T A M P E R E E N   Y L I O P I S T O

Soveltavaa laskemista ja ongelmanratkaisua

Matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttäminen matematiikan lisämateriaaleilla

Kasvatustieteiden yksikkö
Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
MARI YLI-SIKKILÄ
Toukokuu 2014

Tampereen yliopisto
Kasvatustieteiden yksikkö
MARI YLI-SIKKILÄ: Soveltavaa laskemista ja ongelmanratkaisua.
Matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttäminen matematiikan lisämateriaaleilla
Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma, 87 sivua, 2 liitesivua
Toukokuu 2014

Tiivistelmä

Tutkimus kohdistui matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttämiseen matematiikan lisämateriaaleilla. Tutkimuksessa selvitettiin, sisältävätkö matematiikan lisämateriaalit avoimia ongelmia, millaisia tehtäviä lisämateriaaleissa ylipäänsä on, painottuuko tehtävissä ongelmanratkaisu, sekä kehittävätkö lisämateriaalit oppilaan matemaattista osaamista. Lisäksi haluttiin tietää, mitä Laskutaidon Tuumavihkojen tekijä, Risto Ilmavirta, ajattelee matemaattisesta lahjakkuudesta, ongelmanratkaisusta sekä matemaattisen lahjakkuuden kehittämisestä. Tämän ohella oli tärkeää saada selville opettajien näkökulma matemaattisesta lahjakkuudesta ja ongelmanratkaisusta. Lisäksi tutkittiin, kuinka opettajat eriyttävät matemaattisesti lahjakkaita oppilaita, ja käyttävätkö he lisämateriaaleja opetuksessaan.

Tutkimusaineistona toimivat neljännen vuosiluokan Otavan Tuhattaiturin Pulmat 4a ja 4b, Sanoma Pro:n Laskutaidon Tuumavihko 4 syys- ja kevätosa sekä myös Sanoma Pro:n Matikka-sarjan Timanttivihko 4 syksy ja kevät. Lisäksi lähetettiin sähköpostitse kyselylomake Laskutaidon Tuumavihkojen tekijälle sekä kahdelle opettajalle. Lisämateriaalien tehtävien sekä kyselylomakkeiden vastausten analysoinnissa tutkimusmenetelmänä toimi aineistolähtöinen sisällönanalyysi. Analyysin jälkeen lisämateriaalien tutkimusaineisto vielä kvantifioitiin.

Lisämateriaaleista analysoitiin ensiksi avoimet tehtävät. Tämän jälkeen tehtävät jaettiin sisällönanalyysilla ryhmiin tehtävätyypin sekä matemaattisen sisällön mukaan. Tehtävätyypeiksi muodostuivat numeerinen, visuaalinen sekä verbaalinen. Matemaattisia sisältöryhmiä oli neljä: mekaaninen peruslasku, yhtälöt ja looginen päättely, geometria sekä todennäköisyys ja tilastot.

Eri kirjasarjojen lisämateriaalivihkot olivat hyvin erityylisiä ja niiden tehtävät korostivat erilaisia asioita. Avoimia tehtäviä lisämateriaaleissa oli todella vähän, vain muutamia jokaisessa vihkosessa. Pulmat-vihkoissa selvästi eniten, yli 84 %, oli tehtävätyypiltään verbaalisia tehtäviä. Tuumavihkoissa tehtäviä ryhmittyi eniten visuaalista hahmottamista vaativaan luokkaan (n. 66 %) ja Timanttivihkoissa eniten oli myös visuaalisia tehtäviä (n. 41 %). Timanttivihkoissa tehtävät olivat jakautuneet kaikista tasaisimmin eri ryhmiin. Matemaattiselta sisällöltään kaikissa lisä-materiaaleissa eniten oli yhtälöillä operoimista ja loogista päättelyä vaativia tehtäviä. Pulmat-vihkoissa näitä oli noin 73 %, Tuumavihkoissa noin 54 % ja Timanttivihkoissa reilu 63 %. Lisämateriaaleissa oli hyvin kattavasti ongelmanratkaisutehtäviä ja tehtävät kehittävät monipuolisesti oppilaan matemaattista osaamista.

Kyselyt tuottivat arvokasta tietoa lisämateriaalin tekijältä sekä kahdelta opettajalta. Ilmavirta pitää ongelmanratkaisutehtäviä tärkeinä matemaattisesti lahjakkaiden eriyttämisessä. Lahjakkaat vaativatkin soveltavia matemaattisia ongelmia. Tuumavihkot ovat syntyneet kahden ihmisen yhteistyönä omista ideapankeista ja arkielämän ongelmista. Molemmat opettajat osasivat puolestaan hyvin monipuolisesti kuvailla matemaattisesti lahjakasta oppilasta, mutta myönsivät, että lahjakkaiden eriyttäminen on hieman hankalaa. Opettajat kuitenkin eriyttävät heitä mahdollisuuksien mukaan lisämateriaalien avulla sekä muista lähteistä poimituilla pulmatehtävillä.

Avainsanat: lahjakkuus, matemaattinen lahjakkuus, lahjakkaiden opetus, eriyttäminen, ongelmanratkaisu, matematiikan lisämateriaali, oppimateriaali

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

Erityisoppilaiden opetukseen panostamista ja heidän huomioon ottamista koulussa voidaan pitää nykyään lähes itsestäänselvyytenä. Erityisoppilaista puhuttaessa tarkoitetaan usein oppilaita, joilla on vaikeuksia oppimisessa, eivätkä he tämän takia pysy opetuksessa mukana. Tavallinen kouluopetus ei ole tällöin heille riittävää. Opetus vaatii erityistoimia opettajilta ja muulta kouluhenkilökunnalta, jotta heikommin koulussa pärjäävät oppilaat oppisivat tärkeimmät asiat ja saisivat oppivelvollisuuden mallikkaasti suoritettua. Yleisesti pidetään tärkeänä, että oppimisvaikeuksista kärsivät oppilaat saisivat oman tasoistaan opetusta, ja he kokisivat oppimisen mielekkääksi.

Entä, jos oppilas onkin niin lahjakas, ettei hän hyödy tavallisesta opetuksesta lähes lainkaan? Oppilas on saattanut omaksua koko alakoulun matematiikan sisällön jo neljänteen luokkaan mennessä. Tavalliset matematiikan tunnit eivät tällöin tarjoa oppilaalle enää mitään uutta. Oppitunnit ovat vain vanhan kertaamista, ja lahjakas oppilas saattaa pitkästyä helposti. Tavallinen opetus ei siis ole riittävää lahjakkaalle oppilaalle. Lahjakkaat ovat täten myös erityisoppilaita, ja heidän opetuksensa tarvitsisi erityistä panostamista opettajilta. Lahjakkaiden oppilaiden matematiikan opetukseen panostaminen on saattanut jäädä taka-alalle, kun koulussa huonosti menestyvien opetuksen eriyttäminen koetaan usein tärkeämmäksi. Jo Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004, 161) mukaan kaikkien oppilaiden on saatava onnistumisen kokemuksia matematiikan parissa, joten oppilaiden olisi saatava oman tasoistaan matematiikan opetusta.

Matemaattisesti lahjakkaiden opetusta täytyy eriyttää, jotta opiskelu pysyisi mielenkiintoisena. Eriyttämisen keinoja on monia ja Ruokamo (2000, 13–14) on jakanut lahjakkaille annettavan opetuksen neljään eri vaiheeseen: 1) vertikaaliseen: asioiden syvällisempi käsittely opetussuunnitelman sisällä, 2) horisontaaliseen: sisältöjä myös opetussuunnitelman ulkopuolelta, 3) ryhmittelyn ja nopeuttamisen avulla tapahtuvaan opetuksen rikastamiseen sekä 4) eriyttämiseen erityisluokissa tai kouluissa. Tämän tutkimuksen avulla haluan tarkastella, millaisten valmiiden materiaalien avulla opettaja voi eriyttää matemaattisesti lahjakasta oppilasta. Opettajilla on usein kiire koulupäivän aikana ja aikaa ei aina riitä eriyttämisen suunnittelulle liiemmin. Haluankin keskittyä tutkimaan materiaaleja, jotka ovat helposti ja nopeasti opettajien saatavilla.

Tutkimusaineistona tässä tutkimuksessa on kahden eri kustantajan, Otavan ja Sanoma Pro:n, neljännen luokan matematiikan ylöspäin eriyttäviä lisämateriaaleja.

Lisämateriaaleja on tutkittu jonkin verran, mutta suurin osa aiemmista tutkimuksista liittyy heikosti matematiikassa menestyville tarkoitettujen lisämateriaalien tutkimiseen. Lahjakkaille ja nopeille laskijoille tarkoitettuja matematiikan lisämateriaaleja ei ole tutkittu juuri lainkaan. Haluan saada selville, millaisia tehtäviä, ja varsinkin millaisia ongelmanratkaisutehtäviä, matematiikan lisämateriaalit sisältävät. Ongelmanratkaisutehtävät ovat tärkeitä matematiikan opetuksessa ja ne kehittävät oppilaan kognitiivista ajattelua. Tutkimukset ovat myös osoittaneet, että ongelmanratkaisupainotteisella opetuksella saadaan parempia oppimistuloksia aikaiseksi. (Ben-Hur 2006, 71, 76.) Leppäaho (2007, 38) pitää ongelmanratkaisutehtävää sellaisena, jota ratkaisija ei kykene välittömästi ratkaisemaan, mutta pystyy kuitenkin saavuttamaan ratkaisun ajattelemisen ja opiskelemisen avulla.

Matematiikan lisämateriaalien tutkimisen lisäksi haluan saada selville sähköpostitse lähetettävän kyselylomakkeen avulla matematiikan lisämateriaalin tekijältä muutamia näkökulmia liittyen matemaattisesti lahjakkaan oppilaan määrittelyyn, ongelmanratkaisutehtävien merkitykseen lahjakkaan opetuksessa sekä lisämateriaalien tehtävien kehittämisprosessiin. Tämän lisäksi haluan tietää kahden opettajan mietteitä matemaattisesti lahjakkaista oppilaista, lahjakkaiden oppilaiden eriyttämisestä sekä lisämateriaalien käytöstä opetuksessa. Tarkoituksena on selvittää, kuinka opettajat eriyttävät matemaattisesti lahjakkaita oppilaitaan sekä käyttävätkö he matematiikan lisämateriaaleja ja ongelmanratkaisutehtäviä opetuksessaan. Nämä kysymykset hoidettiin myös kyselylomakkeen avulla sähköpostitse.

Kiinnostuin matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttämisestä jo ensimmäisessä harjoittelussani. Tällöin huomasin, että lahjakkaat oppilaat jäävät hyvin usein matemaattisesti heikkojen oppilaiden jalkoihin, kun opettajan kaikki aika menee heikkojen eriyttämiseen. Tehdessäni itse sijaisuuksia tajusin konkreettisesti, kuinka haastavaa on opettaa tasapuolisesti kaikkia oppilaita heidän oman tasonsa mukaan. Aloin tutustua opettajalle helppoihin tapoihin eriyttää lahjakkaita sekä nopeita laskijoita ja törmäsin matematiikan kirjasarjojen lisämateriaaleihin. Samalla kuitenkin olin epäileväinen, kehittävätkö lisämateriaalien tehtävät oppilaiden matemaattista osaamista, ja ovatko tehtävät tarpeeksi laadukkaita. Tällä tutkimuksella haluan siis kartoittaa, millaisia tehtäviä matematiikan lisämateriaalit sisältävät, ja kehittävätkö ne oppilaan matemaattista osaamista.

2 MATEMAATTINEN LAHJAKKUUS JA ONGELMANRATKAISU

2.1 Lahjakkuus

Mitä lahjakkuus on? Onko se jonkin erittäin vaikean asian osaamista ja jotain hyvin harvinaista? Vai voiko tavallinen ihminen olla lahjakas jossain tavallisessa asiassa? Lahjakkuus on kaikkia edellä mainittuja asioita. ”Mitä lahjakkuus on?” -kysymykseen on vaikeaa vastata lyhyesti ja tämän takia tarkastelenkin seuraavaksi lahjakkuuden yleistä määritelmää, lahjakkuuden jaotteluperiaatetta, kuuluisaa lahjakkuusteoriaa sekä lahjakkuuteen liittyvää luovuutta.

2.1.1 Lahjakkuuden yleinen määritelmä

Lahjakkuudella on monia ilmenemismuotoja. Deanin (2006) mukaan lahjakkuuden määrittelyssä korostetaan erilaisia taitoja, kuten fyysisiä suorituksia esimerkiksi urheilussa, musikaalisuutta, taiteellista näkemystä, sosiaalisia taitoja, johtajuutta sekä muita erityisiä kykyjä. Lahjakkuus ilmenee esimerkiksi laajana sanavarastona, uteliaisuutena, nopeana oppimisena ja intensiivisenä keskittymisenä mieluisaan puuhaan. Lahjakkailla ihmisillä saattaa lisäksi olla enemmän ideoita ja parempi mielikuvitus. Lahjakkaat ovat myös usein luovia ja hyviä ongelmanratkaisuissa, kysyvät usein vaativia kysymyksiä, ovat kekseliäitä ja hyviä oppimaan itsenäisesti. Dean toteaa lisäksi oppilaiden koulun ulkopuolisten harrastusten ja kiinnostuksen kohteiden olevan tärkeitä, koska niillä on usein merkitystä oppilaiden erityiseen lahjakkuuteen. (Dean 2006, 45–46.)

Lahjakkuus saattaa ilmetä myös monella eri alueella (Dean 2006, 46). Oppilas voi siis osoittaa lahjakkuuttaan esimerkiksi sekä matemaattisesti että musiikillisesti. Goodhew (2009) korostaa, että lahjakkaat oppilaat eivät aina ole lahjakkaita kaikissa asioissa. Jotkut saattavat kuitenkin olla monilahjakkuuksia, jolloin lahjakkuus ilmenee esimerkiksi koulussa melkein kaikissa oppiaineissa. Myöskään yleisistä käsityksistä huolimatta lahjakkaat lapset eivät ole aina syntyneet kultalusikka suussa. Suurimmalla osalla lahjakkaista oppilaista on hyvin huolehtivat ja ymmärtäväiset vanhemmat, jotka panostavat lapsensa koulutukseen. On kuitenkin tärkeää muistaa, että on myös lahjakkaita lapsia, joiden ei olettaisi olevan lahjakkaita. Esimerkiksi dysleksiaoppilaat voivat olla hyvinkin lahjakkaita jollain osa-alueella. (Goodhew 2009, 9, 11.)

Lahjakkuutta voi mitata älykkyystestein. Goodhew (2009, 1) kertoo älykkyystestien määrittelemän lahjakkuuden vaihtelevan hieman testistä riippuen ja hän luokittelee oppilaan lahjakkaaksi, jos älykkyysosamäärä on yli 130. Dean (2006) korostaakin, että oppilas, jonka älykkyysosamäärä on 130 tai enemmän, tarvitsee jo erityistä huomiota. Usein taas oppilaalla, jonka älykkyysosamäärä on yli 140, on todella harvinaisia kykyjä. (Dean 2006, 46.) Uusikylä (2000, 40) huomauttaa, että älykkyystestit eivät saa kuitenkaan olla ainoa peruste lahjakkuuden tunnistamiseksi. On muistettava, että kaikki lahjakkuus ei ilmene älykkyystesteissä. Varsinkin oppilaat, joilla on hyvin erikoisia lahjakkuuksia, jäävät usein huomaamatta, koska älykkyystestit koskevat vain tiettyjä lahjakkuuden muotoja. Lisäksi oppilaat, joilla on poikkeuksellista lahjakkuutta, saattavat kyllästyä nopeasti testin tekemiseen. Tällöin he eivät jaksa panostaa testiin täysillä ja osa lahjakkuudesta jää huomaamatta. (Goodhew 2009, 1, 10.) Dean (2006, 46) ja Goodhew (2009, 10) tuovat molemmat esille myös etniseltä taustaltaan erilaiset oppilaat. On tärkeää huomata, että älykkyystestit saattavat olla vaikeampia eri kulttuureista tuleville oppilaille. Jos oppilas on muuttanut juuri uuteen maahan ja oppinut puhumaan tai lukemaan vasta äskettäin sen maan kieltä, ei voida olettaa, että älykkyystestin tulos vastaisi täysin todellisuutta. (Dean 2006, 46). Tällöin oppilas ei voi suoriutua testistä täysin omien kykyjensä mukaisesti, koska oppilaan energia menee testin kielen ja kulttuuristen painotusten ymmärtämiseen.

Uusikylä (1998) on jaotellut lahjakkaat oppilaat kolmeen ryhmään: luova kapinallinen, sopeutuva itsensä toteuttaja sekä vetäytyvä alisuoriutuja. Luovaa kapinallista ei koulunkäynti kiinnosta eikä motivaatiota löydy. Tällainen ihminen on omaperäinen, rohkea ja luova. Luova kapinallinen saattaa helposti pettyä kouluun, kasvattajiin, perheeseen ja tovereihin. Kapinallisuus johtuu monesta eri asiasta, esimerkiksi ymmärtämättömyydestä, pettymyksestä tai epävarmuudesta. Kapinallinen testaa lähipiiriään, ja jos hän vakuuttuu muiden aidosta välittämisestä, hän alkaa toteuttaa itseään ilman kapinointia. Sopeutuva itsensä toteuttaja on yleensä tasapainoinen ja itseensä luottava. Jos lahjakkuus ja terve minäkuvat yhdistyvät, yksilöllä on erittäin hyvät mahdollisuudet kasvaa tehokkaaksi ja aidoksi ihmiseksi. Joskus kuitenkin osa sopeutujista ahdistuu suurten vaatimusten paineessa ja he kieltävät luovuutensa. Syömishäiriöt ovat usein sopeutuvien, riippuvaisten ja tunnollisten ihmisten sairauksia. Vetäytyvällä alisuoriutujalla taas olisi älykkyytensä vuoksi hyvät mahdollisuudet menestyä koulussa, mutta tällainen oppilas usein vetäytyy, koska koulu ei kiinnosta eikä palkitse riittävästi. Vetäytymiseen saattaa johtaa myös se, että oppilas ei tahdo kilpailla muiden kanssa. Uusikylä kuitenkin huomauttaa, että on todella vaikeaa arvioida, onko joku kykyihinsä nähden alisuoriutuja vai ei. (Uusikylä 1998, 73–76.)

2.1.2 Gardnerin lahjakkuusteoria

Yksi kuuluisimmista lahjakkuusteorioista on Gardnerin (1983) moniulotteinen lahjakkuusmalli (Mäkelä 2009, 4). Siinä ajatellaan, että älykkyyttä on monenlaista. Gardner on jakanut älykkyyden seitsemään lahjakkuuteen eli intelligenssiin. (Gardner 1983.) Intelligenssit ovat Uusikylän (2000) suomennoksen mukaan lingvistinen, loogis-matemaattinen, spatiaalinen, kehollis-kinesteettinen, musikaalinen, intrapersoonallinen eli kyky ymmärtää itseä sekä interpersoonallinen eli kyky ymmärtää muita ihmisiä. (Uusikylä 2000, 66.) Seuraavaksi kerron jokaisesta intelligenssistä hieman enemmän.

Lingvistinen eli kielellinen lahjakkuus voidaan jakaa eri osa-alueisiin, esimerkiksi kirjalliseen ja suulliseen ilmaisuun sekä luetun ymmärtämiseen. Kielellinen lahjakkuus ilmenee usein jo lapsena esimerkiksi taitona kertoa johdonmukaisia, rikkaita tarinoita. Loogis-matemaattisen lahjakkuuden voi jakaa esimerkiksi deduktiiviseen ja induktiiviseen päättelyyn sekä laskutaitoon. Jo lapsena tämä lahjakkuus ilmenee hyvänä laskutaitona. Spatiaalinen lahjakkuus eli avaruudellinen hahmotuskyky ei ole yhtä arvostettua länsimaisessa kulttuurissa kuin kielellinen ja loogis-matemaattinen lahjakkuus, vaikka se onkin tärkeä tekijä monessa ammatissa, esimerkiksi arkkitehtinä, insinöörinä ja mekaanikkona. Lapsella spatiaalinen lahjakkuus ilmenee kykynä rakennella palapelejä ja ratkaista erilaisia rakentelutehtäviä. Kehollis-kinesteettinen intelligenssi on kyvykkyyttä käyttää omaa kehoaan jonkin tehtävän suorittamiseen. Lapsilla tämä ilmenee leikki-iässä hyvänä urheilukykynä sekä liikunnan luonnollisuutena. (Uusikylä 2000, 67–68.)

Musikaalinen intelligenssi voidaan jakaa eri osiin, kuten kykyyn erottaa musiikista eri teemoja, herkkyyteen havaita erilaisia rytmejä tai kykyyn esittää tai säveltää musiikkia (Uusikylä 2000, 68). Gardner (1983, 99) toteaa, että mikään muu kyky ei ilmene niin aikaisin lapsella kuin musikaalinen intelligenssi. Musikaalisesti lahjakkaat lapset ovat hyvin varhain kiinnostuneita musiikista ja osaavat jo nuorena soittaa tai laulaa. Interpersoonallinen lahjakkuus tarkoittaa kykyä ymmärtää muita ihmisiä, heidän motiivejaan, toimiaan sekä kykyä toimia yhteistyössä muiden ihmisten kanssa. Lapsilla interpersoonallinen lahjakkuus ilmenee kykynä johtaa muita oppilaita ja organisoida luokan toimintaa. He myös ymmärtävät herkästi muiden ihmisten tarpeita ja tunteita. Intrapersoonallisella lahjakkuudella taas tarkoitetaan ihmisen kykyä ymmärtää itseään. Ihminen on tietoinen omista älyllisistä vahvuuksistaan ja heikkouksistaan sekä ymmärtää omia tunteitaan ja toimintaansa. Tämä on myös lähtökohtana järkevälle toiminnan suunnittelulle. Intrapersoonallinen lahjakkuus ilmenee yleensä kielenkäytön, musiikin, kuvataiteiden tai muiden ilmaisumuotojen alalla. (Uusikylä 2000, 68.)

Gardner korostaa, että jokainen intelligenssi on itsenäinen, muista intelligensseistä riippumaton. Useimmiten ihmisten intelligenssiprofiilit vaihtelevat niin, että joku on heikko jollain alueella, mutta taas vastaavasti vahva jollakin toisella. Intelligenssien erillisyydellä onkin suuri merkitys, koska esimerkiksi kielellisesti tai loogis-matemaattisesti lahjakas oppilas ei ole lahjakas kaikilla seitsemällä älykkyysalueella. Eikä voida olettaa, että huonosti älykkyystesteissä menestyvä oppilas olisi heikko kaikilla alueilla. Olisikin tärkeää, että keskityttäisiin jokaisen oppilaan vahvoihin alueisiin ja kehitettäisiin koko oppilasta, eikä vain hänen heikkoja tai vahvoja puoliaan. Gardner vaatiikin, että kaikilla oppilailla pitäisi olla entistä paremmat mahdollisuudet kykyjensä kehittämiseen, eikä vain todella lahjakkailla oppilailla. (Uusikylä 2000, 68–69.)

2.1.3 Luovuus

Hyvin usein lahjakkuuteen liitetään myös luovuus (Dean 2006, 45). Luovuus on kuitenkin käsitteenä vaikeasti määriteltävissä. Gardnerin teorian mukaan luovuutta voisi verrata ihmelapsen kehittymiseen. Ihmelapsen kehittymiseen vaikuttavat hyvin monet asiat. Heitä syntyy erilaisissa ympäristöissä monien erilaisten tekijöiden vaikutuksesta ja lisäksi sattumalla on aina osuutensa ihmelapsen syntymiseen. Gardnerin mukaan olisikin osuvampaa puhua luovista yksilöistä, luovasta prosessista, luovasta työstä, luovista elämänurista sekä näiden kaikkien muodostamasta kokonaisuudesta. Jokainen luovuuden osa-alue voidaan määritellä toisistaan riippumatta, mutta järkevämpää on puhua luovuudesta kokonaisuutena, johon vaikuttaa sekä yksilö että koko yhteisö. (Uusikylä 2000, 43.)

Gardnerin mukaan luovuuteen kuuluu neljä tasoa: subpersoonallinen taso, yksilötaso, ekstrapersoonallinen taso sekä multipersoonallinen taso. Subpersoonallinen taso liittyy ihmisen biologisiin tekijöihin. Ihmisen suorituskyky kumpuaa geeniperimästä, hermosysteemin rakenteesta ja toiminnasta sekä erilaisista aineenvaihdunnallisista ja hormonaalisista tekijöistä. Uskotaan, että tulevaisuudessa tullaan saamaan enemmän tietoa luovuuden neurobiologisista perusteista. Yksilötasolla erotellaan usein erilaisia kykyjä, jotka liittyvät yksilön omaan luovuuteen. Luovuuteen liittyvät kuitenkin erilaisten kykyjen lisäksi ihmisen persoonallisuus, motivaatio ja ajattelutyylit. Kaikki nämä yhdessä vaikuttavat luovuuteen ehkä enemmän kuin mikään yksittäinen kyky. Ekstrapersoonallinen taso käsittää henkilön ulkopuoliset tekijät. Inhimilliseen suorituskykyyn liittyy myös henkilön lisäksi ulkopuolisia tekijöitä. Esimerkiksi tietynlainen tietovarasto kertyy sukupolvesta toiseen ja jollakin hetkellä jokaisella yksilöllä on vain tietty määrä tietyn alueen tietoa.

Multipersoonalliseen tasoon liittyy yksilön luomistyöhön vaikuttavat kirjat, kollegat, tutkimukset ja muut ympäristöön liittyvät asiat. Yksilön ajatukset ja ideat kumpuavat siis aina jollain tavoin ympäristöön vaikuttavista asioista. (Uusikylä 2002, 44–45.)

Luovuus voidaan lisäksi jakaa karkeasti kahteen tyyppiin: jokaisessa piilevään luovuuteen ja luovien lahjakkuuksien luovuuteen. Jokainen voi esimerkiksi toteuttaa omaa luovuuttaan harrastustensa kautta, mutta jos jokin luova prosessi tuottaa jonkin arvokkaan tuloksen, esimerkiksi keksinnön, on kyse tällöin luovan lahjakkuuden saavutuksesta. (Uusikylä 2000, 78.) Luovuuden ja älykkyyden välillä on myös tärkeä yhteys. Nämä ominaisuudet ovat useimmilla aloilla melko riippumattomia toisistaan, mutta jos ihmisen älykkyys on keskitasoa, hän voi olla yhtä luova kuin huippuälykäskin. Joskus kuitenkin korkea älykkyys saattaa estää luovuuden. Luovuus estyy, koska älykäs etsii yleensä vain yhtä ainoaa oikeaa ratkaisua ongelmiin, kun taas luovuus edellyttäisi antautumista ja monien vaihtoehtojen tarkastelua. Luovalle henkilölle tyypillisiä ominaisuuksia ovat muun muassa itsenäisyys, riippumattomuus toisten mielipiteistä, itsevarmuus ja dominoivuus, energisyys, kiinnostuneisuus monista asioista, hyvä ongelmanratkaisukyky sekä hellittämättömyys. (Uusikylä 2002, 45–47.)

Tärkeintä luovuuden kehittymisen kannalta on, että koulussa ja kotona tuettaisiin luovuutta ja annettaisiin jokaisen löytää luovuutensa itsensä toteuttamisen avulla. Luovuutta voidaan edistää kehittämällä ongelmanratkaisutaitoja ja opettamalla tunneherkkyyttä, mutta näiden vaikutus on melko vähäinen luovuutta tukevan tai tukahduttavan kasvu- ja elinympäristön rinnalla. Kouluissa on monia tapoja, jotka huomaamatta saattavat estää oppilaan oman luovuuden käytön. Esimerkiksi on tärkeää muistaa, että luova prosessi lähtee ongelmien löytämisestä. (Uusikylä 2002, 47–53.) Kouluissa kuitenkin keskitytään hyvin usein valmiiden ongelmien yhden ainoan oikean ratkaisun löytämiseen ja tällöin on vaarana, että älykäskään oppilas ei kehity luovasti ajattelevaksi ongelmanratkaisijaksi (Uusikylä 1998, 73; 2002, 47). Olisikin parempi, jos oppilas saisi itse löytää ongelman ja menetelmät sen ratkaisemiseksi. Koulun tulosvastuun, kilpailun, suoristuskeskeisyyden ja arvostelun ilmapiiri saattaa tappaa hyvin nopeasti monen oppilaan luovuuden. Opetuksen pitäisikin keskittyä enemmän opiskeluun ja oppimiseen kuin testaamiseen ja luokitteluun, jotta oppilaat voisivat edistää omaa luovuuttaan. Opettajien pitäisi antaa oppilaille vapautta suorittaa koulutehtäviä, kannustaa heitä luovuuteen, käyttää opetuksessa hyväksi oppilaiden harrastuksia ja mielenkiinnon kohteita sekä antaa oppilaiden harjaannuttaa omia luovia taitojaan. (Uusikylä 2002, 47–53.)

2.2 Matemaattinen lahjakkuus

Matemaattista lahjakkuutta on yritetty määritellä jo pitkän aikaa, mutta tähänkään mennessä siitä ei ole yleisesti tyydyttävää määritelmää (Ruokamo 2000, 18). Jo vuonna 1976 Krutetskii on jaotellut tutkimustensa perusteella matemaattiseen ongelmanratkaisuun tarvittavan matemaattisen lahjakkuuden neljään määritelmään. Ensimmäinen määritelmä koskee oppilaan kykyä ymmärtää matemaattista informaatiota ja keskittymistä matemaattisen ongelman ytimeen. Toinen määritelmä liittyy oppilaan taitoon käsitellä ja tuottaa matemaattista informaatiota. Tähän liittyvät Krutetskiin mukaan looginen päättelykyky, numeroiden ja symbolien monipuolinen käyttö sekä nopean ja taitavan yleistyksen kyky matemaattisten suhteiden ja operaatioiden suhteen. Tähän määritelmään kuuluu myös matemaattisesti lahjakkaiden kyky oikoa tehtävien ratkaisuissa, ajattelutoimintojen joustavuus matemaattisia ongelmia ratkottaessa, lahjakkaiden tavoite pyrkiä selkeyteen, yksinkertaisuuteen ja rationaalisuuteen ratkaisuissaan sekä nopea ajatustoiminta matemaattisia ratkaisuja tehdessä. Kolmas määritelmä kuvaa matemaattisesti lahjakkaiden muita oppilaita parempaa muistia. Tästä on hyötyä etenkin ongelmien ratkaisumetodeissa, matemaattisissa todistuksissa sekä ongelmanratkaisussa. Neljäs määritelmä on oma alueensa, yleinen synteettinen määritelmä, joka keskittyy matematiikan luonteeseen. (Krutetskii 1976, 350–351.)

Pendarvis, Howley & Howley (1990) ovat lisänneet Krutetskiin määritelmään muutamia huomioita. Krutetskiin ensimmäinen määritelmä matemaattisen informaation ymmärtämisestä tarkoittaa Pendarviksen ym. mukaan nopeaa kykyä päätellä, mitä matematiikan tehtävässä kysytään, ja kuinka tehtävää kannattaa lähteä ratkaisemaan. Heidän mukaansa lahjakkaat ja erittäin lahjakkaat oppilaat ymmärtävät usein todella nopeasti, mistä tehtävässä on kysymys. Tämä edellyttää taitoa tunnistaa puuttuva informaatio sekä päättelykykyä, kuinka puuttuvan tiedon saa selvitettyä annetun informaation avulla. Toinen Krutetskiin määritelmä koski oppilaan taitoa käsitellä matemaattista informaatiota, ja kuinka lahjakkaat oppilaat oikovat ratkaisuissaan. Pendarvis ym. lisäävät, että kuitenkin täydellistä ratkaisua kysyttäessä, lahjakkaat oppilat pystyvät koko ratkaisun kaikkine vaiheineen esittämään. Toiseen määritelmään liittyvä ajattelutoimintojen joustavuus on Pendarviksen ym. mukaan välttämätöntä erilaisten ratkaisuvaihtoehtojen etsimisessä. Lahjakkaat oppilaat löytävät usein monia ratkaisuja tehtäviin, kun taas tavallisilla lapsilla on ongelmia löytää edes yksi ratkaisu. Lahjakkaat kykenevätkin näkemään esimerkiksi matemaattiset kaavat paljon laajemmin kuin tavalliset oppilaat ja pystyvät muokkaamaan niitä ongelman mukaisesti. (Pendarvis ym. 1990, 171–173.)

Matemaattisen lahjakkuuden sijaan monissa tutkimuksissa on käytetty matemaattisen kyvykkyyden käsitettä. On tärkeää tehdä selvä ero tavallisen koulukyvykkyyden ja luovan matemaattisen kyvykkyyden välillä. Koulukyvykkyydellä tarkoitetaan matematiikan opiskelussa kykyä oppia ja hallita matemaattista informaatiota ja tietojen ja taitojen nopeaa ja menestyksellistä hallintaa. Luova tieteellinen matemaattinen kyvykkyys taas on kyvykkyyttä tieteelliseen matemaattiseen toimintaan, joka tuottaa uusia tuloksia ja saavutuksia, jotka ovat merkittäviä jopa koko ihmiskunnalle. (Ruokamo 2000, 18.)

2.3 Lahjakkaiden tunnistaminen

Millainen lahjakas oppilas on? Kuinka opettajat voivat erottaa erityislahjakkaan oppilaan ja tavallisen ahkeran oppilaan toisistaan? Lahjakkaiden tunnistaminen ei ole ikinä ollut mikään tietty tieteenala, eikä tule olemaankaan, mutta silti lahjakkaiden tunnistamiseen on syytä paneutua kunnolla (Goodhew 2009, 8). Lahjakkaiden oppilaiden tunnistaminen on erityisen tärkeää, koska sitä ennen heille ei voida tarjota erillisiä opetusohjelmia (Dean 2006, 45; Goodhew 2009, 9).

Opettaja voi saada oppilaan vanhemmilta paljon tietoa oppilaan mahdollisesta lahjakkuudesta. Kouluun tullessaan oppilas ehkä lukee jo yksinkertaista tekstiä, on oppinut kirjoittamaan oman nimensä, on hyvin kiinnostunut erilaisista kirjoista tai on muuten paljon kehittyneemmän oloinen kaikkine kykyineen ja kiinnostuksen kohteineen kuin muut hänen ikäisensä. Kaikenikäisten mahdollisesti lahjakkaiden oppilaiden vanhemmilta kannattaa kysellä lisäksi oppilaan lapsuudesta ja kotioloista, jotka myös vaikuttavat oppilaan lahjakkuuteen. Milloin oppilas oppi puhumaan? Oppiko oppilas lukemaan jo paljon ennen koulun alkua? Onko oppilas osoittanut erityistä lahjakkuutta tai kiinnostusta jotain asiaa kohtaan? Mitä oppilas tekee kotona vapaa-aikanaan? Onko perheessä muita lahjakkaita ihmisiä? On hyvin tärkeää tehdä yhteistyötä oppilaan vanhempien kanssa. (Dean 2006, 45.)

