TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Hannu Pajula

Stirlingin luvuista

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Maaliskuu 2014

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

PAJULA, HANNU: Stirlingin luvuista

Pro gradu -tutkielma, 33 s.

Matematiikka

Maaliskuu 2014

Tiivistelmä

Tämän tutkielman aiheena ovat Stirlingin luvut, jotka on nimetty englantilaisen matemaatikon James Stirlingin (1692-1770) mukaan. Stirlingin lukuja on kahta lajia. Stirlingin toiset luvut $S(n, k)$ määritellään n-alkioisen joukon k-ositusten lukumäärinä. Luvussa 3 todistetaan rekursiivinen kaava ja muita laskukaavoja Stirlingin luvuille $S(n, k)$.

Luvussa 4 määritellään Stirlingin ensimmäiset luvut $s(n, k)$ osoittamalla yhteys muuttujan x astetta n olevien reaalikertoimisten polynomien ja kertomapolynomien välillä. Myös Stirlingin ensimmäisille luvuille $s(n, k)$ todistetaan rekursiivinen kaava ja muita laskukaavoja. Aliluvussa 4.4 osoitetaan Stirlingin ensimmäisten lukujen yhteys n-alkioisen joukon permutaatiosyklien lukumäärään.

Tutkielman viimeisessä luvussa määritellään lukujonon generoiva ja eksponentiaalinen generoiva funktio. Tämän jälkeen johdetaan lauseke lukujen $S(n, k)$ generoivalle funktiolle sekä lukujen $S(n, k)$ ja $B(n)$ eksponentiaaliselle generoivalle funktiolle.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman pääaiheena ovat Stirlingin luvut, jotka on nimetty englantilaisen matemaatikon James Stirlingin (1692-1770) mukaan. Stirlingin lukuja on kahta lajia. Koska molemmille lajeille on olemassa kombinatorinen tulkinta, kertaamme luvussa 2 kombinatoriikan perustuloksia sekä esittelemme tutkielmassa käytettäviä merkintöjä.

Luvussa 3 määrittelemme n-alkioisen joukon osituksen käsitteen joukko-opista tutulla tavalla ja havainnollistamme ositusta esimerkein. Tämän jälkeen määrittelemme *Stirlingin toiset luvut* $S(n, k)$ n-alkioisen joukon k-ositusten lukumäärinä. Lauseessa 3.1 johdamme lausekkeen, jolla luvut $S(n, k)$ voidaan määrittää rekursiivisesti. Tutkimme lisäksi lukujen $S(n, k)$ arvoa tietyissä erikoistapauksissa sekä johdamme vaihtoehtoisia lausekkeita lukujen $S(n, k)$ määrittämiseksi. Aliluvussa 3.3 määrittelemme *Bellin luvut* $B(n)$ Stirlingin toisten lukujen summina. Lauseessa 3.8 esitämme myös Bellin luvuille rekursiivisen kaavan.

Luvun 4 aloitamme tutkimalla muuttujan x astetta n olevia polynomeja. Määrittelemme *Stirlingin ensimmäiset luvut* $s(n, k)$ tiettyä muotoa olevien polynomien vakiokertoimina. Lauseessa 4.1 johdamme rekursiivisen lausekkeen luvuille $s(n, k)$ käyttäen apuna kertomafunktion määritelmää. Aliluvussa 4.3 perehdymme kevyesti muuttujan x astetta n olevien polynomien esittämiseen matriisien avulla. Esimerkissä 4.8 osoitamme Stirlingin lukujen $S(n, k)$ ja $s(n, k)$ matriisien olevan polynomivektoriavaruuden kannanmuutosmatriiseja ja lauseessa 4.7 toistensa käänteismatriiseja. Stirlingin ensimmäisten lukujen kombinatoriseen tulkintaan perehdymme aliluvussa 4.4, kun osoitamme, että $|s(n, k)|$ liittyy n-alkoisen joukon syklisiin permutaatioihin. Aliluvussa 4.5 määrittelemme lukujonon differenssin käsitteen ja osoitamme toisen yhteyden lukujen $S(n, k)$ ja polynomien välille tutkimalla funktion x^n differenssejä.

