, että melkein kaikissa muiden sarjojen kirjoissa on vähintäänkin esitetty kaavat  $P(A \text{ ja } B)$  sekä  $P(A \text{ tai } B)$ , mutta *Pitkä Sigma* esittää asian vain sanallisesti, mikä on esitetty kuvassa 24. Ensimmäinen merkintä kuitenkin otetaan silti esille ehdollisen todennäköisyyden kaavassa, vaikka aiemmin sitä ei ole tässä muodossa esitelty. Kaiken kaikkiaan *Pitkä Sigma 6*:n esitys joukko-opista on kovin puutteellinen ja sekava.



Kuva 24. Muotoilu ”ominaisuudet A ja B” korvaa leikkauksen sanallisen tai merkinnällisen muodon kurssin 6 kirjassa oppikirjasarjassa ”*Pitkä Sigma*” (Alatupa ym. 2010).

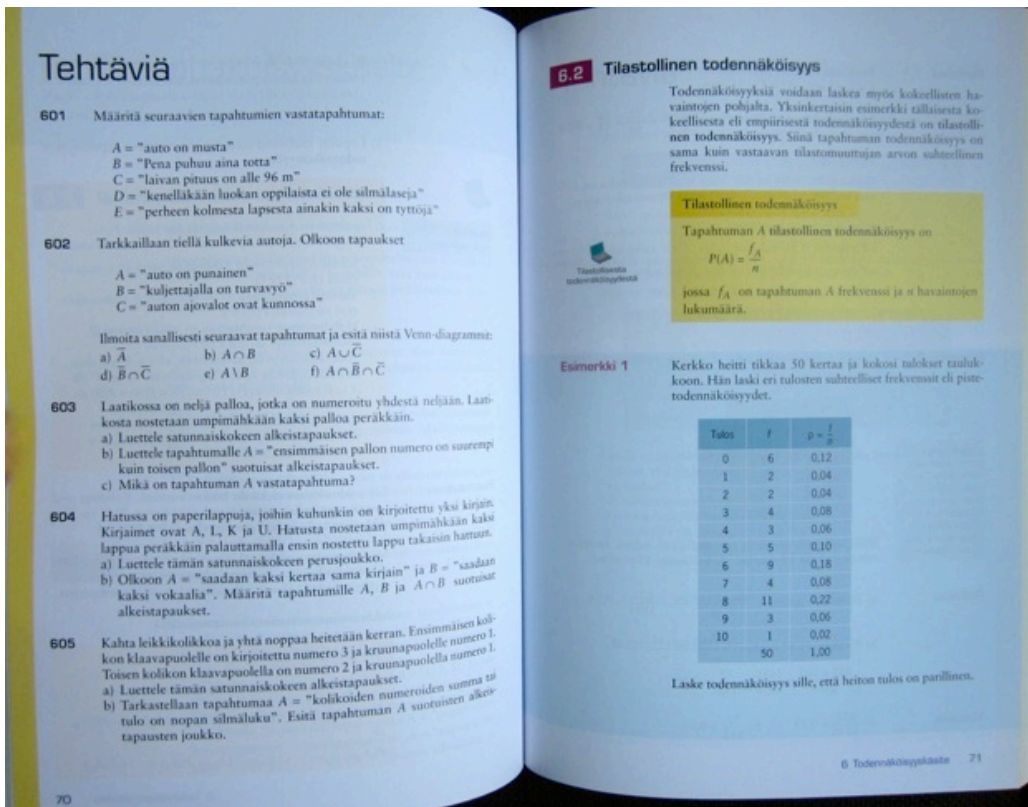
#### 8.4.6 Pyramidi

*Pyramidi 6* on SanomaPro:n kustantama pitkän matematiikan Todennäköisyys ja tilastot -kurssin uudistettu laitos, jonka ovat kirjoittaneet Pekka Kontkanen, Jukka Lehtonen ja Kerkko Luosto. 213-sivuinen kirja on painettu vuonna 2012 ja se on ensimmäinen painos. Kirjaan liittyy myös sähköinen materiaali *PyraNetti*, johon muun muassa syventävä materiaali on siirretty. Koska tutkimukseni kohteena on vain painettu materiaali, en edes yrittänyt hankkia pääsyä internet-materiaaliin. *Pyramidi*-oppikirjasarjan kansina on erilaisia geometrisiä kuvioita (kuva 25).