Nykyisin lahjakkaiden tunnistaminen on muuttunut monimenetelmälliseksi tunnistamisprosessiksi, jossa keskeisenä pidetään oppilaan potentiaalisen ja todellisen suoritustason ja käyttäytymispiirteiden arviointia. Lisäksi älykkyystestejä saatetaan pitää osana tätä tunnistamisprosessia, mutta yhä useammin tunnistaminen perustuu opettajien tekemiin arviointeihin oppilaan tehtävien prosessoinnista, tuotoksista ja piirteistä. Arvioinnin tukena voidaan pitää myös huoltajien ja vertaisten arviointeja sekä itsearviointeja. Missään tapauksessa lahjakkaiden tunnistamisessa ei kannata turvautua pelkästään koulumenestykseen, vaikka se usein saattaakin antaa vihjeitä lahjakkuudesta. Hyviä arvosanoja voi kuitenkin saada ilman erityistä lahjakkuuttakin. (Lehtonen 1994, 21.)

Lahjakkuuden tunnistamisprosessi ei tule ikinä valmiiksi, vaan oppilaan lahjakkuuden arvioinnin täytyy olla jatkuvaa. Arvioinnin päivittäminen kerran vuodessa ei ole riittävää.

Lahjakkuuden tunnistamisen täytyy olla laaja-alaista, jotta kaikenlainen lahjakkuus tulee huomioitua. Tieto oppilaan lahjakkuudesta täytyy välittyä koko kouluun, jotta kaikki opettajat ovat tietoisia oppilaan kyvykkyydestä. Myös oppilaan myöhempien koulujen täytyy saada tietää oppilaan lahjakkuudesta, joten informaation täytyisikin siirtyä oppilaan mukana uuteen kouluun. Oppilaan vanhempien sekä harrastustoiminnan ohjaajien, esimerkiksi urheilujoukkueen valmentajien, täytyy olla myös osana oppilaan lahjakkuuden tunnistamisprosessia. (Goodhew 2009, 12.)

Oppilaan lahjakkuuden tunnistamisessa voidaan käyttää esimerkiksi standardisoituja koulusaavutustestejä, ryhmä-älykkyystestejä tai älykkyyden yksilötestejä. Standardisoitujen koulusaavutustestien avulla opettaja saa selville, kuinka oppilas suoriutuu eri oppiaineissa samanikäisiin oppilaisiin verrattuna. Koulusaavutustestit toimivat kuitenkin myös yhtenä lahjakkuuden arviointimenetelmänä, mutta on tärkeää huomata, että nämä testit paljastavat vain hyviin koulusaavutuksiin pystyvät lapset ja monet muut lahjakkuuden alueet jäävät valitettavasti huomiotta. On myös muistettava, että koulusaavutustestit eivät tuo ilmi emotionaalisia häiriöitä, perheen ongelmia, huonoja opiskelutapoja eikä monia muita tekijöitä, jotka vaikuttavat lapsen oppimiseen koulussa. Ryhmä-älykkyystestit taas ovat suuren ryhmän lahjakkaiden seulontamenetelmänä käyttökelpoisia ja taloudellisia. Heikkoutena yksilötesteihin verrattuna on, että nämä eivät ole yhtä luotettavia. Lukivaikeudet, motivaatio- ja emotionaaliset ongelmat sekä keskittymisvaikeudet heikentävät tulosten luotettavaa arviointia. Älykkyyden yksilötestit antavat kaikkein luotettavimman tiedon siitä, kuinka lahjakas tietty oppilas on, ja lisäksi saadaan selville millä alueella lahjakkuus ilmenee. Yksilötestitulos on tarkka eikä oppilaan mahdolliset kielelliset vaikeudet vaikuta tuloksiin. Koulussa lahjakkaiden seulontaan nämä testit eivät kuitenkaan sovi, koska käyttäjäksi tarvitaan ammattitaitoinen psykologi. (Lehtonen 1994, 22–24.)

On muistettava, että monet testit ovat hyvin kulttuurisidonnaisia. Amerikkalaiseen koulumaailmaan luodut testit eivät välttämättä sovellu yhtä hyvin muunmaalaisten oppilaiden testaamiseen. Useimmissa maissa onkin käytössä omat testit lahjakkuuden mittaamiseen. (Ruokamo 2000, 25.) Lahjakkaiden tunnistaminen on ongelmallista kaikille kasvattajille. Tutkimukset osoittavat, että opettajat tunnistavat lahjakkaita oppilaita huonosti. (Dean 2006, 46; Lehtonen 1994, 24.) Jo opettajankoulutuksessa käydään valitettavan vähän läpi lahjakkaiden opetukseen liittyviä erityisiä näkökohtia (Lehtonen 1994, 24–25; Ruokamo 2000, 18). Männistö (2013) huomauttaa, että varsinkin kokematon opettaja tunnistaa erityislahjakkuuksia huonosti. Vastavalmistunut ei ole vielä oppinut huomaamaan lahjakkaan kykyjä, koska lahjakas oppilas ei aina osoita innostusta ja kiinnostusta matematiikan tunnilla. Kokeneemmille opettajille lahjakkaiden tunnistaminen ei tuota niin suuria vaikeuksia. (Männistö 2013.) Opettajat saattavat tunnistaa osan lahjakkaista oppilaista, mutta tekevät kuitenkin paljon ali- ja yliarviointeja. Opettajat oppivat tunnistamaan oppilaidensa lahjakkuutta paremmin, jos heitä koulutetaan ja ohjataan lahjakkaiden tunnistamiseen. Opettajat tarvitsevat lisäkoulutusta tutustuakseen lahjakkuuden monipuolisuuteen ja erilaisiin lahjakkuusteorioihin. (Lehtonen 1994, 24–25.)

2.4 Lahjakkaiden opetus

Pitäisikö kaikkien oppilaiden saada sama koulutus? Jos asia on näin, silloin lahjakkaiden opetukseen panostamisen voisi hylätä, koska lahjakkaat oppilaat kuitenkin oppivat nopeammin ja suoriutuvat tehtävistä paremmin kuin muut oppilaat ja menestyvät todennäköisesti hyvin. Tällöin pitäisi keskittyä niihin, jotka eivät pysy opetuksessa mukana. Todellisuudessa jokaisen lapsen tulisi kuitenkin saada kykyjensä mukaista, tarpeeksi haastavaa ja kiinnostavaa opetusta, ja tällöin myös lahjakkaiden opetukseen olisi panostettava. Kylmäoja (2001, 29) korostaa, että valitettavasti usein lahjakkaiden oppilaiden eriyttäminen koetaan vaikeammaksi kuin heikkojen, ja opettaja saattaa kokea omat kykynsä vajaiksi, kun oppilas osaa enemmän kuin opettaja itse. Tähän Dean (2006, 46) lisää, että yleensä myös luokanopettaja on liian kiireinen huolehtiakseen lahjakkaiden opetuksen rikastamisesta oppimisvaikeuksista kärsivien oppilaiden lisäksi, kun huolehdittavana on myös opetussuunnitelman tavoitteiden täyttyminen.

Kun lapsen älykkyysosamäärä on suuri, huomataan, että oppilas ei ehkä älynsä vuoksi kykene seuraamaan normaaliopetusta. Tämä parin prosentin joukko tarvitsee siis ehdottomasti erityisopetusta. Lahjakkaita oppilaita on kehitettävä monipuolisesti, ei vain älyllisesti, vaan myös sosiaalisesti, eettisesti ja emotionaalisesti. (Uusikylä 1992, 145; 2000, 166.) Kaikkein lahjakkaimmat oppilaat eivät saa kuitenkaan riittävän haasteellista ja yksilöllistä opetusta. Laaksola (2007, 5) toteaa tärkeän asian eli on muistettava, että peruskoulun tarkoituksena on antaa kaikille oppilaille samat mahdollisuudet.

Lahjakkaiden erityisopetukseen panostetaan entistä enemmän. Lahjakkaiden opetuksessa tulisi syventää ja laajentaa oppilaiden tietoja ja taitoja sekä opettaa ongelmanratkaisua. Ruokamo (2000) toteaakin, että lahjakkaita varten on kehitettävä riittävän vaativia oppimateriaaleja sisältäviä oppimisympäristöjä, joiden avulla oppijakeskeistä oppimista pystyisi toteuttamaan. Tiukkoja luokittaisia oppimääriä pitäisi myös noudattaa joustavammin, jotta lahjakkailla olisi mahdollisuus omatahtiseen etenemiseen ja henkilökohtaisten opintosuunnitelmien toteuttamiseen. Lahjakkaiden opetukseen on sovellettu monia erilaisia malleja. (Ruokamo 2000, 14, 17.) Yleisesti lahjakkaiden opetusjärjestelyt jaetaan kolmeen ryhmään: 1) luokassa tapahtuvaan lahjakkaiden erityisopetukseen ryhmittelyn, lisämateriaalin tai nopeuttamisen avulla, 2) täysiaikaiseen erityisluokkaopetukseen ja 3) erityiskouluissa annettavaan opetukseen (Lehtonen 1994, 37; Uusikylä 1992, 147). Ruokamo (2000, 13–14) jakaa lahjakkaille annettavan opetuksen: 1) vertikaaliseen: asioiden syvällisempi käsittely opetussuunnitelman sisällä, 2) horisontaaliseen: sisältöjä myös opetussuunnitelman ulkopuolelta, 3) ryhmittelyn ja nopeuttamisen avulla tapahtuvaan opetuksen rikastamiseen sekä 4) eriyttämiseen erityisluokissa tai kouluissa.

Vertikaaliseen eriyttämiseen eli asioiden syvällisempään käsittelyyn liittyy asioiden laajempi pohdinta sekä soveltavampien tehtävien tekeminen. Horisontaalisessa eriyttämisessä asioissa mennään pidemmälle ja opetellaan opetussuunnitelmaan kuulumattomiakin asioita. Uusikylän (2000) mukaan ryhmittelyllä tarkoitetaan tapaa, jossa kootaan lahjakkaat kykyjään vastaaviin opetusryhmiin. Ryhmä voidaan muodostaa yleisälykkyyden tai erityislahjakkuuden mukaan. Ryhmittelyä voi tapahtua esimerkiksi muutaman tunnin ajan päivässä, jolloin oppilaat opiskelevat omassa ryhmässään jonkin tutkimustyyppisen projektityön parissa erillisessä huoneessa, jossa on apuna tietokoneet, paljon muuta materiaalia sekä opettaja. On huomattu, että jo alakouluikäiset osaavat tehdä lähes yliopiston seminaaritöiden tasoisia tutkimuksia. (Uusikylä 2000, 169–171.) Nopeuttaminen on myös yksi eriyttämistapa. Lahjakkaat oppilaat voivat esimerkiksi aloittaa koulunkäynnin ikätovereitaan aikaisemmin Tämä kuitenkin vaatii psykologisia ja tarvittaessa lääketieteellisiäkin selvityksiä, onko lapsella jo edellytykset suoriutua opetuksesta (Perusopetuslaki 1998, 27§). Lahjakkaita oppilaita voi eriyttää myös erityisluokissa tai jopa erityiskouluissa.

Matemaattisten erityiskykyjen huomioiminen pitäisi aloittaa jo mahdollisimman varhain, jotta lahjakkaan innostus matematiikkaa kohtaan ei ehdi sammua riittävän haastavien materiaalien tai kannustuksen puuttuessa (Ruokamo 2000, 30). Matematiikan on siis annettava myös lahjakkaalle oppilaalle mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja luotava kestävä matemaattinen pohja, jota oppilas voi hyödyntää arkipäiväisissä tilanteissa. Lahjakkaalle oppilaalle täytyy täten antaa mahdollisuus käyttää omaa osaamistaan ja luovuuttaan ratkaista tehtäviä. Ruokamo huomauttaa lisäksi, että matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden opetuksessa on huomattava, että eri oppilaat voivat tarvita hyvinkin erilaista opetusta osakseen. Nämä erot sukupuolten sisällä ovat yleensä suurempia kuin sukupuolten väliset erot. (Mt. 39.)

Suhtautuminen lahjakkaiden erityisopetukseen on vaihdellut paljon ja vaihtelee edelleen. Välillä on vaadittu lahjakkaille omia luokkia tai kouluja ja välillä taas lahjakkaiden opettamista tavallisissa luokissa. Suomessa lahjakkaita oppilaita on opetettu pääsääntöisesti yleisopetusluokissa, mutta joihinkin kouluihin on perustettu tiettyjä oppiaineita painottavia luokkia, kuten kuvaamataito-, musiikki- ja liikuntaluokkia. Lahjakkaat oppilaat tulisi kuitenkin hyväksyä erityisopetuksen piiriin ja näiden oppilaiden erityistarpeet täytyisi huomioida opetussuunnitelman laadinnassa sekä päivittäisen koulutyön tasolla. (Ruokamo 2000, 14–17.)

Dean (2006, 45) lisää vielä, että lahjakkaat tarvitsevat lisäksi mahdollisuuksia tuoda lahjakkuutensa esille sekä rohkaisua kehittää niitä. Lahjakkaille oppilaille tulisi tarjota lisäksi koulun ulkopuolisia opiskelumahdollisuuksia, kuten kerhotoimintaan osallistumista. Kokeilumielessä voitaisiin järjestää lisäksi lahjakkaiden leirejä ja erilaisia kursseja koulun ulkopuolella. (Ruokamo 2000, 17.)

2.4.1 Opettajan asema lahjakkaan opetuksessa

On olemassa monia erilaisia opetuksen eriyttämismahdollisuuksia. Eriyttämisen ongelmana on kuitenkin usein resurssien riittämättömyys ja se, käyttävätkö opettajat niitä tarpeeksi hyödyksi. (Männistö 2013; Ruokamo 2000, 39–40.) Männistö (2013) toteaa, että koulun ja opettajien käytössä olevat resurssit, kuten oppimateriaalit, välineet ja tilat, opettajan aika sekä asiantuntemus, saattavat olla syynä heikolle eriyttämiselle. Ruokamo (2000, 40) lisää vielä, että opettajia on myös aivan liian vähän suhteessa oppilasmäärään, kun luokat ovat maksimikokoisia. Tällöin resursseja ei riitä enää oppimisvaikeuksista kärsivien oppilaiden lisäksi lahjakkaiden oppilaiden huomioimiseen (Männistö 2013).

Noponen (2000) toteaa, että erityispedagogiikan kurssit ovat opettajaksi opiskelevalle erityisen tärkeitä, varsinkin tiedollisten ja taidollisten valmiuksien oppimisen kannalta. Hän kuitenkin huomauttaa, että opettajaopiskelijat ovat hyvin eriarvoisissa asemissa erityispedagogiikan opintojen suhteen yliopistosta riippuen. Erityisopetuksen liittymistä yleisopetukseen ei ole tarkasteltu tarpeeksi kaikissa luokanopettajakoulutuksissa ja vielä vähemmän opettajan pedagogisissa opinnoissa. (Noponen 2000, 13–14.) Smith (2005) toteaa, että luokanopettajat näkevät oppilaitaan joka päivä ja usein vielä koko koulupäivän ajan. Näin heillä olisi suuret mahdollisuudet kiinnittää paljon huomiota oppilaidensa opetukseen ja luoda tärkeä suhde oppilaisiinsa ja panostaa miellyttävään oppimisympäristöön. Oppimisympäristön ja oppilas-opettajasuhteen on todettu vaikuttavan huomattavasti oppilaiden omaan suoriutumiseen. (Smith 2005, 1.)

Männistö (2013) huomauttaa, että opettajan täytyy kuitenkin osata olla varovainen lahjakkaiden kanssa työskennellessä. Opettaja ei saa nostaa lahjakasta oppilasta liikaa muiden yläpuolelle, mutta silti oppilaan on saatava opettajalta erityistä huomiota. Onkin erityisen tärkeää, kuinka opettaja puhuttelee matemaattisesti lahjakasta oppilasta. (Männistö 2013.) Opettajien aito kiinnostus opetettavaa ainetta kohtaan ja tarpeeksi haastava ja mielenkiintoinen opetus kehittävätkin oppilaiden motivaatiota, uteliaisuutta, päättäväisyyttä selviytyä ongelmista sekä oppilaan kiinnostusta ainetta kohtaan (Leikin & Stanger 2011, 105).

Erityispedagogisten sisältöjen kuuluminen opettajankoulutukseen on välttämättömyys. Erityispedagogiikan lisääminen kaikkiin opettajankoulutuksen opintovaatimuksiin olisikin hyvin tärkeää. Tämä auttaisi opettajia huomioimaan oppilaita, jotka on diagnosoitu jo suuremman tahon puolesta, mutta jotka hyötyisivät silti opettajan erityispedagogiikan taidoista. Tällaisia oppilaita ovat esimerkiksi lahjakkaat ja maahanmuuttajat, jotka tuovat opettajille erilaisia pedagogisia haasteita. Yleisopettajien on myös hyvä olla tietoisia, millaista yhteistyötä he voivat tehdä erityisopettajien kanssa, esimerkiksi ennaltaehkäistä oppilaiden ongelmia tai tehdä oppilassiirtoja yleis- ja erityisopetuksen välillä. Lisäksi erityispedagogiikan nykyinen tärkeys vaatisi täydennyskoulutuksia olennaisten teemojen osalta jo opettajina toimiville. Tärkeitä teemoja olisivat ainakin menetelmät, jotka helpottavat oppilaiden ongelmien mahdollisimman varhaista havaitsemista sekä integraation toteuttamista ja siihen tarvittavia tukitoimia. Opettajan ammatilliseen pätevyyteen kuuluu kuitenkin oppilaiden yksilöllisten tarpeiden huomioonottaminen opetuksessa ja heidän kokonaisvaltainen tukeminen. (Noponen 2000, 14–17.)

2.4.2 Lahjakkaiden oppilaiden alisuoriutuminen ja elitismi

Lahjakkaiden oppilaiden keskuudessa alisuoriutuminen on hyvin yleistä. Esimerkiksi opettajien ja läheisten asettamat liian suuret paineet saattavat johtaa lahjakkaan oppilaan vastustamaan vaatimuksia ja seurauksena on alisuoriutuminen (Lehtonen 1994, 29). Joidenkin tutkimusten mukaan jopa 50 % huippuälykkäistä on koulussa alisuoriutujia (Uusikylä 2000, 151–152). Pahimmin alisuoriutuneet ovat poikia, joista osa syyttää heikosta suoriutumistasostaan ympäristön ymmärtämättömyyttä ja osa taas vain itseään (Uusikylä 1998, 73). Monet oppilaat saattavat myös piilotella taitojaan sen toivossa, etteivät tulisi kiusatuiksi. Jotkut oppilaat saattavat nimittäin olla hyvin kateellisia lahjakkaille lapsille, joten taitojen piilottelua voisi kutsua jonkinlaiseksi itsesuojeluksi (mt. 28).

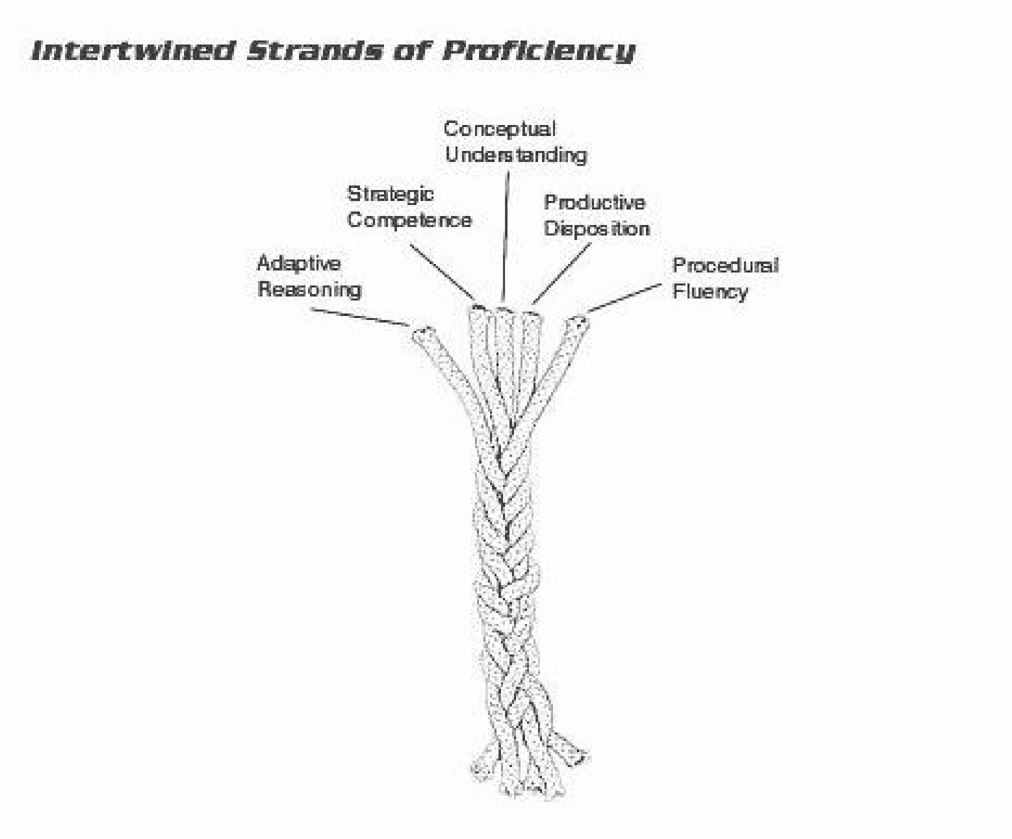
Alisuoriutumiseen pitää puuttua mahdollisimman aikaisin ja tuen täytyy olla pitkäaikaista, jotta muutosta parempaan tapahtuisi. Peruslähtökohtana on, että lapsen emotionaaliset tarpeet ja tunne-elämän tasapaino ovat tärkeimmät. Ellei lapsi hyväksy itseään sellaisenaan ja ellei hänen minäkuvansa ole tarpeeksi myönteinen ja realistinen, oppilas on alisuoriutuja, vaikka hän kuinka menestyisi ja saisi arvostusta. (Uusikylä 1992, 131–132.)

Keskustelua elitismistä taas esiintyy kaikissa maissa, joissa lahjakkaiden erityisopetus on ajankohtainen ongelma, mutta varsinkin Pohjoismaissa elitismin pelko on ollut valtavaa. Lahjakkaiden erityisopetuksen vastustajat ajattelevat, että erityisopetus tarjoaa liikaa etuoikeuksia niille, jotka kykenevät ominkin neuvoin kehittymään muiden yläpuolelle. Varsinkin älyllisesti lahjakkaiden erityisopetusta pidetään moraalisesti vääränä. (Uusikylä 1992, 143; 2000, 164.) Lahjakkaiden erityisopetuksen puolustajat taas korostavat jokaisen oppilaan oikeutta opiskella omien kykyjensä mukaisesti. Lahjakkaiden erityisluokat saattaisivat olla apuna elitismiin, koska aikaisemmin oppilaat ovat olleet luokkansa ehdottomia huippuja, mutta erityisluokalla he joutuisivat huomaamaan, että muut ovatkin täsmälleen yhtä lahjakkaita kuin he itse. Lapset sopeutuvat usein hyvin tällaiseen tilanteeseen, mutta vanhemmat saattavat siirtää lapsensa takaisin tavalliseen luokkaan, jotta he ovat taas luokkansa parhaimpia ja saavat kokea ylivertaisuutta. (Uusikylä 2000, 32, 164.)

Koulutuksellinen tasa-arvo nousee selvästi esille, kun on puhe lahjakkaiden opetuksesta. Husén on esittänyt seuraavanlaisen koulutuksen tasa-arvon kolmijaon: koulutukseen pääsyn tasa-arvoisuus, koulutusjärjestelyiden tasa-arvoisuus sekä koulutustulosten tasa-arvoisuus. Koulutukseen pääsyn tasa-arvoisuuden mukaan jokaiselle oppilaalle tulee tarjota mahdollisuus saada koulutusta haluamallaan alalla. Koulutusjärjestelyiden tasa-arvoisuudella kiinnitetään huomiota siihen, että jokainen saa opiskella omien edellytystensä mukaisesti mahdollisimman hyvissä oloissa. Koulutustulosten tasa-arvoisuudella taas korostetaan, että jokaisen oppilaan tietoja, taitoja ja asenteita kehitetään, jotta niistä yhdessä muodostuu korkeatasoinen kokonaisuus. (Uusikylä 2000, 166.)

2.5 Matemaattinen osaaminen

Matemaattiseen lahjakkuuteen liittyy oleellisena osana matemaattinen osaaminen. Aikaisemmin on ajateltu, että matemaattinen osaaminen ilmenee tehtävien nopeana ratkaisemisena ja vastausten virheettömyytenä. Kuitenkin 80- ja 90-luvulla matemaattiseen osaamiseen alettiin liittää muunkinlaisia taitoja. Nykyään matemaattinen osaaminen edellyttää muun muassa päättelyä, ongelmanratkaisua, matemaattisten ideoiden yhdistämistä ja taitoa keskustella matematiikasta muiden kanssa. (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, 115.) Matemaattisesta osaamisesta on tullut monimuotoisempaa ja on huomattu, että siihen vaikuttaa moni asia. Kaikki eivät kuitenkaan osaa matematiikkaa aivan yhtä hyvin ja matemaattista osaamista onkin monenlaista. Kilpatrick ym. (2001, 116) toteavat matematiikan osaamisen koostuvan viidestä eri asiasta. Nämä on kuvattu viideksi eri säikeeksi, jotka ovat kiertyneet toistensa ympäri muodostaen yhdessä paksun köyden. Köysi tarvitsee siis kaikki viisi säiettä ollakseen kunnollinen, vahva köysi. Köysi kuvaa matemaattista osaamista ja niin kuin köysi, myös matemaattinen osaaminen tarvitsee kaikki viisi eri pykälää, jotta oppiminen olisi sujuvaa. Kuviossa 1 on kuvattuna Kilpatrickin ym. (2001) kuvailema köysi.



KUVIO 1. Matemaattisen osaamisen köysi (Kilpatrick ym. 2001, 117).

Kuviossa 1 luetellut viisi pykälää ovat Joutsenlahden (2005, 96) suomennoksen mukaan käsitteellinen ymmärtäminen (conseptual understanding), proseduraalinen sujuvuus (procedural fluency), strateginen kompetenssi (strategic competence), mukautuva päättely (adaptive reasoning) ja yritteliäisyys (productive disposition). Pykälät eivät ole itsenäisiä, vaan kaikkia näitä tarvitaan hyvään matemaattiseen osaamiseen. Matemaattinen osaaminen koostuu siis tietämyksestä, taidoista, kyvyistä sekä uskomuksista. (Kilpatrick ym. 2001, 116.) Seuraavaksi kerron hieman enemmän jokaisesta näistä viidestä pykälästä.

Käsitteellinen ymmärtäminen viittaa matemaattisten operaatioiden ja käsitteiden osaamiseen ja niiden ymmärtämiseen. Oppilaat, jotka ovat saavuttaneet käsitteellisen ymmärtämisen vaiheen, ymmärtävät matematiikkaa syvemmin. He tietävät, miksi jokin matemaattinen idea on tärkeä ja minkälaisissa yhteyksissä sen osaamisesta on hyötyä. He osaavat myös yhdistää uuden opittavan asian jo aiemmin opittuun. He ovat hyviä muistamaan asioita, koska eivät ole opetelleet asioita ulkoa, vaan aina löytäneet jonkin yhteyden ja merkityksen opitulle asialle. Oppilaiden on helppo ratkaista uusia ongelmia ja he pystyvät hyvin selittämään, miksi jotkin asiat ovat yhteydessä toisiin. Käsitteellinen ymmärtäminen sisältää siis matematiikan ymmärtämisen sekä käsitteiden ja erilaisten ongelmien ratkaisemisen ja sisäistämisen. (Kilpatrick ym. 2001, 5, 118—119.)

Proseduraaliseen sujuvuuteen kuuluu matematiikan laskemisen sujuvuus. Oppilaiden täytyy tietää, miten ja milloin käyttää tiettyä laskutapaa ja tehdä se vielä tehokkaasti, täsmällisesti ja oikein. On tärkeää, että laskutoimitukset tehdään tehokkaasti ja oikein ja tehokkuutta ja täsmällisyyttä pystyykin kehittämään harjoittelemalla. Oppilaiden täytyy osata nopein ja tehokkain tapa ratkaista ongelma, eikä aina ruveta laskemaan laskuja käsin vaikeimman kautta. Oppilaiden on myös hyvä osata monia erilaisia tapoja laskea laskuja. Proseduraaliseen sujuvuuteen liittyy myös taito arvioida laskutoimitusten tuloksia. Tämä on tärkeää esimerkiksi kaupassa asioidessa, jotta tietää suunnilleen, paljonko ostokset maksavat. (Kilpatrick ym. 2001, 121—123.)

Strateginen kompetenssi taas tarkoittaa matemaattisten tehtävien muotoilemista, havainnoimista ja ratkaisemista. Tähän kuuluvat suoranaisesti kaikki matematiikan ongelmanratkaisuun liittyvät asiat. Koulussa matemaattiset ongelmat ovat usein selvästi määrätyssä muodossa, mutta koulun ulkopuolella lapset kohtaavat vaikeampia ongelmia. Ensin heidän on osattava muotoilla ongelma, jotta osaavat ratkaista sen. Koulussa täytyykin siis opetella myös ongelmien muodostamista yhtä paljon kuin erilaisia ongelmien ratkaisumenetelmiä. (Kilpatrick ym. 2001, 124.)

Mukautuvaan päättelyyn liittyy kaikenlainen ajatteluun ja päättelyyn liittyvä matemaattinen osaaminen, kuten looginen ajattelu, tehtävien pohtiminen sekä matemaattinen perustelu. Oppilaan täytyy osata pohtia erilaisten vaihtoehtojen eroja ja osoittaa oikeaksi valitsemansa ratkaisut. Matematiikassa mukautuva päättely on ikään kuin punainen lanka, joka pitää kaiken koossa ja ohjaa oppimista oikeaan suuntaan. (Kilpatrick ym. 2001, 5, 129.)

Köyden viimeinen säie, yritteliäisyys, tarkoittaa tapaa, jollaisena oppilas näkee matematiikan hyödyllisyyden ja merkityksellisyyden, ja minkälaisia ajatuksia yleensäkin matematiikka luo oppilaille. Jos oppilas kehittää käsitteellistä ymmärrystä, proseduraalista sujuvuutta, strategista kompetenssia ja mukautuvaa päättelyä, hänen täytyy uskoa matematiikan olevan ymmärrettävää ja hän voi oppia sitä. Yritteliäisyys muokkautuu siis muiden matemaattisen osaamisen tasojen kautta. (Kilpatrick ym. 2001, 5, 131.)

Matemaattinen osaaminen ei kuitenkaan noin vain kehity oppilailla. Se on pitkä prosessi, koska matemaattinen osaaminen kehittyy hiljalleen. Oppilaat tarvitsevat aikaa oppiakseen ja ymmärtääkseen matemaattisia laskutoimituksia. Heidän tarvitsee myös tehdä todella paljon töitä harjoitellakseen tehtäviä ja kehittääkseen ymmärrystään. Kuinka sitten matemaattista osaamista voi kehittää? On tutkittu, että parhaiten oppilaat oppivat matematiikkaa tekemällä tarpeeksi haastavia tehtäviä. Tehtävien tekemiseen täytyy käyttää älyä ja ongelmanratkaisua, jotka samalla kehittävät oppilaan matemaattisia taitoja. Scaffoldingin avulla voidaan myös auttaa oppilaita kehittämään matemaattista osaamistaan. Opettajan täytyy tukea tarpeeksi oppilaan ajattelu- ja laskemisprosessia, jotta oppilas läpäisee vaativampiakin matemaattisia ongelmia, joista ei siis ilman opettajan ohjausta selviäisi. Oppilas voi kysyä pientä vinkkiä muilta oppilailta tai opettajalta tai tehdä samankaltaisia tehtäviä, joihin on saanut apua jo aiemmin. Ajan käyttäminen on lisäksi yksi keino, jolla pitää oppilaiden mielenkiintoa yllä uuden oppimiseen. Samalla myös matemaattinen osaaminen kehittyy. Joihinkin asioihin kannattaa paneutua syvemmin ja on tärkeää keskustella koko luokan kesken matemaattisista ongelmista. Voidaan esimerkiksi keskittyä miettimään erilaisia ratkaisuja joihinkin tehtäviin. Aiempien vinkkien lisäksi on huomattu, että kotitehtävien avulla oppilaat syventävät oppimistaan ja ylläpitävät taitojaan. Se auttaa myös oppilaita orientoitumaan seuraavaan matematiikan tuntiin. (Kilpatrick ym. 2001, 135, 335–336, 352.)

Jo vuonna 1976 Wilsonin kehittämä taksonomia on myös hyvin tunnettu matemaattisen osaamisen teoria. Teoria on alun perin muodostettu oppilaan arvioimisen helpottamiseksi, mutta siitä tulee hyvin selville matemaattisen osaamisen eri alueet. Wilsonin taksonomiassa matemaattinen osaaminen on jaettu neljään eri alueeseen: laskutaitoon, ymmärtämiseen, soveltamiseen ja analysoimiseen. Laskutaitoon kuuluu terminologian tunteminen, algoritmien käyttö sekä yksinkertaisten ongelmien laskeminen. Ymmärtämiseen liittyy erilaisten periaatteiden, sääntöjen ja yleistysten muistaminen sekä ongelmien eri osien muuntaminen muodosta toiseen. Ymmärtämiseen kuuluu myös tehtävän ratkaisun järkevä eteneminen, kyky tulkita ongelmia sekä käsitteiden tietäminen. Kolmas ja neljäs määritelmä eli soveltaminen ja analysoiminen vaativat jo hieman enemmän matemaattista osaamista. Soveltaminen käsittää kyvyn ratkaista rutiiniongelmia, kyvyn vertailla sekä analysoida tietoa sekä mallien ja isomorfien käytön. Analysoimiseen liittyy kyky ratkaista ei-rutiininomaisia tehtäviä, suhteiden etsiminen, todistusten rakentaminen sekä kyky muodostaa ja vahvistaa yleistyksiä. (Wilson 1976, 645–649.)