Luvussa 5 määrittelemme generoivan funktion ja eksponentiaalisen generoivan funktion käsitteen. Esimerkkien avulla johdamme lausekkeet lukujen $S(n, k)$ generoivalle funktiolle sekä lukujen $S(n, k)$ ja $B(n)$ eksponentiaalisille generoiville funktiolle.

Tutkielman päälähteinä on käytetty Kenneth B. Bogartin teosta *Introductory Combinatorics* sekä John G. Michaelsin ja Kenneth H. Rosenin kirjaa *Applications of Discrete Mathematics*. Aliluku 4.5 ja luku 5 perustuvat kuitenkin pitkälti David R. Mazurin teokseen *Combinatorics - A Guided Tour*.

Tutkielman lukemiseksi riittää kombinatoriikan ja lineaarialgebran perusteet. Määritelmiä ja lauseita on pyritty havainnollistamaan runsain esimerkein ja lauseiden todistustekniikat vaihtelevat kombinatorisesta päättelystä induktiotodistuksiin sen mukaan, mikä sopii kuhunkin tilanteeseen parhaiten.

2 Kombinatoriikan perusteita

Tässä luvussa kertaamme kombinatoriikan merkintöjä ja yleisimpiä laskukaavoja. Merkitsemme n-alkioista joukkoa symbolilla $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, kun $n \geq 1$. Vastaavasti merkitsemme $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$, $[n-1] = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja niin edelleen. Todistamme lauseen 2.2 esimerkkinä kombinatorisesta todistuksesta, mutta muuten sivuutamme todistukset, koska ne ovat tutkielman aiheen kannalta vain aputuloksia.

2.1 Osajoukot

Joukon $[n]$ k-osajoukolla tarkoitamme joukkoa, joka on saatu valitsemalla k $(0 \leq k \leq n)$ mielivaltaista, mutta eri alkiota joukosta $[n]$.

Lause 2.1. *Joukon $[n]$ k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.1}$$

Erityisesti $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, kun $n \geq 0$, ja $\binom{n}{k} = 0$ aina, kun $n < k$.

Lause 2.2. *Olkoot n ja k kokonaislukuja ja olkoon $0 < k < n$. Tällöin*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{2.2}$$

Todistus. Yhtälön vasen puoli ilmaisee joukon $[n]$ k-osajoukkojen lukumäärän. Tällaiset osajoukot voidaan jakaa kahteen ryhmään sen mukaan, sisältävätkö ne alkion n vai ei. Alkion n sisältäviä k-osajoukkoja on $\binom{n-1}{k-1}$ kappaletta, koska ne ovat muotoa $A \cup \{n\}$, missä A on joukon $[n-1]$ $k-1$-osajoukko. Joukon $[n]$ k-osajoukkoja, jotka eivät sisällä alkiota n, on $\binom{n-1}{k}$ kappaletta, koska ne ovat myös joukon $[n-1]$ k-osajoukkoja. □

2.2 Osajonot

Joukon $[n]$ k-osajonolla tarkoitamme jonoa tai järjestettyä joukkoa, joka on muodostettu valitsemalla k $(0 \leq k \leq n)$ mielivaltaista mutta eri alkiota joukosta $[n]$. Jos $k = n$, kutsumme järjestettyä joukkoa joukon $[n]$ *permutaatioksi.*

Lause 2.3. *Joukon $[n]$ k-alkioisten osajonojen lukumäärä on*

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \tag{2.3}$$

Erityisesti $(n)_0 = 1$, $(n)_1 = n$ ja $(n)_n = n!$, kun $n \geq 0$, ja $(n)_k = 0$ aina, kun $k > n$.

2.3 Funktioiden lukumääristä

Monet kombinatoriset valintatilanteet voidaan samaistaa funktioiksi, jolloin valintamahdollisuuksien lukumäärä kertoo funktioiden lukumäärän.