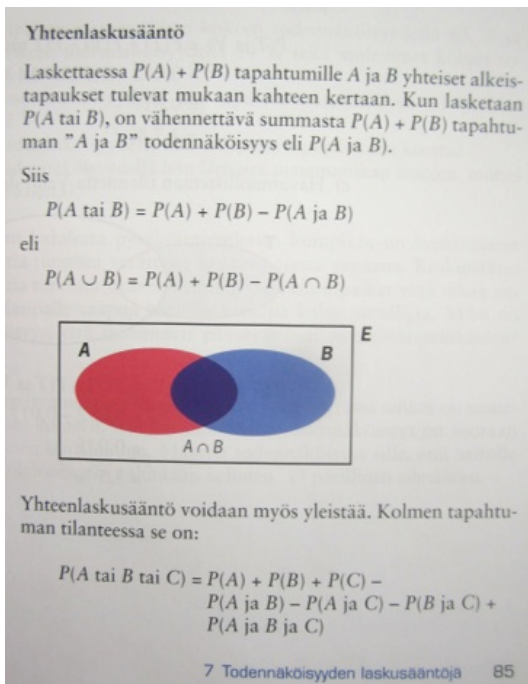
**Kuva 25. "Pyramidi" -oppikirjasarjan kurssin 6 kirjan kansi vuodelta 2012. Oppikirjan kirjoittajat ovat Pekka Kontkanen, Jukka Lehtonen ja Kerkko Luosto. Kirjasarjan on kustantanut SanomaPro.**

*Pyramidi 6*, jonka tyypillinen aukeama on esitetty kuvassa 26, aloittaa todennäköisyys-osion luvulla nimeltä "Joukko-oppia". Kyseisessä kuuden sivun luvussa käydään tiivistetysti läpi sekä kuvien, merkein että sanoin joukko-opin perusteet. Itsestään selvästi myös tehtävät liittyvät joukko-oppiin. Myös kappaleessa "Permutaatio ja kombinaatio" käsitellään joukkoja kombinaatioiden eli osajoukkojen avulla. Kappaleen tehtävissä ei kuitenkaan joukko-opillisia merkintöjä, kuvia tai termejä nähdä. Kuitenkin vielä kappale "Satunnaisilmiöiden mallintaminen" sisältää joukko-oppia merkinnöiltään ja termistöltään – myös muutamassa tehtävässä.



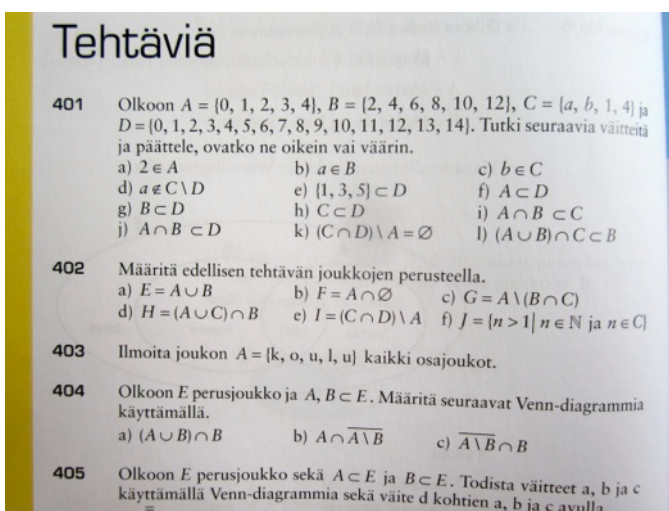
Kuva 26. Tyypillinen aukeama "Pyramidi"-sarjan kirjasta 6 (Kontkanen, Lehtonen & Luosto 2012).

Lisäksi luvun "Todennäköisyyden laskusääntöjä" kappaleissa "Peruslaskusäännöt", "Ehdollinen todennäköisyys" ja "Riippumattomuus" on näkyvissä kuvallisia, sanallisia että merkinnällisiä joukko-opin ilmaisuja. Kirja käyttää näissä kappaleissa teoriaosassa sekä sanallisia että merkinnällisiä ilmaisuja unionille ja leikkaukselle, ja yleensä ne esitetään rinnakkain toisilleen vaihtoehtoisina (kuva 27).



Kuva 27. Esimerkki Venn-diagrammin ja unionin sekä leikkauksen merkintöjen käytöstä kirjassa "Pyramidi 6" (Kontkanen ym. 2012).

Edellä mainittujen lukujen jälkeen joukkoja on esillä vielä satunnaiskokeen perusjoukkoina kahdessa esimerkissä, eli joukkojen käsittely jakautuu melko tasaisesti todennäköisyyslaskennassa, mikäli jakaumien tarkastelua ei oteta huomioon. Eräs esimerkki joukko-opin käytöstä on esitelty kuvan 28 avulla, jossa on nähtävissä joukko-opin merkintöjen monimuotoisuus oppikirjassa jo muutaman tehtävän perusteella.



