TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Mikael Mäntykangas

Luvun π likiarvosta, irrationaalisuudesta ja transkendenttisuudesta

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Syyskuu 2014

"Hiram valoi myös pyöreän altaan, jota kutsuttiin mereksi.

Se oli reunasta reunaan kymmenen kyynärän levyinen,

korkeutta sillä oli viisi kyynärää, ja vasta kolmenkymmenen

kyynärän pituinen mittanuora ulottui sen ympäri."

- Vanhan testamentin Kuningasten kirja

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

MÄNTYKANGAS, MIKAEL: Luvun π likiarvosta, irrationaalisuudesta ja transkendenttisuudesta

Pro gradu -tutkielma, 40 s.

Matematiikka

Syyskuu 2014

Tiivistelmä

Tämä on tutkielma luvusta pii. Tutkielmassa käydään läpi sitä, miten luvun pii likiarvoa on laskettu ja miten sen likiarvon laskeminen on kehittynyt muinaisten egyptiläisten ja babylonialaisten ajoilta aina tähän päivään asti. Likiarvon kehittymisen lisäksi tutkielmassa käsitellään luvun pii irrationaalisuutta ja transkendenttisuutta. Huomautettakoon, että kompleksiluku on transkendenttinen, jos se ei toteuta mitään kokonaiskertoimista polynomiyhtälöä, jossa vähintään yksi polynomin kertoimista eroaa nollasta. Tutkielma etenee kronologisessa järjestyksessä. Päälähde on Julian Havilin kirja *The Irrationals*.

Sisältö

1 Johdanto

Tämä on tutkielma luvusta π. Tutkielma etenee kronologisessa järjestyksessä. Varhaiset ajat -luku kertoo siitä, miten lukua π arvioitiin jo kauan ennen ajanlaskun alkua. Siinä tarkastellaan muinaisten egyptiläisten ja babylonialaisten tapoja, millä he yrittivät selvittää luvun π arvoa. Arkhimedes keskittyi myös aikanaan lukua π koskeviin kysymyksiin ja hänen konstruktionsa tämän luvun arvioimiselle on ollut hyvin merkittävä kautta historian. Tässä luvussa mainitaan myös klassinen ympyrän neliöinnin ongelma, joka kulkee mukana tutkielman edetessä.

Äärettömät tulot ja sarjakehitelmät -luku sijoittuu ajallisesti pääosin 1500-1700 -luvulle. Etenkin tässä luvussa on nimeltä mainittu useita historiamme suuria matemaatikoita ja heidän osuutensa luvun π kehitykseen. Haluan kuitenkin muistuttaa, että nämä suuret miehet keksivät urallaan paljon muutakin. Vasta näihin aikoihin keksittiin uusi menetelmä Arkhimedeen menetelmän tilalle. Tämä oli luonnollisesti hyvin mullistava asia ja se laukaisi melkoisen ketjureaktion luvun π arvon määrittämiselle. Menetelmät kehittyivät jo niin pitkälle, että luvun π arvon määrittämisessä tarkemmin ja tarkemmin ei ollut enää varsinaisesti mieltä. 1700-luvulla Euler alkoikin pohtimaan lukua π aivan uudesta näkökulmasta. Sen sijaan, että hän olisi laskenut sen arvoa enää tarkemmin, hän alkoi miettiä millainen luku π oli.

Neljäs luku johdattelee Eulerin pohdintojen kautta luvun π irrationaalisuuteen ja transkendenttisuuteen. Tämä luku sijoittuu ajallisesti 1700-1800 -luvulle. Se sisältää myös matemaattisia todistuksia. Näistä mainittakoon Lambertin vuonna 1761 todistama luvun π irrationaalisuus. Legendre osoitti myöhemmin, että myös luku π^2 on irrationaalinen. Vuonna 1882 Lindemann todisti luvun π olevan transkendenttinen. Tämä oli merkittävä tulos useastakin eri syystä. Yksi näistä oli se, että se ratkaisi ikivanhan ongelman ympyrän neliöimisestä.

Tietokoneaika -luku keskittyy 1900-luvulta aina tähän päivään asti ja käsittelee sitä, mitä tietokoneet ovat tuoneet mukanaan luvun π kehitykseen. Se vastaa myös kysymyksiin, miksi luvun π tarkemman ja tarkemman likiarvon laskeminen jaksaa kiinnostaa tutkijoita ja löytyykö kyseisen luvun desimaaleista jonkinlaisia säännönmukaisuuksia vai ovatko ne täysin satunnaisia.

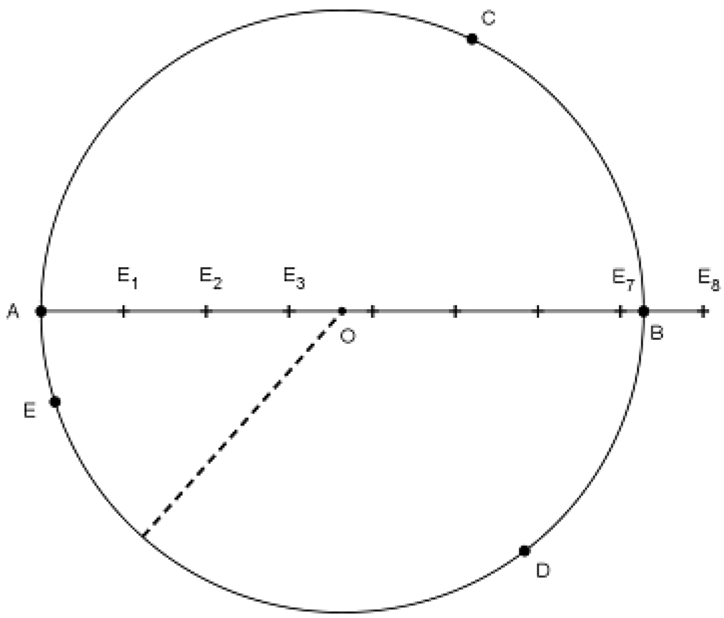
Esitietoina lukijalta odotetaan tunnettavan luonnollisesti ympyrän käsite. Trigonometriaa esiintyy tutkielman aikana runsaasti, joten tähän liittyvät perusasiat on hyvä olla hallussa. Käsite irrationaaliluku oletetaan myös olevan lukijalle tuttu. Analyysin puolelta tarvittavia käsitteitä ovat funktion raja-arvoon ja integraaliin liittyvät käsitteet, erityisesti osittaisintegrointi. Transkendenttisuuden yhteydessä tarvittavat määritelmät luvun algebrallisuudesta ja transkendenttisuudesta on tutkielmassa annettu.

2 Varhaiset ajat

2.1 Babylonialaiset ja egyptiläiset

Olennaisin asia liittyen luvun π syntyyn oli, kun ymmärrettiin, että ympyrän kehän ja halkaisijan suhde on vakio kaikille ympyröille. Tämä voidaan kirjoittaa $\pi = \frac{C}{D}$, missä C on ympyrän kehä ja D sen halkaisija. Huomautettakoon, että symboli π otettiin käyttöön vasta 1700-luvulla, mutta selkeyden vuoksi sitä kuljetetaan sellaisenaan mukana alusta asti. Vuoteen 2000 eKr. mennessä babylonialaiset olivat päätyneet arvioon $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$ ja egyptiläiset kiinteään arvoon $\pi = 4(\frac{8}{9})^2$. Kukaan ei tiedä varmuudella, miten näihin tuloksiin on tuolloin päädytty. Käydään seuraavaksi läpi kaksi tapaa, joita mahdollisesti on tuohon aikaan käytetty selvittämään luvun π arvoa.

Tuohon aikaan ei apuna ollut harppeja, kyniä tai edes paperia. Papyrusta on saatettu tuohon aikaan käyttää, mutta se ei ole ollut kovin yleistä. Ilmeisesti kostea hiekka on ollut sopiva kirjoitusalusta kepille, joka on toiminut kynänä. Lisäksi apuna on käytetty kaiketi narua. Kuva 2.1 havainnollistaa tapaa.



Kuva 2.1: Babylonialaisten tapa.

Keppien ja narun avulla on piirretty ympyrä ikäänkuin harppia käyttämällä. Ympyrän keskipiste on O. Seuraavaksi on otettu pidempi narun pätkä, ja vedetty se pisteestä A pisteeseen B ympyrän keskipisteen kautta. Tähän naruun on merkitty janan AB pituus, joka on siis ympyrän halkaisijan pituus. Tätä on käytetty yksikköpituutena. Seuraavaksi on laitettu tämä naru kulkemaan pisteestä A ympyrän kehää pitkin myötäpäivään. Se on ylettynyt pisteeseen C saakka. Näin on jatkettu edelleen ja lopulta huomattu, että halkaisija sopii kehälle kolme kertaa. Pieni pätkä kehää on kuitenkin jäänyt yli. Tähän mennessä on saatu karkea arvo $\pi = 3$. Arvion parantamiseksi on seuraavaksi määritelty, mikä osa ylijäänyt pätkä EA on yksikköpituudesta AB. On mitattu kaaren EA pituus narulla. Tämän jälkeen tämä naru on asetettu janalle AB niin monta kertaa, kuin mahdollista. Näitä pituuksia on kuvassa merkitty $E_1, ..., E_8$. On huomattu, että se mahtuu janalle AB yli seitsemän, muttei kahdeksaa kertaa. Tämän perusteella on päädytty arvioon