Esimerkki 2.1. Funktio $f : [n] \to [k]$ voidaan tulkita jonona

$$\begin{aligned} f = f([n]) &= f(\{1, 2, \ldots, n\}) \\ &= \big(f(1), f(2), \ldots, f(n)\big), \end{aligned}$$

missä $f(i) \in [k]$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Koska jonon jäsenet saavat olla keskenään samoja, on funktioiden $f : [n] \to [k]$ lukumäärä $\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ kpl}} = k^n$.

Esimerkki 2.2. Injektio $g : [k] \to [n]$ $(0 < k \leq n)$ voidaan tulkita joukon $[n]$ k-osajonona

$$\begin{aligned} g = g([k]) &= g(\{1, 2, \ldots, k\}) \\ &= \big(g(1), g(2), \ldots, g(k)\big), \end{aligned}$$

missä $g(i) \in [n]$, kun $i = 1, 2, \ldots k$. Koska g on injektio, niin $g(i) \neq g(j)$ aina, kun $i \neq j$ $(i, j \in [k])$. Jonon jäsenet eivät saa toistua, joten injektioiden $g : [k] \to [n]$ lukumäärä on $n(n-1)\cdots(n-k+1) = (n)_k$.

Esimerkki 2.3. Bijektio $\pi : [n] \to [n]$ voidaan tulkita jonon $(1, 2, \ldots, n)$ permutaationa. Täten bijektioiden $\pi : [n] \to [n]$ lukumäärä on $(n)_n = n!$.

Esimerkki 2.4. Surjektio $f : [n] \to [k]$ voidaan tulkita jonona

$$\begin{aligned} f = f([n]) &= f(\{1, 2, \ldots, n\}) \\ &= \big(f(1), f(2), \ldots, f(n)\big), \end{aligned}$$

missä $f(i) \in [k]$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$, ja jokainen joukon $[k]$ jäsen esiintyy jonossa $f([n])$ vähintään kerran. Voidaan osoittaa, että tällaisten jonojen lukumäärä on

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

(ks. [1, s. 103]).

3 Osituksen ja Stirlingin toiset luvut

Tässä luvussa määrittelemme ensin n-alkioisen joukon osituksen käsitteen. Osituksen määritelmään perustuen määrittelemme Stirlingin toiset luvut $S(n, k)$ ja Bellin luvut $B(n)$. Ellei toisin mainita, luvut n ja k ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja muut merkinnät samoja kuin luvussa 2.

3.1 Ositukset

Määritelmä 3.1. Joukko $P = \{A_i \mid i \in I\}$ on joukon $[n]$ *ositus*, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. $A_i \neq \emptyset$, kun $i \in I$
2. $[n] = \bigcup_{i \in I} A_i$
3. $A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$ $(i, j \in I)$.

Joukko I on mielivaltainen indeksijoukko ja joukkoja A_i $(i \in I)$ sanotaan osituksen P *luokiksi*.

Määritelmä 3.2. Jono $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ on joukon $[n]$ *järjestetty k-ositus*, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. $[n] = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$ $(i, j \in [k])$.

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan funktiota $f : [n] \to [k]$. Olkoon A_i joukko siten, että $A_i = \{x \in [n] \mid f(x) = i \in [k]\}$. Funktio f muodostaa joukon $[n]$ (järjestetyn) k-osituksen, sillä $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$ $(i, j \in [k])$. Jos lisäksi $A_i \neq \emptyset$ kaikilla $i \in [k]$, niin f on surjektio.