Kuva 28. Joukko-oppia on "Pyramidi 6" -kirjan tehtävissä esillä monipuolisesti (Kontkanen ym. 2012).

*Pyramidi 6* käsittelee siis joukko-oppia monipuolisesti. Myös *Pyramidi*-sarjan kurssissa 11 käsitellään joukko-oppia kustantajan internetsivujen mukaan (<http://sanomapro.fi/>). Mahdollisesti jo kurssilla 6 opittuja tietoja olisi tällä kurssilla syvennetty, mutta kurssin kirjaa en saanut käyttööni tutkimustani varten.

## 9 YHTEENVETO JA POHDINTAA

1950-lopulla kylmän sodan aikana ja erityisesti neuvostoliittolaisen Sputnikin avaruuteen laukaisemisen myötä amerikkalaiset alkoivat kokea alemmuutta luonnontieteiden osaamisessaan. Sen seurauksena erityisesti matematiikan opetusta uudistettiin radikaalisti kohti ”uutta matematiikkaa”. Amerikasta tämä uusi matematiikan opetuksen suuntaus kulkeutui myös Länsi-Eurooppaan. Yhteisöllisellä nimimerkillä ”N. Bourbaki”, eli joukolla ranskalaisia yliopisto-opettajia, oli merkittävä osuus tämän ”uuden matematiikan” lopullisessa muotoutumisessa. Matematiikan rakenteellisuutta korostavan ”Uuden matematiikan” keskeisiä sisältöalueita olivat joukko-oppi ja logiikka, joista juuri joukko-oppiin keskityn tutkimuksessani.

Joukko-oppi rantautui suomalaiseen matematiikan opetukseen 1970-luvun alussa. Sen mukanaan tuoma muutos opetuksessa ei kuitenkaan ollut ainoa, joka myllersi kouluissamme, sillä sattumalta samanaikaisesti Suomessa oltiin siirtymässä vanhasta koulujärjestelmästä peruskouluun. Siirtyminen tapahtui asteittain vuosina 1972–1977 alkaen pohjoisesta ja päättyen eteläisimpään Suomeen. Nämä päällekkäisyydet aiheuttivat monia ristiriitoja.

Sen lisäksi, että asiantuntijat esittivät kriittisiä lausuntojaan ”uutta matematiikkaa” kohtaan, olivat niin opettajat kuin oppilaatkin toisinaan pyörryksissä uudenlaisen matematiikan opetuksen sisällöistä. Suurin ongelma oli joukko-opin opetuksessa oli, että edellä mainittu peruskoulu-uudistus vei opettajien resursseja, joten he eivät ehtineet paneutua kunnolla ”uuden matematiikan” käytännön toteuttamiseen. Hallinnollisten muutosten päälle painaessa opetus ajautui pintapuoliseksi ja joukko-opin symboliikkaa korostavaksi. Oppilaiden vanhemmista ei enää ymmärtäneet pulmatilanteissa auttaa lapsiaan kotitehtävissä, sillä he eivät olleet opiskelleet sitä omana kouluaikanaan. Jaloista ideoistaan ja hyvistä tavoitteistaan huolimatta ”uusi matematiikka” jäi lyhyeksi kokeiluksi kouluissamme: radikaalein aines joukko-opista karsiutui jo pian 1970-luvun lopulla pois, ja nyt 2010-luvulla, neljäkymmentä vuotta myöhemmin, joukko-opin sisältöjä ei enää esiinny yleissivistävän koulutuksemme voimassa olevissa opetussuunnitelmissa.

Ensimmäisen tutkimuskysymykseni toisen osan oli tarkoitus selvittää, miten joukko-oppi on esillä 1970-luvun ja 2000-luvun suomalaisen yleissivistävän koulun opetussuunnitelmissa. Vielä vuoden 1970 opetussuunnitelma-asiakirjassa, eli *Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnössä* joukko-oppi on selvästi näkyvillä, sillä sitä opetettiin kaikilla peruskoulun luokka-asteilla. Metodisissa oppaissa tosin suositeltiin opetukseen joustavuutta joukko-opin käsittelyn laajuuteen ja erityisesti viidennelle luokalle, jolloin oppilaiden joukko-opilliset valmiudet arvioitiin heterogeenisiksi. 2000-luvulla puolestaan vuoden 2004 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa ei ole lainkaan mainintaa joukko-opista. Myöskään 2000-luvun peruskoulun matematiikan oppikirjoissa ei joukko-oppia käsitellä. Uusin lukion opetussuunnitelma taas on vuodelta 2003, ja mielestäni on erikoista, että tässäkin asiakirjassa ei joukko-oppia mainita, sillä lukion pitkän matematiikan kirjoissa on kuitenkin käsitelty joukko-opin perusteita. Oppikirjojen tekijäkunnasta tosin riippuu, kuinka laajasti he ovat halunneet joukko-oppia sisällyttää kirjoihinsa tukemaan kurssien muita sisältöjä.