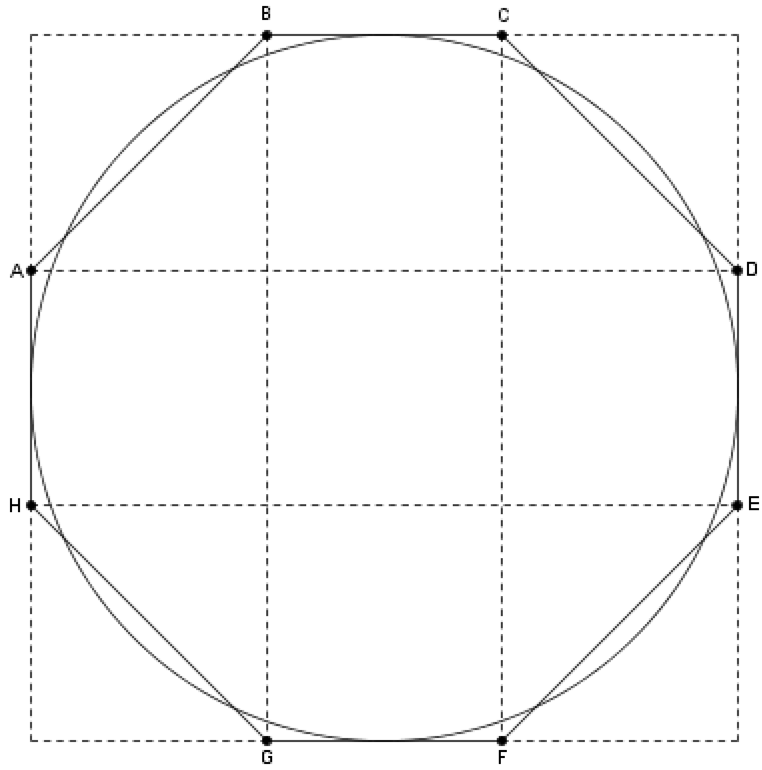
$$3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Miten sitten egyptiläiset ovat päätyneet arvoon $\pi = 4(\frac{8}{9})^2$? Kuva 2.2 havainnollistaa erästä tapaa, jota on saatettu käyttää. Huomautettakoon, että seuraava tapa hyödyntää tietoa, että ympyrän pinta-ala osataan laskea. Siitä miten tämä osattiin tuohon aikaan tehdä, ei ole varmaa tietoa.

Ympyrän ympäri on piirretty neliö, jonka sivun pituus on 9 yksikköä. Neliön sivut on jaettu kolmeen yhtä pitkään osaan, missä yhden osan pituus on siis 3 yksikköä. Näiden avulla on piirretty epäsäännöllinen kahdeksankulmio. Kahdeksankulmion ABCDEFGH pinta-ala muodostuu viidestä 9 pinta-alayksikön neliöstä ja neljästä $4\frac{1}{2}$ pinta-alayksikön kolmiosta. Ala ei poikkea juurikaan neliön sisään piirretyn ympyrän alasta. Kahdeksankulmion pinta-ala on $5 \cdot 9 + 4 \cdot 4\frac{1}{2} = 63$. Tämä luku on lähellä lukua $8^2 = 64$. Tästä seuraa, että ympyrän, jonka halkaisija on 9 yksikköä, pinta-ala on likimain 64 pinta-alayksikköä, eli sen neliön ala, jonka sivun pituus on 8 yksikköä. Nyt kun tiedetään, että ympyrän pinta-ala $A = \pi r^2$, niin saadaan

$$\pi(9/2)^2 = 8^2.$$

Tästä seuraa, että $\pi = 4(\frac{8}{9})^2$. [2, s.16–29]



Kuva 2.2: Egyptiläisten tapa.

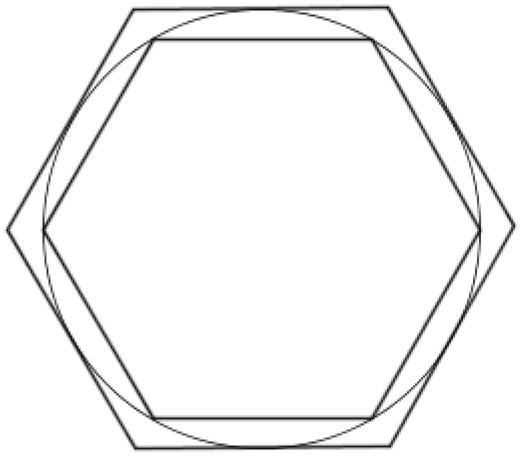
2.2 Arkhimedes

Arkhimedes keksi ensimmäisenä menetelmän, jonka avulla luvun π arvo pystyttiin laskemaan mielivaltaisen tarkasti. Tämä tapahtui vuonna 300 eKr. Menetelmä perustuu siihen, että ympyrän sisä- ja ulkopuolelle piirretään n-kulmiot. Kun n on riittävän suuri, monikulmioiden kehät lähestyvät ympyrän kehää mielivaltaisen tarkasti, toinen ylhäältä ja toinen alhaalta.

Arkhimedes aloitti kahdeksankulmiosta ja lähti menemään siitä eteenpäin. Näin hän pääsi 96-kulmioon, josta hän laski arvion

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Arkhimedes teki tämän ilman trigonometriaa ja desimaalilaskentaa, joita tuohon aikaan ei ollut vielä keksitty. Niitä käyttäen on nyt helppoa nähdä, että jos $\theta = \frac{\pi}{n}$ on puolet ympyrän keskipiste keskipisteenä piirretyn säännöllisen monikulmion sivun määräämästä keskuskulmasta, niin ympyrän sisään piirretyn monikulmion sivun pi-



Kuva 2.3: Arkhimedeen monikulmio.

tuus on

$$i = 2r \sin\theta$$

ja ympäri piiretyn monikulmion sivun pituus on

$$j = 2r \tan\theta.$$

Näin ympyrän kehälle K saadaan arvio

$$ni < K < nj.$$

Jakamalla $2r$:llä saadaan

$$n \sin\theta < \pi < n \tan\theta.$$

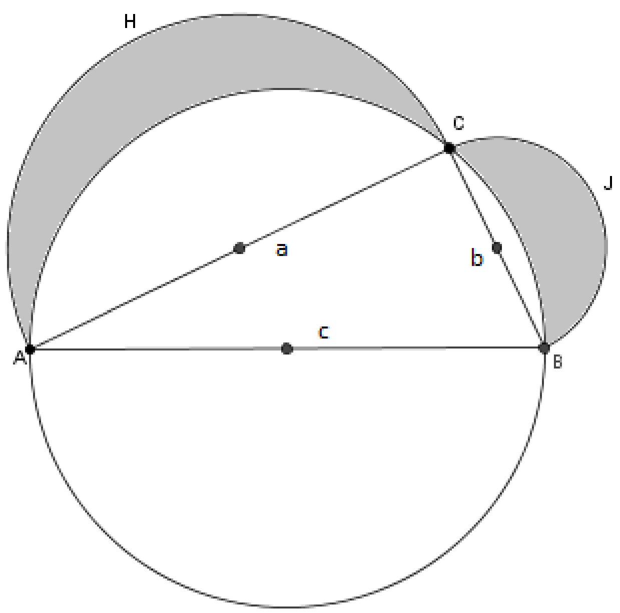
Nyt kun kaksinkertaistetaan k kertaa sivujen alkuperäinen lukumäärä n, saadaan

$$2^k n \sin(\frac{\theta}{2^k}) < \pi < 2^k n \tan(\frac{\theta}{2^k}). \tag{2.1}$$

Tällä menetelmällä luvulle π saadaan niin tarkat ylä- ja alalikiarvot kuin halutaan, kun valitaan luku k riittävän suureksi. Arkhimedeksella ei siis ollut tämänkaltaisia työkaluja käytössään. Huomionarvoista on, että Pythagoraan teoreeman nojalla hän kuitenkin tiesi, että kun $n = 6$, niin $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ja $\tan\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Muut kaavassa (2.1) olevat funktioiden arvot hän sai käyttämällä toistuvasti kulman puolikkaan kaavoja. Lopulta 96-kulmiota varten hänen oli laskettava neliöjuuri kymmenennumeroisesta luvusta. Vaikka tutkijat myöhemmin löysivät tarkempia numeerisia approksimaatioita, niin Arkhimedeen menetelmä oli voittamaton 1600-luvulle asti, jolloin Englannissa keksittiin ääretön tulo ja ääretön ketjumurtoluku. [2, s.66–71]

2.3 Ympyrän neliöintiongelma

Ympyrän neliöimisen tavoitteena on piirtää harpilla ja viivaimella neliö, jolla on sama pinta-ala kuin ympyrällä. Jo muinaiset kreikkalaiset yrittivät ratkaista tätä klassikoksi muodostunutta ongelmaa. Matemaatikot yrittivät ratkaista tätä haastavaa ongelmaa yli kahden tuhannen vuoden ajan. Vuonna 400 eKr. Hippokrates oli lähellä tämän ongelman ratkaisua ns. puolikuiden tarkastelun jälkeen.



Kuva 2.4: Hippokrateen puolikuut.

Lähtökohtana on suorakulmainen kolmio ABC. Kolmion ympäri piirretään hypotenuusan keskipiste keskipisteenä ympyrä ja tämän lisäksi kateetit halkaisijana puoliympyrät AHC ja CJB. Tällöin muodostuvat kuunsirppimäiset varjostetut alueet. Nyt voidaan osoittaa, että noiden kuunsirppien yhteenlaskettu pinta-ala on täsmälleen sama kuin alkuperäisen kolmion pinta-ala.

Merkitään kateettien pituuksia a:lla ja b:llä sekä hypotenuusan pituutta c:llä. Tällöin varjostettujen alojen summa saadaan vähentämällä kateeteilla olevista puoliympyröistä kateettien ja "kuunsirppien"väliin jäävät alueet, joiden suuruus saadaan, kun kolmion ympäri piirretyn ympyrän ylemmästä puolikkaasta vähennetään kolmion ala. Siis

$$\begin{aligned}\frac{\pi(\frac{a}{2})^2}{2} + \frac{\pi(\frac{b}{2})^2}{2} - \Big(\frac{\pi(\frac{c}{2})^2}{2} - \frac{a \cdot b}{2}\Big) &= \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \frac{\pi c^2}{8} + \frac{a \cdot b}{2} \\ &= \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot b}{2}.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että koska kolmio oli suorakulmainen, niin Pythagoraan lauseen mukaan $a^2 + b^2 = c^2$, jolloin edellisen lausekkeen suluissa oleva kerroin on nolla ja termi supistuu pois.