Esimerkki 3.2. Joukon [4] 2-osaiset ositukset ovat

$$(\{1,2,3\},\{4\}), \quad (\{1,2,4\},\{3\}), \quad (\{1,3,4\},\{2\}), \quad (\{2,3,4\},\{1\})$$
$$(\{1,2\},\{3,4\}), \quad (\{1,3\},\{2,4\}) \quad \text{ja} \quad (\{1,4\},\{2,3\}).$$

Joukon [4] 3-osaiset ositukset ovat

$$(\{1,2\},\{3\},\{4\}), \quad (\{1,3\},\{2\},\{4\}), \quad (\{1,4\},\{2\},\{3\})$$
$$(\{2,3\},\{1\},\{4\}), \quad (\{2,4\},\{1\},\{3\}) \quad \text{ja} \quad (\{3,4\},\{1\},\{2\}).$$

Joukon erikokoisten ositusten lukumäärä riippuu sekä joukon koosta että osien lukumäärästä. Annamme seuraavaksi määritelmän aiheeseen liittyen.

3.2 Stirlingin toiset luvut

Määritelmä 3.3. *Stirlingin toinen luku* $S(n,k)$ on joukon $[n]$ k-ositusten lukumäärä. Erityisesti $S(n,0) = 0$, kun $n > 0$ ja $S(n,k) = 0$ aina, kun $n < k$. Sovitaan lisäksi, että $S(0,0) = 1$ (vrt. [5, s. 98-99]).

Esimerkki 3.3. Esimerkin 3.2 perusteella $S(4,2) = 7$ ja $S(4,3) = 6$.

Esimerkki 3.4. $S(n,1) = 1$, kun $n \geq 1$, sillä joukon $[n]$ ainoa yksiluokkainen ositus on $(\{1,2,\ldots,n\}) = ([n])$. Vastaavasti $S(n,n) = 1$, kun $n \geq 0$, sillä joukon $[n]$ ainoa n-luokkainen ositus on $(\{1\},\{2\},\ldots,\{n\})$.

Lause 3.1. *Olkoot $n \geq 1$ ja $k \geq 1$. Tällöin*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k). \tag{3.1}$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 80]). Kaavan (3.1) vasen puoli ilmaisee joukon $[n]$ k-ositusten lukumäärän. Tällaiset ositukset voidaan jakaa kahteen ryhmään. Jos $\{n\}$ on yksi osituksen luokista, niin loput $k-1$ luokkaa muodostavat osituksen joukolle $[n-1]$. Määritelmän 3.3 mukaan tällaisia osituksia on $S(n-1,k-1)$ kappaletta. Jos $\{n\}$ ei ole yksi osituksen luokista, niin n on lisätty johonkin joukon $[n-1]$ k-osituksen luokista. Koska n voidaan lisätä k eri luokkaan, on tällaisia osituksia yhteensä $kS(n-1,k)$ kappaletta. □

Esimerkki 3.5. Taulukossa 1 on esitetty Stirlingin lukujen $S(n,k)$ arvot, kun $1 \leq k \leq n \leq 5$.

				k		
	0	1	2	3	4	5
	1	1	0	0	0	0
	2	1	1	0	0	0
n	3	1	3	1	0	0
	4	1	7	6	1	0
	5	1	15	25	10	1

Taulukko 1: Stirlingin lukuja $S(n,k)$.

Lause 3.2. $S(n,n-1) = \binom{n}{2}$, *kun* $n \geq 1$.

Todistus. Olkoon $P = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}$ joukon $[n]$ $n-1$-ositus. Koska joukot $A_1,\ldots A_{n-1}$ ovat epätyhjiä, yhdessä niistä on oltava kaksi alkiota ja muissa yksi. Tällöin kaksialkioinen joukko A_i määrää osituksen P yksikäsitteisesti ja se voidaan valita joukosta $[n]$ $\binom{n}{2}$ tavalla. □

Lause 3.3. *$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$, kun $n \geq 2$.*

Todistus. Olkoon A_1 mikä tahansa joukon $[n]$ aito epätyhjä osajoukko ja olkoon $A_2 = [n] \setminus A_1$. Tällöin $P = \{A_1, A_2\}$ on joukon $[n]$ 2-ositus, sillä A_1 ja A_2 ovat epätyhjiä, $[n] = A_1 \cup A_2$ ja $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Kun $\emptyset$ ja $[n]$ eivät kelpaa valinnaksi, osajoukko A_1 voidaan valita $2^n - 2$ tavalla. Koska jokainen osituksen muodostava osajoukkopari voidaan valita valitsemalla ensin joko A_1 tai A_2, on joukon $[n]$ kaikkien erilaisten 2-ositusten lukumäärä

$$\begin{aligned} S(n,2) &= \frac{2^n - 2}{2} \\ &= 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