Toisen tutkimuskysymykseni myötä selvitin sitä, millä luokka- tai koulutusasteella 1970-luvun peruskoulun ala-asteen joukko-opin perusteet on esitetty 2000-luvun matematiikan oppikirjoissa. Kuten jo tutkimuksessa mukana olleiden matematiikan oppikirjojen perusteella on havaittavissa, 1970-luvulla viidennellä ja kuudennella luokalla opetetun joukko-opin sisällöt esiintyvät nykyisin vasta lukion pitkän matematiikan kursseilla 6, *Todennäköisyys ja tilastot*, sekä 11, *Lukuteoria ja logiikka*. Aihepiirin opetuksen painopiste onkin siirtynyt huomattavasti myöhemmäksi 40 vuodessa.

On myös mielenkiintoista huomata, että neljänkymmenen vuoden takaa ala-asteen koulukirjojen kannet ovat olleet ”täyttä matematiikkaa”, kun taas nykylukiokirjoja koristaa kansissa luontoaiheet, rakennukset tai erilaiset kuviot – 2000-luvun lukio-opiskelija ei edes tiedä kannen kuvan perusteella, mitä kirja sisältää. Suunta on nykyisellään selvästi pehmeämpi, vaikka 1970-luvulla kohderyhmänä ovat olleet selvästi nuoremmat ja vielä leikki-iässä olleet oppilaat. Joukko-opin kulta-aikana matematiikka ei selvästikään ole ollut leikkisää, vaan totisinta totta laskijalleen.

Edellisestä huomiosta päästään osuvasti matematiikan osaamisen nykytilaan. Luvusta 4.3 nähdään, että suomalaisten peruskoulun oppilaiden todellinen matematiikan osaaminen ei



2000-luvulla ole ollut asiantuntijoiden kaipaamalla tasolla. Kun oppilailta on ajattelua, ymmärtämistä ja soveltamista vaativissa tehtävissä on suurempia puutteita kuin mekaanisten laskutehtävien hallitsemisessa, voitaisiin kenties joukko-opin lukiota varhaisemman perusteiden opetuksen avulla saada myös kaivattuun ongelmanratkaisuun vankempi pohja. Tällöin joukko-opin opetus ja sisällöt olisi kytkettävä käytännön todellisuuteen, jotta oppijalla olisi ymmärrys siitä, mihin joukko-opin perusteita ylipäänsä tarvitaan.

Toinen osa ensimmäisestä tutkimuskysymyksestäni koski sitä, miten joukko-oppi on esillä 1970-luvun ja 2000-luvun suomalaisen yleissivistävän koulun opetussuunnitelmissa ja oppikirjoissa. Vaahtokarin & Vähäpassin (1998) mukaan matematiikan oppikirjat saattavat usein muistuttaa ulkoisesti toisiaan paljonkin, mutta lähempi tarkastelu osoittaa niiden tekijöillä selvästi olevan erilaisia arvoja, asenteita ja käsityksiä oppimisesta ja oppilaiden ajattelusta (ks. myös Joutsenlahti & Vainionpää 2010). Näin oli myös tässä tapauksessa, sillä ilman tarkempaa tutustumista oppikirjojen sisältöihin näyttäisi siltä, että kirjat ovat ainakin rakenteellisesti (aiheeseen johdettava pohdintatehtävä, teoria esimerkkeineen, tehtävät eri tasoisine sarjoineen, kertausosiot tehtävineen ja harjoituskokeineen) lähes identtisiä. Kun taas siirrytään tarkastelemaan juurikin joukko-opin sisältöjä, tilanne muuttuu radikaalisti.

Törnroos (2004) sai selville tutkittuaan 5.–7. luokan matematiikan oppikirjoja, että opetuksen sisältö vaihtelee sen mukaan, mitä oppikirjoja kouluissa on käytetty, ja hän jopa väittää oppikirjasarjojen välisien erojen johtavan oppilaiden eriarvoiseen oppimiseen tietyiltä osin. Vaikka ikäluokka ei omassa tutkimuksessani 2000-luvun oppikirjojen kohdalla olekaan Törnroosin tutkimusta vastaava, ei kaikkien lukion pitkän matematiikan kirjasarjojen kohdallakaan tasa-arvo toteudu – ainakaan, mikäli kyseessä on tutkimuksessa tarkastelemani joukko-opin perusteiden opettaminen. Käytetystä sarjasta nimittäin riippuu, onko joukko-oppi opiskelijalle lukiosta valmistuessaan tuttua vai ei – kaikissa sarjoissa kun ei käsitellä edes perusteita joukko-opista.