Siis tummennettujen alueiden, ns. kuunsirppien, yhteenlaskettu pinta-ala on sama kuin suorakulmaisen kolmion pinta-ala. Tämä on mitä ilmeisimmin herättänyt toivota siitä, että joku voisi keksiä vastaavanlaisen konstruktion, jossa ympyrän pinta-ala voitaisiin osoittaa yhtä suureksi kuin piirretyn neliön pinta-ala. Vuonna 1882 Ferdinand von Lindemann osoitti tehtävän mahdottomaksi toteuttaa niinsanotusti geometrisesti piirtämällä (= vain harppia ja mitatonta viivoitinta käyttäen). Tämä perustuu luvun π transkendenttisuuteen. [12]

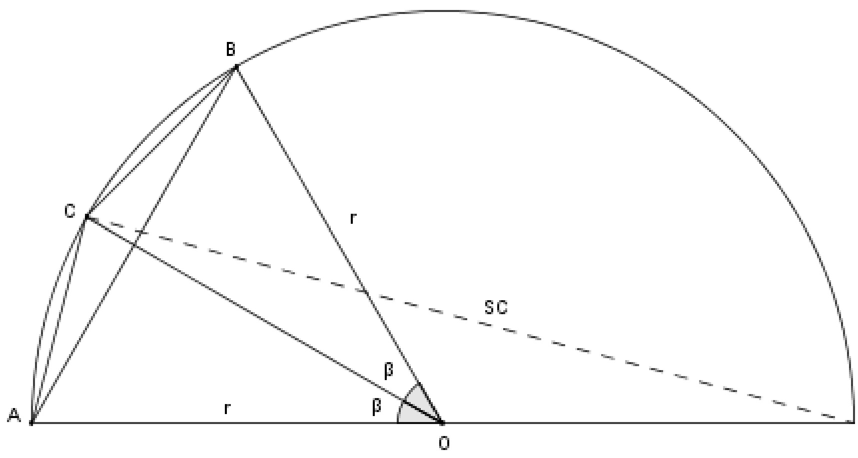
3 Äärettömät tulot ja sarjakehitelmät

Arkhimedeen mentelmää sovellettiin aina keskiajalle saakka ja luvulle π saatiin tarkempia arvoja. Vuonna 263 kiinalainen Liu Hui sai luvulle π likiarvon $3,14159$. Vuonna 480 niinikään kiinalainen Tsu Chung-Chih ja hänen poikansa Tsu-Keng-Chih saivat merkittävän arvion $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Keskiajan tieteen vainoamisen seurauksena matemaattinen tutkimus ei juurikaan edistynyt. Renessanssin lähestyessä eurooppalaiset olivat päässeet matematiikassa sille tasolle, jolla babylonialaiset olivat olleet jo pari tuhatta vuotta aikaisemmin. Renessanssin aikana luvulle π laskettiin yhä tarkempia numeerisia likiarvoja, mutta teoria sen sijaan nojasi pääosin edelleen Arkhimedeen monikulmioihin. Tässä vaiheessa laskutoimituksia helpotti desimaalijärjestelmä, jonka muslimit olivat tuoneet idästä 1100-luvulla. Lisäksi tähän aikaan apuna olivat myös jo trigonometriset funktiot sekä logaritmit. Nämä työkalut luonnollisesti helpottivat luvun π arvon laskemista Arkhimedeen menetelmän ja sen sovellusten avulla. Vuonna 1424 persialainen Al Kashi sai aikaan 14 desimaalisen likiarvon. Tässä monikulmion sivujen lukumäärä oli jo $6 \cdot 2^{27}$. Tätä paransi flaamilainen Romanus vuonna 1593 käyttämällä 2^{30}-sivuista monikulmiota ja saavutti näin 15 desimaalia. Vuonna 1609 saksalais-hollantilainen matemaatikko Ludolph Van Ceulen, joka omisti elämänsä tälle ongelmalle, saavutti 35 desimaalia 2^{62}-kulmiolla. Tätä myötä luku π tuli Saksassa tunnetuksi myös nimellä Ludolphin luku. [2, 5]

Francois Viète

Arkhimedeen menetelmästä selkeästi poikkeava tapa luvun π arvon määräämiseksi saatiin vasta, kun ranskalainen matemaatikko Francois Viète (1540-1603) vuonna 1593 keksi neliöjuurten äärettömän tulon. Hän esitti luvun π algebrallisten operaatioiden äärettömänä jonona ja oli näin ensimmäinen, joka keksi sille analyyttisen lausekkeen. Hän vertasi menetelmässään n- ja $2n$ -tasasivuisten monikulmioiden pinta-aloja. n-sivuisen monikulmion pinta-ala on n kertaa kolmion OAB pinta-ala, toisin sanoen

$$A(n) = \frac{1}{2}nr^2 \sin(2\beta) = nr^2 \cos\beta \sin\beta.$$



Kuva 3.1: Vièten menetelmä.

Vastaavasti $2n$-sivuisen monikulmion pinta-ala on

$$A(2n) = nr^2 \sin\beta.$$

Jakamalla nämä tulokset keskenään saadaan

$$\frac{A(n)}{A(2n)} = \frac{nr^2 \cos\beta \sin\beta}{nr^2 \sin\beta} = \cos\beta.$$

Kun monikulmioiden sivut puolitetaan uudelleen, saadaan

$$\frac{A(n)}{A(4n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \cdot \frac{A(2n)}{A(2^2 n)} = \cos\beta \cos\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Toistamalla tätä k kertaa saadaan

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \cdot \frac{A(2n)}{A(4n)} \cdots \frac{A(2^{k-1} n)}{A(2^k n)} = \cos\beta \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right).$$

Nyt kun k lähestyy ääretöntä, niin säännöllisen $2k$-sivuisen monikulmion pinta-ala lähestyy ympyrän pinta-alaa, joten

$$\lim_{k\to\infty} A(2^k n) = \pi r^2.$$

Yhdistämällä edellä olevia tuloksia saadaan

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} n \sin(2\beta)}{\cos\beta \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^3}\right) \cdots}.$$

Koska Viète oli lähtenyt neliöstä liikkeelle, niin $n = 4$, $\beta = 45°$ ja $\cos\beta = \sin\beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Koska jokainen kosinilauseke voidaan ilmaista edellisen termin avulla kulman puolikkaan kaavan

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}$$

avulla, niin saadaan

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}.$$

Tämä tulos esitetään usein myös muodossa

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdot \cdots .$$

Vièten tulos on hyvin olennainen luvun π historiassa. Hänen kaavansa on itse asiassa ensimmäinen tunnettu ääretön tulo. Tästä kaavasta ei kuitenkaan juuri ollut hyötyä luvun π numeerisen arvon laskemisessa, koska neliöjuuret ovat melko hankalia käsitellä ja lisäksi suppeneminen on hidasta. Viète ei itsekään käyttänyt kaavaansa luvun π numeerisen arvon laskemiseen, vaan käytti siihen Arkhimedeen menetelmää. Hän sai luvulle π arvion

$$3,1415926535 < \pi < 3,1415926537$$

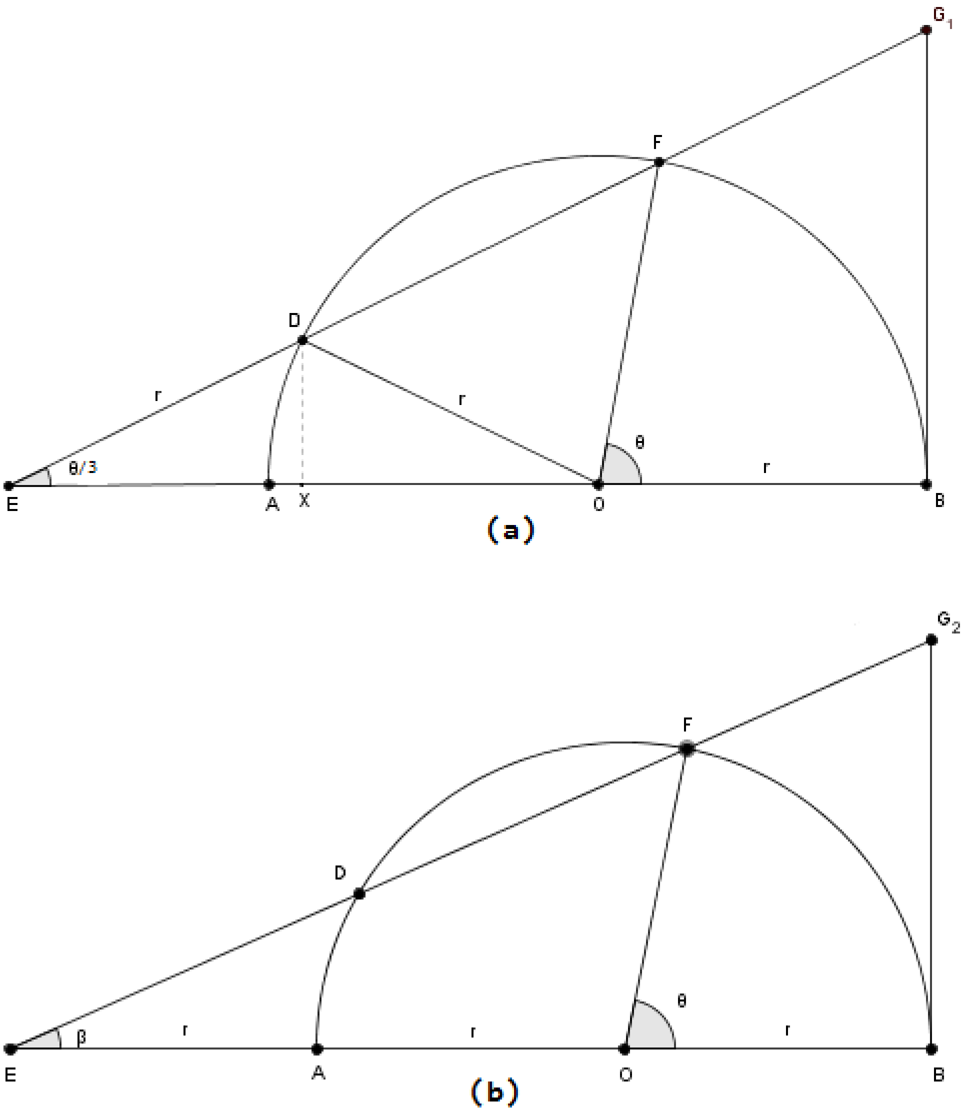
ja paransi näin Arkhimedeen saamaa tulosta. [2, s.96–100]