□

Lause 3.4. *Olkoot $n \geq 1$ ja $k \geq 1$. Tällöin*

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j, k-1). \tag{3.2}$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 81]). Kaavan (3.2) vasen puoli ilmaisee joukon $[n]$ k-ositusten lukumäärän. Jokainen joukon $[n]$ k-ositus vastaa j-alkioisen joukon $J \subseteq [n-1]$ $k-1$-ositusta, joka jää jäljelle, kun poistetaan alkion $n \in [n]$ sisältävä luokka alkuperäisestä osituksesta. Kaavan (3.2) oikea puoli laskee yhteen kaikki $k-1$-ositukset kaikilla osajoukoilla $J \subseteq [n-1]$, kun $0 \leq j \leq n-1$. Joukolla $[n-1]$ on nimittäin $\binom{n-1}{j}$ j-alkioista osajoukkoa ja jokaisella j-alkioisella osajoukolla on $S(j, k-1)$ ositusta, jossa on $k-1$ luokkaa. □

Esimerkki 3.6. Olkoot $[n] = \{a, b, c, d\}$ ja $[k] = \{1, 2, 3\}$ ja olkoon $f : [n] \to [k]$ funktio siten, että $f(a) = f(b) = f(d) = 2$ ja $f(c) = 1$. Tällöin $f([n]) = \{1, 2\} \neq [k]$, joten f ei ole surjektio.

Esimerkki 3.7. (Vrt. [1, s. 81]). Olkoon $f : [n] \to [k]$ surjektio. Määritellään alkion $i \in [k]$ *alkukuva* asettamalla

$$f^{-1}(i) = \{x \mid f(x) = i\}.$$

Nyt $f^{-1}(i) \subseteq [n]$ ja $f^{-1}(i) \cap f^{-1}(j) = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$ $(i, j \in [k])$. Lisäksi, koska f on surjektio, niin $f^{-1}(i) \neq \emptyset$, kun $i \in [k]$. Siis joukko

$$P = \{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(k)\}$$

on joukon $[n]$ k-ositus. Lisäksi voidaan määritellä funktio $g : P \to [n]$ asettamalla $g(f^{-1}(i)) = i$. Selvästi g on injektio.

Lause 3.5. *Surjektioiden lukumäärä joukolta* $[n]$ *joukkoon* $[k]$ *on* $S(n,k)k!$.

Todistus. (Vrt. [1, s. 82]). Olkoon $Q = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ joukon $[n]$ mielivaltainen k-ositus ja $g : Q \to [k]$ injektio (bijektio). Määritellään funktio $f : [n] \to [k]$ asettamalla $f(x) = i$, jos $x \in C_i$. Koska Q on joukon $[n]$ k-ositus, niin f on surjektio. Koska jokaista joukon $[n]$ k-ositusta kohti on olemassa $k!$ bijektiota, niin surjektioiden lukumäärä joukolta $[n]$ joukkoon $[k]$ on tuloperiaatteen nojalla $S(n,k)k!$. □

Lause 3.6. *Olkoot* $n \geq 1$ *ja* $k \geq 1$. *Tällöin*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n. \tag{3.3}$$

Todistus. (Vrt. [5, s. 102]). Esimerkin 2.4 perusteella surjektioiden lukumäärä joukolta $[n]$ joukkoon $[k]$ on

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n. \tag{3.4}$$

Kun tämä yhdistetään edellisen lauseen tuloksen kanssa, saadaan

$$S(n,k)k! = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Jakamalla yhtälö puolittain termillä $k!$ saadaan