Esimerkiksi *Laudaturissa* joukko-opin rooli on todella vähäinen, lähinnä todennäköisyyslaskennan tukena Venn-diagrammien muodossa ilman mainintaa unionista tai leikkauksesta. Sama on huomattavissa myös *Pitkästä Sigmasta*, tosin unioni ja leikkaus esitetään Venn-diagrammin avulla todennäköisyyslaskennan yhteydessä sanallisessa muodossa. Kokonaisuudessaan kuitenkin *Pitkä Sigma 6:n* esitys joukko-opista on erittäin puutteellinen ja sekava.

Mikäli mahdollista, *Pitkä matematiikka* -sarjan kirjassa joukko-opin esitys on vielä edellisiäkin sarjoja niukempi, sillä käytännössä siinä ei joukko-oppia käydä läpi lainkaan. Näiden kirjojen tarjoamasta opetuksesta opiskelija ei siis saa lukioaikanaan joukko-opin perusteita.

*Lukion Calculus* -sarjassa joukko-oppi on taas erittäin näkyvässä roolissa hyvin kattavien perusteiden muodossa kahdeksan sivun verran. Tätä tukien kirjan tekijät muotoilevat kurssin 6 kirjan alkusanoissa osuvasti: "Joukko-oppia käytetään matematiikassa jokapäiväisenä työkaluna, ja sen perusteiden tuntemus tukee myös tämän kurssin keskeisten aiheiden, logiikan ja lukuteorian, opiskelua." Sama koskee myös *Matematiikan taito* -sarjaa. Kurssin 6 kirja alkaa kappaleella "Joukko-opin alkeita", ja tähän liittyy useita alakappaleita. Joukko-opilliset merkinnät ja sisällöt jatkuvat läpi koko kirjan kattavasti. Myös *Matematiikan taito* painottaa joukko-oppia hyvin voimakkaasti. Kirjassa on laaja joukko-opin perusteita läpi käyvä kappale useine alakappaleineen ja lisäksi joukko-opin käsitteet ja merkinnät kattavat kirjan koko todennäköisyysosion. Myös *Pyramidi* omistaa kokonaisen kappaleen joukko-opille kirjan alussa teorioineen, esimerkkeineen ja tehtävineen. Kuten myös *Lukion Calculuksessa* ja *Matematiikan taidossa*, myös tässä teoksessa joukko-oppi on nähtävissä muuallakin kirjassa. Perusteet joukko-opista on siis saatavissa tämänkin oppikirjan avulla.

Vaikka joukko-oppi ei tämänhetkisisissä opetussuunnitelma-asiakirjoissa, eli *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 2004* tai *Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2003*, ole esillä, on sen opetuksen painotuksissa siis suuria eroja kirjavalinnoista riippuen. Muihin sisällöllisiin tai esimerkiksi pedagogisiin ratkaisuihin puuttumatta nähdään, että *Laudatur*, *Pitkä Matematiikka* ja *Pitkä Sigma* -oppikirjasarjat eivät tarjoa kelvollisia perusteita joukko-opista, kun taas *Lukion Calculus*, *Matematiikan taito* sekä *Pyramidi* antavat hyvän pohjan joukko-opin jatko-opiskeluun yliopistossa puhumattakaan sen tuomista hyödyistä jo lukiomatematiikan puolella. Kuten siis Joutsenlahti & Vainionpää (20102) summaavat, vaikuttavat oppikirjojen sisältö- ja rakenneratkaisut keskeisesti matematiikan opiskeluun.

On myös hyvä huomata, että oppilaan omilla valinnoilla on vaikutusta joukko-opista saamansa opetuksen laajuuteen, sillä kurssi MAA11 on syventävänä kurssina vapaaehtoinen. Tutkituista sarjoista tosin ainoastaan *Lukion Calculuksen* kurssin 11 osuus sisälsi joukko-oppia, joten kirjasarjaa käyttänyt opiskelija on saanut kohtuulliset tiedot aiheesta jo kurssilla MAA6. Myös *Pyramidi 11*, vaikka ei kuulunutkaan saatavuusongelmien takia tutkimusaineistooni,

sisältää kustantajan verkkosivujen mukaan joukko-oppia. Toisaalta samoin kuin *Lukion Calculus*, tarjoaa *Pyramidikin* jo aiemmin kurssilla 6 riittävästi perusteita aiheeseen.