2.6 Matemaattinen ongelmanratkaisu

Matemaattisen osaamisen ja lahjakkuuden kehittämiseen kuuluu erityisen tärkeänä matemaattinen ongelmanratkaisu. Haapasalo (2004) ja Ruokamo (2000) korostavat, että ensin on tärkeää huomata, että ongelmanratkaisu ja ongelman ratkaisu tarkoittavat eri asioita. Ongelmanratkaisu yhteen kirjoitettuna tarkoittaa koko prosessia, joka tapahtuu ratkottaessa ongelmia. Ongelman ratkaisu erikseen kirjoitettuna on taas vain yksi osa koko ongelmanratkaisuprosessista. Yleensä ongelman ratkaisulla tarkoitetaankin juuri ratkaisun esittämistä tai esitettyä ratkaisua. (Haapasalo 2004, 85; Ruokamo 2000, 44.)

Matematiikassa ongelmanratkaisu on erittäin tärkeässä asemassa. On jopa väitetty, että ongelmanratkaisu on koko matematiikan sydän (Anghileri 2005, 148). Ben-Hur (2006, 71–72) korostaa, että matemaattisten ongelmien ratkaiseminen edesauttaa kognitiivista sekä loogista ajattelua ja antaa mahdollisuuden oppia käyttämään uusia matemaattisia taitoja ja ideoita. Ongelmanratkaisutehtävien ratkaiseminen auttaa lisäksi oppilasta luottamaan omaan ajatteluunsa ja samalla kehittää oppilaan tervettä itsetuntoa (Haapasalo 2004, 85). TIMMS-tutkimukset todistavat, että matematiikan tunnit, jotka perustuvat uusien ja mielenkiintoisten ongelmien ratkaisemiseen, ovat tehokkaampia ja toimivampia kuin tunnit, joissa oppiminen perustuu ulkoaopetteluun. Ongelmanratkaisupainotteisella opetuksella saadaankin parempia tuloksia aikaan kaikenlaisten oppilaiden keskuudessa. (Ben-Hur 2006, 75.)

Ongelmanratkaisulla on monia määritelmiä, mutta yhteistä näille kaikille on, että usein ongelmanratkaisua kuvaillaan ratkaisijan ajatteluprosessiksi. Määritelmät myös usein laajentavat ongelmanratkaisun matematiikan ulkopuolelle oppiaineita yhdistäväksi näkemykseksi. (Leppäaho 2007, 42.) Ongelmanratkaisu on siis hyvin kokonaisvaltaista. Anghileri (2005) on listannut erilaisia kuvauksia, kuinka opettajat ovat määritelleet ongelmanratkaisua. Ongelmanratkaisu on muun muassa aiemmin opittujen tietojen ja taitojen käyttämistä erilaisella tavalla tuntemattomissa ja uusissa tilanteissa, matemaattisen tietämyksen hyödyntämistä ratkaistessa ja tulkitessa erilaisia ongelmia sekä taitojen muokkaamista siten, että vaadittu lopputulos saavutetaan. Ongelmanratkaisua on myös matemaattisen tiedon hyödyntäminen jokapäiväisissä arkielämän vastaantulevissa haasteissa. (Anghileri 2005, 149.) Leppäaho (2007, 44) tarkoittaa matemaattisella ongelmanratkaisulla prosessia, jossa oppilas yrittää ymmärtää ja ratkaista annettua ongelmaa, johon tarvitaan matemaattisen tiedon soveltamista. Näverin, Arayan, Pehkosen, Laineen sekä Hannulan (2013, 92) teettämän tutkimuksen mukaan suomalaisten opettajien mielestä ongelmanratkaisut tarkoittavat ”tehtäviä, joiden ratkaisua ei näe suoraan, vaan tarvitaan käsitteiden laajentamista tai uuden käsitteen muodostamista, tehtävien ollessa usein arkielämän tilanteista”.

2.6.1 Matemaattiset ongelmanratkaisutehtävät

Ongelmatehtävät voidaan jaotella monenlaisiin kategorioihin. Leppäaho (2007, 39) luokittelee ongelmatehtävät sanallisiin, numeerisiin ja geometrisiin tehtäviin. Matemaattiset sanalliset ongelmat ratkaistaan muodostamalla tilanteesta laskulauseke, apukuva tai molemmat. Numeeristen ongelmien ratkaisuun taas tarvitaan numeerista päättelyä ja geometriset ongelmat vaativat geometristen muotojen havaitsemista ja erilaisten kaavojen soveltamista. (Leppäaho 2007, 39.) Haapasalo (2004, 96) tarkastelee ongelmien luokittelemista ongelmien syntymisen ja esiintymisen suhteen, ongelmien laadun ja muodon tai ratkaisemiseen tarvittavien menetelmien mukaan.

Ongelmanratkaisutehtävät voidaan myös jaotella avoimiin ja suljettuihin tehtäviin. Tehtävät ovat avoimia, jos niiden lähtö- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritelty (Pehkonen 2011, 21). Jos matemaattisen ongelman lähtötilanne on avoin, ratkaisija joutuu tällöin itse päättämään, mitä asioita hän aikoo ongelmasta ryhtyä tutkimaan. Ongelman avoin lopputilanne taas tarkoittaa sitä, että ongelmaan on olemassa useampi kuin yksi oikea ratkaisu. (Hähkiöniemi, Leppäaho & Viholainen 2012, 31.) Tällöin ongelman lopputilanne on yleensä epämääräinen tai saattaa puuttua kokonaan (Haapasalo 2004, 96). Ratkaisuprosessin avoimuus johtaa siihen, että ongelma voidaan ratkaista usealla eri tavalla (Hähkiöniemi ym. 2012, 31). Ongelmanratkaisutehtävien ratkaisujen etsimisessä tarvitaan tietojen, säännönmukaisuuksien, lakien ja operaatioiden luovaa käyttämistä sekä ajatteluprosessin työstämistä vaihdellen eteen- ja taaksepäin (Haapasalo 2004, 96).

Avoimiksi ongelmiksi voi Pehkosen (2000, 251) mukaan kutsua tutkimustehtäviä, ongelman asettamista, löytämistä tai muotoilua, arkielämään liittyviä ongelmia, itsenäistä työskentelyä vaativia projekteja, tehtäviä, joissa ei ole kysymystä sekä ongelman variointeja ”entäpä-jos” -menetelmällä. Avoimet tehtävät antavat ratkaisijalle vapautta tehtävän ratkaisemisessa. Ratkaisijat saattavat siis päätyä ratkaisuissaan erilaisiin, mutta yhtä oikeisiin tuloksiin riippuen ratkaisuprosessissa tehdyistä erilaisista valinnoista. (Pehkonen 2011, 22.) Avoimilla tehtävillä on siis useita oikeita ratkaisuja (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 140; Leppäaho 2007, 73; Pehkonen 2011, 22).

Suljetuilla tehtävillä on puolestaan vain yksi oikea ratkaisu (Haapasalo 2004, 97; Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 140) ja Haapasalo (2004, 96) on nimennyt tällaiset tehtävät interpolaatio-ongelmiksi, joissa sekä alku- että lopputila ovat täysin määrättyjä. Suurin osa kirjojen tehtävistä on suljettuja tehtäviä (mt. 97; Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 140). Suljettujen tehtävien itsenäinen tarkistaminen tuloskirjasta onkin oppilaille paljon helpompaa kuin avointen tehtävien, joilla voi olla useita oikeita ratkaisuja. Suljetut tehtävät johtavat oppilaat helposti etsimään vain yhtä oikeaa ratkaisua tehtävään kiinnittämättä huomiota liiemmin itse ratkaisuprosessiin. Tästä saattaa seurata yksipuolisten suljettujen ja mekaanisten tehtävien ratkaisemiseen tottuminen ja tällöin matemaattista ongelmanratkaisua kehittävät tehtävät jäävät vähälle huomiolle. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 140.) Avoimien tehtävien laskeminen olisi tärkeää, sillä ne kehittävät oppilaiden metakognitiivisia ja strategisia taitoja (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 140).

Tavallinen tehtävien ratkaiseminen kuuluu kaikkiin matematiikan tunteihin, mutta valitettavasti on yleistä, että todellisten ongelmanratkaisutehtävien tekeminen on aika harvinaista (Ben-Hur 2006, 71). Portaankorva-Koivisto, Laine, Näveri sekä Salo i Nevado (2013, 96) kertovat, että vaikka opettajat arvostaisivatkin ongelmanratkaisutehtäviä, he kokevat epävarmuutta niiden teettämisessä oppilaillaan. Näverin ym. (2013, 92) mukaan Suomen alakoulujen 3. luokkalaisten opettajista 38 % kertoi teettävänsä oppilaillaan matemaattisia ongelmanratkaisutehtäviä kaikilla matematiikan tunneilla, kun taas 41 % kertoi antavansa ongelmanratkaisutehtäviä noin kerran viikossa ja 19 % satunnaisesti. Varsinkaan sanalliset ongelmanratkaisutehtävät eivät ole oppilaiden, eivätkä myöskään opettajien kovassa suosiossa. Ikävä kyllä useat opettajat eivät edes osaa erottaa tavallista tehtävien tekemistä ja ongelmanratkaisua toisistaan. Tavallinen tehtävien ratkaiseminen haastaa yleensä oppilaat vain kaavamaisesti laskemaan samantyylisiä laskuja jollakin tietyllä laskutyylillä. Ongelmanratkaisussa taas oikean vastauksen saaminen ei ole tärkeintä, vaan itse laskuprosessi. Ongelmanratkaisutehtävät saattavat myös usein liittyä tosielämään, joten niiden avulla on helppo liittää matematiikan opetus arkipäivään. (Ben-Hur 2006, 71–72.)

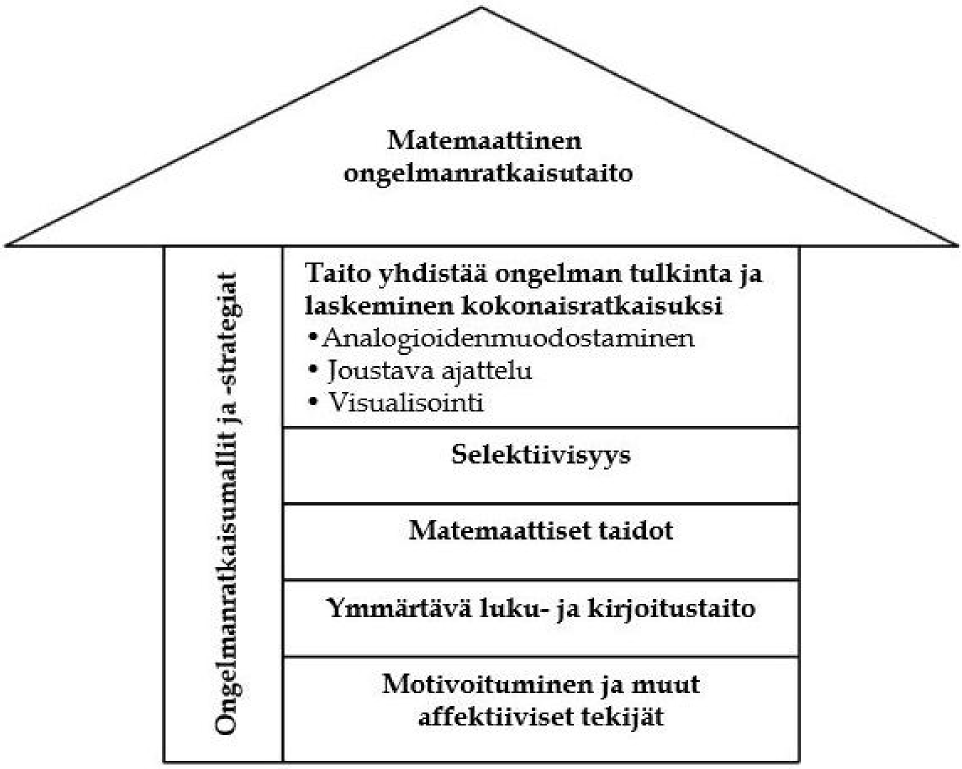
Opettajat ovat kertoneet monia syitä, mikseivät teetä oppilailla ongelmanratkaisutehtäviä. Ongelmanratkaisutehtävät ovat usein opettajien mielestä oppilaille liian vaikeita sekä joidenkin mielestä oppilaiden täytyisi tietää ennen laskemista kaikki menetelmät ja algoritmit, joita ongelmanratkaisutehtävissä tarvitaan (Ben-Hur 2006, 74; Portaankorva-Koivisto ym. 2013, 96). Muita yleisimpiä syitä ovat ajanpuute, ongelmanratkaisuille ei ole varattu tarpeeksi aikaa opetussuunnitelmissa, ongelmanratkaisutehtäviä ei kysytä kokeissa eikä niitä ole oppikirjoissa (Ben-Hur 2006, 74). Haapasalo (2011, 5) lisää vielä, että joidenkin opettajien mielestä ongelmanratkaisu kuuluu vain lahjakkaille ja nopeille laskijoille. Opettajien on ollut vaikea innostua ongelmanratkaisun opettamisesta, koska valmiiksi koottua ja suunnitelmallisesti etenevää ongelmanratkaisupakettia on hankala löytää. Käytännössä ongelmanratkaisua ei usein edes opeteta, vaan perusasiat nopeasti oppineet oppilaat ratkovat ongelmanratkaisutehtäviä itsenäisesti lähinnä lisätehtävinä. (Leppäaho 2007, 134.)

Anghilerin (2005, 150) mukaan varsinkin lasten kanssa tehtävien ongelmanratkaisujen olisi hyvä olla käytännönläheisiä, yhteistyötä vaativia sekä kaikille helposti lähestyttäviä riippumatta oppilaiden matemaattisista taidoista. Leppäaho, Silfverbeg ja Joutsenlahti (2013) ovatkin määritelleet hyvän ongelmanratkaisutehtävän. Tehtävän kuuluisi olla motivoiva sekä saada oppilas kiinnostumaan ongelman ratkaisemisesta. Ongelman itsessään täytyy olla uskottava, selkeä sekä yksiselitteinen, vaikka ratkaisuja voisi olla useampia. Oppilaan tulisi myös saada käyttää omia ongelmanratkaisutaitojaan monipuolisesti, eikä jonkin taidon puute saisi olla kokonaan ratkaisemisen esteenä. (Leppäaho ym. 2013, 73.)

Opettajilla on erilaisia tyylejä ottaa ongelmanratkaisutehtäviä opetukseen mukaan. Osa opettajista käy yhdessä oppilaiden kanssa nopeasti ongelman läpi ja antaa tietyt kaavat ja tekniikat, jotka toimivat kyseiseen ongelmaan. Näin oppilaiden on helppo pureutua ongelmaan, kun tietävät mitä tekevät. Tämä menettelytapa ei kuitenkaan anna oppilaiden kunnolla tutustua ongelmanratkaisun ytimeen itse, koska he hyppäävät ongelmanratkaisuprosessiin mukaan ikään kuin puolimatkasta. (Ben-Hur 2006, 72.) Anghiler (2005, 163) arveleekin, että opettajan tehtävä luokassa ongelmanratkaisuja tehdessä on auttaa oppilaita luomaan omia ratkaisupolkujaan, joilla saavuttaa ratkaisun tehtävään. Näin oppilas oppii itsenäisesti ratkaisemaan matemaattisia ongelmia, mutta saa silti tarvittaessa apua omalta opettajaltaan.

2.6.2 Matemaattinen ongelmanratkaisutaito

Matemaattinen ongelmanratkaisutaito voidaan kuvata yksilön kyvyksi ratkaista matemaattista soveltamista vaativia ongelmia käyttämällä monipuolisesti hyväksi erilaisia ratkaisumalleja ja strategioita (Leppäaho 2007, 50). Leppäaho (2007) on jakanut ongelmanratkaisutaidon kuuteen eri osa-alueeseen. Kuviossa 2 näkyy Leppäahon havainnollistamat taitoalueet, jotka vaikuttavat matemaattiseen ongelmanratkaisutaitoon.



KUVIO 2. Matemaattinen ongelmanratkaisutaito (Leppäaho 2007, 50).

Matemaattiseen ongelmanratkaisutaitoon liittyy kuvion 2 mukaan: 1) taito yhdistää matemaattisen ongelman tulkinta ja laskuprosessi ongelman kokonaisratkaisuksi, johon läheisesti kuuluu analogioiden muodostaminen, joustava ajattelu sekä visualisointi, 2) selektiivisyys eli valitsemisen taito, 3) matemaattiset taidot, 4) ymmärtävä luku- ja kirjoitustaito, 5) motivaatio ja muut affektiiviset tekijät sekä 8) ongelmanratkaisumallit ja -strategiat.

Matemaattisen ongelmanratkaisun opettaminen tarkoittaa oppilaan ongelmaratkaisutaitojen kehittämistä (Haapasalo 2004, 86). Matemaattista ongelmanratkaisutaitoa voidaan kehittää näitä Leppäahon (2007) luettelemia kyseisiä osa-alueita harjoittamalla sekä lisäämällä niiden hallintaa ja yhteistoimintaa. Yksilö siis on yleensä sitä taitavampi ongelmanratkaisija, mitä useampia valmiita ongelmaan sopivia ratkaisumalleja ja -strategioita hän hallitsee. (Leppäaho 2007, 50–51.)

2.6.3 Matemaattisen ongelmanratkaisun prosessit

Haapasalo (2004, 85) määrittelee ongelman tilanteeksi, joka aiheuttaa yksilön kannalta ristiriita- tai epätasapainotilan, kognitiivisen konfliktin. Tämä saa yksilössä aikaan päämäärähakuista ajattelua, joka tähtää ristiriidan poistamiseen eli ratkaisun löytämiseen. Ellei tällaista konfliktia synny, on tehtävä yleensä rutiinitehtävä. Leppäaho (2007, 38) taas pitää ongelmaa sellaisena tehtävätilanteena, jota ratkaisija ei kykene välittömästi ratkaisemaan, mutta kykenee kuitenkin saavuttamaan ratkaisun ajattelemisen ja opiskelemisen avulla. Fox ja Surtees (2010, 47) kuvaavat ongelman aidaksi, josta ei heti näe kannattaako siitä mennä ”yli vai ympäri”. Ratkaistakseen tällaisen ongelman oppilaan täytyy pohtia, millaisia strategioita kannattaa käyttää. Ongelmanratkaisu vaatii taitoa tunnistaa ja ymmärtää ongelma, keksiä ratkaisumenetelmä ongelmalle, suoriutua ongelmanratkaisusta sekä lopuksi tarkistaa ongelman ratkaisu. (Mt. 48.) Ongelmanratkaisun epälineaarisen luonteen takia ratkaisuprosessiin liittyy usein tutkimista ilman tarkkaa tavoitetta ja suunnitelmaa. Matemaattinen ongelmanratkaisu onkin lähinnä erilaisten ideoiden etsintää, tarkastelua sekä niiden soveltamista, koska ratkaisuprosessin kulkua ei ratkaisija voi etukäteen kovin tarkkaan suunnitella. (Hähkiöniemi ym. 2012, 30.)

Ongelmanratkaisuun liittyy erilaisia prosesseja, jotka laittavat ajatukset liikkeelle sekä ylläpitävät niitä (Haapasalo 2004, 85). Jo Polya (1945) on tutkinut ongelmanratkaisuprosessia. Hän kehitti tunnetun mallin, jossa ongelmanratkaisuprosessi on jaettu neljään eri vaiheeseen: ongelman ymmärtäminen, suunnitelman laatiminen, suunnitelman suorittaminen ja ratkaisun arviointi (Polya 1945, 5–6). Hähkiöniemi ym. (2012) on jakanut avoimeen ongelmaan liittyvän ongelmanratkaisuprosessin myös neljään eri vaiheeseen. Nämä vaiheet ovat ongelman rajaaminen, ratkaisun etsiminen, hypoteesin muodostaminen sekä hypoteesin perusteleminen tai sen tarkasteleminen. (Hähkiöniemi ym. 2012, 34.) Voi huomata, että vaiheet ovat hyvin samanlaisia Polyan mallin kanssa.

Hähkiöniemen ym. (2012) mallissa prosessi lähtee ongelman rajaamisesta, sillä ensin ratkaisija joutuu tekemään valintoja tutkittavan asian ja tehtävänannon suhteen, ennen kuin voi lähteä ratkaisemaan ongelmaa. Ratkaisun etsimisvaiheessa tehdään kaikki matemaattinen työskentely tehtävään liittyen ennen hypoteesin laatimista eli on aika kehittää ja kokeilla erilaisia ideoita. Hypoteesin muodostamisvaiheessa ratkaisija tekee ehdotuksen ongelman ratkaisuksi. Hypoteesin perustelemisessa ratkaisija pyrkii selittämään, miksi ratkaisu olisi hyväksyttävä ja pitääkö se paikkaansa. Tämän jälkeen yleensä ideaalinen ratkaisija palaa alkuun ja rajaa ongelman uudella tavalla ja aloittaa vaiheiden läpikäymisen alusta. Hähkiöniemen ym. neliportaista ongelmanratkaisumallia on hyvä käyttää viitekehyksenä tutkittaessa oppilaiden ongelmanratkaisuprosessia tai opettajan ohjauksen merkitystä prosessiin. Tämä malli auttaa myös opettajaa ymmärtämään ongelmanratkaisuprosesseja ja esimerkiksi teknologisten apuvälineiden merkitystä prosesseihin. (Hähkiöniemi ym. 2012, 36–42.)

Anghileri (2005) on koonnut neljän vaiheen sijasta kolme selkeää vaihetta, joiden avulla voidaan tehostaa oppilaiden ongelmanratkaisuprosessia. Ongelmanratkaisuprosessin ensimmäisessä vaiheessa tutustutaan ongelmaan, käsitellään sitä ja pohditaan, kuinka edetään. Täytyy harkita, millaiset tekniikat ja menetelmät ovat sopivia ja käyttökelpoisia kyseiseen ongelmaan. Tässä vaiheessa kannattaa myös miettiä aikaisempia ongelmia ja niihin toimineita menetelmiä, koska niistä saattaa olla jotain hyötyä kyseisessäkin ongelmassa. Keskimmäisessä vaiheessa pureudutaan itse ongelmaan. Nyt on aika kokeilla eri menetelmiä ja tekniikoita. Menetelmä on hyvä vaihtaa aina uuteen sitä mukaa, kun huomaa, ettei jokin niistä toimikaan ja samalla parannella menetelmiä, jotka osoittautuvat toimiviksi. Ongelma pilkotaan pieniin osiin ja analysoidaan osa kerrallaan. Nyt pieniä oivalluksia ja olettamuksia kokeillaan ja kehitetään niitä paremmiksi. Viimeisessä vaiheessa tarkistetaan ongelman ratkaisu. Tarkoituksena on käydä ratkaisu läpi vaihe vaiheelta alusta saakka ja tarkistaa, ovatko logiikka ja havainnot toimivia. Onko ratkaisun muotoilu sopiva? Esiintyykö ratkaisussa virheitä, voiko niitä korjata? (Anghileri 2005, 166–167.) Näiden vaiheiden läpikäyminen tuo ongelmanratkaisuun hyvää selkeyttä, jota varmasti monet oppilaat tarvitsevat.

Leppäaho (2007) on laatinut ratkaisukartan, jota oppilas voi käyttää apunaan ongelmia ratkoessa. Tehtävää ratkaistessa oppilaan on osattava poimia tehtävästä ratkaisun kannalta tärkeät asiat ja on ymmärrettävä ja hahmotettava tehtävä, jotta ratkaisuprosessissa pääsee etenemään. Ratkaisukartan tarkoituksena onkin tukea oppilaan matemaattisen ajattelun etenemistä. Ratkaisukartan avulla oppilas oppii kokoamaan ja kirjoittamaan ratkaisuprosessistaan muistiinpanot, joiden kautta tehtävä on mahdollista ratkaista. Ratkaisukartta koostuu: 1) tehtävässä annetuista tiedoista, 2) mahdollisesta apupiirroksesta, 3) ratkaisuyrityksistä, myös virheellisistä sekä 4) oikeasta ratkaisusta. Ratkaisukartta on siis opastajana ja oppilaan tukena ratkaisuprosessissa, mutta myös oppilaan apuna, kun hän tarkistaa ratkaisuyrityksensä vaiheita. Ratkaisukartta on hyödyllinen myös opettajalle, koska hän näkee siitä oppilaan ratkaisuprosessin. (Leppäaho 2007, 99, 103.)

Aina matemaattisen ongelman ratkaisuprosessi ei kuitenkaan etene helposti. Usein idea ei toimikaan ja joudutaan palaamaan edelliseen vaiheeseen. On myös mahdollista, että aina kaikki vaiheet eivät sisälly ratkaisuprosessiin. Esimerkiksi jo alussa ratkaisun etsimisvaihe saattaa jäädä väliin, jos ratkaisija yrittää lähteä suoraan ratkaisemaan tehtävää. (Hähkiöniemi 2012, 40–41.) Leppäaho (2007) korostaa vielä, että pelkästään ongelmanratkaisuprosessi ei kuitenkaan tuo ratkaisua ongelmaan, vaan ratkaisijan on päätettävä, millä keinolla ratkaisee ongelman. Valintapäätös tehdään ratkaisijan ennalta oppimista ongelmanratkaisustrategioista. Ongelmanratkaisustrategia on siis jo aiemmin opittu keino, joka valitaan tietyn ongelman ratkaisemiseen. Erilaisia ongelmanratkaisustrategioita voi helposti opetella erilaisten esimerkkitehtävien avulla. Kun matemaattisten ongelmien opiskelu etenee abstraktimmalle tasolle, oppilas kohtaa yhä vaativampia ongelmia. Nämä ongelmat vaativat oppilaalta enemmän ongelmanratkaisua ja tietoa, jota ei aina edes tehtävänannossa mainita. Oppilaan täytyy osata itse soveltaa ongelman aihepiiriin liittyvää tietoa ja omaksuttava ongelman ratkaisuprosessi. (Leppäaho 2007, 18, 45.)

2.6.4 Opettajan asema ongelmanratkaisussa

Avoimia ongelmia käytettäessä opettaja ei ole enää tiedon välittäjä, vaan oppilaiden opas ja auttaja sekä uusien oppimisympäristöjen suunnittelija (Pehkonen 2000, 252). Opettaja on tärkeässä roolissa, sillä hänen ohjauksellaan on suuri merkitys oppilaiden työskentelyyn avoimien ongelmien ratkaisemisessa. Opettaja voi ohjata oppilaiden työskentelyä läpi koko ongelmanratkaisuprosessin. Ohjauksen tärkeimpiä kohtia ovat siirtymiset ongelmanratkaisuprosessin vaiheesta toiseen. (Hähkiöniemi 2012, 42.) Opettaja voi omilla kysymyksillään ohjata oppilaita palaamaan esimerkiksi ongelmanratkaisuprosessin edelliseen vaiheeseen, jos näyttää siltä, että oppilaat eivät pääse etenemään (Hähkiöniemi 2012, 42; Laine, Näveri, Kankaanpää, Ahtee, Pehkonen & Hannula 2013, 85–86).

Jos oppilas vaikuttaa siltä, ettei hän ymmärrä ongelmaa, eikä pääse etenemään, Haapasalon (2004) mukaan opettajan täytyy toimia tällöin mallina. Opettajan täytyy näyttää, kuinka ongelmatilanteissa toimitaan, ja kuinka niistä selvitään. Vähitellen oppilas rohkaistuu itsekin mukaan ongelmanratkaisuun ja tällöin opettajan tehtävänä on auttaa oppilasta vain ongelmallisimmissa kohdissa. Tästä edetään hiljalleen eteenpäin opettajan jäädessä entistä enemmän taka-alalle. Optimaalinen tilanne on, että oppilaat itse löytävät uusia ongelmia ja ratkaisumenetelmiä, kun opettaja on vain ongelmatilanteisiin provosoija. (Haapasalo 2004, 87–88.) Leppäaho (2007) korostaa, että opettajan täytyy varoa antamasta liikaa neuvoja oppilaille. Opettaja saattaa sanoa epähuomiossa liian paljastavan vihjeen, jolloin oppilas ratkaisee ongelman ilman omaa pohdintaa. Usein ajanpuutteen vuoksi opettaja saattaa myös antaa oppilaalle ongelman kotitehtäväksi tai vain pyytää oppilasta yrittämään ratkaisua uudelleen neuvomatta sen enempää. Tällöin oppilas voi kokea, ettei opettaja opeta häntä, ja jos taistelu jatkuu pitkään saman ongelman parissa, saattaa oppilas ajatella epäonnistuneensa. (Leppäaho 2007, 96.)

Laine ym. (2013) korostavat opettajan oppilaille esittämien kysymysten tärkeyttä. Laine ym. (2013) ovat luokitelleet tutkimuksensa pohjalta opettajien kysymykset kuuteen eri kategoriaan: 1) tehtävänanto ja ratkaisujen merkitseminen, 2) työskentelytavat, 3) työskentelyn eteneminen, 4) perustelujen pyytäminen, 5) ajattelun syventäminen sekä 6) muut ongelmanratkaisuun liittymättömät kysymykset. Opettajien kysymykset tehtävänantoon ja ratkaisujen merkitsemiseen liittyen ovat yleisimpiä oppitunneilla. Opettaja voi kannustaa kysymystensä avulla oppilaita palaamaan esimerkiksi tehtävänantoon ja tätä kautta miettimään ratkaisua. Työskentelytapaan liittyvillä kysymyksillä opettaja voi ohjata oppilaita valitsemaan oikeanlaisia ratkaisutapoja sekä miettimään ratkaisuprosessejaan. Työskentelyn etenemiskysymyksillä opettaja kykenee hahmottamaan, missä vaiheessa ratkaisuprosessia oppilaat ovat, ja ovatko he ymmärtäneet tehtävän. Perustelujen pyytämisellä opettaja saa selville, mitä oppilaat ovat ajatelleet ratkaisuprosessin eri vaiheissa, ja kuinka he perustelevat vastauksensa. Ajattelua syventävillä kysymyksillä opettaja voi rohkaista oppilaita kokeilemaan jotain uutta ratkaisutapaa tai pohtimaan ongelmaa syvällisemmin. Kysymysten esittäminen on tärkeää, koska siten voidaan helposti ohjata ja kehittää oppilaiden ongelmanratkaisukykyjä. (Laine ym. 2013, 85–87.)

Näveri, Ahtee, Laine, Pehkonen ja Hannula (2012) toteavat, että opettajan toimenpiteiden ja opetuksen tulisi tähdätä oppilaiden ongelmanratkaisusitkeyden kehittämiseen. Oppilaiden täytyisi siis oppia yrittämään ongelmien ratkaisemista, vaikka eivät heti keksisikään oikeaa ratkaisumenetelmää. Tähän voidaan vaikuttaa esimerkiksi myönteisen ilmapiirin luomisella, oppilaiden luovuuden ja tiedollisten valmiuksien kehittämisellä ja kannustamalla oppilaita miettimään erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. (Näveri ym. 2012, 81–82.) Leppäaho (2007, 107) toteaa, että matemaattinen ongelmanratkaisutaito koostuu monesta osa-alueesta, joten opetuksen monipuolisuus on tärkeää. Haapasalo (2004, 88) korostaakin, että oppilaiden olisi hyvä saada käyttää myös teknisiä välineitä apuna ongelmanratkaisussa ja näin kokea mielenkiintoiset matemaattiset ideat ja niiden hyödyllisyys. Pari- ja ryhmätyöskentelyä kannattaa suosia, sillä näin oppilaat oppivat vähitellen puhumaan ongelmanratkaisusta ja eri ratkaisuvaihtoehdoista sekä omista ajattelumalleistaan (Haapasalo 2004, 88; Näveri ym. 2012, 84). Opettajan on tärkeää antaa oppilailleen tilaisuuksia heidän ajattelunsa kehittämiseen ja ajatustensa ilmaisemiseen. Ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen on myös eräänlainen oppimisprosessi ja opettajien täytyy tukea sitä ottaen lisäksi huomioon oppilaan lähtötason. (Näveri ym. 2012, 97.)

2.7 Matematiikan opetussuunnitelman tarkastelua ongelmanratkaisun kannalta

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004) annetut matematiikan opetuksen ohjeet pätevät myös matemaattisesti lahjakkaan oppilaan opettamiseen. Seuraavaksi tarkastelen, mitä matematiikan opetussuunnitelmassa sanotaan matemaattisen osaamisen kehittämisestä ja ongelmanratkaisusta. Käytän Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista myös lyhennelmää POPS. POPS:ssa sanotaan, että matematiikan opetuksen yhtenä tärkeimpänä tarkoituksena on tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen. Lahjakkaalle oppilaalle on siis annettava tarpeeksi haastavia tehtäviä, jotka kehittävät hänen matemaattista ajatteluaan. Myös matemaattisten käsitteiden ja yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppiminen on keskeistä. Lisäksi on tärkeää, että opetus kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua ja ohjaa häntä löytämään ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 158.)

On huomioitava, että matematiikka vaikuttaa laaja-alaisesti oppilaaseen. Se vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä sosiaaliseen vuorovaikutukseen ja tavoitteelliseen toimintaan. Matematiikan opetuksen on edettävä systemaattisesti, jotta oppilas oppii tehokkaammin ja luo kestävän pohjan matematiikan käsitteiden ja rakenteiden oppimiselle. On tärkeää käyttää konkreettisia apuvälineitä matematiikan opiskelussa ja oppia tutkien ja havainnoiden. Matematiikkaa kannattaa myös erityisesti hyödyntää mahdollisimman monissa arkipäivän tilanteissa esiin tulevien ongelmien ratkaisemisessa, joissa on mahdollista soveltaa matemaattista ajattelua ja toimintaa. Matematiikan oppimisessa on myös hyvä kiinnittää huomiota siihen, että kaikki oppilaat saavat onnistumisen kokemuksia matematiikan parissa. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 158, 161.) Kaikki oppilaat on siis otettava taidoista huolimatta huomioon ja taattava, että he saavat tarpeeksi haastavaa opetusta.

Matemaattista ajattelua sekä ongelmanratkaisukykyä korostetaan POPS:n jokaisen vuosiluokan matematiikan tavoitteissa ja hyvän osaamisen kriteereissä. Seuraavaksi tarkastelen näitä kriteereitä jokaisen vuosiluokan osalta. Vuosiluokkien 1–2 matematiikan opetuksessa yhdeksi ydintehtäväksi kerrotaan matemaattisen ajattelun kehittäminen. Tärkeää on lisäksi, että oppilas harjaantuu havainnoimaan eteen tulevia itsensä kannalta tärkeitä ja haasteellisia matemaattisia ongelmia, ja saa iloa niiden ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta. Hyvään matematiikan osaamiseen toisen luokan lopussa oppilaalta vaaditaan matemaattisten käsitteiden käyttämistä ongelmanratkaisuissa sekä ongelmien esittämistä ja selittämistä toisille oppilaille ja opettajalle. Tärkeää on myös merkitsevän informaation huomioiminen yksinkertaisissa arkipäivän ongelmissa sekä matemaattisten tietojen ja taitojen käyttäminen niitä ratkaistessa. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 158–160.)