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

□

Esimerkki 3.8. Olkoot $n = 5$ ja $k = 3$. Lauseen 3.5 mukaan surjektioden lukumäärä joukolta $[n]$ joukkoon $[k]$ on

$$S(5,3)\cdot 3! = 25\cdot 6 = 150.$$

Samaan tulokseen päästään kaavalla (3.4), sillä

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}(k-i)^5 &= 3^5 - 3\cdot 2^5 + 3\cdot 1^5\\ &= 243 - 96 + 3\\ &= 150.\end{aligned}$$

Lause 3.7. *Olkoot* $n \geq 1$ *ja* $k \geq 1$. *Tällöin*

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i,k-1)k^{i-1}. \tag{3.5}$$

Todistus. Yhtälön vasen puoli ilmaisee joukon $[n]$ k-ositusten lukumäärän. Tällainen ositus voidaan muodostaa lisäämällä i alkiota joukon $[n-i]$ $k-1$-osituksen luokkiin siten, että lisättävistä alkioista vähintään yksi muodostaa uuden luokan. Koska alkioiden lisäysjärjestyksellä ei ole merkitystä, voidaan sopia että ensimmäinen lisättävä alkio aloittaa uuden luokan. Tällöin loput $i-1$ alkioita voidaan sijoittaa mielivaltaisesti k luokkaan. Tämä voidaan tehdä k^{i-1} eri tavalla. Kun lasketaan yhteen kaikki vaihtoehdot kaikilla muuttujan i arvoilla ($1 \leq i \leq n$), saadaan

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i, k-1)k^{i-1}.$$

Huomataan kuitenkin, että $S(n-i, k-1) = 0$, jos $n-i < k-1$ eli $i > n-k+1$. □

Esimerkki 3.9. Olkoot $n = 5$ ja $k = 3$. Tällöin kaavan (3.5) mukaan

$$\begin{aligned} S(5,3) &= \sum_{i=1}^{5} S(5-i, 3-1)3^{i-1} \\ &= S(4,2)3^0 + S(3,2)3^1 + S(2,2)3^2 + S(1,2)3^3 + S(0,2)3^4 \\ &= 7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 0 + 0 \\ &= 25. \end{aligned}$$

3.3 Bellin luvut

Kuten edellä määrittelimme, Stirlingin toiset luvut $S(n,k)$ ilmaisevat, kuinka monella tavalla n-alkioinen joukko voidaan osittaa eli jakaa k erilliseksi epätyhjäksi osajoukoksi. Jos haluamme ilmaista, kuinka monella tavalla n-alkioinen joukko voidaan ylipäätään osittaa, laskemme yhteen kaikkien erikokoisten ositusten lukumäärän.

Määritelmä 3.4. (Vrt. [1, s. 85]). *Bellin luku* $B(n)$ on joukon $[n]$ kaikkien ositusten lukumäärä, ts.

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k). \tag{3.6}$$

Esimerkki 3.10. Kaavalla (3.6) laskettuna ensimmäiset Bellin luvut ovat

$$B(0) = S(0,0) = 1$$

$$\begin{aligned} B(1) &= S(1,0) + S(1,1) \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(2) &= S(2,0) + S(2,1) + S(2,2) \\ &= 0 + 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(3) &= S(3,0) + S(3,1) + S(3,2) + S(3,3) \\ &= 0 + 1 + 3 + 1 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(4) &= S(4,0) + S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4) \\ &= 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15. \end{aligned}$$

Lause 3.8. *Jos* $n \geq 1$, *niin*

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B(j). \tag{3.7}$$

Todistus. (Ks. [1, s. 86]). Määritelmän 3.4 mukaan

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k),$$

sillä $S(n,0) = 0$, kun $n \geq 1$. Kaavan (3.2) perusteella voidaan kirjoittaa

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j,k-1),$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} B(n) &= \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j,k-1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{j} S(j,k-1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \sum_{k=1}^{n} S(j,k-1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \sum_{i=0}^{n-1} S(j,i). \end{aligned}$$

Kuitenkin

$$\sum_{i=0}^{n-1} S(j,i) = \sum_{i=0}^{j} S(j,i) = B(j),$$

sillä $S(j,i) = 0$ aina, kun $i > j$ ja tässä erityisesti $j \leq n-1$.