Tutkimuksen aikana mieleeni virisi myös eräs tutkimusmahdollisuus käytössäni olleisiin materiaaleihin liittyen. Erityisen kiinnostavaa olisi tehdä 1970-luvun peruskoulun matematiikan oppikirjoista tehtäväluokittelua, jota on jo nykymateriaaleista tehty muun muassa matematiikan oppimateriaalin tutkimuksen (MOT) hankkeen yhteydessä, ja verrata saatuja tuloksia näihin jo valmiisiin tuloksiin.

# LÄHTEET

## Aineistolähteet

### *Oppikirjat*

Alatupa, S., Hassinen, S., Leikas, M., Taskinen, T. & Tolonen, T. 2010. Pitkä Sigma 6. Todennäköisyys ja tilastot. Helsinki: Tammi.

Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski, J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen, T., Laurinoli, T. & Väänänen, K. 2006. Matematiikan taito 11. Lukuteoria ja logiikka. Helsinki: WSOY.

Hautajärvi, T., Ottelin, J. & Wallin-Jaakkola, L. 2006. Laudatur 6. Todennäköisyys ja tilastot. Helsinki: Otava.

Jäppinen, P., Kupiainen, A. & Räisänen, M. 2005a. Lukion Calculus 3. MAA5 Vektorit, MAA6 Todennäköisyys ja tilastot. Helsinki: Otava.

Jäppinen, P., Kupiainen, A. & Räisänen, M. 2005b. Lukion Calculus 6. Lukuteoria ja logiikka. Helsinki: Otava.

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. & Tahvanainen J. 2008. Pitkä matematiikka 6. Todennäköisyys ja tilastot. Helsinki: WSOY.

Kontkanen, P., Lehtonen, J. & Luosto, K. 2012. Pyramidi 6. Todennäköisyys ja tilastot. Helsinki: SanomaPro.

Merikoski, J., Virtanen, A. & Koivisto, P. 2004. Johdatus diskreettiin matematiikkaan. Helsinki: WSOY.

Penttilä, T., Österdahl, L., Kaikkonen, M., Rikala, S. 1974. Matematiikkaa 5a. Helsinki: Valistus.

Penttilä, T., Österdahl, L., Kaikkonen, M., Rikala, S. 1975. Matematiikkaa 5b. Helsinki: Valistus.

Penttilä, T., Kaikkonen, M. & Simolin, I. 1975. Matematiikkaa 6a. Helsinki: Valistus.

Penttilä, T., Kaikkonen, M. & Simolin, I. 1973. Matematiikkaa 6b. Helsinki: Valistus.

### ***Opetussuunnitelmat***

Lukion opetussuunnitelman perusteet. 2003. Helsinki: Opetushallitus.

Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö II. 1970. Oppiaineiden opetussuunnitelmat. Komiteanmietintö 1970: A 5. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. 2004. Helsinki: Opetushallitus.

### **Muut lähteet**

Ahtineva, A. 2000. Oppikirja – tiedon välittäjä ja opintojen innoittaja? Lukion kemian oppikirjan – Kemian maailma 1 – tiedonkäsitys ja käyttökokemukset. Turku: Turun yliopisto.

Ernest, P. 1989. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. Teoksessa C. Keilel, P. Damerow, A. Bishop & P. Gerdes. (toim.) Mathematics, education and society. Science and technology education. Documentation series no. 35. Pariisi: Unesco.

Frank, M. L. 1988. Problem solving and mathematical beliefs. Arithmetic Teacher 35 (5), 32–34.

Haapasalo, L. 1991. Konstruktivismi matemaattisen käsitteenmuodostuksen ohjaamisessa ja analysoimisessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 43. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteen tutkimuslaitos.

Haapasalo, L. 1992. Murtolukukäsitteen konstruktivistinen oppiminen. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 51. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteen tutkimuslaitos.

Haapasalo, L. 1993a. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisenäkymiä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteen tutkimuslaitos.

Haapasalo, L. 1993b. Desimaalilukujen ja laadunmuunnosten konstruktivistinen oppiminen. Käsikirjoitus.

Hannus, M. 1996. Oppikirjan kuvitus – koriste vai ymmärtämisen apu. Turun yliopiston julkaisu C122.

Heinonen, J.-P. 2005. Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit. Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä oppimisessa. Väitöskirja. Tutkimuksia 257. Helsingin yliopisto: Soveltavan kasvatustieteen laitos.

Hodgkin, L. 2005. History of mathematics: From mesopotamia to modernity. Oxford: Oxford University Press.