Vuosiluokilla 3–5 yhtenä ydintehtävänä matematiikassa korostetaan edelleen matemaattisen ajattelun kehittymistä ja lisäksi nyt pohjustetaan matemaattisten ajattelumallien oppimista. Tavoitteisiin kuuluu peruslaskutaitojen oppiminen sekä matemaattisten ongelmien ratkaiseminen. Oppilaan hyvään matematiikan osaamiseen liittyy 5. luokan päättyessä matematiikan käsitteiden hyvä ymmärtäminen ja niiden käyttäminen matemaattisissa ongelmanratkaisuissa. Oppilaan täytyy lisäksi osata esittää matemaattisia ongelmia uudessa muodossa. Esimerkiksi oppilaan täytyy pystyä tulkitsemaan kuvia, tekstejä tai tapahtumia ja niiden pohjalta osata tehdä suunnitelma ongelman ratkaisemiseksi. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 160–162.)

Vuosiluokkien 6–9 oppilaiden perusvalmiuksiin kuuluu POPS:n mukaan arkipäivän matemaattisten ongelmien mallintaminen sekä matemaattisten ajattelumallien oppiminen ja muistaminen. Yhtenä tavoitteena on edelleen, että oppilas oppii erilaisia laskutekniikoita ja ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Päättöarvioinnissa arvosanan kahdeksan saamisen kriteerinä on muun muassa yksinkertaisen tekstimuodossa olevan ongelman muuttaminen matemaattiseen muotoon sekä suunnitelman tekeminen, joka johtaa ongelman ratkaisemiseen. Tärkeänä pidetään myös, että oppilas osaa käyttää verrantoa, prosenttilaskua sekä muita laskutoimituksia arkipäiväisten ongelmien ratkaisemisessa. Oppilaan täytyy lisäksi osata muodostaa yksinkertaisesta arkipäivän ongelmasta yhtälö ja ratkaista se päättelemällä tai algebrallisesti. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 163–166.)

Jo siis Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa korostetaan oppilaan matemaattisen ajattelun kehittämistä ja matemaattisten ongelmien ratkaisemisen tärkeyttä. Nämä asiat kulkevat matematiikan tunneilla mukana jo alkuopetuksesta lähtien läpi koko peruskoulun. Matemaattinen ongelmanratkaisu pitäisi siis olla hyvin tärkeänä osana kaikkia matematiikan tunteja, jotta POPS:n vaatimukset toteutuisivat. Ikävä kyllä todellisuus on usein eri, niin kuin jo aiemmin mainitsin, että matemaattisten ongelmanratkaisujen tekeminen saattaa olla aika harvinaistakin matematiikan oppitunneilla (Ben-Hur 2006, 71). Harri, Sironen, Hähkiöniemi ja Viiri (2012, 13) kuitenkin toteavat, että opetusta pyritään koko ajan uudistamaan, jotta matemaattinen ongelmanratkaisu olisi aktiivisemmassa käytössä.

2.8 Matematiikan oppimateriaali

Tässä luvussa tarkastelen matematiikan oppimateriaalia ja sen merkitystä nykyisessä koulumaailmassa. Yleisesti oppimateriaaliksi voidaan kutsua oppikirjaa, tehtäväkirjaa, opettajan materiaalia tai muuta oheismateriaalia, esimerkiksi verkkopohjaisia oppimisympäristöjä, videoita, cd-romeja ynnä muita sellaisia. Oppimateriaalien täytyy sisältää oppiainesta ja ne on tehty opetustarkoituksiin. Oppimateriaali ja varsinkin oppikirja on hyvin näkyvästi esillä suomalaisessa kouluopetuksessa. Oppimateriaaleista vanhin ja tärkein onkin oppikirja. Oppikirjat ja niiden harjoitus- ja tehtäväkirjat liittyvät aina Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteisiin. Aiemmin Kouluhallitus erikseen tarkasti jokaisen oppikirjan ennen painoon menemistä, jotta niiden sisältö varmasti vastasi kulloinkin vallitsevia opetussuunnitelmia. Vuonna 1990 tästä menettelystä kuitenkin luovuttiin. (Heinonen 2005, 29–30, 34.)

Oppimateriaaleihin kohdistetaan paljon erilaisia toiveita ja odotuksia. Niiden pitäisi vaalia tiettyjä arvoja, noudattaa perinteitä ja kestää opetuksessa, multa silti oppimateriaalien halutaan olevan ajankohtaisia, moderneja ja innoittavan uusiin näkemyksiin. Oppimateriaalien pitäisi myös motivoida ja opettaa oppilaita ja sopia sekä hitaille että nopeille oppilaille. Eniten oppimateriaalien tekemiseen vaikuttavat opettajien vaatimukset. Niiden täytyy tukea opettajien työtä ja soveltua heidän tarpeisiinsa. Hyviä oppimateriaaleja täytyy jatkuvasti kehittää, joten opetukseen soveltuvien materiaalien tekijöiden täytyy olla koko ajan hyvin tietoisia siitä, mitä koulumaailmassa ja opetuksessa tapahtuu. Tekijöiden täytyy myös tietää, miltä opetuksen tulevaisuus näyttää, ja millaisia vaatimuksia nämä muutokset aiheuttavat oppimateriaaleille. Opetushallitus voi nopeasti vaikuttaa oppimateriaaleihin. Uudet opetussuunnitelman perusteet voivat muuttaa ratkaisevasti oppimateriaaleja sekä luoda aivan uusia vaatimuksia ja tarpeita niille. Myös uudet tutkimustulokset ja yhteiskunnassa tapahtuvat muutokset jouduttavat oppimateriaalien uudistamista. Oppimateriaalien täytyy lisäksi pysyä ajan tasalla uusista teknologiauudistuksista, sillä niiden täytyy tarjota hyvät edellytykset teknologian hyödyntämiselle. (Heinonen 2005, 31, 34, 59.)

Joutsenlahti ja Vainionpää (2010, 137) toteavat, että opettajien mielestä oppimateriaali ja etenkin painettu oppimateriaali on erityisen merkitsevässä asemassa matematiikassa. Jopa 31 % opettajista ei käytä opetuksessaan ollenkaan mitään itse valmistamaansa materiaalia (Niemi 2010, 41). Mitä enemmän koulutusta opettajat ovat saaneet, sitä enemmän he myös itse valmistavat omaa materiaalia. Koulutuksen myötä ollaan siis kriittisempiä valmista materiaalia kohtaan. (Vainionpää & Joutsenlahti 2010, 157.) Joutsenlahden ja Vainionpään (2010) teettämän kyselyn mukaan opettajista (n=363) 97 % piti oppikirjaa ja 88 % opettajan opasta melko tai erittäin tärkeänä liittyen matematiikan opetukseen. Opettajan oppaat sisältävät pääosin hyviä didaktisia vihjeitä ja kuvauksia keskeisistä matemaattisista käsitteistä. Opettajat ovat tyytyväisiä opettajan oppaiden tuntiaktiviteettiehdotuksiin sekä oppikirjojen tapaan esittää käsitteitä ja sääntöjä. Opettajien mielestä oppikirjojen malliratkaisut ohjaavat hyvin oppilasta itsenäiseen ymmärrykseen perustuvaan työskentelyyn. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 138–140.)

Oppikirjojen ja opettajan oppaiden sisältö ja rakenne vaikuttavat hyvin paljon matematiikan opiskeluun. Oppikirjat ohjaavat selkeästi oppituntien rakennetta, sillä 84,7 % vastasi etenevänsä oppilaiden kanssa ”aukeama tunnissa” -periaatteella. Tämä taktiikka saattaa kuitenkin tuottaa oppilaille ja opettajille kuvan tietystä tehtäväpaketista, joka pitäisi tehdä yhden oppitunnin aikana. Heikot oppilaat saattavat kokea itsensä huonoiksi laskijoiksi, koska eivät pysy muiden mukana samassa laskutahdissa. Nopeat oppilaat taas saavat laskettavakseen lisätehtäviä, jotka löytyvät usein samasta kirjasta. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 139.) Saarinen ja Tuominen (2007) toteavat kirjasarjojen valmiskokeiden mittaavan usein suoraviivaisesti niitä tietoja ja taitoja, joita oppitunneilla on oppikirjojen eri aukeamilla käyty läpi. Ongelmanratkaisutehtäviä on valmiissa koepaketeissa vähän. (Saarinen & Tuominen 2007, 80–84.)

Myös matematiikan toimintamateriaalit on koettu opettajien keskuudessa erittäin tärkeiksi ja suurin osa opettajista käyttää niitä opetuksessaan. Yli 75 prosenttia vastaajista pitää toimintamateriaaleja erittäin tai melko tärkeänä osana opetustaan. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 138.) Tutkimuksen mukaan naisopettajat pitävät toimintamateriaaleja tärkeämpinä kuin miesopettajat. Toimintamateriaalit ovat tärkeämpiä myös niille opettajille, jotka ovat olleet pitkään saman luokan opettajina. Selityksenä tähän saattaa olla ajan myötä parantunut oppilaantuntemus, joka on muuttanut opetusta yksilöllisempään ja toimintamateriaaleja hyödyntävään suuntaan. (Vainionpää & Joutsenlahti 2010, 155.) Jopa 62 prosentilla kyselyyn vastanneista opettajista on ollut riittävästi matematiikan toimintamateriaaleja käytössään, mutta 35 % opettajista toivoi saavansa toimintamateriaaleja lisää (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 138).

Matematiikan oppimateriaalin käyttö tulee olemaan myös tulevaisuudessa tärkeässä asemassa matematiikan opetuksessa. Vaarana kuitenkin on, että opettajan oppaat ja oppikirjojen rakenneratkaisut vaikuttavat liiankin paljon opetukseen, jolloin oppimateriaali ei ole vain opettajan apuna, vaan koko matematiikan opetus perustuu oppikirjoille. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 146). Taipale (2006, 162) toteaakin, että on hyvin yleistä, että opettajat noudattavat liian kuuliaisesti opetussuunnitelmaa ja ovat oppikirjojen orjia. Joutsenlahti ja Vainionpää (2010, 146) korostavat rohkeaa rajojen rikkomista sekä erilaisten lähestymis- ja työtapojen kokeilemista matematiikan tunneilla. Oppilaita täytyisi rohkaista entistä enemmän omien näkökulmien esille tuomiseen sekä esitettyjen perusteluiden yhdessä pohtimiseen. Nämä tekisivät oppimisesta omakohtaisempaa ja ohjaisivat paremmin ongelmanratkaisun oppimiseen. Jotta tähän ideaalitilaan päästäisiin, täytyy opettajien antaa tarpeeksi tilaa oppilaiden erilaisille luoville näkemyksille. (Taipale 2006, 163.)

Kaiken kaikkiaan opettajat pitävät suomalaista matematiikan oppimateriaalia laadukkaana. Oppimateriaalin avulla oppilaat saavat hyviä tuloksia jopa kansainvälisissä matematiikan osaamisen mittauksissa, esimerkiksi PISA-tutkimuksissa. Oppilaiden käsitteellinen ymmärrys ja ongelmanratkaisutaidot eivät ole kuitenkaan tarpeeksi tyydyttävällä tasolla, mikä saattaa näkyä esimerkiksi jatko-opinnoissa. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 141, 146). Tämän takia olisikin tärkeää, että kouluissa otettaisiin huomioon myös erilaiset ongelmanratkaisutehtävät oppikirjojen tavallisten suljettujen tehtävien lisäksi.

2.9 Oppilaan matemaattinen minäkäsitys

Matematiikka on aina ollut arvostettu oppiaine koulussa. Oppilaiden mielestä matematiikassa onnistuminen on tärkeää ja he ovat enemmän huolissaan matematiikan arvosanoistaan kuin muiden aineiden. Oppiaineena matematiikka herättää voimakkaita tunteita ja se aiheuttaa usein valitettavasti myös kielteisiä kokemuksia. (Linnanmäki 2004, 241.)

On huomattu, että oppilaiden hyvä minäkäsitys ja matematiikan taidot ovat suhteessa toisiinsa. Koulunkäynnin alkuvaiheessa oppilailla on usein suhteellisen hyvä minäkäsitys. Minäkäsitys näyttää kuitenkin heikkenevän ensimmäisten kouluvuosien aikana ja eniten se heikentyy viiden ensimmäisen kouluvuoden aikana. Kun eri-ikäisten oppilaiden matemaattista minäkäsitystä on vertailtu, on huomattu, että 11-vuotiaina oppilaat eivät ajattele enää yhtä positiivisesti matematiikan taidoistaan kuin 7-vuotiaat. Yksitoistavuotiailla oppilailla käsitykset omista matemaattisista kyvyistään vastaavat tuloksia, joita he saavat kokeista. Voidaan siis päätellä, että matemaattinen minäkuva heikkenee tai tulee realistisemmaksi iän myötä. Ylemmillä luokilla matematiikan suoritusten ja matematiikkaan liittyvän minäkäsityksen välinen yhteys voimistuu. Tämä tulee hyvin esille, kun MAKEKO-kokeen (matematiikan keskeisen oppiaineksen kokeet luokille 1–9) tuloksia verrataan oppilaiden kielteiseen, neutraaliin ja myönteiseen minäkäsitykseen. Toisella luokalla ei havaittu merkitseviä eroja oppilaiden tulosten ja minäkäsityksen välillä, kun taas viidennellä luokalla ero oli merkitsevä. Kahdeksannella luokalla ero oli vielä selvempi. (Linnanmäki 2004, 244–245, 249.)

Paljon on kuultu puhuttavan siitä, kuinka oppilaiden kiinnostus matematiikkaa kohtaan vähenee alakoulun aikana. Metsämuuronen (2010) on tutkinut 3.–5. luokkalaisten oppilaiden asenteita matematiikkaa kohtaan. Oppilaat saattavat pitää matematiikkaa vielä toisella ja kolmannella luokalla äärimmäisen mielenkiintoisena oppiaineena ja ovat sitä mieltä, että selviävät vaikeistakin matemaattisista tehtävistä. Kolmen vuoden aikana jokin kuitenkin saattaa muuttua, ja oppilas voi muuttaa mielipiteensä matematiikasta aivan täysin. Matematiikka voi olla viidesluokkalaisen mielestä todella ikävää, eikä oppilas luota enää omiin matemaattisiin taitoihinsa. Tutkimuksen tuloksista näkee, että oppilaiden asenteet matematiikkaa kohtaan muuttuivat negatiivisemmiksi kolmen vuoden aikana. Sekä kokonaisasenne ainetta kohtaan, itsensä kokeminen hyväksi matematiikan osaajaksi että oppiaineesta pitäminen muuttuivat kaikki negatiivisemmiksi. (Metsämuuronen 2010, 99, 118.) Matemaattisten erityiskykyjen huomioiminen pitäisikin aloittaa jo mahdollisimman varhain, jotta lahjakkaan innostus matematiikkaa kohtaan ei ehdi sammua riittävän haastavien materiaalien tai kannustuksen puuttuessa (Ruokamo 2000, 30). Tämän takia haluan tutkia juuri neljännen luokan lisämateriaaleja ja tarkastella, kuinka ne kehittävät oppilaan matemaattista osaamista.

3 TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tutkimus kohdistuu matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttämiseen matematiikan lisämateriaaleilla. Tarkastelen lisämateriaaleja seuraavien tutkimuskysymysten avulla:

1. Kuinka paljon lisämateriaaleissa on avoimia ongelmia?
2. Millaisia tehtäviä lisämateriaaleissa on?
3. Eroavatko eri kirjasarjojen lisämateriaalit toisistaan?
4. Onko lisämateriaaleissa ongelmanratkaisutehtäviä?
5. Kuinka lisämateriaalien tehtävät kehittävät oppilaan matemaattista osaamista?

Lisämateriaalien tutkimisen lisäksi haluan saada laajemman kuvan lisämateriaaleista, niiden valmistuksesta ja käytöstä. Kysyin Laskutaito-sarjan Tuumavihkojen tekijältä, Risto Ilmavirralta, matemaattiseen lahjakkuuteen, ongelmanratkaisuun sekä lisämateriaalien valmistukseen liittyviä kysymyksiä:

1. Millainen on matemaattisesti lahjakas oppilas?
2. Millaiset tehtävät kehittävät matemaattisesti lahjakasta oppilasta?
3. Millainen on hyvä ongelmanratkaisutehtävä?
4. Minkälaiset tehtävät kehittävät ongelmanratkaisua?
5. Minkälaisista ongelmanratkaisutehtävistä oppilaat ovat pitäneet?
6. Kuinka olette tehneet ongelmanratkaisutehtävät Tuumavihkoihin? Voit esimerkiksi kertoa jonkin tietyn tehtävän valmistusprosessista.
7. Miksi ongelmanratkaisutehtäviä ei ole oikeastaan lainkaan oppilaiden oppikirjoissa? Miksi niitä on vain Tuumavihkoissa?
8. Onko mielestäsi opettajan helppo ottaa opetukseensa ongelmanratkaisutehtäviä?

Haluan myös kartoittaa opettajien käsityksiä oppilaan matemaattisesta lahjakkuudesta, heidän eriyttämisestään, ongelmanratkaisusta sekä lisämateriaalien käytöstä. Opettajilta kysyn taustatietoja varten sukupuolta, ikää, kertyneitä opetusvuosia, koulutusta sekä erikoistumisainetta (ks. liite 1). Lisäksi kysyn seuraavat kysymykset:

1. Millainen on matemaattisesti lahjakas oppilas?
2. Eriytätkö matemaattisesti lahjakasta oppilasta? Jos eriytät, miten? Jos et eriytä, miksi et?
3. Onko opettajan helppo eriyttää matemaattisesti lahjakasta oppilasta tavallisessa luokkaopetuksessa?
4. Millaiset tehtävät kehittävät matemaattisesti lahjakasta oppilasta?
5. Käytätkö opetuksessa matematiikan lisämateriaaleja nopeille oppijoille? Jos käytät, minkä kirjasarjan lisämateriaalia ja kuinka usein? Jos et käytä, miksi et?
6. Lasketteko matematiikan oppitunneilla ongelmanratkaisutehtäviä? Jos laskette, kuinka usein? Jos ette, miksi ette?
7. Millainen on hyvä ongelmanratkaisutehtävä?

Näiden tutkimuskysymysten avulla saan lisämateriaaleista monipuolisen käsityksen. Saan tietää, millaisia tehtäviä lisämateriaalit sisältävät, kuinka ne on kehitetty sekä millainen suhde opettajilla on niihin. Lisäksi saan selville, mitä matemaattisesti lahjakkaista oppilaista ajatellaan, ja kuinka heidän eriyttämisensä on toteutettu.

4 TUTKIMUSAINEISTO

Tutkimusaineistoksi valikoitui kahden eri kustantajan teoksia, jotka on tarkoitettu ylöspäin eriyttäviksi matematiikan lisämateriaaleiksi. Otavalta tutkittavaksi päätyi Tuhattaiturin Pulmat-vihko ja Sanoma Pro Oy:ltä Laskutaidon Tuumavihko ja Matikka-sarjan Timanttivihko. Tässä tutkimuksessa keskitytään neljännen vuosiluokan lisämateriaalien analysoimiseen. Aiemmin totesin jo luvussa 2.9, että oppilaiden kiinnostus matematiikkaa kohtaan hiipuu alakoulun aikana. Kriittisimmäksi ikävaiheeksi tälle lopahtamiselle voisi päätellä juuri neljännen vuosiluokan, koska Metsämuuronen (2010, 118) toteaa, että oppilaan mielestä vielä toisella ja kolmannella luokalla matematiikka saattaa olla hyvin mielenkiintoinen oppiaine, mutta viidesluokkalaisen mielestä se voikin olla todella ikävää. Myös Linnanmäki (2004, 249) korostaa oppilaan matemaattisen minäkäsityksen lopahtavan viiden ensimmäisen kouluvuoden aikana. Näistä mainitsemistani syistä johtuen päätin siis pureutua tarkemmin juuri neljännen vuosiluokan lisämateriaaleihin.

Otavan Tuhattaiturin neljännen vuosiluokan lisämateriaali jakautuu kahteen eri vihkoon eli Tuhattaiturin Pulmat 4a - ja 4b -vihkosiin. Tekijöinä molemmissa Tuhattaiturin Pulmat-vihkoissa ovat Mervi Korhonen ja Kimmo Nyrhinen. Vihkojen ensimmäisten sivujen esittelyteksteissä sanotaan, että tehtävät liittyvät löysästi Tuhattaiturin 4a - ja 4b -oppikirjojen jaksojen aihealueisiin, joten Pulmat 4a kuuluisi siis tehdä syyslukukaudella ja Pulmat 4b on kevättä varten (Korhonen & Nyrhinen 2012, 3; 2013, 3). Otavan verkkosivujen oppikirjaesittelyn mukaan Pulmat-vihkoset soveltuvat haastetta kaipaaville oppilaille ja ne on tarkoitettu ylöspäin eriyttäviksi. Tehtävien tekeminen syventää jo opittua ja edistää päättelytaitoa, ongelmanratkaisukykyä sekä havainnointia. (Otavan oppimateriaalit.) Vihkojen takakansien esittelyteksteissä kerrotaan tehtävien soveltuvan sekä yksilöharjoituksiksi että parin tai pienen ryhmän kanssa tehtäviksi. Lisäksi tekstissä kannustetaan tehtäviä tehdessä keskusteluihin ja erilaisten vaihtoehtojen pohtimiseen, koska ne johtavat lopulta yllättäviinkin ratkaisuihin. Pulmavihkon tehtävien korostetaan kehittävän loogista päättelykykyä sekä tarkkaavaisuutta. (Korhonen & Nyrhinen 2012; 2013).

Laskutaito-kirjasarja on alun perin WSOY:n kustantama, mutta nykyisin Sanoma Pro Oy:n julkaisema. Tuumavihkojen tekijöinä ovat Risto Ilmavirta sekä Tuula Uus-Leponiemi. Laskutaidon neljännen vuosiluokan Tuumavihkot on Tuhattaiturin Pulmat-vihkojen tavoin jaettu myös kahteen eri vihkoseen. Toinen on syysosa ja toinen kevätosa. Kummastakaan vihkosta ei löydy sisäsivuilta eikä takakannesta esittelytekstiä. Sanoma Pro Oy:n verkkosivuiltakaan ei löydy edes mainintaa Tuumavihkoista. Googlen kautta etsimällä hakusanalla ”Laskutaidon Tuumavihko” löytyi booky.fi-pikakirjakauppa, jossa Tuumavihkojen esittelytekstissä mainitaan vihkojen sisältävän lahjakkaita oppilaita motivoivia pulma- ja hahmotustehtäviä, jotka sopivat yksin, parin tai ryhmän kanssa puurrettaviksi (Booky.fi-pikakirjakauppa).

Sanoma Pro Oy:n kustantaman Matikka-sarjan ylöspäin eriyttävä lisämateriaali jakautuu niin ikään kahteen eri vihkoon, Timanttivihko syysosaan ja Timanttivihko kevätosaan. Näissä molemmissa vihkoissa tekijänä on Tuula Pesonen. Vihkosten takakansista löytyy esittelyteksti, jossa kerrotaan Timanttivihkon sopivan lahjakkaille ja matematiikasta kiinnostuneille oppilaille lisähaasteeksi koulussa tai kotona tehtäväksi puurteeksi. Lisäksi vihkon kerrotaan sisältävän monipuolisia ja syventäviä tehtäviä opittavista teemoista. Tehtävien todetaan myös kannustavan oppilasta luovaan ja keksivään ongelmanratkaisuun sekä parityöskentelyyn. (Pesonen 2012; 2013.) Sanoma Pro:n verkkosivuilla Timanttivihkoja kuvaillaan lisäksi oppimista syventäväksi materiaaliksi oppilaille, jotka kaipaavat pohtimista ja haasteita (Sanoma Pro:n oppimateriaalit).

Lisämateriaalien tutkimisen lisäksi lähetin sähköpostitse kyselyn Laskutaidon Tuumavihkojen tekijälle Risto Ilmavirralle. Halusin saada kartoitettua lisämateriaalien tekijän ajatuksia lisämateriaalien valmistusprosessista sekä näkökulmia liittyen matemaattiseen lahjakkuuteen ja ongelmanratkaisuun. Opettajien näkökulmaa samoihin asioihin liittyen kartoitin lähettämällä kyselyn sähköpostitse kahdelle opettajalle. Halusin saada tutkimukseeni mahdollisimman erilaiset opettajat iän, opetusvuosien sekä paikkakunnan mukaan. Opettajien valitsemiseen käytin omia suhteitani. Valitsin tutkimukseen luokanopettajan pieneltä paikkakunnalta, jolle on kertynyt jo monia opetusvuosia sekä toisen suuremmalla paikkakunnalla vasta muutaman vuoden opettajana toimineen aineenopettajan, jolla on myös luokanopettajan monialaiset opinnot suoritettuna.

5 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

5.1 Sisällönanalyysi tutkimusmenetelmänä

Tämä tutkimus on laadullinen ja tutkimusmenetelmänä toimii sisällönanalyysi. Sisällönanalyysi on perusanalyysimenetelmä ja sitä voidaan käyttää melkein kaikissa laadullisissa tutkimuksissa. Sisällönanalyysin avulla voi tehdä monenlaista tutkimusta ja sitä voidaan pitää yksittäisenä metodina tai myös väljänä teoreettisena kehyksenä. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 91.) Tämä analyysimenetelmä kuvaa tutkittavan ilmiön tiivistetyssä ja yleisessä muodossa. Sisällönanalyysi on tekstianalyysia ja se sopii hyvin myös täysin strukturoimattoman aineiston analyysiin. Aineistona voivat toimia esimerkiksi kirjat, artikkelit, päiväkirjat ja raportit eli melkein mikä tahansa kirjallisessa muodossa oleva materiaali. Sisällönanalyysi perustuu tulkintaan ja päättelyyn, joiden avulla empiirisestä aineistosta edetään kohti käsitteellisempää näkemystä. Sisällönanalyysissa voidaan erottaa kaksi toisistaan poikkeavaa analyysimenetelmää: sisällön erittely sekä sisällönanalyysi. Tässä yhteydessä sisällön erittelyllä tarkoitetaan analyysia, jossa keskitytään sisällön kvantitatiiviseen kuvaukseen ja sisällönanalyysilla taas dokumenttien kuvaamista sanallisesti. (Tuomi & Sarajärvi 2003, 105–107, 115.) Sisällönanalyysin ja sisällön erittelyn erottava kysymys onkin yksi metodikirjallisuudessa eniten puhutuimmista aiheista (Vilkka 2005, 139). Tässä tutkimuksessa keskitytään itse tekstin merkityksen sanalliseen kuvaamiseen, joten sisällön erittely ei ole tärkeää.

Aineiston analyysissa voidaan toteuttaa joko aineistolähtöistä, teoriasidonnaista tai teorialähtöistä analyysia. Tähän tutkimukseen käytettäväksi näistä parhaiten sopii aineistolähtöinen analyysi. Tässä analyysissa tutkimusaineistosta luodaan teoreettinen kokonaisuus. Analyysiyksiköt valitaan siis aineistosta tutkimuksen tarkoituksen ja tutkimustehtävien mukaisesti. Ideana on, että analyysiyksiköt eivät ole etukäteen sovittuja tai harkittuja. Analyysin toteuttamisen kannalta aikaisemmilla havainnoilla, tiedoilla tai teorioilla ei pitäisi olla merkitystä, koska analyysi on aineistolähtöistä. Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissa yhdistellään erilaisia käsitteitä ja näin saadaan aikaiseksi vastaus tutkimustehtävään. (Tuomi & Sarajärvi 2003, 97, 115.)

Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissa itse analyysivaihe voidaan karkeasti jakaa kolmeen osaan: aineiston pelkistämiseen, aineiston ryhmittelyyn sekä teoreettisten käsitteiden luomiseen.

Aineiston pelkistämisessä eli redusoinnissa analysoitavasta informaatiosta, esimerkiksi asiakirjasta tai dokumentista, karsitaan tutkimukselle epäolennainen pois. Pelkistäminen voi olla informaation tiivistämistä tai osiin pilkkomista. Aineiston pelkistämistä ohjaa tutkimustehtävä. (Tuomi & Sarajärvi 2003, 111.) Pelkistämisessä esimerkiksi auki kirjoitetusta aineistosta etsitään tutkimustehtävän mukaisia ilmaisuja, jotka voidaan alleviivata erivärisillä kynillä. Alleviivatut ilmaisut voidaan kirjoittaa aineiston sivun reunaan ja sen jälkeen listata peräkkäin eri paperille. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 109.)

Aineiston ryhmittelyssä eli klusteroinnissa aineistosta koodatut ilmaukset käydään tarkasti läpi, ja aineistosta etsitään samanlaisia ja/tai eroavia käsitteitä. Samankaltaiset käsitteet ryhmitellään ja yhdistetään luokaksi ja luokka nimetään sen sisältöä kuvaavalla käsitteellä. Luokitteluperusteena voi olla esimerkiksi tutkittavan ilmiön ominaisuus, piirre tai käsitys. Luokittelun avulla aineisto tiivistyy, kun yksittäiset tekijät sisällytetään yleisempiin käsitteisiin. (Tuomi & Sarajärvi 2003, 112–113.)

Aineiston klusteroinnin jälkeen tulee teoreettisten käsitteiden luominen eli aineiston abstrahointi. Tässä vaiheessa erotetaan tutkimuksen kannalta olennainen tieto ja tämän tiedon perusteella muodostetaan teoreettisia käsitteitä. Klusterointi on itse asiassa jo osa abstrahointiprosessia. Abstrahoinnissa eli käsitteellistämisessä empiirinen tieto liitetään teoreettisiin käsitteisiin ja tuloksissa esitetään empiirisestä aineistosta muodostettu malli, käsitejärjestelmä tai aineistoa kuvaavat teemat. Tuloksissa täytyy kuvata myös luokittelujen pohjalta muodostetut kategoriat ja niiden sisällöt. Lisäksi johtopäätösten tekemisessä tutkijan täytyy pyrkiä ymmärtämään, mitä tulokset merkitsevät tutkittavan asian kannalta. (Tuomi & Sarajärvi 2003, 114–115.)

5.2 Laadullisen aineiston kvantifiointi

Tuomi ja Sarajärvi (2009, 120) toteavat, että sisällönanalyysiä voidaan jatkaa tutkimusaineiston luokittelun ja kategorioiden muodostamisen jälkeen aineiston kvantifioinnilla. Näin laadulliseen aineistoon voidaan soveltaa myös määrällistä analyysia. Aineiston määrällinen käsittely voi olla esimerkiksi tuotosten pituuksien laskemista tai luokittelemista eri tekijöiden mukaisesti erilaisiin ryhmiin. (Eskola & Suoranta 2005, 164.) Tässä tutkimuksessa kvantifioidaan määriä, kuinka monta kertaa tietty tehtävätyyppi esiintyy lisämateriaaleissa. Aineiston analyysin perusteella muodostetun käsitejärjestelmän sekä analyysirungon avulla voidaan muodostaa matriisi ja lasketaan frekvenssit (Tuomi & Sarajärvi 2009, 120). Näin voidaan vertailla eri ryhmittelyjen vastauksia (Eskola & Suoranta 2005, 164). Aineiston kvantifioinnin avulla voidaan siis kuvata aineistoa määrällisesti. Yleisenä ongelmana on, että laadulliset aineistot ovat usein melko pieniä, joten niiden kvantifiointi ei välttämättä tuo tutkimustuloksiin lisätietoa tai erilaista näkökulmaa. On olemassa kuitenkin myös aineistoja, joissa kvantifiointi tuo merkittävää lisätietoa verrattuna vain laatujen kuvailuun. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 121–122.)

Ennen aineiston kvantifiointia ja luokittelun tekemistä on hyvä määritellä analysointisäännöt tarkasti. Laadullisen aineiston analyysin arvioitavuutta helpottaa aineiston luettelointi, tulkintaprosessien vaiheisiin pilkkominen sekä ratkaisujen ja tulkintasääntöjen nimenomaistaminen. Aineiston luokittelua helpottaa selkeiden luokittelukriteerien ja tulkintasääntöjen laatiminen. Lisäksi luokittelu kannattaa tehdä vähintään kahdesti. Ensimmäinen luokittelu kannattaa tehdä yhdellä kertaa, jotta luokittelukriteerit pysyisivät mahdollisimman samanlaisina. Olisi myös hyvä, jos joku toinenkin voisi luokitella aineiston. Näin saataisiin luokittelusta mahdollisimman yksimielistä ja selvää. (Eskola & Suoranta 2005, 165–166.)

5.3 Kysely tutkimusmenetelmänä

Yhtenä aineistonkeruumenetelmänä tutkimuksessa käytin kyselyä. Kyselylomaketutkimus kuuluu perinteisimpiin tapoihin kerätä tutkimusaineistoa. Sen käyttö on hyvin perusteltua ja sille on oma käyttötarkoituksensa. Kyselyn muoto vaihtelee tutkimuksen tarkoituksen ja tutkimusjoukon mukaan. Lisäksi aineiston keruu eroaa myös siinä, kerätäänkö aineistoa usealta henkilöltä samanaikaisesti vai tehdäänkö se yksin. (Valli 2010, 103.) Hirsjärvi, Remes ja Sajavaara (2004, 185) jakavat aineiston keruun kahteen erilaiseen kyselymuotoon: kontrolloituihin kyselyihin sekä posti- ja verkkokyselyihin, kun taas Valli (2010, 107–113) on lisännyt omaan kyselytutkimuksen jakoonsa edellisten lisäksi vielä haastattelukyselyn ja puhelinkyselyn. Tarkastelen seuraavaksi vain posti- ja verkkokyselyä, koska muut esitetyt kyselymuodot eivät sovellu tutkimukseeni.

Päädyin käyttämään tutkimuksessani sähköpostin välityksellä toteutettua kyselyä, koska koin sen kaikista nopeimmaksi ja vaivattomimmaksi itselleni sekä kyselyyn osallistuneille. Myös Hirsjärvi ym. (2004, 184–185) myöntävät kyselytutkimuksen tehokkaaksi, koska se säästää aikaa ja vaivannäköä. Posti- ja verkkokysely lähetetään tutkittaville, he itse täyttävät sen ja lähettävät takaisin tutkijalle. Tällöin kysely suoritetaan ilman kokeenjohtajaa. Esimerkiksi postin välityksellä tullut kysely voidaan täyttää kotona rauhassa. (Valli 2010, 103.) Posti- ja verkkokyselyjen haittana on kuitenkin vastausten kato, koska suurelle valikoimattomalle joukolle lähetetty lomake ei tuota kovin korkeaa vastausprosenttia (Hirsjärvi ym. 2004, 185; Valli 2010, 107). Tässä tutkimuksessa katoa ei esiintynyt, koska lähetin kyselyn sähköpostitse vain kolmelle henkilölle eli tarkasti valikoidulle joukolle. Kaikki kyselyn saaneet vastasivat kyselyyn. Valli (2010, 107) korostaa kuitenkin vielä, että postikyselystä ei myöskään aina tiedä, kuka kyselyyn on todellisuudessa vastannut.