Willebrord Snellius ja Christian Huygens

Hollantilainen matemaatikko Willebrord Snellius (1591-1626) oli Ludolph Van Ceulenin oppilas ja hän alkoi myös tutkia lukua π. Snellius oli ensimmäinen, joka haastoi Arkhimedeen monikulmiot. Hän väitti, että ympyrän ympäri piirrettyjen monikulmioiden sivut ovat liian etäällä ympyrän kaaresta, ja tämän vuoksi luvulle π saatavat ylä- ja alarajat ovat turhan kaukana toisistaan. Hän alkoi etsiä geometrisia konstruktioita, joiden avulla ympyrän kaaren pituudelle saataisiin tarkemmat ylä- ja alarajat. Snellius laski ylärajan, toisin sanoen ympyrän kaaren ja vastaavan janan eron, seuraavasti (kuva a): Valitaan annetun ympyrän kehältä piste D. Valitaan seuraavaksi piste E halkaisijan AB jatkeelta siten, että jana DE on yhtä pitkä kuin säde OA. Janan ED jatke leikkaa tangentin BG pisteessä G_1, jolloin

$$BG_1 > \text{kaari } BF.$$

Perustelu tuolle epäyhtälölle näytetään myöhemmin. Alaraja saadaan konstruktiolla seuraavasti (kuva b): Oletetaan, että piste E sijaitsee janan AB jatkeella ja että jana



Kuva 3.2: Snelliuksen menetelmä.

EA on yhtä pitkä kuin säde. Valitaan ympyrän kehältä piste D siten, että se on janan EF ja ympyrän kehän toinen leikkauspiste ja olkoon G_2 janan EF ja tangentin BG leikkauspiste. Silloin

$$BG_2 < \text{kaari } BF.$$

Myös perustelu tuolle epäyhtälölle näytetään myöhemmin.

Trigonometriaa apuna käyttäen saadaan

$$\tan \beta = \frac{BG_2}{3r}.$$

Näin ollen

$$BG_2 = 3r \tan \beta.$$

Sinikaavaa soveltamalla saadaan

$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{EF}{\sin(\pi - \theta)}.$$

Kun muistetaan sinin jaksollisuus, saadaan tämä muotoon

$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{EF}{\sin \theta}.$$

Kosinikaavaa soveltamalla saadaan

$$EF^2 = EO^2 + FO^2 - 2 \cdot EO \cdot FO \cdot \cos(\pi - \theta).$$

Kun muistetaan kosinin jaksollisuus, saadaan

$$\begin{aligned} EF^2 &= EO^2 + FO^2 + 2 \cdot EO \cdot FO \cdot \cos \theta \\ &= (2r)^2 + r^2 + 2 \cdot 2r \cdot r \cdot \cos \theta \\ &= 5r^2 + 4r^2 \cos \theta \\ &= r^2(5 + 4 \cos \theta). \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä sinikaavasta saatuun tulokseen. Näin ollen

$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{r\sqrt{5 + 4\cos \theta}}{\sin \theta},$$

josta edelleen saadaan

$$\sin \beta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{5 + 4 \cos \theta}}.$$

Edelleen trigonometriaa käyttämällä saadaan

$$\cos \beta = \frac{2 + \cos \theta}{\sqrt{5 + 4 \cos \theta}}.$$

Nyt kun muistetaan, että $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$, saadaan lopuksi

$$BG_2 = 3r \tan \beta = \frac{3r \sin \theta}{2 + \cos \theta}.$$

Mistä tiedetään, että $BG_2 <$ kaari BF? Kirjoitetaan edellä oleva epäyhtälö muodossa

$$\frac{3r \sin \theta}{2 + \cos \theta} < r\theta.$$

Näin ollen

$$3\sin\theta < \theta(2+\cos\theta)$$

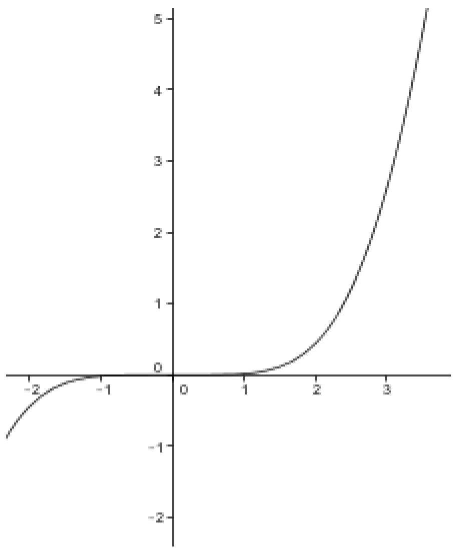
ja edelleen

$$0 < \theta(2+\cos\theta) - 3\sin\theta. \tag{3.1}$$

Tarkastellaan funktiota

$$f(\theta) = \theta(2+\cos\theta) - 3\sin\theta$$

ja sen kuvaajaa. Funktion kuvaajasta nähdään selvästi, että $f(\theta) > 0$, kun $\theta \in (0,\pi)$ (kulman koko on luonnollisesti tuolla välillä).



Kuva 3.3: $f(\theta) = \theta(2+\cos\theta) - 3\sin\theta$.

Tarkastellaan asiaa vielä tarkemmin analyyttisesti. Funktion $f(\theta)$ derivaatta on

$$f'(\theta) = -\theta\sin\theta - 2\cos\theta + 2.$$

Derivaatan nollakohdat ovat $\theta = 0$ ja $\theta \approx 6{,}283$. Nämä on laskettu laskinta käyttäen. Huomautettakoon, että nollakohtia on itse asiassa ääretön määrä, mutta nuo kaksi riittävät ottaen huomioon luvun θ määrittelyvälin. Huomataan, että $f'(\theta) > 0$, kun $\theta \in (0,\pi)$. Siis funktio $f(\theta)$ on kasvava tuolla välillä. Lisäksi $f(0) = 0$, joten $f(\theta) > 0$, kun $\theta \in (0,\pi)$. Epäyhtälö (3.1) on siis tosi.

Lasketaan seuraavaksi yläraja. Huomion arvoista on, että kulma $DEA = \frac{\theta}{3}$. Samankaltaista konstruktiota käytti aikoinaan Arkhimedes jakaessaan kulmaa kolmeen yhtäsuureen osaan.

Trigonometriaa jälleen apuna käyttäen saadaan

$$\tan\left(\frac{\theta}{3}\right) = \frac{BG_1}{EB}.$$

Näin ollen

$$BG_1 = \tan\left(\frac{\theta}{3}\right) EB.$$

Jotta saataisiin selville sivun EB pituus, lasketaan janan EX pituus (jana DX on janan EO keskinormaali):

$$\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = \frac{EX}{r},$$

josta saadaan

$$EX = r\cos\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

Nyt koska kolmio EDO on tasakylkinen, niin $EX = XO$, jolloin sivun EO pituus on $2r\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$. Näin ollen sivun EB pituus on $EO + OB = 2r\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + r = r\left(2\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1\right)$. Näin siis saadaan

$$BG_1 = r\left(2\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1\right)\tan\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

Yhteenvetona edellisistä saadaan

$$BG_2 < \text{kaari } BF < BG_1.$$

Epäyhtälön $BG_2 <$ kaari BF paikkansa pitävyys todettiin jo aiemmin. Epäyhtälön kaari $BF < BG_1$ paikkansa pitävyys nähdään myös kuvaajasta. Tarkempaa analyyttistä tarkastelua tämän epäyhtälön osalta ei tässä tutkielmassa tehdä.