Häkkinen, K. 2002. Suomalaisen oppikirjan vaiheita. Helsinki: Hakapaino.

Johnson, P. 2007. Perusopetus – nykypäivän kansansivistystä. Teoksessa P. Johnson (toim.) Suuntana yhtenäinen perusopetus. Uutta koulukulttuuria etsimässä. Jyväskylä: PS-kustannus.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2010. Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Opetushallitus.

Junnila, O. 1995. MAOL 1935–1995. Kuusi vuosikymmentä matemaattisten aineiden asialla. Forssa: MAOL ry.

Kangasniemi, E. 1989. Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 28. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteen tutkimuslaitos.

Karjalainen, A., Lapinlampi, T., Jaakkola, E. & Alha, K. 2003. Opetussuunnitelman käsite. Teoksessa A. Karjalainen (toim.) Akateeminen opetussuunnitelmatyö. Opetuksen kehittämissyksikkö. Oulun yliopisto, 26–55. Saatavissa:

<http://www.oulu.fi/tutkintorakenne/tyokalut/akatops305.pdf>. (Luettu 10.8.2014.)

Krippendorff, K. 2004. Content analysis. An introduction to its methodology. 2. painos. Thousand Oaks: Sage.

Kupari, P. 1981. Peruskoulun matematiikan opetuksen tilannekartoitus 1979. Kuudennen kouluvuoden osiokohtaiset tulokset. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen selosteita ja tiedotteita 172.

Kupari, P. 1983. Millaista matematiikkaa peruskoulun päättyessä osataan. Yhdeksäsluokkalaisten oppimistulokset keskeisessä matematiikassa. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisuja 342.

Kupari, P. 1988. Koulumatematiikan käsitteiden oppimisesta ja opettamisesta. Teoksessa P. Kupari (toim.) Koulumatematiikka 1990-luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 27.

Kupari, P. 1989. Problem solving and applications in the Finnish school mathematics since 1970. Teoksessa P. Kupari (toim.) Mathematics education research in Finland. Yearbook 1987–1988. University of Jyväskylä. Institute for Educational Research. Publication series B. Theory into Practice 39, 35–53.

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylän yliopisto: Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E. & Vettenranta, J. 2013. Pisa 12 ensituloksia. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2013:20. Saatavissa: <http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2013/liitteet/okm20.pdf?lang=fi>. (Luettu 30.1.2014.)

Lahdes, E. 1997. Peruskoulun uusi didaktiikka. Keuruu: Otava.

Malaty, G. 1998. Eastern and western mathematical education: Unity, diversity, and problems. *International journal of mathematical education in science and technology* 29(3), 420–435.

Malinen, P. 1992. Opetussuunnitelmat koulutyössä. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Mashaal, M. 2006. Bourbaki: A secret society of mathematicians. Providence (R.I.): American Mathematical Society.

Meisalo, V. & Lavonen, J. 1994. Fysiikka ja kemia opetussuunnitelmassa. Helsinki: Opetushallitus.

Mikkilä-Erdmann, M., Olkinuora, E. & Mattila, E. 1999. Muuttuneet käsitykset oppimisesta ja opettamisesta – haaste oppikirjoille. *Kasvatus* 30 (5), 436–448.

Perkkilä, P. 1998. Kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirja- sarjan didaktinen analyysi. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Lisensiaatintutkimus.

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylän yliopisto. *Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research* 195.

Ronkainen, S., Pehkonen, L. & Lindblom-Ylänne, S. 2011. Tutkimuksen voimasanat. Helsinki: Sanoma Pro.

Sarjala, J. 2008. Järki hyvä herätetty. Koulu politiikan pyörteissä. Helsinki: Kirjapaja.



Seppä, E. 2013. Joukko-opin rooli suomalaisessa koulumatematiikassa. Pro Gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto. Informaatiotieteiden yksikkö.

Silfverberg, H. 1986. Van Hielin teoria geometrian oppimisessa ilmenevistä tasoista: tasojen teoreettinen tarkastelu ja mittausmenetelmien kokeilu. Tampereen yliopiston kasvatustieteen laitos. Julkaisusarja A: Tutkimusraportti N:o 39.

Somerkivi, U. 1983. Peruskoulu. Synty, kehittyminen ja tulevaisuus. Vantaa: Kunnallispaino Oy.

Strang, T. 1989. Murtolukukäsitteen kehittämisestä peruskoulussa. Teoksessa K. Seinälä (toim.) Matemaattis-luonnontieteellisten aineiden didaktiikan päivät 23.–24.9.1988. Tampereen yliopisto. Tampereen opettajankoulutuslaitoksen julkaisu A12/1989.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2009. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. 6. uud. laitos. Helsinki: Tammi.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2013. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. 11. uudistettu laitos. Helsinki: Tammi.