Kyselytutkimusten etuna pidetään laajan tutkimusaineiston keräämistä. Tutkimus voidaan teettää monilla henkilöillä ja samalla kyselyllä voidaan kysyä montaa eri asiaa. Jos kyselylomake on suunniteltu huolellisesti, aineistoa on helppo ja nopea käsitellä ja analysoida (Hirsjärvi 2004, 184; Vastamäki 2010, 139) ja se säästää tutkijan myöhemmissä vaiheissa turhalta työltä. Kun lomakkeessa on vain aiheeseen liittyviä ja toimivia kysymyksiä, vastaajat ovat motivoituneita täyttämään kyselyn ja vastausten koodaaminen tietokoneelle sujuu ongelmitta. (Mt. 139.) Kyselylomakkeen suunnitteleminen lähteekin tutkimussuunnitelman tutkimustehtävistä. Tällöin tutkimussuunnitelma ja kyselylomake ovat tasapainossa ja kyselyssä keskitytään tutkimuksen kannalta tärkeimpiin asioihin. (Vilkka 2005, 84, 88.)

Kyselytutkimukseen liittyy kuitenkin myös heikkouksia. Yleensä aineistoa pidetään pinnallisena ja ei voida tietää, kuinka vakavasti vastaajat ovat suhtautuneet tutkimukseen, eli ovatko he vastanneet rehellisesti ja huolellisesti. Kysymysten väärinymmärryksiä on myös vaikea kontrolloida. Ei ole selvää, kuinka hyvin vastausvaihtoehdot ovat sopineet vastaajien näkökulmaan. (Hirsjärvi ym. 2004, 184.) Kysymysten tulee olla hyvin yksiselitteisiä, eivätkä ne saa olla johdattelevia (Valli 2010, 104). Tuomi ja Sarajärvi (2003, 75) korostavat lisäksi, että kyselytutkimuksista puuttuu haastattelun joustavuus. He toteavat, että haastattelijalla on mahdollisuus esimerkiksi toistaa kysymys, vaihtaa kysymysten järjestystä tai oikaista väärinkäsityksiä, kun taas kyselyssä kaikki saavat samanlaisen lomakkeen. Myöskään ei tiedetä, kuinka hyvin vastaajat ovat selvillä tutkittavasta asiasta. Hyvän lomakkeen tekeminen vaatii myös aikaa ja taitoa tutkijalta. Lomakkeen hyvällä laadinnalla sekä kysymysten tarkalla suunnittelulla voidaan tehostaa tutkimuksen onnistumista. (Hirsjärvi ym. 2004, 184–187.) Lomake on hyvä pitää myös sopivan pituisena, koska liian pitkä lomake saa vastaajan luovuttamaan ennen kuin hän on edes kunnolla tutustunut siihen (Valli 2010, 105).

Tutkimuksessa käytin pääasiassa avoimia kysymyksiä. Avoimissa kysymyksissä esitetään kysymys ja vastaaja saa vastata siihen oman mielensä mukaan. Tämä antaa vastaajalle täyden vapauden sanoa, mitä hänellä on oikeasti mielessään. Vastauksista myös näkee, mikä on keskeistä tai tärkeää vastaajien ajattelussa ja osoittaa asiaan liittyvien tunteiden voimakkuuden. Avoimien kysymysten tuottama aineisto saattaa kuitenkin olla sisällöltään erittäin kirjavaa ja sitä saattaa olla vaikea käsitellä. (Hirsjärvi ym. 2004, 187–190.) Tulosten laskeminen vie tällöin huomattavasti enemmän aikaa kuin valmiiden vastausvaihtoehtojen tulkinta. Avoimiin kysymyksiin saatetaan myös helposti jättää vastaamatta. Vastaaja ei myöskään aina vastaa suoraan itse kysymykseen, vaan saattaa vastata hiukan aiheen vierestä. (Valli 2010, 126.)

Halusin saada kyselyn avulla monipuolisia vastauksia. Lisäksi oli tärkeää, että vastaajat saavat vastata täysin haluamallaan tavalla, enkä halunnut kahlita heitä tiettyihin vastausvaihtoehtoihin. Tämän takia käytin avoimia kysymyksiä ja monivalintakysymyksiin päädyin tutkimuksessa vain vastaajaa koskevien taustakysymysten kohdalla (ks. liite 1), koska niitä on täsmällisempää kysyä monivalintakysymyksillä kuin avoimilla kysymyksillä. Monivalintakysymyksissä on laadittu valmiit, numeroidut vastausvaihtoehdot, ja vastaaja merkitsee rastin oman vastausvaihtoehtonsa kohdalle. Tällaiset kysymykset pakottavat vastaajan valitsemaan valmiista vastausvaihtoehdoista, mikä taas tuottaa vähemmän kirjavia vastauksia. Tästä johtuen monivalintakysymysten vastauksia on helppo käsitellä ja vertailla. (Hirsjärvi ym. 2004, 187–190.)

5.4 Lisämateriaalien analysointi

Luvussa 5.1 esittelin sisällönanalyysiä ja sen analyysivaiheita. Analyysivaiheita on siis kolme: 1) aineiston pelkistäminen, 2) aineiston klusterointi sekä 3) aineiston abstrahointi. Aineiston pelkistämistä on tapahtunut jo aivan tutkimuksen alkuvaiheessa, kun rajasin matematiikan lisämateriaalien tutkimisen koskemaan vain neljännen luokan lisämateriaaleja. Koin rajaamisen tutkimustehtävän kannalta järkeväksi, koska nyt tutkimus koskee selkeästi vain yhden vuosiluokan lisämateriaaleja. Muuta aineiston pelkistämistä ei tapahtunut, koska päädyin analysoimaan tutkimuskohteena olevien lisämateriaalien kaikki tehtävät, joten niiden kesken ei tarvinnut tehdä pelkistämispäätöksiä.

Pelkistämisen jälkeen jatkoin aineiston analysointia selailemalla tehtäviä läpi kirja kerrallaan. Jo tässä vaiheessa pystyi huomaamaan selviä kategorioita eri tehtävätyypeistä, jotka toistuivat eri kirjasarjoista toiseen. Aineiston klusteroinnissa eli ryhmittelyssä kävin tarkasti läpi lisämateriaalien kaikki tehtävät ja etsin niiden seasta samankaltaisia tehtäviä, sekä samalla mielessäni jaottelin tehtäviä erilaisiin kategorioihin. Etsin kirjallisuudesta tehtäville valmista jaotteluperiaatetta tai analysointiteoriaa, jota olisin voinut itse muokata hieman sopivammaksi. Lisämateriaalien tehtävät ovat kuitenkin aivan erilaisia kuin tavallisten oppikirjojen tehtävät, joten mikään valmis jaotteluteoria ei sopinut. Aloin itse muodostaa jaotteluperiaatetta tehtäville. Ensinnäkin halusin tarkastella, onko lisämateriaaleissa avoimia tehtäviä. Tehtävien jaottelu avoimiin ja suljettuihin oli siis ensimmäinen jaotteluperiaate. Tämän lisäksi päädyin kaksiulotteiseen jaottelutapaan. Jaoin tehtävät matematiikan sisältöalueiden sekä tehtävätyypin mukaan. Jokainen tehtävä kuuluu siis sekä johonkin sisältöalueeseen että tehtävätyyppiin. Tehtävistä huomasi erilaisia matematiikan sisältöpainotuksia, jotka erottuivat toisistaan selkeästi.

Matematiikan sisältöalueiksi muodostuivat lopulta seuraavat luokat: 1) mekaaninen peruslasku, 2) yhtälöt ja looginen päättely, 3) geometria sekä 4) tilastot ja todennäköisyys. Tietyt tehtävätyypit toistuivat jokaisessa lisämateriaalivihkossa ja niiden perusteella muodostui lopulta kolme jaotteluperiaatetta: numeerinen, visuaalinen sekä verbaalinen. Jaotteluperusteina tälle kaksiulotteiselle ryhmittelylle käytin lähinnä tehtävään tarvittavia taitoja ja tehtävän piirteitä, jotka erottavat sen selkeästi muista tehtävistä.

Tehtävien ryhmittelyssä ongelmaksi nousi lisämateriaalien tehtävien numerointi. Tuhattaiturin Pulmat-vihkossa on tehtävissä juokseva numerointi läpi koko kirjan ja saman tehtävän eri osat on eroteltu kirjaimien avulla tehtävän eri kohdiksi. Laskutaidon Tuumavihkossa taas numerointi on juokseva aina vain yhtä sivua kohti ja seuraavalla sivulla numerointi alkaa aina alusta. Joissakin tehtävissä numerointi on kuitenkin juokseva läpi aukeaman. Osaa tehtävistä ei ole kuitenkaan numeroitu lainkaan. Osassa tehtävistä on a-, b-, c-kohdat eroteltuna yhden tehtävän eri osiksi, kun taas joissain tehtävissä samanlaisina jatkuvat tehtävien eri osat on merkattu numeroin eri tehtäviksi. Matikka-sarjan Timanttivihkossa tehtävien numerointi on juokseva aina yhdellä aukeamalla, mutta seuraavalla aukeamalla numerointi alkaa taas alusta. Kaikki tehtävät on kuitenkin numeroitu, toisin kuin Laskutaidossa. Timanttivihkossa tehtävän eri osat on merkattu välillä kirjaimin, a-, b-, c-kohdiksi ja välillä taas numeroin.

Tehtävien ryhmittelyssä olisi ollut vaikeaa noudattaa jokaisen kirjan omaa numerointia, koska se oli kaikissa hyvin toisistaan poikkeava. Näin tulokset olisivat saattaneet olla ristiriitaisia keskenään esimerkiksi tehtävien lukumäärien suhteen, koska tehtävien numerointi ei ollut johdonmukaista. Päätin itse muokata tehtävien numerointia, johon otin mallia Tuhattaiturin numeroinnista. Tässä kyseisessä Pulmat-vihkosessa numerointi oli jatkuva läpi kirjan ja eri tehtävät oli systemaattisesti merkattu numeroin sekä tehtävän eri osat kirjaimin. Merkkasin tehtävät siten, että yksi tehtävänanto on yksi numerolla merkattu tehtävä ja sen eri osat kirjaimin merkittyjä osatehtäviä. Tuhattaiturin Pulmat-vihkon numerointi pysyi ennallaan, mutta muokkasin Laskutaidon Tuumavihkon sekä Matikan Timanttivihkon tehtävien numerointia.

Saatuani tehtävien uuden numeroinnin jälkeen ryhmittelyn valmiiksi jatkoin aineiston analysointia. Analysoinnin viimeisessä vaiheessa eli aineiston abstrahoinnissa, joka tarkoittaa teoreettisten käsitteiden luomista, liitin tehtävien luokittelusta saamaani empiiristä tietoa teoreettisiin käsitteisiin. Analyysin tuloksista kerron tarkemmin luvussa 6.1 ja johtopäätöksistä luvussa 7.1.

5.5 Kyselylomakkeiden analysointi

Kyselylomakkeiden analysoinnissa käytin samoja sisällönanalyysin periaatteita kuin lisämateriaalien tehtävien analysoinnissa. Analyysiaineiston pelkistämistä tapahtui jo aivan aluksi, kun mietin, kenelle haluan kyselylomakkeen lähettää vastattavaksi. Päädyin lopulta vain yhteen lisämateriaalin tekijään ja kahteen opettajaan. Lisämateriaalien tehtävistä tulee jo suurehko aineisto, enkä halunnut aineiston paisuvan liikaa. Pelkistämistä tapahtui myös tuloksia kirjoittaessa, kun poimin kyselyistä tälle tutkimukselle tärkeimpiä asioita. Aineiston klusterointiin liittyi kyselylomakkeiden vastausten ryhmittely. Ryhmittelin ensin molempien opettajien vastaukset samojen kysymysten alle ja rupesin analysoimaan vastauksia tarkemmin. Vastauksista korostui hyvin samanlaisia teemoja, joten analysointi oli helppoa. Lisämateriaalin tekijän vastaukset analysoin erillään opettajien vastauksista. Lopuksi aineiston abstrahoinnissa liitin tutkimuksen tuloksia sekä teoreettisia näkökulmia toisiinsa.

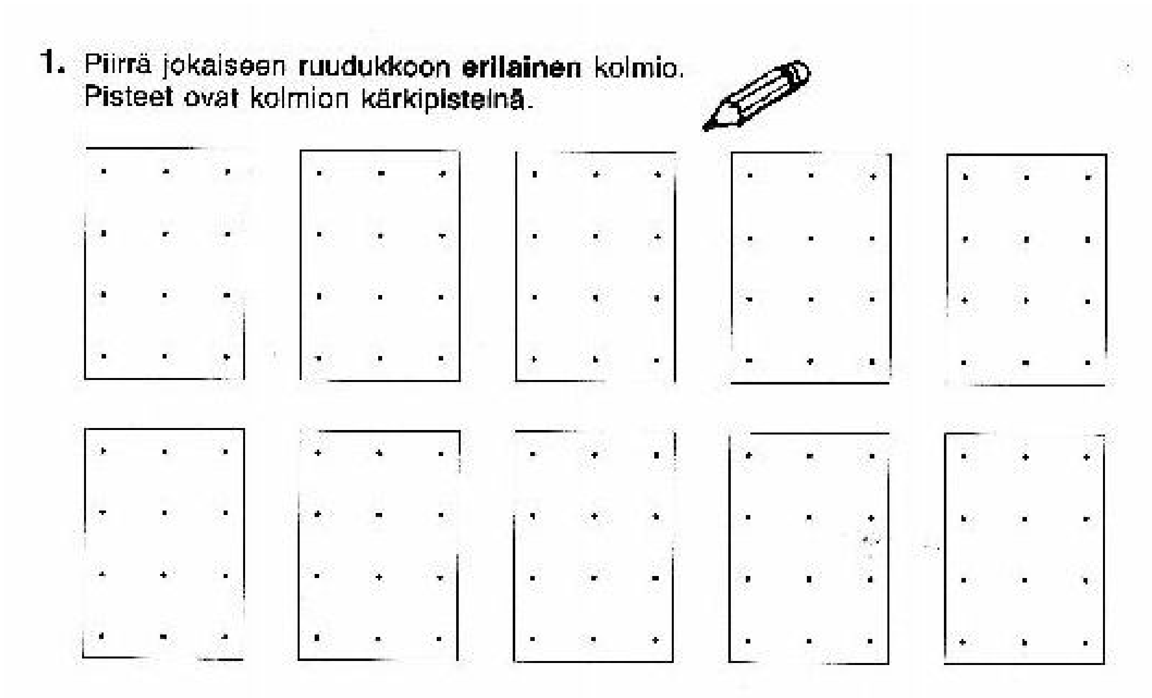
Laskutaidon Tuumavihkon tekijä Risto Ilmavirta on antanut luvan käyttää tässä tutkimuksessa omaa nimeään. Hänen vastauksiaan en ole muuttanut lainkaan, koska hänet saa tunnistaa vastauksista. Kaksi kyselyyn vastannutta opettajaa pysyy kuitenkin nimettöminä tutkimuksessa. Olen joutunut muuttamaan joitain pieniä yksityiskohtia heidän vastauksistaan, jotta heidän henkilöllisyytensä ei tule ilmi vastauksista.

6 TULOKSET

Esittelen seuraavaksi tutkimuksen keskeisiä tuloksia lisämateriaalien tehtävistä ryhmittelyluokkien mukaisesti, sekä sen jälkeen tarkastelen lisämateriaalien tekijän sekä kahden opettajan täyttämän kyselylomakkeen vastauksia. Olen poiminut lisämateriaaleista esimerkkitehtäviä sekä kyselyjen vastauksista suoria lainauksia, jotta tulokset tulevat selkeämmin esille.

6.1 Lisämateriaalien tehtävätyypit ja matematiikan sisällöt

Ensiksi luokittelin lisämateriaalien tehtävät avoimiin ja suljettuihin ongelmiin. Luokittelin tehtävät avoimiin ongelmiin Pehkosen (2011, 21) määritelmän mukaan, jolloin tehtävä on avoin, jos sen lähtö- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritelty. Tehtävän avoimuuden johdosta ongelma voidaan ratkaista usealla eri tavalla (Hähkiöniemi ym. 2012, 31). Ratkaisijat saattavat päätyä ratkaisuissaan erilaisiin, mutta yhtä oikeisiin tuloksiin riippuen ratkaisuprosessissa tehdyistä erilaisista valinnoista (Pehkonen 2011, 22). Avoimilla tehtävillä on siis useita oikeita ratkaisuja (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 140; Leppäaho 2007, 73; Pehkonen 2011, 22). Jos tehtävää ei luokitella avoimeksi, se on suljettu eli suljetuilla tehtävillä on vain yksi oikea ratkaisu (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 140). Kuviossa 3 näkyy esimerkki avoimesta tehtävästä.



KUVIO 3. Avoin tehtävä Laskutaidon Tuumavihkon syysosassa (Ilmavirta & Uus-Leponiemi 2011, 25).

Kuvio 3 on hyvä esimerkki avoimesta tehtävästä. Tehtävänanto on annettu selkeästi, mutta tehtävän suorittaminen on jätetty oppilaan ideoitavaksi. Jokainen oppilas voi oman taitotasonsa mukaisesti piirtää sellaisia kolmioita, joita osaa. Avoimet tehtävät antavatkin Pehkosen (2000, 22) mukaan ratkaisijalle vapautta tehtävän ratkaisemiseen. Oppilaan ajatustyö pääsee myös hyvin liikkeelle, koska tehtävän suorittamiselle ei ole määrätty liian tiukkoja puitteita. Oppilas saa käyttää ongelmanratkaisuaan ja miettiä, kuinka pystyy muodostamaan erilaisia kolmioita.

Taulukosta 1 näkyy avoimien tehtävien suhteellinen määrä eri kirjasarjojen lisämateriaalivihkoissa.

TAULUKKO 1. Avoimien tehtävien määrä eri lisämateriaaleissa.

Lisämateriaali	Avoin tehtävä
Tuhattaituri Pulmat 4a + 4b	1,56 %
Laskutaidon Tuumavihko 4 syysosa + kevätosa	5,06 %
Matikka Timanttivihko 4 syksy + kevät	2,86 %

Avoimia tehtäviä oli suhteellisen niukasti lisämateriaaleissa. Taulukkoon 1 on laskettu kirjasarjojen syys- ja kevätosien tehtävät yhteen ja sen jälkeen laskettu avoimien tehtävien suhteellinen osuus lisämateriaalien kaikkiin tehtäviin nähden. Suhteellisesti vähiten avoimia tehtäviä on Tuhattaiturissa. Tuhattaiturin lisämateriaalien tehtävistä (n=192) avoimia tehtäviä on vain 1,56 % eli kolme tehtävää. Laskutaidon tehtävistä (n=79) avoimia tehtäviä on neljä eli 5,06 %, joka on suhteessa tehtävien määrään kaikista eniten muihin lisämateriaaleihin verrattuna. Matikka-kirjasarjan tehtävistä (n=105) avoimia tehtäviä on kolme. Avointen tehtävien laskeminen olisi kuitenkin tärkeää, sillä ne kehittävät Joutsenlahden ja Vainionpään (2010, 140) mukaan oppilaan metakognitiivisia ja strategisia taitoja.

Suljettuja tehtäviä matematiikan neljännen vuosiluokan lisämateriaaleissa on siis hyvin paljon. Taulukossa 2 näkyy suljettujen tehtävien suhteelliset määrät lisämateriaaleissa.

TAULUKKO 2. Suljettujen tehtävien määrä eri lisämateriaaleissa.

Lisämateriaali	Suljettu tehtävä
Tuhattaituri Pulmat 4a + 4b	98,44 %
Laskutaidon Tuumavihko 4 syysosa + kevätosa	94,94 %
Matikka Timanttivihko 4 syksy + kevät	97,14 %

Eniten suljettuja tehtäviä on Tuhattaiturissa, jossa kaikista tehtävistä (n=192) suljettuja tehtäviä on jopa 98,44 % eli 189 tehtävää. Suhteellisesti vähiten suljettuja tehtäviä on Laskutaidossa, jossa on eniten avoimia tehtäviä. Laskutaidon kaikista tehtävistä (n=79) suljettuja tehtäviä on 75 eli 94,94 prosenttia. Kuviossa 4 näkyy esimerkki suljetusta tehtävästä.

KUVIO 4. Suljettu tehtävä Matikan Timanttivihkon syksyosassa (Pesonen 2013, 8).

Suljetulla tehtävällä on siis vain yksi oikea ratkaisu (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 140), eivätkä ne anna paljoa varaa oppilaan omalle ongelmanratkaisulle ja soveltamiselle.

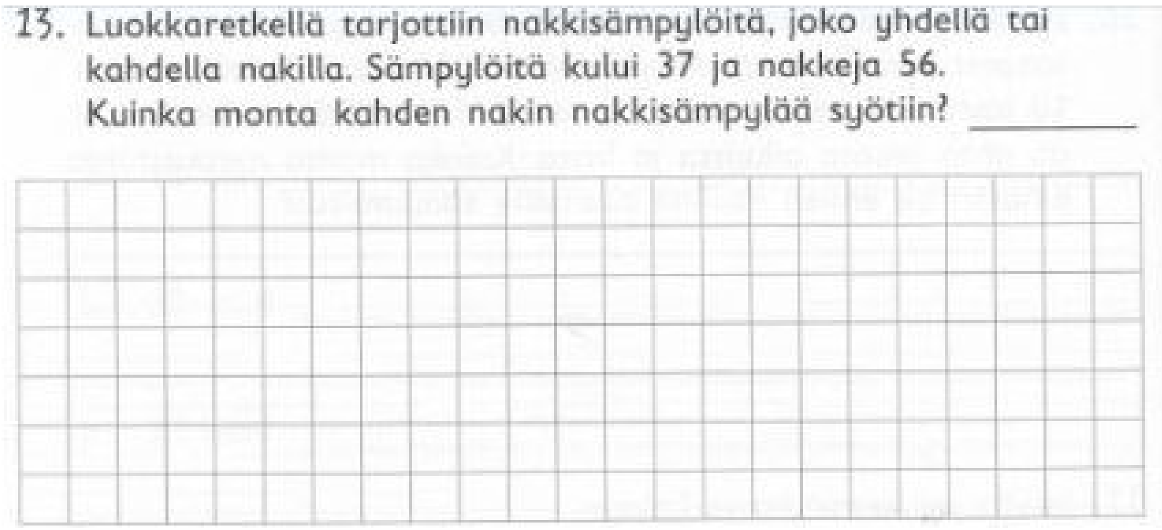
Seuraavaksi analysoin lisämateriaalien tehtävät kaksiulotteisella ryhmittelyperiaatteella, jolla jaoin tehtävät tehtävätyypin sekä matemaattisen sisällön mukaan. Tehtävätyypeiksi muodostuivat numeerinen, visuaalinen sekä verbaalinen. Numeeriseen luokkaan ryhmittelin tehtävät, jotka ovat numeroin kerrotussa muodossa. Visuaaliset tehtävät sisältävät tehtäviä, joissa on kuvioita, erilaisia piirrettyjä reittejä tai jokin kuva, joka hyvin oleellisesti liittyy tehtävän laskemiseen. Verbaalisessa tehtävässä koko tehtävänanto on sanallisessa muodossa. Matemaattisiksi sisällöiksi muodostuivat 1) mekaaninen peruslasku, 2) yhtälöt ja looginen päättely, 3) geometria sekä 4) tilastot ja todennäköisyys. Mekaaninen peruslasku on aivan tavallinen peruslasku, johon tarvitaan matematiikan perustaitoja. Tavalliset matematiikan oppikirjat sisältävät suurimmaksi osaksi tällaisia tehtäviä. Yhtälöt ja looginen päättely -ryhmään luokittelin tehtävät, joissa tarvitaan loogista päättelykykyä, vertailua, erilaisten suhteiden ymmärtämistä sekä yhtälöiden kanssa operoimista. Tähän luokkaan kuuluvat myös muuttujatehtävät. Näissä laskuissa täytyy osata itse muodostaa lausekkeita, ymmärtää sulkeiden merkitys sekä osata oikea laskujärjestys. Geometriseen sisältöön kuuluvat tehtävät, jotka vaativat avaruudellista hahmottamista sekä geometristen kuvioiden tunnistamista. Tilastot ja todennäköisyys -luokkaan ryhmittelin tehtävät, joissa lasketaan erilaisten tapahtumien todennäköisyyksiä, permutaatioita sekä pohditaan erilaisten väitteiden paikkansapitävyyttä.

Tarkastelen nyt jokaisen kirjasarjan lisämateriaaleja tarkemmin tehtävätyyppien ja matematiikan tehtäväsisältöjen näkökulmasta. Olen liittänyt tarkastelussa yhteen lisämateriaalien syys- ja kevätosien tehtävät, koska päällisin puolin tehtävien painotus on hyvin samanlainen molemmissa vihoissa. Tähän ryhmittelyyn on otettu huomioon vain suljetut tehtävät, koska halusin pitää avoimet tehtävät selvästi erillään ja tarkastella niitä omana ryhmänään. Ensiksi otan tarkasteluun Tuhattaiturin lisämateriaalit. Tuhattaituri Pulmat 4a -vihkosessa on sivuja 53 ja tehtäviä 96. Pulmat 4b:ssä sivuja on 46 ja tehtäviä myös 96, kuten a-osassa. Taulukkoon 3 suhteelliset tehtävien määrät on laskettu ilman avoimia tehtäviä. Pulmat-vihoissa oli siis yhteensä kolme avointa ongelmaa, joten taulukkoon 3 laskettuja tehtäviä on yhteensä vain 189 oikean 192 tehtävän sijaan. Taulukosta 3 näkee Tuhattaiturin Pulmat -vihkojen tehtävien jakautumisen tarkemmin.

TAULUKKO 3. Tuhattaiturin Pulmat 4a ja 4b -vihkojen tehtävien jakautuminen (n=189).

	Mekaaninen peruslasku	Yhtälöt ja looginen päättely	Geometria	Tilastot ja todennäköisyys	yht.
Numeerinen	0 %	7,94 %	0 %	0,53 %	8,47 %
Visuaalinen	0 %	0,53 %	4,76 %	2,12 %	7,41 %
Verbaalinen	0 %	65,08 %	2,12 %	16,93 %	84,13 %
yht.	0 %	73,55 %	6,88 %	19,58 %	100 %

Huomataan, että Tuhattaiturin Pulmat-vihkoissa eniten korostuvat verbaaliset tehtävät ja niistä selvästi vielä algebraan eli yhtälöihin ja loogiseen päättelyyn liittyvät tehtävät. Tällaisia tehtäviä on yhteensä 123 eli reilusti yli puolet kaikista tehtävistä. Tarkalleen ottaen siis 65,08 % kaikista tehtävistä kuului tähän luokkaan. Kuviossa 5 näkyy esimerkki tällaisesta tehtävästä.



KUVIO 5. Tuhattaiturin Pulmat 4b -vihkon verbaalinen loogiseen päättelyyn liittyvä tehtävä (Korhonen & Nyrhinen 2013, 8).

Kuvio 5 on hyvä esimerkki Pulmat-vihkojen sanallisista ongelmista. Suurin osa Pulmat-vihkojen tehtävistä on muodostettu sanalliseen muotoon ja oppilaan täytyy osata poimia tehtävästä ratkaisun kannalta tärkeimmät asiat. Monet näistä tehtävistä ovat todella pulmallisia, eikä oppilailla ole valmiita ratkaisumalleja niihin. Nämä tehtävät siis todella testaavat oppilaiden ongelmanratkaisua ja päättelykykyä. Pulmat-vihkojen esittelytekstissä mainittiinkin tehtävien kehittävän oppilaan loogista päättelykykyä (Korhonen & Nyrhinen 2012; 2013).

Tuhattaiturin Pulmat-vihoissa on reilusti myös verbaalisia todennäköisyyteen liittyviä tehtäviä. Näitä on yhteensä 32 tehtävää eli 16,93 % kaikista tehtävistä ja niihin liittyivät lähinnä permutaatioiden laskeminen ja erilaisten väitteiden pohtiminen. Kuviossa 6 on esimerkki tällaisesta tehtävästä.

31. Kuviskerhon kahdeksan tyttöä kertoivat kukin kaksi suosikkiväriään. Eri suosikkivärejä tuli yhteensä kuusi. Värit olivat punainen (7 kertaa), sininen (3 kertaa), keltainen (2 kertaa), valkoinen (2 kertaa), vihreä (kerran) ja violetti (kerran). Päättele, pitääkö väite paikkansa:

- Vähintään kahden tytön suosikkivärit olivat punainen ja sininen. tosi ☐ epätosi ☐
- Jonkun tytön suosikkivärit olivat keltainen ja punainen. tosi ☐ epätosi ☐
- Jonkun tytön suosikkivärit olivat violetti ja punainen. tosi ☐ epätosi ☐

KUVIO 6. Tuhattaiturin Pulmat 4a -vihkon verbaalinen todennäköisyyteen liittyvä tehtävä (Korhonen & Nyrhinen 2012, 21).

Kuvion 6 tehtävä on hyvin tyypillinen sanallinen todennäköisyyteen liittyvä Pulmat-vihkon tehtävä. Tässä tehtävässä joudutaan pohtimaan väitteiden paikkansapitävyyttä ja se on täysin verbaalisessa muodossa.

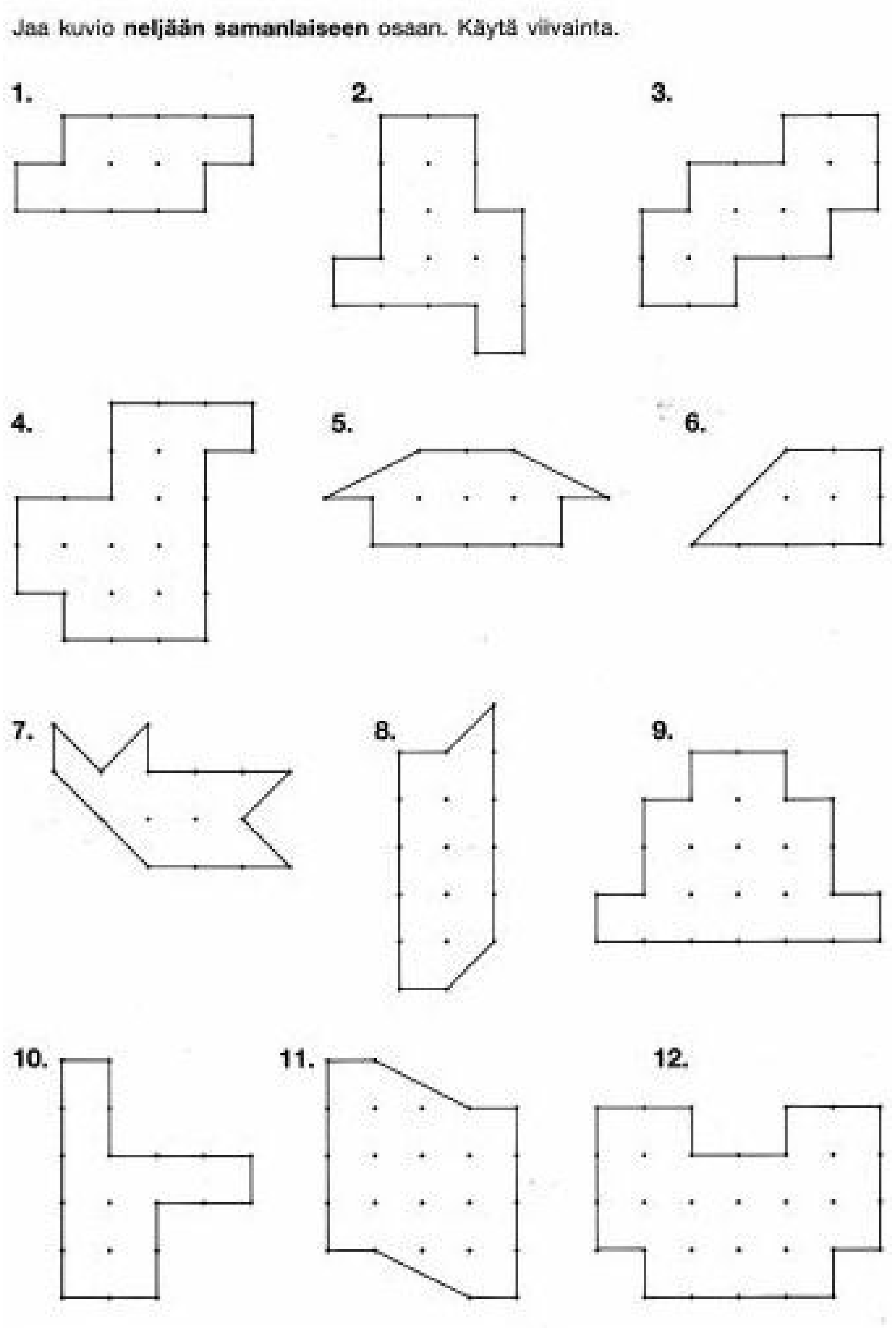
Verbaalisia loogisia tehtäviä sekä verbaalisia todennäköisyystehtäviä on Pulmat-vihkoissa selvästi eniten. Kolmanneksi eniten on numeerisia loogista päättelyä vaativia tehtäviä, joita on 7,94 % kaikista tehtävistä eli 15 tehtävää. Mekaanisia peruslaskuja ei Pulmat-vihkoissa ole lainkaan. Huomattavasti eniten tehtäviä luokittuu matemaattisista sisällöistä yhtälöihin ja loogista päättelyä vaativiin tehtäviin. Näitä on jopa 73,55 % kaikista tehtävistä. Seuraavaksi eniten on tilastoihin ja todennäköisyyksiin liittyviä tehtäviä, joita on 19,58 prosenttia. Geometrisia tehtäviä on 6,88 %. Tehtävätyypiltään verbaalisia tehtäviä on jopa 84,13 % eli todella suuri enemmistö. Numeerisia ja visuaalisia tehtäviä on molempia melkein yhtä paljon, numeerisia 8,47 % ja visuaalisia 7,41 %.

Laskutaidon Tuumavihkon syysosassa sivuja on 40 ja tehtäviä 40 oman tehtävänumerointini mukaan. Tuumavihkon kevätosassa sivuja on myös 40 ja tehtäviä 39. Avoimia tehtäviä Tuumavihkoissa oli yhteensä neljä eli tehtävien suhteelliset määrät on laskettu ilman niitä. Seuraavaksi tarkastelen taulukossa 4 Laskutaidon Tuumavihkojen syys- ja kevätosien tehtävien jakautumista eri osa-alueisiin.