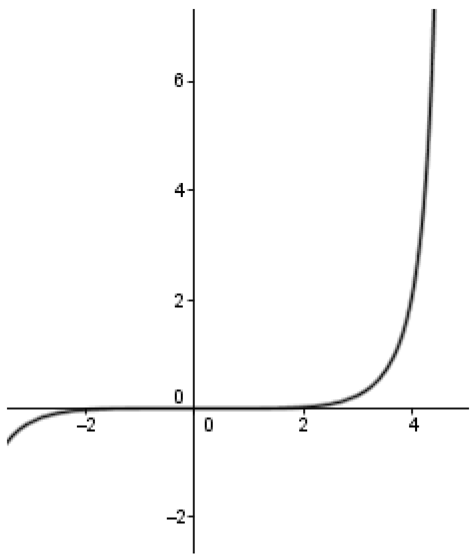
Kun sijoitetaan edellä lasketut ala- ja ylärajat, saadaan

$$\frac{3r\sin\theta}{2+\cos\theta} < r\theta < r\left(2\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1\right)\tan\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

Nyt kun lähdetään liikkeelle kuusikulmiosta ja kun tuplataan monikulmion sivujen lukumäärä k kertaa, saadaan tämä muotoon

$$6\cdot 2^k \cdot \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} < \pi < 6\cdot 2^k\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 1\right)\tan\left(\frac{\alpha}{3}\right),$$

missä $\alpha = \frac{\theta}{2^k} = \frac{(\pi/6)}{2^k}$. Nämä rajat olivat Arkhimedeen monikulmioiden antamia rajoja tarkemmat. Snellius ei kuitenkaan osannut todistaa tuloksiaan, vaikkakin ne pitivät paikkansa. Hollantilainen matemaatikko Christian Huygens (1629-1695) todisti ne vuonna 1654 teoksessa *De circuli magnitude inventa*. Hän laski luvulle π



Kuva 3.4: $f(\theta) = \left(2\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1\right)\tan\left(\frac{\theta}{3}\right) - \theta.$

arvion $3,1415926533 < \pi < 3,1415926538$. Saman tarkkuuden saavuttamiseksi olisi tarvittu lähes 400 000-sivuinen Arkhimedeen monikulmio. Seuraavassa taulukossa on vertailtu Arkhimedeen ja Snelliuksen-Huygensin menetelmien tarkkuuksia. Sarakkeella n on tarvittavien sivujen lukumäärä ja sitä vastaavalla rivillä luvun π desimaalien lukumäärä. [2, 5, 8]

n	Arkhimedes	Snellius-Huygens
6	1	2
96	3	7
2^10	5	10
2^11	6	12
2^30	17	34
2^62	36	73

Kuva 3.5: Taulukko 1.

John Wallis

Vuonna 1655 englantilainen matemaatikko John Wallis (1616-1703) onnistui johtamaan kaavan, joka on nimetty hänen mukaansa ja joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}.$$

Wallisin kaava on yksi suuria virstanpylväitä luvun π likiarvon määrittämisessä. Vièten tavoin Wallis esitti luvun π äärettömänä tulona, mutta hän oli ensimmäinen, jonka äärettömässä sarjassa oli vain rationaalioperaatioita. Siinä ei ollut neliöjuuria hankaloittamassa laskutoimituksia kuten Vièten kaavassa ja Arkhimedeen menetelmässä. Wallis osasi todistaa kaavansa, mutta tämä todistus on melko työläs. Johdetaan sen nyt osittaisintegrointiin perustuvalla menetelmällä. [2, s.133–134]

Jos f ja g ovat funktioita, niin määrättyyn integraaliin sovitettuna osittaisintegrointi antaa

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Olkoon nyt $n \geqslant 2$, $g(x) = \sin^{n-1} x$ ja $f(x) = -\cos x$. Tällöin

$$g'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x$$

ja

$$f'(x) = \sin x.$$

Olkoon vielä $a = 0$ ja $b = \frac{\pi}{2}$. Koska $\sin 0 = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$, niin edellisen integraalikaavan mukaan saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x - \sin^n x\right) dx = (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx\right) \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx.
\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx$$

ja edelleen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx.$$

Merkintöjen helpottamiseksi sovitaan, että

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Tätä merkintätapaa käyttäen ja huomioiden edellinen tulos, saadaan

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2},$$

kun $n \geqslant 2$. Lasketaan erikseen tapaukset, kun $n = 0$ ja kun $n = 1$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \\ a_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

Kun jatketaan laskemista, saadaan

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \; a_3 = \frac{2}{3}, \; a_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}, \; a_5 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \text{ jne.}$$

Induktiotodistuksella voidaan varmistaa, että

$$a_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \cdot \frac{\pi}{2}$$

ja

$$a_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}.$$

Tekijä $\frac{\pi}{2}$ esiintyy siis jonon a_n joka toisessa termissä. Osamäärästä $\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}$ voidaan ratkaista, että

$$\pi = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2} \cdot \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}.$$

Tiedetään, että $0 < \sin x < 1$ kaikilla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Siis esimerkiksi $\sin^{2k-1} x > \sin^{2k} x > \sin^{2k+1} x$ kaikilla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Jos integroitavien funktioiden arvot ovat kaikissa integrointialueen osissa samassa suuruusjärjestyksessä, niin funktioiden integraalitkin ovat tässä järjestyksessä. Siis $a_{2k+1} < a_{2k} < a_{2k-1}$. Nyt kun muistetaan, että

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2},$$

niin saadaan

$$1 < \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} = \frac{a_{2k}}{\frac{2k}{2k+1}a_{2k-1}} < \frac{2k+1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}.$$

Nämä epäyhtälöt osoittavat, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} = 1.$$

Näin siis saadaan, että

$$\pi = \lim_{k\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2} \cdot \frac{2}{2k+1}.$$

Kun siirretään luku 2 osamäärän eteen, saadaan

$$\pi = \lim_{k\to\infty} 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2k \cdot 2k}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdots (2k-1) \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)},$$

mikä on Wallisin kaava. [10]

James Gregory ja Gottfried Leibniz

James Gregory (1638-1675) oli skotlantilainen matemaatikko, jonka tutkimukset johtivat osittain differentiaali- ja integraalilaskennan keksimiseen. Hänen monista keksinnöistään olennaisin luvun π kehitykseen vaikuttava havainto oli arkustangentin sarjakehitelmä. Hän huomasi, että kaaren $\frac{1}{(1+x^2)}$ rajoittaman alueen pinta-ala välillä $(0, x)$ oli $\arctan x$. Nykyaikaista merkintätapaa käyttäen

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x.$$

Tästä hän johti omaa nimeään kantavan sarjakehitelmän

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Kun sijoitetaan kaavaan $x = 1$, ja koska $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, saadaan

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

Tämän erikoistapauksen johti vuonna 1674 saksalainen matemaatikko Gottfried Leibniz (1646-1716). Tästä syystä sarjaa kutsutaan toisinaan myös Leibnizin sarjaksi tai Gregoryn-Leibnizin sarjaksi. Tämä oli ensimmäinen luvulle π johdettu ääretön sarjakehitelmä. Se oli teoreettisesti mielenkiintoinen, sillä sen avulla luvun π arvo voitiin laskea aivan uudella tavalla. Sarja kuitenkin suppenee niin hitaasti, että siitä ei ollut laskemisen kannalta juuri hyötyä. [2, s.137–139]

Isaac Newton

Englantilaisella Isaac Newtonilla (1642-1726) oli myös sormensa pelissä luvun π kehityksessä. Huomautettakoon, että Newtonia pidetään Leibnizin ohella differentiaali- ja integraalilaskennan keksijänä. Tämä toi luonnollisesti uuden ulottuvuuden myös lukuun π nähden. Nykyistä merkintätapaa käyttäen Newton keksi, että

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x. \tag{3.2}$$

Käyttämällä Newtonin binomikaavaa saadaan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots\right)dx.$$

Integroimalla tämä termeittäin ja käyttämällä kaavaa (3.2) saadaan

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots$$

Sijoittamalla tähän $x = \frac{1}{2}$, jolloin $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, saadaan sarja

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \cdots\right).$$

Tämä sarja suppenee huomattavasti nopeammin kuin Gregoryn-Leibnizin sarja. Historian tietojen mukaan Newton laski luvun π arvon 16 desimaalin tarkkuudella käyttäen tätä menetelmää. [2, s.141–147]

Abraham Sharp ja John Machin

Gregoryn-Leibnizin sarjaa käytettiin hyvin paljon luvun π arvon laskemiseen. Sitä muunneltiin usealla eri tavalla suppenemisen nopeuttamiseksi. Englantilainen astronomi Abraham Sharp (1651-1742) sijoitti kaavaan $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ja sai sen muotoon

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \cdots\right).$$

Tätä kaavaa käyttäen hän laski luvulle π 72 desimaalia. [2, s.148–150]

Lontoolainen matemaatikko John Machin (1680-1752) muokkasi Gregoryn-Leibnizin sarjaa vuonna 1706 helpottaakseen luvun π likiarvon laskemista.

Kun $\tan\beta = \frac{1}{5}$, saadaan

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{5}{12}$$

ja

$$\tan 4\beta = \frac{2\tan 2\beta}{1-\tan^2 2\beta} = \frac{120}{119}.$$

Tämä poikkeaa $\frac{1}{119}$ luvusta 1, jonka arkustangentti on $\frac{\pi}{4}$. Kun poikkeama ilmoitetaan kulmina, saadaan

$$\tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\beta - 1}{1+\tan 4\beta} = \frac{1}{239},$$

joten

$$\arctan\frac{1}{239} = 4\beta - \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}.$$

Sijoittamalla Gregoryn-Leibnizin sarjaan tämän arkustangentin, Machin sai arvon

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right).$$

Tämän kaavan avulla Machin laski luvulle π arvon 100 desimaalin tarkkuudella vuonna 1706. [2, s.150]

Leonhard Euler

Sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler (1707-1783) johti suuren määrän kaavoja luvulle π. Useat yleisesti tunnetut symbolit, mukaanlukien symboli π, ovat Eulerilta peräisin. Hän selvitti lukuun π liittyvät ongelmat niin perin pohjin, ettei kukaan hänen jälkeensä enää keksinyt parempaa tapaa sen arvon laskemiseksi. Tässä on yksi niistä, jossa hän lähti liikkeelle sinin sarjakehitelmästä.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Euler sijoitti siihen $x^2 = y$ ja tarkasteli yhtälöä

$$\sin x = 0 \tag{3.3}$$

ääretöntä astetta olevana yhtälönä ja sai (kun $y \neq 0$)

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \cdots = 0. \tag{3.4}$$

Koska yhtälön (3.3) juuret ovat $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, niin yhtälön (3.4) juuret ovat $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \ldots$. Euler tiesi, että yhtälössä (3.4) esiintyvän termin $\frac{1}{3!}$ negatiivinen kerroin on yhtälön juurien käänteislukujen summa, joten