Törnroos, J. 2004. Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset – seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Jyväskylän yliopisto: Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13.

Vahtokari, A. & Vähäpassi, A. 1998. Kirjat esiin ja laskekaa! Teoksessa J. Lavonen & M. Erätuuli (toim.) Tuulta purjeisiin. Matemaattisten aineiden opetus 2000-luvulle. Juva: WSOY, 213–230.

## JOUKKO-OPIN SISÄLLÖT OPETUSSUUNNITELMASSA VUODELTA 1970

(Lähde: Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö II 1970, sivut 143–147.)

**1. luokka.** ”Joukon alkioden lukumäärän ilmoittaminen on lähtökohtana luonnollisten lukujen oppimiseen. Ne otetaan käyttöön vaiheittain, ja kaksinumeroisten lukujen oppimisessa kiinnitetään huomiota paikkajärjestelmän periaatteisiin lukujen merkitsemisessä. --- Yhteenlaskun ja vähennyslaskun oppimisessa on paino käsitteiden muodostumisella joukkomalleista lähtien. Laskuharjoittelussa ei pyritä mekaaniseen laskutaitoon vaan ajattelemaan laskutoimitusten ominaisuuksia ja laskemaan niiden perusteella.”

**2. luokka.** ”Kertolaskun käsitteen muodostuminen pannaan alulle joukkomalleihin ja yhteenlaskuun perustuen.”

**3. luokka.** ”Lauseiden muodostamisessa voidaan ottaa luontevasti käyttöön ilmaisut: tosi lause, epätosi lause, avoin lause ja avoimen lauseen ratkaisujoukko. --- Käsitellään käytännön tapahtumiin liittyviä matemaattisia ongelmia kiinnittäen huomiota laskutoimitusten joukkomallien merkitykseen laskutoimituksen ja tapahtuman välisenä siltana.”

**4. luokka.** ”Joukko-opin käsitteet ovat olleet tähän mennessä huomattavasti mukana monien asioiden käsittelyssä. Nyt voidaan systematisoida sen käsittelyä.”

**5. luokka.** ”Joukko-opin ja logiikan perustietoja käytetään hyväksi kaikissa tällä luokalla käsiteltävissä asioissa mahdollisuuksien mukaan. Muuttujan käyttöä pyritään yleistämään ja kiinnittämään huomiota muuttujan lausekkeiden välittämiin kuvauksiin. Esitetään relaatioita ja kuvauksia koordinaatistossa.”

**6. luokka.** ”Joukko-opin ja logiikan perustietoja käytetään hyväksi käsiteltävissä asioissa mahdollisuuksien mukaan. --- Esitetään kuvauksia ja relaatioita koordinaatistossa.”

**7. luokka.** *Suppeampi kurssi:* "Kootaan eri lukujoukkojen ominaisuudet rationaalilukujen joukkoon saakka. Kootaan joukko-opin perusasiat ja täydennetään niitä. --- Käsitellään yksinkertaisia kuvauksia lukujoukosta toiseen ja esitetään niitä koordinaatistossa." *Laajempi kurssi.* "Kootaan eri lukujoukkojen ominaisuudet rationaalilukujen joukkoon saakka siirtyen lukujen kirjainmerkintään. Kootaan joukko-opin perusasiat ja täydennetään niitä. Käsitellään joukko-opin symbolit. --- Käsitellään kuvauksia lukujoukosta toiseen ja esitetään niitä koordinaatistossa. Ratkaistaan yhtälöitä ja epäyhtälöitä kiinnittäen huomiota erityisesti ratkaisujoukon täsmälliseen ilmoittamiseen."

**8. luokka.** *Yleiskurssi:* "Joukko-opin ja logiikan perusasioita käytetään hyväksi käsiteltävissä kohdissa." *Keskikurssi:* "Joukko-opin ja logiikan perusasioita käytetään hyväksi mahdollisuuksien mukaan." *Laaja kurssi:* Joukko-opin ja logiikan perusasioita käytetään hyväksi mahdollisuuksien mukaan."

**9. luokka.** *Yleiskurssi:* "Joukko-opin ja logiikan perusasioita käytetään hyväksi mahdollisuuksien mukaan." *Keskikurssi:* "Tarkastellaan irrationaalilukujen käyttöönottoa ja reaalilukujen joukon osajoukkoja." *Laaja kurssi:* "Tarkastellaan irrationaalilukujen käyttöönottoa ja reaalilukujen joukon osajoukkoja."