TAULUKKO 4. Laskutaidon Tuumavihkon syys- ja kevätosien tehtävien jakautuminen (n=75).

	Mekaaninen peruslasku	Yhtälöt ja looginen päättely	Geometria	Tilastot ja todennäköisyys	yht.
Numeerinen	0 %	10,67 %	0 %	0 %	10,67 %
Visuaalinen	0 %	32 %	33,33 %	1,33 %	66,66 %
Verbaalinen	0 %	12 %	0 %	10,67 %	22,67 %
yht.	0 %	54,67 %	33,33 %	12 %	100 %

Kuten taulukosta 4 näkee, Laskutaidon lisämateriaaleissa painottuvat hyvin paljon visuaaliset tehtävät. Eniten tehtäviä luokittuu visuaaliseen ja geometriseen luokkaan eli tehtävät vaativat hyvää kolmiulotteista ymmärrystä oppilailta. Näitä tehtäviä on 33,33 % eli 25 tehtävää. Kuvion 7 tehtävä on hyvä esimerkki Tuumavihkojen visuaalista hahmottamista vaativista tehtävistä.

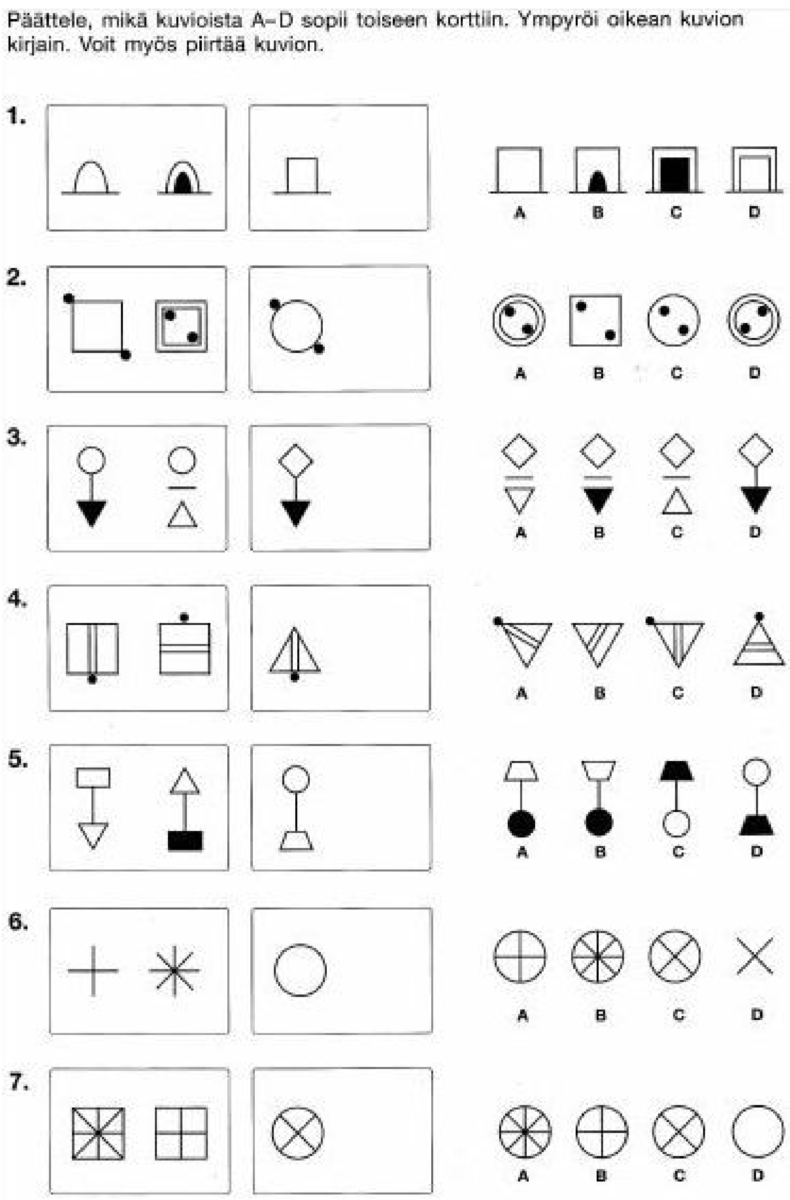


KUVIO 7. Laskutaidon Tuumavihkon kevätosan visuaalista hahmottamista vaativa geometrian tehtävä (Ilmavirta & Uus-Leponiemi 2008, 3).

Kuvion 7 tehtävä vaatii oppilaalta hyvää avaruudellista hahmottamiskykyä. Tuumavihkojen monet tehtävät ovat tämän tyylisiä ongelmia, eikä oppilailla ole valmiita ratkaisustrategioita näihin. Tällaiset tehtävät ovat todellisia ongelmanratkaisutehtäviä. Kuvion 7 tehtävää Ilmavirta kommentoi kyselyssä seuraavasti:

Sivun 3 tehtävätyyppi kertautuu ja vaativoituu vuodesta toiseen. Se on sellainen, jota jokainen haluaa kokeilla, mutta sivun viimeiset ratkeavat vasta varsin huikeilla oivalluksilla. Tyyppi on hyvä senkin vuoksi, että oppilas voi konkreettisesti hahmotella vastauksiaan paperille.

Seuraavaksi eniten tehtäviä Tuumavihkoissa kuuluu visuaalista hahmotusta vaativiin loogisen päättelyn tehtäviin. Näitä on 32 % eli 24 tehtävää. Kuviossa 8 on esimerkki visuaalisesta loogisen päättelyn tehtävästä.



KUVIO 8. Laskutaidon Tuumavihko 4 kevätosan visuaalinen loogista päättelyä vaativa tehtävä (Ilmavirta & Uus-Leponiemi 2008, 4).

Kuvion 8 tehtävä on Tuumavihkojen tyypillinen visuaalinen loogisen päättelyn tehtävä. Tehtävässä täytyy jatkaa kuviojonoa tietyn säännön mukaan, joka oppilaan täytyy itse päätellä.

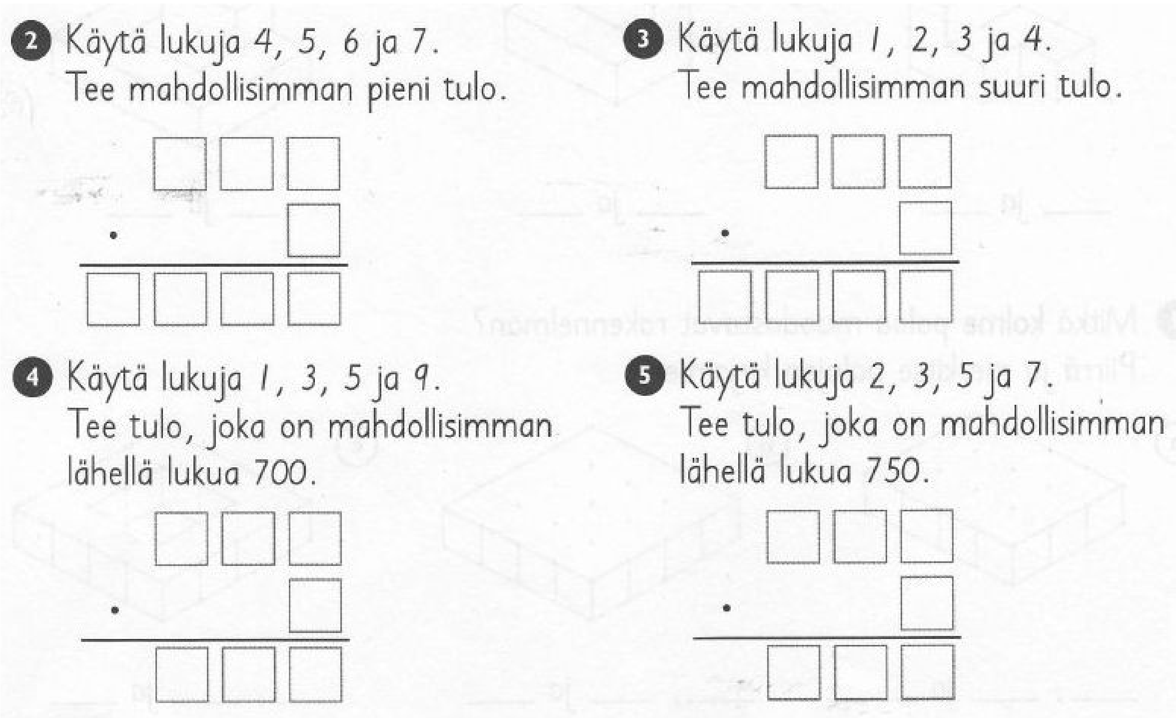
Kolmanneksi eniten Tuumavihkoissa on verbaalisia loogista päättelyä vaativia tehtäviä, joita on 12 % eli 9 tehtävää. Matemaattisilta sisällöiltään tehtäviä on eniten, eli 54,67 %, yhtälöillä operoimista ja loogista päättelyä vaativassa luokassa. Seuraavaksi eniten on geometriaan liittyviä tehtäviä, joita on 33,33 %. Mekaanisia peruslaskuja ei ole myöskään Tuumavihkoissa, kuten ei Tuhattaiturin Pulmat-vihkoissa. Tehtävätyypiltään visuaalisia avaruudellista hahmottamista vaativia tehtäviä on yhteensä 66,66 % kaikista tehtävistä eli tämä on selvästi suurin tehtävätyyppi. Seuraavaksi eniten on verbaalisia tehtäviä eli 22,67 % kaikista tehtävistä ja vähiten numeerisia tehtäviä, joita on 10,67 prosenttia.

Viimeisenä tarkastelen taulukossa 5 Matikka-kirjasarjan Timanttivihkojen syksy- ja kevätosien lisämateriaalien tehtävien jakautumista. Matikka-sarjan Timanttivihkon syysosassa sivuja on 48 ja tehtäviä 52 oman tehtävänumerointini mukaan. Kevätosassa on myös tasan 48 sivua ja tehtäviä on 53. Timanttivihkoissa oli yhteensä kolme avointa tehtävää, joita ei ole laskettu mukaan taulukkoon.

TAULUKKO 5. Matikka-sarjan Timanttivihkon syksy- ja kevätosien tehtävien jakautuminen (n=102).

	Mekaaninen peruslasku	Yhtälöt ja looginen päättely	Geometria	Tilastot ja todennäköisyys	yht.
Numeerinen	7,84 %	28,43 %	0 %	0 %	36,27 %
Visuaalinen	2,94 %	21,57 %	12,57 %	4,90 %	41,98 %
Verbaalinen	0 %	13,73 %	0,98 %	6,86 %	21,57 %
yht.	10,78 %	63,73 %	13,55 %	11,76 %	100 %

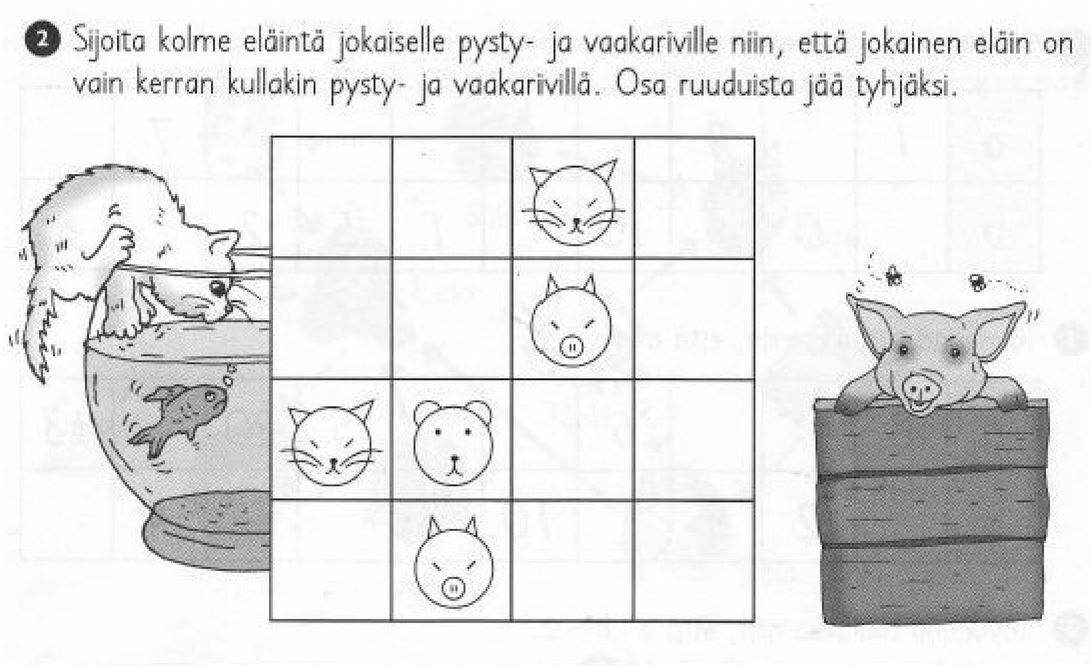
Taulukosta 5 käy ilmi, että Matikka-kirjasarjan tehtävät jakautuvat aika tasapuolisesti eri tehtävätyyppeihin ja matematiikan sisältöalueisiin. Mikään tietty luokka ei korostu ylitse muiden. Eniten on kuitenkin numeerisia tehtäviä, joissa tarvitaan loogista päättelykykyä sekä yhtälöiden kanssa operoimista. Näitä on 28,43 % eli 29 tehtävää. Kuviossa 9 on esimerkki tällaisesta tehtävästä.



KUVIO 9. Matikan Timanttivihkon syksyosan numeerinen loogista päättelyä vaativa tehtävä (Pesonen 2013, 30).

Kuvion 9 tehtävä on hyvin tyypillinen Timanttivihkon tehtävä. Monet tehtävistä ovat numeerisia loogista päättelyä vaativia tehtäviä. Timanttivihkoissa lasketaan hyvin paljon muuttujilla ja useat tehtävät ovat pohtimista vaativia ongelmanratkaisutehtäviä.

Toiseksi eniten Timanttivihkoissa on visuaalista ja loogista päättelykykyä sekä yhtälöillä operoimista vaativia tehtäviä. Näitä on 21,57 % kaikista tehtävistä eli 22 tehtävää. Kuviossa 10 on esimerkki tällaisesta tehtävästä.



KUVIO 10. Matikan Timanttivihkon 4 syksyosan visuaalinen loogista päättelykykyä vaativa tehtävä (Pesonen 2013, 5).

Kuvion 10 tehtävä on hyvin tyypillinen Timanttivihkon visuaalista hahmottamista vaativa looginen päättelytehtävä. Tehtävä on sudokun tyylinen, mutta tätä pelataan kuvioilla. Sudokussahan ei ole väliä, ovatko merkit numeroita vai kuvioita, kun peli perustuu lopulta vain loogiseen päättelyyn tietyillä ”pelimerkeillä”.

Kolmanneksi eniten Timanttivihkoissa on verbaalisia loogisen päättelyn tehtäviä, joita on 13,73 % eli 14 tehtävää. Eniten Matikan Timanttivihkoissa matemaattiselta sisällöltään on yhtälötehtäviä sekä loogista päättelykykyä vaativia tehtäviä. Tällaisia tehtäviä on yhteensä 63,73 % kaikista tehtävistä. Toiseksi eniten on geometrisia tehtäviä, joita on 13,55 %. Tilastoihin ja todennäköisyyksiin liittyviä tehtäviä on 11,76 % eli melkein yhtä paljon kuin mekaanisia peruslaskuja, joita on 10,78 %. Tehtävätyypiltään visuaalisia tehtäviä on 41,98 % eli eniten kaikista tehtävätyypeistä. Toiseksi eniten on numeerisia tehtäviä eli 36,27 % ja vähiten verbaalisia tehtäviä, joita on 21,57 %. Timanttivihkossa tehtävät ovat jakautuneet todella tasapuolisesti kaikkiin luokkiin.

Eri kirjasarjojen lisämateriaaleissa on suuria eroja. Ensinnäkin eroa on jo tehtävien numeroinnissa ja niiden vihkoihin asettelussa. Tuhattaiturin Pulmat-vihkoissa on monia pieniä tehtäviä, kun taas Laskutaidon Tuumavihkoissa tehtävät ovat usein koko sivun tai jopa aukeaman mittaisia. Matikan Timanttivihkojen tehtävissä on sekä lyhempiä että pidempiä tehtäviä. Eri lisämateriaaleissa on myös painotettu erilaisia asioita. Tehtävätyypiltään Tuhattaiturissa on selvästi eniten verbaalisia tehtäviä. Suurin osa, 84,13 %, tehtävistä on muodostettu sanalliseen muotoon ja oppilaan täytyy itse osata poimia tekstistä tehtävän ratkaisemisen kannalta olennaisimmat asiat. Laskutaidon Tuumavihkoissa tehtävätyypiltään taas selvästi eniten on visuaalista hahmottamista vaativia tehtäviä. Jopa 66,66 % tehtävistä sisältää tehtävään oleellisesti liittyvän kuvion ja tehtävän ratkaiseminen vaatii kolmiulotteista hahmottamista. Matikan Timanttivihkoissa tehtävät ovat puolestaan jakautuneet hyvin tasapuolisesti numeeriseen (36,27 %), visuaaliseen (41,98 %) sekä verbaaliseen (21,57 %) ryhmään. Kaikissa lisämateriaaleissa matemaattiselta sisällöltään tehtäviä kuuluu eniten yhtälöihin ja loogista päättelyä vaativaan tehtäväryhmään. Lisämateriaaleissa korostetaankin päättelyä, joten on loogista, että eniten tehtäviä kuuluu juuri siihen ryhmään.

Kaikista lisämateriaaleista löytyy hyvin monipuolisia tehtäviä. Monissa tehtävissä on eritasoisia osia, joista usein alkupää on helpompi ja tehtävän loppua kohden vaatimustaso nousee. On varmasti yleistä, etteivät kaikki oppilaat kykene ratkaisemaan vihkojen kaikkia tehtäviä, vaan lahjakkaimmat onnistuvat selviytymään vaativimmista tehtävistä. Onneksi kuitenkin kaikille oppilaille löytyy vihkoista oman tasoistaan tekemistä, joten lisämateriaaleista voi antaa lisätehtäviä myös tavallisille oppilaille, mutta lahjakkaat oppilaat saavat silti erinomaista matemaattista harjaantumista pulmallisimpia tehtäviä laskiessaan.

Muodostin tehtävien kaksiulotteisen ryhmittelytavan itse täysin tehtävien analysoinnin pohjalta, mutta huomasin jälkeenpäin niissä samoja piirteitä muihin teorioihin liittyen. Matemaattisen sisällön ryhmittelyperiaatteeseeni kuului mekaaninen peruslasku, yhtälöt ja looginen päättely, geometria sekä tilastot ja todennäköisyys. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004, 161–162) vuosiluokkien 3–5 matematiikan keskeisten sisältöjen ryhmät ovat 1) luvut ja laskutoimitukset, 2) algebra, 3) geometria sekä 4) tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys. Luvut ja laskutoimitukset sisältävät peruslaskutoimituksia kuten tämän tutkimuksen mekaaniset peruslaskut. Yhtälöt ja looginen päättely sisältää hyvin samankaltaisia tehtäviä kuin POPS:n algebraan liittyvät tehtävät. Geometriset ryhmät vastaavat täysin toisiaan sekä myös viimeiset tilastoihin ja todennäköisyyksiin liittyvät tehtävät.

Lisämateriaalien tehtävätyyppien mukaan muodostin kolme erilaista ryhmää: numeerinen, visuaalinen sekä verbaalinen. Näitä hyvin vastaavat luokat löytyvät Joutsenlahden ja Kuljun (2010, 78) esittämästä matematiikan kielentämisen mallista sanallisten tehtävien ratkaisuissa. Joutsenlahti ja Kulju käyttävät käsitteitä matematiikan symbolikieli, kuviokieli sekä luonnollinen kieli, mutta periaate on aivan sama kuin tämän tutkimuksen numeerisessa, visuaalisessa sekä verbaalisessa jaottelussa. Matematiikan symbolikieli käsittää matemaattiset lausekkeet ja laskutoimitukset, kuten myös numeerinen ryhmä tässä tutkimuksessa. Kuviokieleen kuuluvat esimerkiksi geometriset kuviot ja luonnolliseen kieleen äidinkieli. Myös visuaaliset tehtävät käsittävät geometriset kuviot ja verbaaliset tehtävät on kirjoitettu tekstimuotoon. Myös Gardnerin (1983) moniälykkyysteorian loogis-matemaattinen, spatiaalinen sekä lingvistinen intelligenssi liittyvät numeeriseen, visuaaliseen sekä verbaaliseen jaotteluun merkitsevästi. Lisämateriaalien tehtävien kaksiulotteiseen ryhmittelytapaan liittyikin tietämättäni paljon yhteyksiä teoriaan.

6.2 Lisämateriaalien ongelmanratkaisutehtävät sekä matemaattisen osaamisen kehittäminen

Lisämateriaalien tehtävistä suurinta osaa voi kutsua ongelmanratkaisutehtäviksi. Tehtävät painottavat ongelmanratkaisua, eivätkä ne ole lainkaan rutiinitehtäviä. Leppäaho (2007, 38) korostaakin, että ongelma on sellainen, jota oppilas ei kykene heti ratkaisemaan, vaan ratkaisu saadaan ajattelemisen ja opiskelemisen kautta. Ainoastaan Matikka-sarjan useat mekaaniset tehtävät eivät vaadi tehtävän ratkaisijalta suurempaa ongelmanratkaisua. Ne ovat täysin peruslaskuja, joita on myös suurin osa tavallisten oppikirjojen tehtävistä. Melkein kaikki lisämateriaalien tehtävät vaativat kuitenkin todellista pohtimista oppilailta. Leppäahon (2007, 44) sanoin näiden tehtävien ratkaiseminen vaatii matemaattisen tiedon soveltamista. Tehtävät ovat soveltamista vaativia pulmatehtäviä, eikä oppilailla ole niihin valmiita ratkaisumalleja. Anghileri (2005, 149) korostaakin, että ongelmanratkaisu on aiemmin opittujen tietojen ja taitojen käyttämistä ja muokkaamista erilaisella tavalla uusissa tilanteissa. Matematiikan perusasiat on opittu jo tavallisten matematiikan oppikirjojen avulla, ja niitä tietoja oppilaat voivat soveltaa lisämateriaalien ongelmanratkaisutehtäviä tekemällä.

Monet lisämateriaalien tehtävistä laittavat oppilaat ajattelemaan asioita laajemmin monesta eri näkökulmasta. Haapasalon (2004, 96) mukaan ongelmanratkaisutehtävien ratkaisujen etsimisessä tarvitaankin tietojen, säännönmukaisuuksien, lakien ja operaatioiden luovaa käyttämistä sekä ajatteluprosessin työstämistä. Ongelmanratkaisutehtävien ratkaiseminen auttaa myös oppilaita luottamaan omaan ajatteluunsa (mt. 85). Lisämateriaalien ongelmia ratkaistessaan oppilaat joutuvat itse miettimään, kuinka lähtevät ratkaisemaan tehtävää, ja kuinka päätyvät lopulliseen ratkaisuun. Lisämateriaalien tehtävät vaativatkin oppilailta asioita, joita Fox ja Surtees (2010) mainitsivat tarvittavan ongelmanratkaisussa. Lisämateriaalien tehtäviä ratkaistessa oppilaan täytyy ymmärtää ja tunnistaa ongelma, keksiä ratkaisumenetelmä ongelmalle sekä suoriutua ongelmanratkaisusta ja lopuksi vielä tarkistaa ongelman ratkaisu (mt. 48). Hähkiöniemi ym. (2012, 30) lisäävätkin, että ongelmanratkaisu on lähinnä erilaisten ideoiden etsintää, tarkastelua ja niiden soveltamista. Tämä pitää hyvin paikkansa lisämateriaalien ongelmanratkaisutehtävistä puhuttaessa.

Lisämateriaalien tehtävistä monet liittyvät arkipäivän ongelmiin. Esimerkiksi erilaisia kaupassa asioimiseen, hintoihin ja ostoksiin liittyviä laskuja on paljon. Myös erilaiset jakamistehtävät, joissa jokin asia pitää saada tietyn kokoisiin paloihin, ovat yleisiä. Nämä tehtävät ovat suoraan jokapäiväisestä elämästä, ja tällaisia tehtäviä ratkomalla oppilaiden arkipäivän ongelmanratkaisutaito kehittyy nopeasti. Ben-Hurin (2006, 72) mukaan tosielämään liittyvät ongelmat auttavatkin liittämään matematiikan opetusta arkipäivään. Arkielämään liittyvät ongelmat ovat usein mieluisampia, koska vastaus on arkipäivään liittyvä ja asia todellinen. Anghileri (2005, 149), Näveri ym. (2013, 92) ja Ruokamo (2000, 30) korostavat ongelmanratkaisun hyödyntämistä jokapäiväisissä arkielämän tilanteissa. Myös Perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa (2004, 158) mainitaan arkipäiväisten ongelmien hyödyntäminen opetuksessa. Näin oppilaat oppivat selviytymään tavallisessa elämässä vastaantulevista ongelmista helpommin, koska heillä saattaa olla jo valmiina opittuja ongelmanratkaisutaitoja tiettyihin ongelmiin.

Matemaattista osaamista tehtävät kehittävät hyvin. Kilpatrickin ym. (2001) luvussa 2.5 esittämästäni matemaattisen osaamisen köydestä hyvin moni säie on esillä näiden lisämateriaalivihkojen tehtävissä. Tehtävät kehittävät köyden viidestä säikeestä kolmea matemaattisen osaamisen aluetta. Matemaattinen osaaminen koostuu siis Joutsenlahden (2005, 96) suomennoksen mukaan käsitteellisestä ymmärtämisestä, yritteliäisyydestä, proseduraalisesta sujuvuudesta, strategisesta kompetenssista sekä mukautuvasta päättelystä. Näistä käsitteellistä ymmärtämistä eikä yritteliäisyyttä ilmene tehtävissä. Lisämateriaalien tehtävät ovat jo sen verran soveltavia, ettei niissä enää keskitytä käsitteisiin, eikä matematiikkakuvan muokkaamiseen. Käsitteellistä ymmärrystä kehittäviä tehtäviä on tavallisissa matematiikan oppikirjoissa, joissa opetellaan uusia asioita. Lisämateriaaleissa tehtävien avulla ei niinkään opita enää uusia käsitteitä ja asioita, vaan tehtävät vaativat päättelyä ja soveltamista.

Proseduraalinen sujuvuus tulee esille tehtäviä tehdessä tehokkaana ja sujuvana laskemisena sekä oikeanlaisen laskutavan käyttämisenä (Kilpatrick ym. 2001, 121–123). Oppilaan täytyy osata lisäksi käyttää sääntöjä, menetelmiä sekä algoritmeja oikealla tavalla hyväkseen (Haapasalo 2011, 51). Proseduraalista sujuvuutta lisämateriaalien tehtävistä harjoittavat lähinnä mekaaniset peruslaskut sekä helpot muuttuja- ja yhtälölaskut. Näissä oppilas pystyy käyttämään aiemmin opittuja tietoja ja menetelmiä hyväkseen ratkaistessaan ongelmia. Oppilaan täytyy osata valita oikea ratkaisumenetelmä, jolla saa ratkaistua ongelman. Mekaanisissa laskuissa, sekä muuttuja- ja yhtälölaskuissa oppilas joutuu myös käyttämään aiemmin oppimiaan sääntöjä, esimerkiksi yhtälölaskuissa sulkeiden käyttöön liittyviä säännönmukaisuuksia. Proseduraalinen sujuvuus edellyttääkin tehtävän pohjana olevan tietojärjestelmän syntaksin ymmärtämistä (mt. 51) ja sen hyödyntämistä tehtävää ratkaistessa.

Mukautuvaan päättelyyn liittyy kaikenlainen ajattelua ja päättelyä vaativa matematiikan osaaminen. Looginen ajattelu, tehtävien pohtiminen sekä matemaattisten ratkaisujen perustelu kehittävät mukautuvaa päättelyä. (Kilpatrick ym. 2001, 129.) Lisämateriaalien tehtävistä mukautuvaa päättelyä kehittävät varsinkin loogista päättelyä vaativat tehtävät sekä erilaiset vertailuun ja perusteluun liittyvät tehtävät. Etenkin loogisten päätelmien sekä todennäköisyyslaskujen ratkaiseminen vaatii oppilaalta mukautuvaa päättelyä, koska niissä täytyy pohtia asioita monesta näkökulmasta. Mukautuvan päättelyn avulla oppilaan on osattava pohtia erilaisten vaihtoehtojen eroja (mt. 129). Myös visuaaliset kolmiulotteiseen hahmotukseen liittyvät tehtävät kehittävät mukautuvaa päättelyä, sillä ne vaativat oppilaalta spatiaalista hahmotusta.

Strateginen kompetenssi käsittää matemaattisten tehtävien muotoilemisen, havainnoimisen sekä ratkaisemisen. Tämä käsittää siis kaikki ongelmanratkaisuun liittyvät toiminnot. (Kilpatrick ym. 2001, 124.) Lisämateriaalien tehtävät kehittävät hyvin oppilaan strategista kompetenssia, sillä tehtävät eivät ole rutiinitehtäviä, vaan suurin osa tehtävistä vaatii oppilaalta todellista ongelmanratkaisua. Oppilaan onkin osattava ensin muotoilla ongelma, jotta hän osaa lopulta ratkaista sen (mt. 124). Lisämateriaalien ongelmanratkaisutehtävät vaativat myös ratkaisustrategian muotoilemista, tehtävän eri osien havainnoimista ja huomioon ottamista sekä ratkaisuprosessin läpikäymistä onnistuneesti. Monet lisämateriaalien tehtävistä ovat hyviä ongelmanratkaisutehtäviä strategisen kompetenssin kehittämiseen, koska tehtäviä täytyy todella pohtia ja osa vaatii hyvin pitkäaikaistakin paneutumista ongelman ratkomiseen.

Lisämateriaalien tehtävissä on siis hyvin monipuolisesti erilaisia ongelmanratkaisutehtäviä. Tehtävät vaativat oppilaalta matemaattista soveltamista sekä ongelmanratkaisukykyä. Suurin osa tehtävistä liittyy myös erilaisten vaihtoehtojen ja näkökulmien vertailuun. Tehtävien ratkaisuihin tarvitaan lisäksi aiemmin opittujen käsitteiden, sääntöjen ja laskustrategioiden osaamista ja soveltamista. Osa tehtävistä liittyy myös arkipäiväisiin ongelmiin, joten oppilaat oppivat tärkeitä jokapäiväisessä elämässä käytettäviä ongelmanratkaisutaitoja. Lisämateriaalien ongelmanratkaisutehtävien avulla oppilaat kehittävät lisäksi omaa matemaattista osaamistaan. Tehtävät muokkaavat varsinkin oppilaan proseduraalista sujuvuutta, mukautuvaa päättelyä ja strategista kompetenssia. Näitä tarvitaan etenkin lahjakkaiden oppilaiden matemaattisen osaamisen kehittämiseen ja lisämateriaalien ongelmanratkaisutehtävät ovat erinomaisia tähän tarkoitukseen.

6.3 Laskutaidon Tuumavihkojen tekijän ajatuksia matemaattisesti lahjakkaista sekä ongelmanratkaisusta

Laskutaidon Tuumavihkojen tekijä, Risto Ilmavirta, antoi todella monipuolisia vastauksia kysymyksiini ja täten sainkin paljon arvokasta materiaalia tutkimukseeni liittyen. Seuraavaksi tarkastelen vastauksia tarkemmin. Vastaukset eivät ole täysin samassa järjestyksessä kuin kysymykset kyselylomakkeessa.

Kysymykseen matemaattisesti lahjakkaan oppilaan tunnuspiirteistä Ilmavirta vastaa kattavasti viitaten myös Gardnerin (1983) lahjakkuusteorian intelligensseihin, joista kerroin luvussa 2.1.2. Ilmavirta korostaa Gardnerin intelligensseistä etenkin lingvististä, loogis-matemaattista sekä spatiaalista intelligenssiä. Hänen mukaansa sanalliset ongelmat vaativat oppilaalta hyvää luetunymmärtämistä ja geometria spatiaalisuutta. Ilmavirta toteaa, että kirjallisuudessa matemaattiseen lahjakkuuteen liitetään usein seuraavat viisi kykytekijää:

1. *numeerinen kykytekijä; päässälasku, laskunopeus ja lukujen käsittelytaito.*
2. *verbaalinen kykytekijä; sanalliset tehtävät ja matemaattisen tekstin ymmärtäminen.*
3. *spatiaalinen hahmottaminen; muotojen tunnistaminen ja kolmiulotteinen hahmottaminen.*
4. *looginen päättelytekijä; verbaalinen päättely, numeerinen päättely ja visuaalinen päättely.*
5. *muisti; lyhyt- ja pitkäkestoinen.*

Ilmavirran mukaan matemaattisesti lahjakas hallitsee tasaisesti kaikki nämä kykytekijät.

Ilmavirta kuvaa matematiikan tietämyksen ja ymmärryksen rakentumista talon rakentamiseen. Kaikki rakentuu vähitellen, osa kerrallaan. Ilmavirran kuvailemat matematiikan oppimisen tasot, jotka rakentuvat alhaalta ylös:

4. Ongelmanratkaisu
3. Soveltaminen, matematiikka hyötykäytössä
2. Laskutekniikat, varma laskutaito
1. Käsitteiden ymmärtävä oppiminen matematiikan perustana

Ilmavirta toteaa, että matemaattisesti lahjakas oppilas hallitsee nämä kaikki oppimisen tasot ja osaa käyttää niitä sujuvasti. Hän myös huomauttaa, ettei lahjakaskaan oppilas selviä kaikkein vaativimmista tehtävistä, jos ”kivijalka on huonosti rakennettu”. Oppilaiden on ensin opittava keskeisimmät käsitteet kunnolla, sillä käsitteiden ymmärtäminen on myöhemmän oppimisen perusta. Kilpatrick ym. (2001, 118) korostavat myös käsitteiden ymmärrystä. Ilmavirta listaa, että tärkeää on lisäksi saada laskutekniikat sujuviksi ja varmoiksi. Vasta näiden vaiheiden jälkeen voidaan Ilmavirran mukaan soveltaa matematiikkaa ja ratkoa arkipäiväisiä ongelmia.