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots = \frac{1}{3!}$$

tai

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Toistamalla saman kosinin sarjakehitelmälle hän johti kaavan

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

Eulerin kehittämät sarjat olivat hyvin nopeasti suppenevia. Tästä on todisteena muunmuassa se, että Euler laski luvulle π 20 desimaalia tunnissa. Tämä oli olennainen osa luvun π kehityksen historiaa. Luvun π laskemiselle oli nyt olemassa valtava määrä erilaisia keinoja ja sille saatiin niin tarkkoja arvoja, ettei niistä käytännön kannalta ollut enää hyötyä. Sen sijaan Euler alkoi tutkimaan lukua π aivan uudesta näkökulmasta. Millainen luku π oli? Rationaalinen vai irrationaalinen? Algebrallinen vai transkendenttinen? Jokaisen uuden desimaalin löytyessä toivo, että se olisi rationaalinen heikkeni, sillä desimaaleista ei löytynyt säännöllisyyttä. Useimmat tutkijat kuitenkin aavistelivat, että π on irrationaaliluku, vaikka sitä ei vielä ollut todistettu. [2, s.158–162]

4 Irrationaalisuus ja transkendenttisuus

4.1 Historiaa

Sen jälkeen, kun Euler oli esittänyt lukua π koskevat kysymyksensä, ne vaivasivat matemaatikoita 107 vuotta. Jo muinaiset kreikkalaiset tiesivät, että oli olemassa lukuja, joita ei voitu esittää kahden kokonaisluvun suhteena. Sveitsiläinen matemaatikko Johann Heinrich Lambert (1728-1777) ja ranskalainen matemaatikko Adrien Marie Legendre (1752-1833) todistivat, että luku π on irrationaaliluku. Lambert osoitti luvun π irrationaalisuuden käyttämällä apunaan Legendren johtamaa ketjumurtolukuja koskevaa aputeoreemaa. Tässä tutkielmassa esitetään Lambertin todistus luvun π irrationaalisuudelle.

Legendre todisti luvun π irrationaalisuuden vuonna 1794 kirjassaan *Éléments de Géométrie*. Hän esitti myös todistuksen sille, että luku π^2 on irrationaalinen. Tässä tutkielmassa esiintyvä todistus luvun π^2 irrationaalisuudelle ei ole alkuperäinen Legendren todistus. Todistukset luvun π irrationaalisuudesta eivät kuitenkaan ratkaisseet ikivanhaa ympyrän neliöinnin ongelmaa. Tutkielmansa loppupuolella Legendre kirjoitti: "On todennäköistä, että π ei kuulu edes algebrallisten irrationaalilukujen joukkoon, toisin sanoen se ei ole sellaisen algebrallisen yhtälön juuri, jossa on äärellinen määrä rationaalikertoimisia termejä. Mutta tämän täsmällinen todistaminen näyttää vaikealta." Tällä Legendre tarkoitti transkendenttilukuja.

Luvun π transkendenttisuus oli erityisen jännittävä kysymys, sillä siitä seurasi vastaus ympyrän neliöimistä koskevaan ongelmaan. Saksalainen matemaatikko Ferdinand von Lindemann (1852-1939) todisti lopulta vuonna 1882, että luku π on transkendenttinen ja näin ollen ympyrän neliöiminen harppia ja viivainta käyttäen on mahdotonta. Tässä tutkielmassa esiintyvä transkendenttisuustodistus ei niin ikään ole Lindemannin alkuperäinen todistus. [2, 3]

4.2 Luvun π irrationaalisuus

Lause 4.1. *π on irrationaalinen.*

Todistus. [9, s.7–8] Tehdään vastaoletus: Luku π on rationaaliluku. Toisin sanoen

$\pi = \frac{a}{b}$, missä $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $b \neq 0$. Olkoon n luonnollinen luku ja $\alpha = \frac{\pi}{2} = \frac{a}{2b} > 0$. Lähdetään liikkeelle laskemalla osittaisintegroinnin avulla palautuskaava seuraavalle integraalille

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos(\alpha x)dx \\
&= \Big/_{-1}^{1} (1-x^2)^n \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + \int_{-1}^{1} 2nx(1-x^2)^{n-1}\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)dx \\
&= \frac{2n}{\alpha}\Big(\Big/_{-1}^{1} x(1-x^2)^{n-1}\frac{1}{\alpha}(-\cos(\alpha x)) + \int_{-1}^{1} 2(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2}\frac{1}{\alpha}(-\cos(\alpha x)) \\
&\quad -(1-x^2)^{n-1}\frac{1}{\alpha}(-\cos(\alpha x))dx\Big) \\
&= \frac{1}{\alpha^2}(2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}),
\end{aligned}$$

kun $n \geq 2$. Näin saadaan palautuskaava

$$I_n = \frac{1}{\alpha^2}\left(2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}\right).$$

Koska palautuskaava pätee vain kun $n \geq 2$, niin lasketaan erikseen integraalit, kun $n = 0$ ja $n = 1$. Saadaan

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_{-1}^{1} \cos(\alpha x)dx = \frac{2}{\alpha}\sin\alpha \\
I_1 &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos(\alpha x)dx = I_0 + \int_{-1}^{1} (-x^2)\cos(\alpha x)dx \\
&= I_0 - \Big(\Big/_{-1}^{1} x^2\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) - \int_{-1}^{1} 2x\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)dx\Big) = I_0 - I_0 + \frac{2}{\alpha}\int_{-1}^{1} x\sin(\alpha x)dx \\
&= \frac{2}{\alpha}\Big(-\Big/_{-1}^{1} x\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)dx\Big) = \frac{2}{\alpha}\Big/_{-1}^{1}\frac{1}{\alpha^2}\sin(\alpha x) \\
&= \frac{4}{\alpha^3}\sin\alpha.
\end{aligned}$$

Tästä eteenpäin induktiolla etenemällä palautuskaava johtaa tulokseen

$$I_n = n!\Big(\frac{k_1}{\alpha} + \cdots + \frac{k_{2n+1}}{\alpha^{2n+1}}\Big)\sin\alpha,$$

missä jokainen k_j, $j \in \{1,\ldots,2n+1\}$, on kokonaisluku. Näin ollen

$$\frac{\alpha^{2n+1}}{n!} I_n = P_n(\alpha)\sin\alpha,$$

missä P_n on korkeintaan astetta $2n+1$ oleva kokonaislukukertoiminen polynomi. Alussa oletimme, että $\alpha = \frac{\pi}{2} = \frac{a}{2b}$. Nyt siis $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Sijoittamalla nämä viimeksi saatuun kaavaan, saadaan

$$\frac{(\frac{a}{2b})^{2n+1}}{n!} I_n = P_n\Big(\frac{a}{2b}\Big).$$

Kertomalla tämä puolittain termillä $(2b)^{2n+1}$, saadaan

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n = (2b)^{2n+1} P_n\Big(\frac{a}{2b}\Big).$$

Koska b ja n ovat kokonaislukuja ja lisäksi P_n on kokonaislukukertoiminen polynomi, niin $\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n$ on kokonaisluku kaikilla indeksin n arvoilla. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $\frac{a^{2n+1}}{n!} \to 0$, kun $n \to \infty$ ja $|I_n| \leq 2$, joten $\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n \to 0$. Tämä on kokonaislukujonolle mahdollista vain, jos se on tasan 0 suurilla n:n arvoilla. Näin ei kuitenkaan tässä tapauksessa ole, koska integraali I_n eroaa nollasta kaikilla n:n arvoilla. Näin saavutetaan ristiriita, joten vastaoletus on väärä. π ei siis ole rationaaliluku, joten sen täytyy olla irrationaalinen. □

4.3 Luvun π^2 irrationaalisuus

Lause 4.2. π^2 *on irrationaalinen.*

Todistus. [7, s.119–122] Todistetaan ensin aputulos ja sen jälkeen todistetaan varsinainen lause vastaoletuksella. Olkoon $f(x)$ äärettömästi derivoituva funktio. Lasketaan osittaisintegroinnilla seuraava integraali:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx &= \Big/_0^1 -\frac{1}{\pi} f(x)\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 f^{(1)}(x)\cos(\pi x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}(f(0)+f(1)) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 f^{(1)}(x)\cos(\pi x)dx.\end{aligned}$$

Huomautettakoon, että tässä merkinnällä $f^{(n)}$ tarkoitetaan n :ttä derivaattaa. Toistamalla tämä saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx &= \frac{1}{\pi}(f(0)+f(1)) + \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f^{(1)}(x)\sin(\pi x)\\ &\quad -\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f^{(2)}(x)\sin(\pi x)dx\\ &= \frac{1}{\pi}(f(0)+f(1)) - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f^{(2)}(x)\sin(\pi x)dx.\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx &= \frac{1}{\pi}(f(0)+f(1)) - \frac{1}{\pi^2}\Big(\frac{1}{\pi}(f^{(2)}(0)+f^{(2)}(1))\\ &\quad -\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f^{(4)}(x)\sin(\pi x)dx\Big)\\ &= \Big(\frac{1}{\pi}f(0) - \frac{1}{\pi^3}f^{(2)}(0)\Big) + \Big(\frac{1}{\pi}f(1) - \frac{1}{\pi^3}f^{(2)}(1)\Big)\\ &\quad +\frac{1}{\pi^4}\int_0^1 f^{(4)}(x)\sin(\pi x)dx.\end{aligned}$$