Ilmavirta tahtoo erotella matemaattisesti lahjakkaan ja huippulahjakkaan oppilaan toisistaan, kuten Ruokamokin (2000, 18). Suomessa matemaattisesti huippulahjakkaita on vähän, mutta niin sanotusti normaalisti lahjakkaita on jokaisessa luokassa. Osa heistä on alisuoriutujia, joten opettajilla on vaikeuksia tunnistaa heitä. Uusikylä (2000, 152) toteaakin, että jopa 50 % huippuälykkäistä saattaa olla alisuoriutujia. Opettajat osaavat kuitenkin kuvailla lahjakasta oppilasta Ilmavirran mukaan seuraavasti:

- *Hyvä sanallisissa tehtävissä.*
- *Kykenee abstraktiin ajatteluun.*
- *Jaksaa keskittyä pitkään, sitkeä ratkaisuyrityksissään.*
- *On rohkea kokeilija, ei pelkää virheitä.*
- *Arvioi suuruusluokkia ennen ratkaisua.*
- *Ratkaisee tehtävät usein tavalla, mikä eroaa muiden ratkaisutavoista.*
- *Leikittelee luvuilla.*
- *On perfektionisti, siksi usein tyytymätön saavutuksiinsa.*
- *Oppii omin päin matemaattisia käsitteitä.*
- *Haluaa usein työskennellä yksin.*
- *Hyvä soveltavissa tehtävissä ja ongelmanratkaisussa.*
- *Kiinnostunut tehtävän oikeellisuudesta.*
- *Tarvitsee vähän toistoa.*
- *On hyvä muisti.*

Ilmavirta korostaa vielä, että matemaattisesti lahjakaskaan ei ole hyvä ilman sitkeää ja pitkäjänteistä työtä. Kaikkien on uskallettava erehtyä ratkaisun etsimisessä. Ilmavirran mukaan oppilasta on kannustettava, koska hänen on saatava kokeilla ja erehtyä. Ilmavirta on samaa mieltä Ben-Hurin (2006, 72) kanssa, että koulussa korostetaan nykypäivänä aivan liikaa oikeaa vastausta, kun oikeasti ratkaisuprosessi on ratkaisevin ja tärkein.

Kysyttäessä, millaiset tehtävät kehittävät lahjakasta oppilasta, Ilmavirta korostaa heti, että lahjakkaita oppilaita tylsistyttää laskea koko ajan samanlaisia tehtäviä. Hänen mielestään lahjakkaille oppilaille tulisi tarjota pitkäjänteisempää työskentelyä vaativia tehtäviä ja laajempia kokonaisuuksia. Lahjakkaat saavatkin usein Ilmavirran mukaan haasteellisempia soveltamis- ja ongelmanratkaisutehtäviä. Lahjakkaat oppilaat tykkäävät myös itse päättää siitä, milloin siirtyvät eteenpäin seuraavalle tasolle tehtävissä. Tähän liittyen Ilmavirta selittää seuraavasti:

Seuraavalla tasolla en tarkoita ns. vertikaalista etenemistä seuraaviin "omiin" oppisisältöihin ja tulevan vuoden oppikirjoihin. Oleellista on, että opettaja kykenee tarjoamaan lahjakkaimmille oppilailleen materiaalia, jossa samaa oppisisältöä jo sovelletaan tai materiaalia, joka on vapaa käsiteltävästä oppisisällöstä, kuten esimerkiksi Laskutaidon Tuumavihkot ja Paripohdittavat. Tästä käytän nimitystä horisontaalinen eriyttäminen.

Ilmavirta jatkaa vielä, että lahjakas oppilas on kiinnostunut matemaattisista käsitteistä, mutta käsitteen oppimiseen ei tarvita kovin paljoa toistoa. Onkin Ilmavirran mukaan tärkeää, että lahjakkaille oppilaille annetaan enemmän soveltavia ja ongelmanratkaisua vaativia tehtäviä. Ilmavirta korostaa lisäksi kotitehtävien tärkeyttä:

Oppimisessa on tärkeää, että kukin oppilas työskentelee koulussa ja myös kotitehtäviensä parissa oman osaamisensa rajoissa. Myös lahjakkaimpien oikeus on saada kokeilla erityisen vaativia kotitehtäviä.

Myös Kilpatrick ym. ottavat esille kotitehtävien merkityksen. Kotitehtävien avulla oppilaat syventävät koulussa oppimaansa ja ylläpitävät taitojaan. (Kilpatrick ym. 2001, 352.)

Ilmavirta toteaa, että ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen täytyisi aloittaa mahdollisimman varhain. Myös Ruokamo (2000, 30) on samaa mieltä ja lisää, että on tärkeää antaa tarpeeksi haastavia tehtäviä oppilaille, jottei lahjakkaiden kiinnostus matematiikkaa kohtaan ehdi sammua tarpeeksi haastavien materiaalien puuttuessa. Ilmavirta jatkaa, että myös heikommat oppilaat tarvitsevat ongelmanratkaisuharjoituksia. Haapasalo (2011, 5) toteaakin, että jotkut opettajat luulevat ongelmanratkaisun olevan vain lahjakkaiden etuoikeus. Ilmavirta korostaa, että ongelmanratkaisutaito kehittyy vain harjoittelemalla ja ongelmia ratkaisemalla.

Hyvä ongelmanratkaisutehtävä on Ilmavirran mukaan sellainen, jonka ratkaisemiseen oppilaalla ei ole valmista mallia. Myös Näveri ym. (2013, 92) toteavat, että hyvän ongelmanratkaisun vastausta ei näe suoraan, vaan oppilas joutuu tekemään töitä vastauksen saamiseksi. Ilmavirta jatkaa, että tällöin oppilas joutuu yhdistelemään aiemmin oppimiaan asioita uudella tavalla sekä kokeilemaan uusia ja erilaisia ratkaisumalleja ja -reittejä. Ilmavirta on koonnut hyvän ongelmanratkaisun tunnusmerkkejä:

- *Ongelman lähtökohta on ratkaisijalle tuttu, todellinen tilanne.*

Mahdollisesti tuttu tilanne houkuttelee oppilaita ratkaisuyrityksiin. Jos ongelmanratkaisua harjoitetaan pienryhmässä, alkaa jo tässä vaiheessa vilkas kokemusten ja mielipiteiden vaihto, aito ihmettely ja epäily. Oppilaat vertailevat kokemuksiaan aiemmista vastaavista tilanteista ja alkavat tehdä jo satunnaisia ratkaisuyrityksiä.

- *Ongelman ratkaisemiseksi voidaan käyttää erilaisia lähestymistapoja ja matemaattisia operaatioita.*

Ratkaisu löytyy erilaisia reittejä käyttäen. Oppilaat havaitsevat varsin pian, että ratkaisuun pääseminen vaatii alkutilanteeseen palaamista ja uuden reitin valintaa.

- *Ratkaisuprosessin kesto vaihtelee.*

Jotkut ongelmat ovat ns. yhden oivalluksen ongelmia, pulmia. Näistä esimerkkinä voisi olla tulitikkutehtävät, siirrä yhtä tikkua niin, että… Tulee suosia laajempia ja monitasoisia tehtäviä. Tällaiset tehtävät suosivat mainiosti opetuksen eriyttämistä. Kaikki pääsevät alkuun, mutta myös lahjakkaimmat saavat haasteita.

- *Lopputuloksena on todellisuuteen liittyvä ratkaisu.*

On hyvä, jos oppilaat kykenevät arvioimaan ratkaisunsa oikeellisuuden. On hyvä, jos luokassa pohditaan yhdessä erilaisia löydettyjä ratkaisuja. Oppilaat saattavat rohkaistua vertailemaan erilaisia löydettyjä ratkaisureittejä ja havaitsevat, ettei ratkaisuprosessi etene aina samojen vaiheiden kautta.

Leppäaho ym. ovat määritelleet hyvän ongelmanratkaisutehtävän melkein samalla tavalla kuin Ilmavirta. Heidän mielestään hyvä ongelmanratkaisutehtävä on motivoiva, monipuolinen ongelmanratkaisultaan, kaikille oppilaille sopiva sekä ratkaisultaan uskottava. (Leppäaho ym. 2013, 73.) Ilmavirta korostaa vielä, että hyvä ongelmanratkaisutehtävä sisältää myös toimintastrategioita, jotka ovat oppimisen kannalta erityisen tärkeitä. Näitä ovat hänen mukaansa esimerkiksi mielikuvitus, joustavuus, ongelman määrittäminen sekä ymmärtäminen ja keskustelutaito. Ilmavirta toteaa näiden taitojen kehittyvän etenkin turvallisessa oppimisympäristössä.

Tuumavihkot ovat Ilmavirran mukaan syntyneet kahden tekijän yhteistyönä. Suurin osa tehtävistä on kehitelty tekijöiden omassa ideariihessä, joihin lähteinä ovat toimineet myös yleisesti käytettävissä olevat kansainväliset tutkimukset. Tehtävien aiheet löytyivät usein jo olemassa olevista yleisistä pulmista ja ongelmista. Ilmavirta toteaa, että tehtävätyypit on yritetty pitää mahdollisimman samanlaisina vuosiluokasta toiseen, jotta ne olisivat tuttuja oppilaille. Lukualueet ja laskutoimitukset tietenkin vaihtelevat eri luokka-asteilla. Kaikista Tuumavihkoista löytyy Ilmavirran mukaan ainakin seuraavat ryhmät ja tehtävätyypit:

Loogisen päättelyn tehtävät

Vihkoissa näitä edustavat mm. hinta- ja vaakapäättelyt, kuviosarjojen ja lukujonojen jatkamiset (mallintaminen), yhteisten ominaisuuksien etsiminen, koodin selvittäminen jne.

Luvullisen päättelyn tehtävät

Esimerkiksi puuttuvien lukujen täydentäminen, salasanomatehtävät koodeineen.

Verbaalisen päättelyn tehtävät

Esimerkiksi nimen, iän, ammatin sekä sukulais- tai suuruussuhteen päättelyä.

Visuaalisen päättelyn tehtävät

Esimerkiksi sokkelo- ja palapelitehtäviä, kuvion täydentämistä ja jatkamista, kolmiulotteista hahmottamista.

Avoimen päättelyn tehtävät

Päädytään erilaisiin ratkaisuihin, ratkaisut taitojen mukaiset.

Kyseiset tehtävätyypit Tuumavihkojen tekijät ovat nimenneet itse ja huomaa, kuinka samanlaisia ne ovat oman analyysini pohjalta muodostuneiden tehtävätyyppien (avoimet ongelmat, numeerinen, visuaalinen, verbaalinen) kanssa. Ilmavirran mukaan ryhmittelyn avulla Tuumavihkojen tekijät ovat taanneet erityyppisten tehtävien tasaisen jakautumisen eri vuosiluokille. Yleisenä vaarana on aina ollut tehtävien muodostuminen liian vaikeiksi. Ilmavirta toteaa, että oikean vaikeusasteen saavuttamiseksi useimmat vihkojen tehtävät onkin kokeiltu Hämeenlinnan normaalikoulun oppilailla.

Tuumavihkojen suosituimpia tehtäviä ovat Ilmavirran mukaan olleet visuaalista hahmottamista vaativat tehtävät. Analyysini mukaan näitä tehtäviä olikin eniten Tuumavihkoissa, jopa 66,66 % kaikista Tuumavihkojen tehtävistä. Ilmavirta kehuu näitä tehtäviä helpoiksi myös oppilaille, jotka eivät selviä niin hyvin luvullisista tehtävistä. Suosittuja ovat lisäksi niin sanotut salatehtävät, jotka kuuluvat luvullisen päättelyn tehtäviin. Ilmavirta korostaa, että oppilaat toimivat mielellään ikään kuin salapoliiseina ja etsivät erilaisia salasanoja ja -viestejä.

Kysymykseen, miksi ongelmanratkaisutehtäviä on niin vähän tavallisissa oppikirjoissa, Ilmavirta hakee tukea Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista. Siellä ongelmanratkaisu on mainittu vain lyhyesti. Kuten kerroin jo luvussa 2.7, POPS:ssa todetaan lyhyesti opetuksen ohjaavan oppilasta löytämään ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 158). Ilmavirta toteaakin, että alakoulussa tärkeimmiksi opittaviksi asioiksi muotoutuvat ongelmanratkaisun sijaan matemaattiset käsitteet, laskutekniikat ja soveltaminen. Ilmavirran mukaan ongelmanratkaisutaitojen kehittämistä pidetään tärkeänä kouluissa, mutta koko käsitteen avaaminen on jätetty vähälle huomiolle. Oppikirjojen tehtävistä hän kertoo seuraavasti:

Oppikirjaan sijoitetaan kaikki se, mikä ilmenee selvästi opetussuunnitelmassa. Opettajat kokevat vieläkin kirjan olevan lähes sama kuin opetussuunnitelma. Tässä on syy, miksi emme laittaneet noin suurta joukkoa ns. ongelmanratkaisutehtäviä oppikirjaan. Niitä on siellä jokaisen luvun lopussa pohdittavaa-aukeamilla. Kaikki oppikirjassa oleva sisältö mitataan aina myös jakson loppukokeessa. Kokeessa ongelmanratkaisutehtävä on viimeinen tehtävä ja pisteytetty vielä niin, että se erottelee lopulta ainoastaan vain kaikkein parhaimpia suorituksia.

Ilmavirran mukaan Tuumavihko on oiva paikka ongelmanratkaisutehtäville, koska se on toiminut jo muutaman vuosikymmenen ajan suosittuna eriyttämisen lisämateriaalina. Ilmavirta jatkaa, että Tuumavihkot on tarkoitettu kaikille oppilaille ongelmanratkaisuun, mutta suuri osa tehtävistä on tarkoitettu matemaattisesti lahjakkaille. Kaikentasoiset oppilaat löytävät Tuumavihkoista mieluista laskettavaa ja lahjakkaimmat urakoivat vihkon kannesta kanteen. Tällöin oppilas saa Ilmavirran mukaan huikeaa aivojumppaa ja kykenee monipuoliseen matemaattiseen ajatteluun. Ilmavirta toteaa, että vihkot ovat toimineet hyvänä ajan kuluna ja itsenäisesti tehtyinä horisontaalisesti eriyttävinä materiaaleina lahjakkaille oppilaille ja nopeille laskijoille. Lahjakkaimmille oppilaille on saatettu antaa jopa seuraavan vuoden vihkosia tehtäväksi. Tehtävien vaatimustasoa ei ole Ilmavirran mukaan merkattu näkyviin, koska ratkaisijat kokevat tehtävät kovin eri tavalla. Toiselle tehtävä voi olla peruskauraa, kun toiselle taas pitkän pohdinnan vaativaa. Ilmavirta kuitenkin lisää, että tehtävien laskutoimitukset eivät ylitä opetussuunnitelman luokkakohtaista tasoa. Sivut on suunniteltu Ilmavirran mukaan itsenäistä tai parin kanssa työskentelyä varten. Ilmavirta toteaa vielä, kuten itsekin jo aiemmin mainitsin, että Tuumavihkon sivulla on yleensä vain yksi tehtävänanto ja sivun loppua kohden tehtävä muuttuu haastavammaksi.

Ilmavirta toteaa, että opettajat ovat hieman epävarmoja ottamaan ongelmanratkaisutehtäviä opetukseensa. Samaa mieltä ovat myös Portaankorva-Koivisto ym. (2013, 96). Ilmavirran mukaan opettajat eivät oikein tiedä, kuinka heidän tulisi suhtautua ongelmanratkaisutehtäviin ja he jännittävät niiden käyttöönottoa. Monet opettajat sanovat, etteivät osaa opettaa ongelmanratkaisua. Ilmavirta on yrittänyt seuraavanlaisesti auttaa opettajia tässä asiassa:

Ongelmanratkaisua ei oikeastaan opeteta lainkaan. On hyvä kuitenkin, jos opettaja johdattelee oppilaitaan vaikkapa johonkin yhteiseen ongelmaan keskustellen. Selvitetään yhdessä mitä tiedetään, mitä jokin outo käsite tarkoittaa ja mitä kysytään. Kuumennetaan rauta ennen kuin sitä käydään takomaan. Sitten vaan oppilaat päästetään irti ratkaisemaan ongelmaa yhdessä tai pienryhmissä. Opettajalle jää nyt hyvin aikaa seurailla oppilaidensa ratkaisuyrityksiä ja kiertää antamassa lisätukea. Lopuksi on hyvä, jos opettaja malttaa antaa oppilaidensa esitellä ratkaisureittejään ja vertailla tuloksiaan. Opettaja kuulee mainioita esityksiä ja oppilaat saavat huomata, että ongelma saattoi ratketa noin monella eri tavalla!

Ilmavirta on käyttänyt tätä kyseistä tekniikkaa omassa opetuksessaan vähintään kerran viikossa pienissä matematiikan tuokioissa. Tällöin jokainen oppilas saa onnistumisen kokemuksia omalla tasollaan. POPS:ssa korostetaankin, että jokaisen oppilaan on saatava onnistumisen kokemuksia matematiikan parissa (Perusopetuksen opetussuunnitelma 2004, 161). Oppilaat ovat tykänneet tuokioista ja Ilmavirta kokee, että tuokiot ovat vahvistaneet oppilaiden ajattelemisen taitojen kehittymistä ja he ovat saaneet kannustusta kokeilla erilaisia lähestymistapoja.

6.4 Kahden opettajan mietteitä lahjakkaiden eriyttämisestä sekä ongelmanratkaisusta

Lähetin kyselylomakkeen kahdelle mahdollisimman erilaiselle luokanopettajalle. Opettaja1 on nainen, alle 30-vuotias kasvatustieteen maisteri, joka on toiminut opettajana 1–5 vuotta. Hän on töissä isommassa kaupungissa ja erikoistumisaineina ovat monialaiset opinnot, matematiikka sekä psykologia. Hän on lukenut myös erityispedagogiikkaa. Opettaja1 on valmistunut matematiikan aineenopettajaksi, mutta on suorittanut myös luokanopettajan pätevyyteen vaadittavat monialaiset opinnot ja työskentelee tällä hetkellä luokanopettajana. Opettaja2 on myös nainen, mutta hänellä on enemmän kokemusta opettajana työskentelystä. Hän on 51–55-vuotias ja työkokemusta opettajana hänellä on 20–30 vuotta. Opettaja2 on myös kasvatustieteen maisteri ja hän on valmistunut suoraan luokanopettajaksi. Erikoistumisaineikseen hän vastaa äidinkielen ja erityispedagogiikan. Seuraavaksi tarkastelen molempien opettajien vastauksia kysymys kerrallaan.

Opettajat osaavat molemmat hyvin monipuolisesti kertoa, millainen on matemaattisesti lahjakas oppilas.

Matemaattisesti lahjakas oppilas on sellainen, joka kykenee abstraktiin ajatteluun (operoi mieluusti luvuilla), ratkaisee ongelmatehtäviä, hahmottaa ja osaa soveltaa opittuja asioita. Opettaja1

Opettaja2 kuvailee matemaattisesti lahjakasta oppilasta seuraavasti:

- *Oppii nopeasti*
- *Looginen ajattelu*
- *Käyttää sujuvasti matematiikan taitoja*
- *Haluaa haasteita, tai ei ainakaan välttele niitä*
- *Ei pelkää virheiden tekemistä*
- *On innostunut harjoittamaan taitojaan*
- *Matemaattisen ongelman ratkaiseminen tuottaa mielihyvää*

Molempien opettajien listauksissa on hyvin samanlaisia piirteitä kuin Ilmavirran mainitsemissa opettajien kuvauksissa matemaattisesti lahjakkaista oppilaista edellisessä luvussa 6.3.

Molemmat opettajat eriyttävät matemaattisesti lahjakkaita oppilaita. Opettaja1 antaa lahjakkaille oppilaille soveltamista vaativia tehtäviä. Hän on kerännyt lähinnä konkreettista tekemistä vaativia materiaaleja eri lähteistä. Hänellä on myös luokassaan nopeita laskijoita varten erilaisia pulmatehtäviä, esimerkiksi rakentelutehtäviä, tulitikkutehtäviä sekä tangrameja. Lisämateriaalien käyttöön liittyen opettaja1 vastaa näin:

> *Käytän myös aiheesta riippuen Tuhattaiturin ja Laskutaidon lisämateriaalia sekä Laskutaidon pulmavihkoa. Näitä tehtäviä kaikki oppilaat saavat ajoittain tehdä, ei vain lahjakkaat. Monesti käytämme lopputunnista 10 minuuttia erilaisten tehtävien tekemiseen.*

Opettaja2 etsii myös itse aktiivisesti erilaisia pulmatehtäviä ja ongelmanratkaisutehtäviä oppilaita varten. Hän teettää oppilaillaan lisäksi paritöitä, jolloin ongelmia pohditaan yhdessä. Haapasalon (2004, 88) ja Näverin ym. (2012, 84) mukaan pari- ja ryhmätyöskentelyä kannattaakin suosia, sillä näin oppilaat oppivat vähitellen puhumaan ongelmanratkaisusta, eri ratkaisuvaihtoehdoista sekä omista ajattelumalleistaan. Välillä opettaja2 pyytää myös lahjakkaita oppilaita tekemään tehtäviä toisilleen. Hän ei myöskään käytä opetuksessaan pelkästään lisämateriaaleja, kuten seuraavasta lainauksesta käy ilmi:

> *En käytä tiettyjen kirjasarjojen materiaalia vaan kaikkien sarjojen, joita koulultamme löytyy. Ja oman kaapin aarteita ja kaikkea mahdollista Ärrältä ostetuista sudokuista netistä löytyviin englantilaisen koulun tehtävämonisteisiin.*

Molemmat opettajat ovat tiedostaneet, että matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttäminen on tärkeää. Kummatkin opettajat antavat lahjakkaille oppilailleen Ruokamonkin (2000, 30) korostamia soveltavia ja matemaattista ajattelua kehittäviä tehtäviä. Ilmavirta korosti lisäksi, etteivät lahjakkaat oppilaat pidä koko ajan samanlaisten tehtävien tekemisestä. Opettajat ovatkin ottaneet tämän näkökulman huomioon, ja antavat oppilailleen mahdollisimman monipuolisia tehtäviä.

Molempien opettajien mielestä matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttäminen ei ole kuitenkaan helppoa. Opettaja1 mainitsee suurimmaksi eriyttämisen ongelmaksi materiaalien vähyyden. Männistö (2013) sekä Ruokamo (2000, 39–40) korostavat, että vähäisen eriyttämisen syynä onkin usein resurssien riittämättömyys. Opettaja2 kertoo suurimmiksi eriyttämisen ongelmiksi opettajan ajan puutteen sekä omat taitonsa. Materiaalin etsimiseen ja työstämiseen menee paljon aikaa, eivätkä hänen taitonsa ole hänen mielestään tarpeeksi riittävät valmistamaan haastavia tehtäviä matemaattisesti lahjakkaille oppilaille. Kylmäoja (2001, 29) korostaakin, että usein opettajat kokevat lahjakkaiden oppilaiden eriyttämisen vaikeammaksi kuin heikkojen. Hänen mukaansa opettaja saattaa kokea myös omat kykynsä vajaiksi, kun oppilas osaa enemmän kuin opettaja itse. Opettaja2 lisää vielä muutaman asian liittyen lahjakkaiden eriyttämisen vaikeuteen:

> *Jos matemaattisesti lahjakkaalla oppilaalla on käytös-, keskittymis- tai vaikka kielellisiä ongelmia, on eriyttämisen järjestäminen vaikeampaa. Lahjakkaat oppilaat tarvitsevat open ohjausta siinä missä toisetkin. Aikaa on vähän ja ohjausta tarvitsevia monta. Minun on helppo ajatella, että keskityn niihin, jotka eivät hallitse opetettua asiaa.*

Opettaja2 toteaakin, että matemaattisesti lahjakkaiden opettaminen vaatii erilaisia järjestelyitä opettajalta sekä oman ajattelutavan muuttamista. Myös Dean (2006, 46) toteaa, kuten Opettaja2, että yleensä tavallinen luokanopettaja onkin liian kiireinen huolehtiakseen lahjakkaiden opetuksen rikastamisesta oppimisvaikeuksista kärsivien oppilaiden lisäksi.

Molemmat opettajat tietävät hyvin, millaiset tehtävät kehittävät matemaattisesti lahjakasta oppilasta. Opettaja1 vastaa kyseiseen kysymykseen näin:

> *Matemaattisesti lahjakasta oppilasta kehittää tehtävät, joissa hän voi oppia jotain uutta – soveltaa tietoa tai ratkaista pulmia. Avainajatuksenani on, että oppilas joutuisi miettimään.*

Opettaja2 kiteyttää, että matemaattisesti lahjakasta oppilasta kehittää tehtävät, jotka vaativat loogista ajattelua, kiinnostavat oppilaita ja vaativat ponnistelua. Jo Krutetskii (1976, 350) korosti loogista ajattelua vaativia tehtäviä lahjakkaiden opetuksessa. Opettaja2 jatkaa, että tärkeää on myös, jos oppilas saa ratkaista itse huomaamaansa matemaattista ongelmaa. Myös Anghileri (2005, 149), Näveri ym. (2013, 92) ja Ruokamo (2000, 30) korostavat arkipäiväisiin tilanteisiin liittyvien tehtävien tärkeyttä. Näin oppilas oppii liittämään matematiikkaa jokapäiväiseen elämäänsä.

Opettajat teettävät ongelmanratkaisutehtäviä oppilaillaan melko säännöllisesti. Opettaja1 tekee oppilaiden kanssa yhdessä viikoittain pulmatehtäviä ja erilaisia ongelmia otetaan esille muillakin tunneilla tiedon soveltamiseksi. Opettaja2 teettää ongelmanratkaisutehtäviä jokaisella matematiikan oppitunnilla. Opettajat teettävät ongelmanratkaisutehtäviä suhteellisen usein, koska Näveri ym. (2013, 92) kertovat, että 38 % opettajista teettävät ongelmanratkaisutehtäviä jokaisella matematiikan tunnilla, 41 % kerran viikossa ja 19 % opettajista ottaa ongelmanratkaisutehtäviä opetukseensa vain satunnaisesti.

Hyvästä ongelmanratkaisutehtävästä opettajat ovat melko samaa mieltä. Opettaja1 kiteyttää hyvän ongelmanratkaisutehtävän seuraavanlaisesti:

> *Hyvä ongelmanratkaisutehtävä ei saa ratketa liian helposti, oppilaiden tulee joutua ajattelemaan. Sen pitää olla ratkaisijalleen myös riittävän haastava, mutta ymmärrettävissä valmiin ratkaisun esittämiseksi.*

Opettaja2 lisää vielä, että hyvä ongelmanratkaisutehtävä on opettajalle helposti hankittavissa sekä se vaatii loogista ajattelua ja arviointikykyä. Ongelmanratkaisutehtävän pitäisi myös pystyä ratkaisemaan usealla tavalla ja oppilas joutuu ponnistelemaan ratkaistessaan ongelmaa. Opettaja2 toteaa vielä, että hyvä ongelmanratkaisutehtävä saa myös aikaan seuraavaa:

> *Se saa ihmettelemään matematiikan loogisuutta ja kauneutta.*

7 POHDINTA

7.1 Johtopäätökset

Tutkimuksen tarkoituksena oli tarkastella matematiikan lisämateriaaleja matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttämisen näkökulmasta. Lisämateriaalien tehtäviin kohdistuvien tutkimuskysymysten avulla selvitettiin, onko lisämateriaaleissa avoimia tehtäviä, ja millaisia tehtäviä ne ylipäänsä sisältävät. Avoimia tehtäviä lisämateriaalivihkoissa oli hyvin niukasti. Pulmat-vihkoissa avoimia tehtäviä oli yhteensä vain kolme ja samoin myös Timanttivihkoissa. Tuumavihkoissa oli neljä avointa tehtävää. Suurin osa oli siis suljettuja tehtäviä, kuten Haapasalo (2004, 97) sekä Joutsenlahti ja Vainionpää (2010, 140) sanovatkin, että ne ovat enemmistö oppikirjoissa. Lisämateriaalivihkot sisälsivät kuitenkin huomattavasti enemmän soveltavia pulmatehtäviä kuin tavalliset oppikirjat. Tehtävät painottuivat loogiseen päättelykykyyn ja matemaattisen tiedon soveltamiseen. Lisämateriaaleista ei kovin montaa mekaanista peruslaskua löydy, vain Timanttivihkoissa niitä oli jonkin verran. Lisämateriaalien tehtävät ovatkin lähinnä ongelmanratkaisupainotteisia pulmatehtäviä.

Yhden tutkimuskysymyksen tarkoituksena oli selvittää, eroavatko eri kirjasarjojen lisämateriaalit toisistaan. Eri kirjasarjojen lisämateriaaleista löytyi yllättävän paljon eroja. Jo pelkästään tehtävien numeroinnissa, pituudessa ja muotoilussa oli eroa. Tehtävät olivat myös hyvin erityylisiä eri vihkoissa ja eri kirjasarjojen tehtävät korostivat erilaisia asioita. Tuhattaiturin Pulmat-vihkoissa painottuivat tehtävätyypiltään eniten verbaaliset tehtävät (84,13 %), kun taas Laskutaidon Tuumavihkoissa ja Matikan Timanttivihkoissa visuaaliset tehtävät, joita oli Tuumavihkoissa 66,66 % ja Timanttivihkoissa 41,98 %. Kaikissa lisämateriaaleissa matemaattiselta sisällöltään tehtäviä kuului eniten yhtälöillä operoimista ja loogista päättelyä vaativaan ryhmään. Kaikkien kirjasarjojen lisämateriaalit on kuitenkin selvästi suunnattu matemaattisesti lahjakkaille oppilaille ja nopeille laskijoille eriyttäväksi materiaaliksi. Tekemistä vihkoissa riittää myös heikommillekin oppilaille, koska tehtävät olivat kaikissa lisämateriaaleissa monivaiheisia, joten oppilaat voivat edetä oman tasonsa mukaisesti.

Viimeiset lisämateriaaleihin kohdistuvat tutkimuskysymykset selvittivät, onko lisämateriaaleissa ongelmanratkaisutehtäviä, ja kehittävätkö tehtävät oppilaan matemaattista osaamista. Suurin osa lisämateriaalien tehtävistä oli syvää pohtimista vaativia tehtäviä, joihin ei oppilailta valmiita ratkaisumalleja löydy. Näitä voi kutsua ongelmanratkaisutehtäviksi, koska ne vaativat oppilaalta matemaattista soveltamista sekä aiemmin opittujen taitojen ja tietojen muokkaamista. Lisämateriaalit eivät siis sisältäneet lainkaan täysin rutiinitehtäviä. Ongelmanratkaisutehtäviä lisämateriaaleissa oli kiitettävästi. Voisi oikeastaan sanoa, että kaikki muut tehtävät, paitsi Timanttivihkojen mekaaniset peruslaskut olivat ongelmanratkaisua ja matemaattista soveltamista vaativia. Lisämateriaalien tehtävät kehittävät hyvin oppilaan matemaattista osaamista, koska niissä painottuu ongelmanratkaisu. Kilpatrickin ym. (2001) matemaattisen osaamisen köydestä kolme säiettä viidestä on edustettuina lisämateriaalien tehtävissä. Proseduraalista sujuvuutta kehittävät lisämateriaalien mekaaniset peruslaskut sekä helpot yhtälö- ja muuttujalaskut. Loogista päättelyä vaativat tehtävät kehittävät etenkin mukautuvaa päättelyä. Myös vertailuun ja perusteluun liittyvät tehtävät vaativat mukautuvaa päättelyä. Lisämateriaalien vaativat ongelmanratkaisutehtävät kehittävät oppilaan strategista kompetenssia.

Tuumavihkojen tekijältä, Risto Ilmavirralta, oli tarkoitus saada selville, kuinka hän kuvailee matemaattisesti lahjakkaita oppilaita, ja kuinka heitä kannattaa hänen mielestään eriyttää. Lisäksi halusin saada selville ongelmanratkaisuun liittyviä asioita, esimerkiksi millainen on hyvä ongelmanratkaisutehtävä ja minkälaiset tehtävät ovat olleet eniten oppilaiden mieleen. Yhtenä tarkastelunäkökulmana oli myös Tuumavihkojen ongelmanratkaisutehtävien kehittämisprosessi. Ilmavirta antoi kyselyssä hyvin kattavia vastauksia, joista sai paljon tärkeää tietoa. Matemaattisesti lahjakkaan oppilaan hän kuvaili samoin tavoin kuin itse olen teoriakohdassa sen kuvannut. Ilmavirta viittasi etenkin Gardnerin (1983) moniälykkyysteoriaan, joka onkin Mäkelän (2009, 4) mukaan yksi kuuluisimmista lahjakkuusteorioista. Ilmavirta on täysin samaa mieltä Ruokamon (2000, 30) kanssa, että lahjakkaat oppilaat tylsistyvät helposti, joten heille kannattaa antaa mahdollisimman soveltavia ja pitkäaikaista paneutumista vaativia tehtäviä. Ilmavirta korosti myös vaativien kotitehtävien tärkeyttä. Ilmavirran mukaan matemaattisen oppilaan eriyttämisessä tärkeintä on antaa oppilaalle mahdollisimman soveltavia ja monipuolisia tehtäviä. Oli mielenkiintoista saada tietää, että tehtävät on kehitetty kahden ihmisen yhteistyönä lähinnä omia ideapankkeja hyödyntäen. Suosituimpia tehtäviä ovat Ilmavirran mukaan olleet visuaalista hahmottamista vaativat tehtävät, joita oli analyysini perusteella selvästi eniten Tuumavihkoissa.

Opettajia koskevien tutkimuskysymysten avulla haluttiin selvittää, millaisia käsityksiä opettajilla on matemaattisesti lahjakkaista oppilaista ja heidän eriyttämisestään. Opettajien vastauksista tuli ilmi monia asioita, joita olin olettanutkin. Opettajat osasivat hyvin sujuvasti kuvailla matemaattisesti lahjakasta oppilasta. Ei ollut yllättävää, että opettajien mielestä lahjakkaan oppilaan eriyttäminen on kuitenkin hankalaa. Suurimmaksi syyksi sanottiin materiaalien huono saanti, ajan puute sekä omien taitojen riittämättömyys. Myös Dean (2006, 46), Männistö (2013) ja Ruokamo (2000, 39–40) ovat todenneet, että opettajien kiire ja resurssien puute ovat usein syynä vähäiselle eriyttämiselle. Opettajat eriyttävät kuitenkin matemaattisesti lahjakkaita oppilaita mahdollisuuksien mukaan käyttämällä lisämateriaaleja sekä muita pulmatehtäviä. Opettajat ovat myös ottaneet ongelmanratkaisutehtäviä monipuolisesti opetuksiinsa mukaan. Ongelmanratkaisu-painotteisella opetuksella saadaankin Ben-Hurin (2006, 75) mukaan parempia oppimistuloksia aikaan.