Edelleen saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx &= \Big(\frac{1}{\pi}f(0) - \frac{1}{\pi^3}f^{(2)}(0) + \frac{1}{\pi^5}f^{(4)}(0)\Big)\\ &\quad +\Big(\frac{1}{\pi}f(1) - \frac{1}{\pi^3}f^{(2)}(1) + \frac{1}{\pi^5}f^{(4)}(1)\Big)\\ &\quad -\frac{1}{\pi^7}\int_0^1 f^{(6)}(x)\sin(\pi x)dx\\ &= \frac{1}{\pi^5}\Big(\pi^4 f(0) - \pi^2 f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0)\Big)\\ &\quad +\frac{1}{\pi^5}\Big(\pi^4 f(1) - \pi^2 f^{(2)}(1) + f^{(4)}(1)\Big)\\ &\quad -\frac{1}{\pi^7}\int_0^1 f^{(6)}(x)\sin(\pi x)dx.\end{aligned}$$

Toistamalla tätä edelleen aina $2n$:een derivaattaan saakka, saadaan

$$\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx =$$
$$\frac{1}{\pi^{2n+1}}\Big(\pi^{2n}f(0) - \pi^{2n-2}f^{(2)}(0) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(0) - \pi^{2n-6}f^{(6)}(0) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0)\Big)$$
$$+\frac{1}{\pi^{2n+1}}\Big(\pi^{2n}f(1) - \pi^{2n-2}f^{(2)}(1) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(1) - \pi^{2n-6}f^{(6)}(1) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(1)\Big)$$
$$+(-1)^{n+1}\int_0^1 f^{(2n+2)}(x)\sin(\pi x)dx.$$

Hyödynnetään seuraavaksi Nivenin polynomia

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Koska $f(x)$ on astetta $2n$ oleva polynomi ja lisäksi $f^{(2n+1)}(x) = f^{(2n+2)}(x) = 0$, niin lopullinen integraali edellä on 0. Määritellään seuraavaksi funktio

$$F(x) = \frac{1}{\pi^{2n+1}}(\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(x)$$
$$- \pi^{2n-6}f^{(6)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)).$$

Nyt

$$\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = F(0) + F(1).$$

Seuraavaksi mennään varsinaiseen todistukseen. Aloitetaan se tekemällä vastaoletus, että luku π^2 on rationaalinen. Merkitään

$$\pi^2 = \frac{a}{b},$$

missä a ja b ovat kokonaislukuja. Nyt

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{\pi(\pi^2)^n}((\pi^2)^n f(x) - (\pi^2)^{n-1}f^{(2)}(x) \\
&\quad +(\pi^2)^{n-2}f^{(4)}(x) - (\pi^2)^{n-3}f^{(6)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)) \\
&= \frac{b^n}{\pi a^n}\Big(\frac{a^n}{b^n}f(x) - \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}f^{(2)}(x) + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}f^{(4)}(x) - \frac{a^{n-3}}{b^{n-3}}f^{(6)}(x) + \cdots \\
&\quad +(-1)^n f^{(2n)}(x)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi a^n}(a^n f(x) - a^{n-1}bf^{(2)}(x) + a^{n-2}b^2 f^{(4)}(x) - a^{n-3}b^3 f^{(6)}(x) + \cdots \\
&\quad +(-1)^n f^{(2n)}(x)).
\end{aligned}$$

Tästä saadaan, että

$$\pi a^n F(0) = a^n f(0) - a^{n-1} b f^{(2)}(0) + a^{n-2} b^2 f^{(4)}(0) - a^{n-3} b^3 f^{(6)}(0) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0),$$

ja

$$\pi a^n F(1) = a^n f(1) - a^{n-1} b f^{(2)}(1) + a^{n-2} b^2 f^{(4)}(1) - a^{n-3} b^3 f^{(6)}(1) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(1).$$

Kerrotaan aiemmin saatu tulos

$$\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = F(0) + F(1)$$

puolittain termillä πa^n. Saadaan

$$\pi a^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = \pi a^n F(0) + \pi a^n F(1).$$

Oikea puoli on selvästi kokonaisluku, joten vasemman puolen täytyy olla myös kokonaisluku. Koska $0 < x < 1$, niin $0 < x(1-x) < 1$ ja edelleen $0 < x^n(1-x)^n < 1$. Tästä seuraa, että $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ ja

$$\begin{aligned} 0 &< \pi a^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!}\int_0^1 \sin(\pi x)dx, \\ 0 &< \pi a^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!} \Big/_0^1 \frac{-\cos(\pi x)}{\pi} = \frac{2a^n}{n!}. \end{aligned}$$

Kun n on riittävän suuri, niin $\frac{2a^n}{n!} < 1$, joten kokonaislukumme täytyy olla aidosti lukujen 0 ja 1 välissä. Tästä seuraa ristiriita.

Luku π^2 ei ole rationaalinen, joten se on irrationaalinen. □

Huomautus. Luvun π^2 irrationaalisuudesta seuraa luvun π irrationaalisuus.

Todistus. Itse asiassa tämä pätee kaikille luvuille. Olkoon a^2 irrationaalinen. Tehdään vastaoletus, että luku a on rationaalinen. Merkitään $a = \frac{p}{q}$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$. Nyt $a^2 = \frac{p^2}{q^2}$ on myös rationaalinen. Tästä seuraa ristiriita. □

4.4 Luvun π transkendenttisuus

Määritelmä 4.1. [9, s.10] Kompleksiluku x on algebrallinen, mikäli on olemassa nollasta eroava kokonaislukukertoiminen polynomi

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

jonka jokin nollakohta luku x on. Tässä $a_n \neq 0$.

Määritelmä 4.2. [9, s.10] Kompleksiluku x on transkendenttinen, mikäli se ei ole algebrallinen.

Lause 4.3. *π on transkendenttinen.*

Todistus. ([7, s.194–197], [9, s.20–23]) Tiedetään, että $i = \sqrt{-1}$ on algebrallinen luku. Riittää siis osoittaa, että $i\pi$ on transkendenttinen, sillä jos π on algebrallinen luku, niin myös tulo $i\pi$ on algebrallinen.
Tehdään siis vastaoletus, että $i\pi$ on algebrallinen. Se on siis kokonaislukukertoimisen polynomin juuri. Olkoot tällaisen polynomin juuret $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_N$.
Koska $e^{i\pi} + 1 = 0$, niin

$$(e^{\alpha_1} + 1)(e^{\alpha_2} + 1)(e^{\alpha_3} + 1) \cdots (e^{\alpha_N} + 1) = 0.$$

Kertomalla sulut auki, saamme 2^N kappaletta e:n yhteenlaskettuja potensseja. Eksponentit ovat muotoa $\epsilon_1\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \epsilon_3\alpha_3 + \cdots + \epsilon_N\alpha_N$, missä $\epsilon_r \in \{0, 1\}$. Merkitään näitä potensseja symboleilla $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_{2^N}$. Enemmän kuin yksi näistä voi olla 0, joten oletetaan että ensimmäiset n näistä eivät ole. Merkitään $q = 2^N - n$ niitä, jotka ovat yhtäsuuria kuin 0. Saadaan siis

$$q + e^{\phi_1} + e^{\phi_2} + ... + e^{\phi_n} = 0.$$

Määritellään seuraavaksi induktiivisesti polynomifunktiot

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= x - 0 \\
P_1(x) &= (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_N) \\
P_2(x) &= (x - (\alpha_1 + \alpha_2)) \cdots (x - (\alpha_{N-1} + \alpha_N)) \\
&\vdots \\
P_N(x) &= (x - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_N))\,.
\end{aligned}$$

Olkoon

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0(x)P_1(x)\cdots P_N(x) \\ &= x^q(x-\phi_1)(x-\phi_2)\cdots(x-\phi_n). \end{aligned}$$

Tämän polynomifunktion juuret ovat $\epsilon_1\alpha_1+\cdots+\epsilon_N\alpha_N$. Symmetristen funktioiden ja polynomien teorian (ks.[13, s.154–164]) perusteella polynomit $P_0(x), P_1(x), ..., P_N(x)$ ovat rationaalikertoimisia polynomeja. Näin ollen polynomi $P(x)$ on myös rationaalikertoiminen. Tästä seuraa, että myös $(x-\phi_1)(x-\phi_2)\cdots(x-\phi_n)$ on rationaalikertoiminen. Kertomalla tämä sopivalla kokonaisluvulla A saadaan, että

$$A(x-\phi_1)(x-\phi_2)\cdots(x-\phi_n)$$

on kokonaislukukertoiminen polynomi.

Määritellään seuraavaksi polynomifunktiot

$$f(x) = \frac{A^{np}x^{p-1}(x-\phi_1)^p(x-\phi_2)^p\cdots(x-\phi_n)^p}{(p-1)!}$$

ja

$$F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(np+p-1)}(x) = \sum_{k=0}^{np+p-1} f^{(k)}(x),$$

missä p on vielä toistaiseksi täsmentämätön alkuluku. Nyt huomataan, että

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) &= e^{-x}F'(x) - e^{-x}F(x) \\ &= -e^{-x}\left(F(x) - F'(x)\right) = -e^{-x}f(x), \end{aligned}$$

josta saadaan

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x e^{-y}f(y)dy.$$

Tekemällä sijoitus $y = kx$ oikeanpuoleiseen integraaliin saadaan

$$\int_0^x e^{-y}f(y)dy = x\int_0^1 e^{-kx}f(kx)dk.$$

Nyt

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -x\int_0^1 e^{-kx}f(kx)dk,$$

mistä lopulta saadaan

$$F(x) - e^x F(0) = -x \int_0^1 e^{(1-k)x} f(kx)dk.$$

Asettamalla $x = \phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_n$ ja laskemalla saadut arvot yhteen saadaan

$$\sum_{j=1}^{n} (F(\phi_j) - e_j^{\phi} F(0)) = -\sum_{j=1}^{n} \phi_j \int_0^1 e^{(1-k)\phi_j} f(k\phi_j)dk.$$

Tästä seuraa, että

$$\sum_{j=1}^{n} F(\phi_j) - F(0) \sum_{j=1}^{n} e^{\phi_j} = -\sum_{j=1}^{n} \phi_j \int_0^1 e^{(1-k)\phi_j} f(k\phi_j)dk.$$

Palauttamalla mieleen, että

$$q + e^{\phi_1} + e^{\phi_2} + e^{\phi_3} + ... + e^{\phi_n} = q + \sum_{j=1}^{n} e^{\phi_j} = 0,$$

saadaan

$$\sum_{j=1}^{n} F(\phi_j) + qF(0) = -\sum_{j=1}^{n} \phi_j \int_0^1 e^{(1-k)\phi_j} f(k\phi_j)dk. \tag{4.1}$$

Tarkastellaan yhtälön vasenta puolta. Jokainen $F(\phi_j)$ on kokonaisluku ja jaollinen luvulla p. Tarkastellaan lähemmin funktiota $F(0) = \sum_{k=0}^{np+p-1} f^{(k)}(0)$. Nyt

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= 0 \quad \text{kaikille } k < p-1, \\ f^{(p-1)}(0) &= A^{np}(-1)^{np}(\phi_1\phi_2\phi_3 \cdots \phi_n), \\ f^{(k)}(0) &= p \cdot B \quad \text{kaikille äärellisille } k > p-1, \text{missä } B \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kaikissa kolmessa tapauksessa kyseessä on kokonaisluku, joten $F(0)$ on kokonaisluku. Valitsemalla luku p riittävän suureksi siten, että se ei jaa lukuja A, q ja $\phi_1\phi_2 \cdots \phi_n$, voidaan varmistaa ettei se jaa lukua $qF(0)$. Yhtälön (4.1) vasen puoli on siis nollasta poikkeava kokonaisluku.

Yhtälön (4.1) oikealla puolella on nimittäjässä termi $(p-1)!$ ja funktion $f(k\phi_j)$ osoittajan itseisarvo on $\leq C^{np+p-1}$ jollain vakiolla C, kun $k \in [0,1]$. Tämän yhtälön oikeasta puolesta saadaan mielivaltaisen pieni valitsemalla p riittävän suureksi. Tästä seuraa ristiriita.

Luku π ei ole algebrallinen, joten se on transkendenttinen. □

Huomautus. Luvun π transkendenttisuudesta seuraa sen irrationaalisuus.

Todistus. Itse asiassa tämä pätee kaikille transkendenttiluvuille. Olkoon luku a transkendenttinen. Tehdään vastaoletus, että luku a on rationaalinen. Merkitään $a = \frac{p}{q}$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$. Nyt a on kokonaislukukertoimisen polynomin

$$P(x) = qx - p$$

nollakohta, joten a on algebrallinen. Tästä seuraa ristiriita. □

5 Tietokoneaika

Luvun π likiarvo laskettiin ensimmäisen kerran tietokoneella vuonna 1949. Tietokone laski tuolloin luvulle π 2037 desimaalia ja aikaa tähän kului 70 tuntia. Tässä tietokonelaskimessa käytettiin Machinin kaavaa

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

Vuonna 1955 laskettiin tietokoneella luvun π arvo 3089 desimaalin tarkkuudella. Kaksi vuotta myöhemmin Lontoossa Pegasus-tietokone laski 10 021 desimaalia 33 tunnissa. Tämän tietokoneen ohjelma perustui arkustangentin kaavaan. Vuonna 1958 Pariisissa tietokone ohjelmoitiin käyttämään Machinin kaavan ja Gregoryn sarjan yhdistelmää. Se antoi luvun π arvon 10 000 desimaalin tarkkuudella yhdessä tunnissa ja 40 minuutissa. Vuotta myöhemmin saatiin tulokseksi 16 167 desimaalia 4,3 tunnissa. [1, 2]

Norjalainen Carl Störmer (1874-1957) oli matemaatikko, joka tutki urallaan Machinin sarjaa. Störmer tutki, miten luvun π arvo voitaisiin laskea vieläkin tehokkaammin ja päätyi lopulta seuraavanlaiseen esitykseen:

$$\pi = 176 \arctan \frac{1}{57} + 28 \arctan \frac{1}{239} - 48 \arctan \frac{1}{682} + 96 \arctan \frac{1}{12943}.$$

Tätä kaavaa käytettiin Lontoossa vuonna 1961 ja tuloksena oli 100 625 luvun π desimaalia. Aikaa kului 8 tuntia ja 43 minuuttia. Pariisissa vuonna 1966 IBM-tietokone laski 250 000 desimaalia. Vuotta myöhemmin sama tietokone laski 500 000 desimaalia. Ohjelma perustui niinikään Störmerin kaavaan. Vuonna 1973 saavutettiin luvun π miljoona desimaalia. [2, 4]

Intialainen matemaatikko Srinivasa Ramanujan (1887-1920) julkaisi urallaan useita uusia kaavoja luvun π laskemiseksi. Yksi näistä vuonna 1914 julkaistu on seuraavanlainen:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{k!^4 (396^{4k})}.$$

Tämä sarja suppenee huomattavasti nopeammin kuin useimmat arkustangenttisarjat, mukaanlukien Machinin sarja. Tämän sarjan avulla laskettiin luvun π arvo 17 miljoonan desimaalin tarkkuudella vuonna 1985. [1]

Amerikkalaiset Chudnovskyn veljekset kehittivät seuraavanlaisen sarjan vuonna 1987:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}.$$

Tätä sarjaa käytettiin laskemaan ensimmäisenä miljardi desimaalia vuonna 1989 ja vajaa kolme biljoonaa desimaalia vuonna 2009. 10 biljoonan desimaalin raja meni rikki vuonna 2011. [1]

Miksi luvun π arvoa laskettiin ja lasketaan aina vaan tarkemmin ja tarkemmin? Yksi syy tähän on ennätysten rikkominen. Lukuun π liittyvät uutisoinnit maailmalla ovat yleensä hyvinkin julkisia. Muita syitä ovat supertietokoneiden sekä erilaisten algoritmien testaaminen. Lisäksi desimaaleja laskemalla pyritään osoittamaan, että luvun π desimaalit ovat sattumanvaraisia, eikä niistä löydy säännönmukaisuuksia. Mutta onko asia näin? [1, 6]

Kuvitellaan, että heitetään kymmenensivuista arpanoppaa miljardi kertaa ja lasketaan kuinka usein mikäkin tulos esiintyy. Huomataan, että jokainen luku välillä 0-9 esiintyy suunnilleen yhtä monta kertaa. Tämä tulos perustuu todennäköisyyslaskentaan. Tutkimusten mukaan luku π näyttäisi käyttäytyvän tällä tavalla. Ensimmäisessä kuudessa miljardissa luvun π desimaalissa jokainen numero välillä 0-9 esiintyy noin 600 miljoonaa kertaa. Mutta todistaako tämä tulos mitään? Maalaisjärjellä voisi ajatella, että kyllä se todistaa. Matemaattisessa mielessä tulos ei kuitenkaan todista sitä, että luvun π desimaalit olisivat sattumanvaraisia kuuden miljardin desimaalin jälkeen. Tutkimukset eivät siis varsinaisesti todista, että luvun π desimaalit olisivat sattumanvaraisia. Säännönmukaisuuksia ei kuitenkaan ole tähän päivään asti löydetty - ainakaan vielä. [11]

Lähteet

[1] Arndt, J & Haenel, C.: Pi Unleashed. Springer-Verlag, 2006. ISBN 978-3-540-66572-4

[2] Beckman, P.: π, erään luvun tarina. Terra Cognita, 2000. ISBN 952-5202-28-3

[3] Boyer, C.: Tieteiden kuningatar: matematiikan historia. Art House, 2000. ISBN 951-884-159-4

[4] Brun, V.: Carl Störmer in memoriam. Acta Mathematica 100(1-2) I-VII, 1958. http://phdtree.org/pdf/30270129-carl-stormer-in-memoriam/, viitattu 18.9.2014

[5] Chakrabarti, G. & Hudson, R.: An improvement of Archimedes method of approximating π. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2/2003. http://www.ijpam.eu/contents/2003-7-2/4/4.pdf, viitattu 18.9.2014

[6] Connor, S.: The Big Question: How close have we come to knowing the precise value of pi?. The Independent, 2010. http://www.independent.co.uk/news/science/the-big-question-how-close-have-we-come-to-knowing-the-precise-value-of-pi-1861197.html, viitattu 18.9.2014

[7] Havil, J.: The Irrationals. Princeton University Press, 2012. ISBN 978-0-691-14342-2

[8] Iwamoto, T.: Later Circle Squarers. Math can be fun with CAD, 2006. http://www.takayaiwamoto.com/Greek_Math/Sqr_Circle/Snell_Huygens_Sqr.html, viitattu 18.9.2014

[9] Kahanpää, L.: Kurssimoniste: Algebra II, mahdollisuuksia ja mahdottomuuksia. 2007. http://users.jyu.fi/~laurikah/Algebrajatko.pdf, viitattu 18.9.2014

[10] Lehtinen, M.: Osittaisintegroinnin ihmeitä: Wallisin ja Stirlingin kaavat. Matematiikkalehti Solmu, 2/2003. http://solmu.math.helsinki.fi/2003/2/stirling/, viitattu 18.9.2014

[11] Preuss, P.: Are the digits of pi random? Lab Researcher may hold the key. Research news, 2001. http://www2.lbl.gov/Science-Articles/Archive/pi-random.html, viitattu 18.9.2014

[12] Svärd, S.: Ympyrän neliöinti. Matematiikka -blogi, 2012. http://miekka.blogspot.fi/2012/11/ympyran-neliointi.html, viitattu 18.9.2014

[13] Väisälä, K.: Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet. Otava, 1950.