Tutkimuksen avulla saatiin vastaukset kaikkiin tutkimuskysymyksiin ja ilmeni paljon uutta tietoa ylöspäin eriyttävistä lisämateriaaleista, koska niitä on tutkittu aiemmin hyvin vähän. Lisämateriaalit sisältävät suurimmaksi osaksi haastavia ja monipuolisia tehtäviä matemaattisesti lahjakkaille oppilaille sekä nopeille laskijoille. Tehtävät ovat hyvin ongelmanratkaisupainotteisia ja kehittävät oppilaan matemaattista osaamista sujuvasti. Lisämateriaalin tekijän ja kahden opettajan näkökulmat toivat myös kaivattuja näkemyksiä lisämateriaaleihin, matemaattisesti lahjakkaan oppilaan eriyttämiseen sekä ongelmanratkaisuun liittyviin asioihin. On tärkeää, että opettajat panostavat matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttämiseen. Lahjakkaat oppilaat kyllästyvät helposti, jos he eivät saa tarpeeksi kehittävää tekemistä (Ruokamo 2000, 30). Osa työrauhaongelmista olisikin ehkä vältettävissä, jos kaikki oppilaat saisivat tarpeeksi haastavia oman tasoisiaan tehtäviä.

Voisivatko lisämateriaalit ja niiden tehtävät olla kaikkien oppilaiden näkyvillä? Ongelmanratkaisutehtävät ovat tärkeitä kaikille oppilaille, eivätkä vain lahjakkaat ole etuoikeutettuja niitä laskemaan. Lisämateriaalit ovat erinomaisia eriyttäviä materiaaleja matemaattisesti lahjakkaita ajatellen, koska sieltä he saavat kehittävää ajankulua matematiikan tunneille. Lahjakkaat oppilaat tarvitsevat muutenkin soveltavampia tehtäviä kuin muut oppilaat, joten onneksi niitä löytyy lisämateriaaleista. Ongelmanratkaisutehtäviä tulisi kuitenkin tehdä rohkeasti myös tavallisten oppilaiden kanssa, jotta heidänkin ongelmanratkaisutaitonsa kehittyisivät. Onneksi kyselyyn vastanneet opettajat ovat ymmärtäneet ongelmanratkaisutehtävien tärkeyden ja ottavat niitä opetuksessaan säännöllisesti esille myös koko luokan kesken.

7.2 Tutkimuksen eettisyys

Kaikkiin tutkimuksiin liittyy eettisiä kysymyksiä. Tutkimuksen ja etiikan yhteys onkin Tuomen ja Sarajärven (2009) mukaan monimutkainen. Tutkimuksen tulokset vaikuttavat eettisiin ratkaisuihin, mutta myös eettiset näkökulmat vaikuttavat tutkijan tutkimukseen kohdistuviin ratkaisuihin.

Eettisyys on oikeastaan tutkimuksen luotettavuuden toinen puoli. Eettisyys koskee myös tutkimuksen laatua. Tutkijan täytyy ottaa huomioon tutkimusta tehdessään, että tutkimussuunnitelma on laadukas, tutkimusasetelma mielekäs ja raportointi huolellisesti tehty. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 127.) Tutkimuksen tutkimussuunnitelman tarkistutin ohjaajallani ja muokkasin sitä itse paremmaksi moneen kertaan ennen tutkimuksen aloittamista. Tutkimusasetelma on myös toimiva ja raportointiin olen panostanut kunnolla ja ollut huolellinen sitä tehdessä. Eettisyyden näkökulmasta tutkimuksen täytyy myös olla sisäisesti johdonmukainen. Tämä näkyy etenkin argumentaatiossa sekä lähteiden käytössä. (Mt. 127.) Tutkimus etenee johdonmukaisesti ja olen pyrkinyt käyttämään uusimpia lähteitä sekä kotimaisia että kansainvälisiä teoksia lainaten.

Puhuttaessa tutkimuksen eettisyydestä huomataan, että tutkijalla on muutamia eettisiä velvoitteita yhteiskuntaa ja suurta yleisöä kohtaan. Ensinnäkin tutkimuksen tulee tähdätä luotettaviin tuloksiin. Tutkijan täytyy torjua tutkimustulosten väärinkäyttö sekä virheelliset tulkinnat. Tutkijan ei saa myöskään pyrkiä esimerkiksi jotain toimeksiantajaa miellyttäviin tuloksiin, vaan tutkimus on tehtävä tieteen vaatimuksia noudattaen. (Uusitalo 2001, 30–31.) Olen itse suorittanut tutkimuksen alusta loppuun ja pyrkinyt tekemään tutkimuksesta luotettavan ja tieteellisesti pätevän. Tutkimustuloksia ei ole käytetty väärin ja olen ollut lojaali kaikissa tutkimuksen vaiheissa.

Kaikkiin tutkimuksiin liittyy eettisiä ratkaisuja, mutta varsinkin ihmistieteissä joudutaan tarkastelemaan eettisiä kysymyksiä tutkimuksen joka vaiheessa. Tutkimuksen suunnitteluvaiheessa on tärkeää saada tutkimukseen osallistuvien suostumus ja taata luottamuksellisuus (Hirsjärvi & Hurme 2011, 19). Kysyin tutkimukseen osallistuvilta henkilöiltä luvan ja kerroin, millainen tutkimus on kyseessä. Tuumavihkojen tekijältä kysyin luvan hänen nimensä mainitsemisesta, joten hän tiesi, että hänen nimensä tulee näkyviin. Kahdelle opettajalle kuitenkin korostin, että he pysyvät nimettöminä, eikä heitä voi tunnistaa heidän vastauksiensa perusteella. Kyselylomakkeiden analyysivaiheessa olen ollut tarkkana ja tutkimustulosten suorat lainaukset ovat sanasta sanaan kyselyyn vastanneiden vastauksia.

7.3 Tutkimuksen luotettavuus

Koska tutkimuksissa pyritään välttämään virheitä, on tärkeää, että jokaisessa tutkimuksessa arvioidaan tehdyn tutkimuksen luotettavuutta. Laadullisen tutkimuksen piiristä löytyy erilaisia käsityksiä tutkimuksen luotettavuudesta. Tämän takia laadullisen tutkimuksen oppaat ovatkin hyvin erilaisia luotettavuustarkasteluiltaan. Hyvin usein laadullisen tutkimuksen luotettavuuskeskusteluissa nousevat esiin kysymykset totuudesta ja objektiivisesta tiedosta. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 134.) Tieteellisissä tutkimuksissa pyritään objektiiviseen totuuteen eli tutkimustulosten täytyy olla samat riippumatta siitä, kuka tutkimuksen on tehnyt. Tähän tavoitteeseen pyritään tarkoituksenmukaisia menetelmiä käyttämällä. (Uusitalo 2001, 25.) Tässä tutkimuksessa luokittelin tehtävät moneen kertaan sisällönanalyysin sääntöjen mukaisesti, joten tehtävien luokittelu on tarkkaan harkittu. Eskolan ja Suorannan (2005, 165–166) kehotuksen huomioiden itseni lisäksi myös toinen henkilö luokitteli tehtävät. Luokittelussa ilmaantui muutama eroavaisuus, mutta keskustelimme näistä eroista ja lopulta päädyimme molempia miellyttävään luokitukseen. Kyselylomakkeita analysoidessani referoin vastauksia rehellisesti ja suoria lainauksia käyttäessäni kopioin vastaukset suoraan niitä muuttamatta.

Tutkimuksen luotettavuutta voidaan mitata myös reliabiliteetin ja validiteetin näkökulmasta. Reliabiliteetilla tarkoitetaan tutkimustulosten toistettavuutta. Tutkijan tulee noudattaa tutkimusta tehdessään yksiselitteisiä luokittelu- ja tulkintasääntöjä. Tutkimustulosten täytyy siis pysyä muuttumattomina tutkimusajankohdasta ja -paikasta huolimatta. (Uusitalo 2001, 24, 86.) Lisämateriaalien tehtävien luokittelusäännöt olivat sen verran tarkkoja, että toistettaessa tutkimus tulokset pysyisivät hyvin varmasti samankaltaisina. Kyselylomakkeiden analysointi pysyisi myös samanlaisena, koska tulkitsin ja analysoin vastauksia koko ajan samalla tavalla. Kyselylomakkeen täyttäjien vastaukset saattaisivat kuitenkin olla hieman erilaisia. Kyselytutkimuksissa vastaaja voi muistaa jonkin asian väärin tai ymmärtää kysymyksen eri tavalla kuin aiemmin (mt. 84).

Validiteetin avulla tutkimuksen luotettavuutta tarkastellaan siitä näkökulmasta, mittaako tutkimus juuri sitä, mitä on tarkoituskin mitata. Validiteetin puuttuminen tekee tutkimuksesta mitättömän, koska silloin on tutkittu aivan muuta asiaa kuin alun perin on suunniteltu. (Uusitalo 2001, 24, 84–86.) Tutkimuskysymykset ja tutkimuksen tulokset nivoutuvat hyvin yhteen eli tuloksista löytyvät vastaukset tutkimuskysymyksiin. Tuloksien ja teoreettisen viitekehyksen välillä on myös selkeä yhteys, koska teoreettinen tieto muuttuu käytännöksi tulosten valossa. Uusitalo (2001) huomauttaa, että kvalitatiivisen tutkimuksen yhteydessä ei tavallisesti käytetä validiteetin käsitettä, mutta samat vaatimukset kohdistuvat myös kvalitatiiviseen tutkimukseen kuin kvantitatiiviseen. Teoreettiset ja empiiriset määritelmät on siis kytkettävä yhteen. Kun tutkimustulokset ovat reliaabeleita ja valideja, tutkimusaineisto on luotettavaa. (Mt. 86.)

Tutkimuksen aineiston keruun yhteydessä herää usein kysymys, kuinka paljon aineistoa täytyy kerätä, jotta tutkimus on tieteellistä, edustavaa ja yleistettävää (Eskola & Suoranta 2005, 60; Tuomi & Sarajärvi 2009, 85). Eskola ja Suoranta (2005) toteavat, että laadullisen tutkimuksen tekijä joutuu jo aineistoa kootessaan pohtimaan aineiston määrää ja sen teoreettista merkitystä tutkimustehtävän suhteen. Kvalitatiivisen tutkimusaineiston riittävyyden määrittelemiseksi ei ole olemassa mekaanisia sääntöjä, vaan kysymys on aina tapauksesta. (Eskola & Suoranta 2005, 60–62.)

Päätin rajata lisämateriaalien tutkimusaineiston neljänteen vuosiluokkaan, koska halusin saada tarkan kuvan juuri tietyn vuosiluokan eriyttävistä lisämateriaaleista. Halusin lisäksi kartoittaa lisämateriaalien tekijän näkemyksiä matemaattisesta lahjakkuudesta ja ongelmanratkaisusta. Päädyin vain yhden tekijän haastatteluun, koska halusin saada juuri kyseisen lisämateriaalien tekijän näkemyksistä enemmän tietoa. Opettajan näkökulmaa matemaattisesti lahjakkaista, heidän eriyttämisestään ja ongelmanratkaisusta päädyin tarkastelemaan vain kahden hyvin erilaisen opettajan kannalta, koska kahden opettajan vastaukset antoivat tarpeeksi aineistoa tutkimukseeni. Tuomi ja Sarajärvi (2009, 85) huomauttavat lisäksi, että laadullisessa tutkimuksessa ei kuitenkaan pyritä tilastollisiin yleistyksiin, vaan tärkeämpää on kuvata esimerkiksi jotain ilmiötä tai tapahtumaa, ymmärtää tiettyä toimintaa tai antaa teoreettinen tulkinta jollekin asialle. Tämän tutkimuksen avulla halusinkin kartoittaa, millaisia tehtäviä juuri nämä tutkimusaineistoni neljännen vuosiluokan lisämateriaalit sisältävät sekä mitä mieltä juuri kyseinen lisämateriaalin tekijä sekä kaksi opettajaa ovat matemaattisesti lahjakkaista ja ongelmanratkaisusta.

Kvalitatiivisen aineiston koon määräämiselle on ajan kuluessa muotoutunut muutamia käytännössä hyväksi havaittuja sääntöjä (Eskola & Suoranta 2005, 62). Yksi näistä on saturaatio. Sen avulla voi päätellä, onko aineisto tarpeeksi kattava. Saturaatio on tilanne, jossa aineisto alkaa toistaa itseään, eikä aineistosta saa enää tutkimustehtävän kannalta mitään uutta tietoa. Saturaation avulla voi siis olettaa, että tietty aineisto riittää tuomaan esiin kaiken tiedon, joka tutkimusaineistosta on mahdollista saada. (Mt. 62; Tuomi & Sarajärvi 2009, 87.) Neljännen vuosiluokan ylöspäin eriyttävää lisämateriaalia tutkiessani samat tehtävät alkoivat toistua, eivätkä useammat lisämateriaalivihot olisi varmaankaan tuoneet uutta informaatiota tutkimukseen muuta kuin tehtävien vaikeusasteen muuttumisen muodossa. Kahden opettajan vastaukset matemaattisesti lahjakkaista ja heidän eriyttämisestään sekä ongelmanratkaisusta olivat myös keskenään hyvin samankaltaisia, joten en usko, että vastaajien lukumäärää kasvattamalla olisi saatu enää paljoa monipuolisempaa aineistoa aikaiseksi. Saturaatio siis saavutettiin. Lisämateriaalien tekijän suhteen ei voida kuitenkaan puhua saturaatiosta, koska halusin tarkastella juuri Ilmavirran näkemyksiä lisämateriaaleista ja matemaattisesti lahjakkaista oppilaista. Jonkun toisen lisämateriaalin tekijän vastaukset olisivat saattaneet olla hyvinkin erilaisia.

Tutkimustehtävästä riippuen saturaatio on aina erilainen. Esimerkiksi, jos luokittelu aiotaan tehdä aineiston perusteella, kuten tässä tutkimuksessa tehtiin, etukäteen ei ole tietoa, montako luokkaa syntyy. Luokkia ei kuitenkaan kannata muodostaa kymmenittäin, sillä luokkien tehtävänä on tiivistää aineistoa. Jos siis luokittelemalla halutaan antaa tutkimuskohteesta monipuolinen kuva, täytyisi aineistoa olla tarpeeksi, jotta luokittelu on mielekästä. Tärkeää olisikin pohtia, haluaako aineiston olevan homogeeninen vai heterogeeninen. Näin ollen heterogeenisyyden tutkiminen vaatii suuremman aineiston kuin homogeenisyyden tutkiminen. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 89–90.) Halusin ryhmitellä lisämateriaalien tehtävät mieluisiin luokkiin, joiden avulla aineiston monipuolisuus on helppoa tiivistää. Tarkastelin eri kirjasarjojen lisämateriaaleja myös siitä näkökulmasta, onko materiaaleissa havaittavissa samankaltaisuutta.

Saturaation lisäksi laadullisessa tutkimuksessa luotettavuuden kannalta tärkeää on yleistettävyys. Kaikissa tutkimuksissa tapauksen mahdollisimman monipuolinen erittely voi johtaa tutkimustulosten yleistettävyyteen. Yleistettävyyttä parantaa myös tutkimuksen vertailuasetelma. Vertailua voi tehdä tutkimuksen sisällä tai muihin tutkimustuloksiin tai tulkintoihin nähden. (Eskola & Suoranta 2005, 65–66.) Kävin tutkimusaineiston läpi hyvin tarkasti ja erittelin tehtävät huolellisesti sopiviin luokkiin. Vertailin eri tehtäväluokkia keskenään ja varmistin, että jokainen luokka eroaa muista luokista perustellusti. Vertailua tapahtui myös eri kirjasarjojen välillä. Halusin tarkastella, kuinka eri kirjasarjojen tehtävät eroavat toisistaan. Kyselylomakkeiden analyysissa vertailin opettajien vastauksia toisiinsa ja referoin niitä mahdollisimman tarkasti. Lisäksi liitin vastauksia teoreettisiin näkökulmiin. Laadullisessa tutkimuksessa tutkija joutuu jatkuvasti analysoimaan tekemiään ratkaisuja ja näin ottamaan kantaa tekemänsä työn luotettavuuteen. Laadullisessa tutkimuksessa kuitenkin tärkeintä luotettavuuden kannalta ovat tulkinnat, joita aineistosta tehdään. Nyt ei ratkaise aineiston koko ja siitä saadut tunnusluvut, vaan tulkintojen laatu. (Mt. 67, 208.)

7.4 Jatkotutkimusideoita

Tämä tutkimus oli vain pieni katsaus matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden ja ongelmanratkaisun kiehtovaan maailmaan. Lahjakkuus ja varsinkin matemaattinen lahjakkuus on aiheena mielenkiintoinen ja keskustelua herättävä, eikä sillä saralla ole pulaa tutkimusideoista. Sama koskee myös ongelmanratkaisua. Ongelmanratkaisua pidetään entistä tärkeämpänä, varsinkin kun se on ollut nyt uusimman PISA-tutkimuksen myötä paljon esillä (ks. Kupari ym. 2013).

Ensinnäkin tätä kyseistä tutkimusta voisi lähteä laajentamaan tutkimalla kaikkien vuosiluokkien matematiikan ylöspäin eriyttävät lisämateriaalit. Nyt tutkimuksen kohteena olivat vain neljännen luokan lisämateriaalit kahdelta eri kustantajalta. Tutkimalla kaikki lisämateriaalit saataisiin saturaatio nousemaan. Kun tutkittavien lisämateriaalien määrä lisääntyisi, olisivat tutkimustulokset entistä luotettavampia. Täten voisi tarkastella myös paremmin, onko eri kustantajien lisämateriaaleissa eroja, tai onko ongelmanratkaisutehtävissä suuria eroja eri vuosiluokkien välillä. Tutkimuskohdetta voisi lisäksi laajentaa koskemaan myös verkkopohjaisia oppimisympäristöjä ja niiden lisämateriaaleja, koska verkko-oppimisympäristöt ovat koko ajan entistä suuremmassa käytössä kouluissa. Internetin maailma ja tietokoneella työskentely on nykyään hyvin yleistä lähes kaikille oppilaille, joten on luonnollista ottaa myös verkkomateriaalit osaksi opetusta.

Näiden edellä mainittujen tutkimuskohteiden lisäksi opettajien näkökulmasta yksi tärkeä tutkimuskohde olisi, millaista on, kun oppilaana on matemaattisesti lahjakas oppilas. Jatkotutkimuksessa voisi kiinnittää huomiota esimerkiksi siihen, kuinka opettaja panostaa lahjakkaan oppilaan matematiikan opetukseen, ja millaisia keinoja opettaja käyttää lahjakkaan oppilaan tunnistamisessa. Olisi kiinnostavaa tutkia, eriyttävätkö opettajat matemaattisesti lahjakkaita oppilaita. Jos he eivät eriytä, niin miksi eivät? Jos eriyttävät, niin millä tavalla? Antavatko opettajat lisätehtäviä lahjakkaille oppilaille vai käyttävätkö kenties lisämateriaaleja? Vai tekevätkö he itse tehtäviä oppilailleen? Lisämateriaalien käytön kannalta olisi mielenkiintoista lisäksi saada selville, miksi opettajat käyttävät tai eivät käytä niitä. Olisi tärkeää tutkia, ovatko opettajat hyötyneet lisämateriaalien käytöstä. Ovatko he huomanneet oppilaiden matemaattisessa osaamisessa edistymistä? Tai, jos opettajat eivät käytä lisämateriaaleja, onko niiden käyttämättömyydelle esteenä esimerkiksi materiaalien niukka hankkiminen ja koulujen rahapula?

Ongelmanratkaisun kannalta hyvä jatkotutkimusaihe olisi esimerkiksi, ottavatko opettajat ongelmanratkaisutehtäviä mukaan matematiikan opetukseensa. Jos eivät ota, niin tärkeää olisi tutkia siihen johtaneita syitä. Löytyisikö opettajien syistä samoja piirteitä kuin, joista kerroin jo luvussa 2.6.1 (ks. Ben-Hur 2006, 74; Leppäaho 2007, 134; Näveri ym. 2013, 92; Portaankorva-Koivisto ym. 2013, 96)? Jos taas ongelmanratkaisutehtävät ovat opettajien mielestä tärkeitä matematiikan oppitunneilla, kuinka he opettavat ongelmanratkaisua oppilaille? Laittavatko opettajat vain oppilaat ratkaisemaan ongelmatehtäviä yksin, yhdessä tai parin kanssa vai pohjustetaanko ongelmia jotenkin ennalta? Mielenkiintoista olisi myös tietää, onko opettajilla itsellään jonkinlaisia ongelmanratkaisustrategioita, joita he käyttävät joko itse tai opetuksessaan. Yksi tärkeä näkökulma ongelmanratkaisuun liittyen olisi myös tutkia opettajien käsityksiä ongelmanratkaisutehtävistä ja ongelmanratkaisusta ylipäätänsä, koska kuten jo luvussa 2.6.1 kerroin, että Ben-Hur (2006, 71) on huomannut opettajilla olevan vaikeuksia erottaa jopa tavalliset tehtävät ja ongelmanratkaisutehtävät toisistaan.

Matemaattinen lahjakkuus sekä matemaattinen ongelmanratkaisu ovat siis hyvin ajankohtaisia aiheita tällä hetkellä, varsinkin uusimpien PISA-tulosten julkistamisen jälkeen. Oppilaiden matemaattisen osaamisen ja ongelmanratkaisukyvyn kehittäminen ovat avainasemassa oppilaiden pärjäämiselle PISA-tutkimuksissa. Tulevaisuutta ajatellen matemaattinen lahjakkuus ja ongelmanratkaisu saavat varmasti useita mielenkiintoisia tutkimuksia aikaan, koska tutkimusideoista ei ainakaan ole pulaa. Siten uusien tutkimustulosten valossa voidaan entistä paremmin vaikuttaa matematiikan opetukseen, eritasoisten oppilaiden eriyttämiseen ja täten oppilaiden matemaattiseen osaamiseen.

LÄHTEET

Anghileri, J. 2005. Children's mathematical thinking in the primary years: Perspectives on children's learning. Lontoo: Continuum International Publishing.

Ben-Hur, M. 2006. Concept rich mathematics instruction: Building a strong foundation for reasoning and problem solving. Alexandria: Association for Supervision & Curriculum Development (ASCD).

Booky.fi-pikakirjakauppa. Saatavilla www-muodossa. <http://www.booky.fi/tuote/risto_ilmavirta/laskutaidon_tuumavihko_4_kevatosa/9789510285190>. Luettu 30.3.2014.

Dean, J. 2006. Meeting the learning needs of all children. Personalised learning in the primary school. New York: Routledge.

Eskola, J. & Suoranta, J. 2005. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Fox, S. & Surtees, L. 2010. Mathematics across the curriculum. Problem-solving, reasoning and numeracy in primary schools. Lontoo: Continuum International Publishing.

Gardner, H. 1983. Frames of mind. The theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Goodhew, G. 2009. Meeting the needs of gifted and talented students. Lontoo: Continuum International Publishing.

Haapasalo, L. 2004. Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivismin peruselementtinä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka -näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 84–99.

Haapasalo, L. 2011. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Joensuu: MEDUSA-Software.

Harri, R., Sironen, S., Hähkiöniemi, M. & Viiri, J. 2012. Opetusharjoittelijoiden tutkivan matematiikan tunneilla esittämät kysymykset ja uskomukset niiden taustalla. Teoksessa H. Krzywacki, K. Juuti & J. Lampiselkä (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden ajankohtaista tutkimusta. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja. Ainedidaktisia tutkimuksia 2, 13–28.

Heinonen, J.-P. 2005. Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit. Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 257.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2004. Tutki ja kirjoita. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H. & Viholainen, A. 2012. Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä. Teoksessa H. Krzywacki, K. Juuti & J. Lampiselkä (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden ajankohtaista tutkimusta. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja. Ainedidaktisia tutkimuksia 2, 29–44.

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Väitöskirja.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010. Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Tampere: Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisusarja A31, 77–89.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2010. Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E.K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Opetushallitus, Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Edita Prima Oy, 137–148.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, D.C.: National Academy Press.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E. & Vettenranta, J. 2013. PISA12. Ensituloksia. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2013:20.

Krutetskii, V.A. 1976. The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: The University of Chicago Press.

Kylmäoja, K. 2001. Matematiikan opetuksen eriyttäminen peruskoulun ensimmäisellä luokalla. Helsinki: Helsingin kaupungin opetusviraston julkaisusarja.

Laaksola, H. 2007. Lahjakkaille erityiskohtelu. Opettaja 101 (8–9), 5.

Laine, A., Näveri, L., Kankaanpää, A., Ahtee, M., Pehkonen, E. & Hannula, M. S. 2013. Opettajien ja oppilaiden kysymykset ongelmanratkaisutunnilla. Teoksessa E. Yli-Panula, H. Silfverberg & E. Kouki (toim.) Opettaminen valinkauhassa. Ainedidaktinen symposiumi Turussa 15.3.2013. Helsingin yliopisto. Opettajan koulutuslaitos. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja. Ainedidaktisia tutkimuksia 7, 81–94.

Lehtonen, H. 1994. Lahjakas oppilas koulussa. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 3.

Leikin, R. & Stanger, O. 2011. Teachers´ images of gifted students and the roles assigned to them in heterogeneous mathematics classes. Teoksessa B. Sriraman & K. Hwa Lee (toim.) The elements of creativity and giftedness in mathematics. Rotterdam: Sense Publishers,103–118.

Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Väitöskirja.

Leppäaho, H., Silfverberg, H. & Joutsenlahti, J. 2013. Valtakunnallisen kokeen kuudennen luokan ongelmanratkaisutehtävien ja oppilaiden ratkaisuprosessien analysointia. Teoksessa M. Hähkiöniemi, H. Leppäaho, P. Nieminen & J. Viiri (toim.) Proceedings of the 2012 annual conference of finnish mathematics and science education research association. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran konferenssijulkaisu 2012. Jyväskylä: Jyväskylä University Printing House, 71–82.

Linnanmäki, K. 2004. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka –näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 241–254.

Metsämuuronen, J. 2010. Osaamisen ja asenteiden muutos perusopetuksen 3–5 luokilla. Teoksessa E.K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Opetushallitus, Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Edita Prima Oy, 93–136.

Mäkelä, S. 2009. Lahjakkuuden ja erityisvahvuuksien tunnistaminen. Opetushallitus. Saatavilla www-muodossa. <http://www.lahjakkuus.fi/page10.php>. Luettu 30.1.2013.

Männistö, R. 2013. Miten tukea matemaattisesti lahjakasta oppilasta? Luma-Sanomat 14.1.2013. Saatavilla www-muodossa. <http://www.luma.fi/artikkelit/1590/miten-tukea-matemaattisesti-lahjakasta-oppilasta>. Luettu 13.2.2013.

Niemi, E.K. 2010. Matematiikan oppimistulokset 6. vuosiluokan alussa. Teoksessa E.K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Opetushallitus, Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Edita Prima Oy, 17–70.

Noponen, P. 2000. Onko opettajankoulutuksessa erityispedagogiikkaa? Erityispedagogiikan määrä ja laatu opettajankoulutuksessa. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylän yliopisto.

Näveri, L., Ahtee, M., Laine, A., Pehkonen, E. & Hannula, M.S. 2012. Erilaisia tapoja johdatella ongelmanratkaisutehtävään – esimerkkinä aritmagon-tehtävän ratkaiseminen alakoulun kolmannella luokalla. Teoksessa H. Krzywacki, K. Juuti & J. Lampiselkä (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden ajankohtaista tutkimusta. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja. Ainedidaktisia tutkimuksia 2, 81–98.

Näveri, L., Araya, P., Pehkonen, E., Laine, A. & Hannula, M.S. 2013. Suomalaisten ja chileläisten alaluokkien opettajien esille tuomia uskomuksia ongelmanratkaisusta. Teoksessa M. Hähkiöniemi, H. Leppäaho, P. Nieminen & J. Viiri (toim.) Proceedings of the 2012 annual conference of finnish mathematics and science education research association. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran konferenssijulkaisu 2012. Jyväskylä: Jyväskylä University Printing House, 83–94.

Otavan oppimateriaalit. Saatavilla www-muodossa. <http://www.otava.fi/oppimateriaalit/luokat1-6/tuhattaituri/>. Luettu 30.3.2014.

Pehkonen, E. 2000. Matemaattisen ongelmanratkaisun toteutuksesta peruskoulun yläasteella. Teoksessa Ahtee, M. & Asunta, T. (toim.) Tietoa ja toimintaa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksia. Jyväskylän yliopisto. Journal of Teacher Researcher / Tutkiva opettaja 2/2000, 249–260.

Pehkonen, E. 2011. Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 328, 11–27.

Pendarvis, E.D., Howley, A.A. & Howley, C.B. 1990. The abilities of gifted children. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Opetushallitus. Saatavilla www-muodossa. <http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf>. Luettu 4.3.2014.

Perusopetuslaki 1998. 21.8.1998/628. Saatavilla www-muodossa. <http://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980628#L7P25>. Luettu 30.1.2013.

Polya, G. 1945. How to solve it. A new aspect of mathematical method. Toinen painos. New Jersey: Princeton University Press.

Portaankorva-Koivisto, P., Laine, A., Näveri, L. & Salo i Nevado, L. 2013. Kaksi erilaista luokanopettajaa – kaksi erilaista matemaattisen ongelmanratkaisun ohjaajaa. Teoksessa E. Yli-Panula, H. Silfverberg & E. Kouki (toim.) Opettaminen valinkauhassa. Ainedidaktinen symposiumi

Turussa 15.3.2013. Helsingin yliopisto. Opettajan koulutuslaitos. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja. Ainedidaktisia tutkimuksia 7, 95–107.

Ruokamo, H. 2000. Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen teknologiaperustaisessa oppimisympäristössä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos.

Saarinen, T. & Tuominen, R. 2007. Lasken, siis opin? Analyysi viidennen luokan matematiikan oppimateriaaleista. Tampereen yliopisto, Hämeenlinnan toimipiste. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma. Saatavilla www-muodossa. <http://tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/78036/gradu01855.pdf?sequence=1> Luettu 20.3.2014.

Sanoma Pro:n oppimateriaalit. Saatavilla www-muodossa. <http://sanomapro.fi/matikka-4-timanttivihko-syksy >. Luettu 30.3.2014

Smith, C. 2005. Teaching gifted and talented pupils in the primary school: A practical guide. Lontoo: SAGE Publications Inc.

Taipale, A. 2006. Matematiikan opettamisesta ja oppimisesta. Teoksessa K. Ruoho (toim.) Tehtävänä erityispedagoginen näkökulma. Tutkimusta erityiskasvatuksen laitoksella. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan selosteita N:o 97.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2003. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2009. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Uusikylä, K. 1992. Lahjakkuus ja kasvatus. Tampereen yliopiston Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos. Opetusmoniste no 2.

Uusikylä, K. 1998. Apua! Lapsihan on älykäs! Teoksessa A. Malin & K. Männikkö (toim.) Älykkyys – valoa ja varjoja. Jyväskylä: Atena Kustannus Oy, 66–81.

Uusikylä, K. 2000. Lahjakkaiden kasvatus. Toinen painos. Jyväskylä: PS-kustannus.

Uusikylä, K. 2002. Voiko luovuutta opettaa? Teoksessa P. Kansanen & K. Uusikylä (toim.) Luovuutta, motivaatiota, tunteita. Opetuksen tutkimuksen uusia suuntia. Jyväskylä: PS-kustannus, 42–69.

Uusitalo, H. 2001. Tiede, tutkimus ja tutkielma. Johdatus tutkielman maailmaan. Helsinki: WSOY.

Vainionpää, J. & Joutsenlahti, J. 2010. Opettajien matematiikkakuva ja matematiikan opettamisen olosuhteet. Teoksessa E.K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Opetushallitus, Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Edita Prima Oy, 149–164.

Valli, R. 2010. Kyselylomaketutkimus. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin I. Jyväskylä: PS-kustannus, 103–127.

Vastamäki, J. 2010. Kyselylomaketutkimus: tutkimusasetelman ja mittareiden valinta. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin I. Jyväskylä: PS-kustannus, 128–139.

Vilkka, H. 2005. Tutki ja kehitä. Helsinki: Tammi.

Wilson, J. W. 1971. Evaluation of learning in secondary school mathematics. Teoksessa B.S. Bloom, J.T. Hastings & G.F. Madaus (toim.) Handbook on formative and summative evaluation of student learning. New York: McGraw-Hill Book Company, 643–696.

Analysoidut oppimateriaalit

Ilmavirta, R. & Uus-Leponiemi, T. 2008. Laskutaidon Tuumavihko 4 kevätosa. 7.–8. painos. Helsinki: WSOY.

Ilmavirta, R. & Uus-Leponiemi, T. 2011. Laskutaidon Tuumavihko 4 syysosa. 7.–8. painos. Helsinki: WSOYpro Oy.

Korhonen, M. & Nyrhinen, K. 2012. Tuhattaituri Pulmat 4a. Keuruu: Otava.

Korhonen, M. & Nyrhinen, K. 2013. Tuhattaituri Pulmat 4b. Keuruu: Otava.

Pesonen, T. 2012. Matikka Timanttivihko 4 kevät. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Pesonen, T. 2013. Matikka Timanttivihko 4 syksy. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Liite 1: Kyselylomake opettajille

Kysely matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttämisestä ja lisämateriaalin käytöstä

Vastaajan taustatiedot

Merkitse rasti oikeaan kohtaan.

Sukupuoli

mies ___ nainen ___

Ikä

30-vuotias tai alle ___ 31–35-vuotias ___ 36–40-vuotias ___
41–45-vuotias ___ 46–50-vuotias ___ 51–55-vuotias ___
56–60-vuotias ___ yli 60-vuotias ___

Kuinka kauan olet toiminut opettajana?

alle vuoden ___ 1–5 vuotta ___ 6–10 vuotta ___
10–20 vuotta ___ 20–30 vuotta ___ yli 30 vuotta ___

Koulutus?

Erikoistumisaine?

Oletko lukenut erityispedagogiikkaa? Kyllä ___ En ___

Matemaattinen lahjakkuus ja ongelmanratkaisutehtävät

Vastaa seuraaviin kysymyksiin oman mielipiteesi mukaan.

1. Millainen on matemaattisesti lahjakas oppilas?

2. Eriytätkö matemaattisesti lahjakasta oppilasta? Jos eriytät, miten? Jos et eriytä, miksi et?

3. Onko opettajan helppo eriyttää matemaattisesti lahjakasta oppilasta tavallisessa luokkaopetuksessa?

4. Millaiset tehtävät kehittävät matemaattisesti lahjakasta oppilasta?

5. Käytätkö opetuksessa matematiikan lisämateriaaleja nopeille oppijoille? Jos käytät, minkä kirjasarjan lisämateriaalia ja kuinka usein? Jos et käytä, miksi et?

6. Lasketteko matematiikan oppitunneilla ongelmanratkaisutehtäviä? Jos laskette, kuinka usein? Jos ette, miksi ette?

7. Millainen on hyvä ongelmanratkaisutehtävä?

Kiitos ajastanne ja vastauksistanne!