$\square$

4 Polynomit ja Stirlingin ensimmäiset luvut

Tässä luvussa tutkimme muuttujan $x \in \mathbb{R}$ astetta n olevia reaalikertoimisia polynomeja. Määrittelemme ensin n-asteisen kertomafunktion muuttujalle x ja osoitamme esimerkin avulla, että funktio tuottaa muuttujan x astetta n olevan polynomin. Aliluvussa 4.2 määrittelemme Stirlingin ensimmäiset luvut $s(n, k)$ tällaisen polynomiesityksen vakiokertoimina. Lauseessa 4.5 osoitamme yhteyden myös Stirlingin lukujen $S(n, k)$ ja polynomien välille.

4.1 Kertomafunktiot

Määritelmä 4.1. Olkoon $n \geq 0$ kokonaisluku. Funktiota

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1) \tag{4.1}$$

sanotaan muuttujan $x \in \mathbb{R}$ *(laskevaksi) kertomafunktioksi* ja funktiota

$$(x)^{(n)} = x(x+1)\cdots(x+n-1) \tag{4.2}$$

muuttujan x *nousevaksi kertomafunktioksi*. Erityisesti sovitaan, että $(x)_0 = (x)^{(0)} = 1$. Lisäksi huomataan, että $(n)_n = n!$.

Esimerkki 4.1. Olkoon $n \geq 0$ ja $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}(-x)_n &= -x(-x-1)\cdots(-x-n+1)\\ &= (-1)^n(x+1)\cdots(x+n-1)\\ &= (-1)^n(x)^{(n)}.\end{aligned}$$

Esimerkki 4.2. Esitetään $(x)_4$ tavallisena polynomina laskemalla tulo $x(x-1)(x-2)(x-3)$:

$$\begin{aligned}(x)_4 &= x(x-1)(x-2)(x-3)\\ &= (x^2-x)(x^2-3x-2x+6)\\ &= x^4-3x^3-2x^3+6x^2-x^3+3x^2+2x^2-6x\\ &= x^4-6x^3+11x^2-6x.\end{aligned}$$

Annamme seuraavaksi määritelmän luvuille 1, -6, 11 ja -6, jotka esiintyvät kertoimina funktion $(x)_4$ tavallisessa polynomiesityksessä.

4.2 Stirlingin ensimmäiset luvut

Määritelmä 4.2. *Stirlingin ensimmäiset luvut* ovat ne luvut $s(n,k)$, jotka toteuttavat yhtälön

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{4.3}$$

Erityisesti $s(0,0) = 1$, $s(n,0) = 0$, kun $n > 0$, ja $s(0,k) = 0$, kun $k > 0$ (vrt. [4, s. 168]).

Esimerkki 4.3. Kaavan (4.3) mukaan

$$\begin{aligned}(x)_4 &= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \\ &= \sum_{k=0}^{4} s(4,k)x^k,\end{aligned}$$

joten $s(4,0) = 0$, $s(4,1) = -6$, $s(4,2) = 11$, $s(4,3) = -6$ ja $s(4,4) = 1$.

Lause 4.1. *Olkoon $n \geq 1$ ja $k \geq 1$. Tällöin*

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k). \tag{4.4}$$

Todistus. (Vrt. [5, s. 107]). Määritelmän 4.2 mukaan

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

Toisaalta voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}(x)_n &= (x-n+1)(x)_{n-1} \\ &= (x-n+1)\sum_{i=0}^{n-1} s(n-1,i)x^i \\ &= x\sum_{i=0}^{n-1} s(n-1,i)x^i - (n-1)\sum_{i=0}^{n-1} s(n-1,i)x^i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} s(n-1,i-1)x^i - (n-1)\sum_{i=0}^{n-1} s(n-1,i)x^i.\end{aligned}$$

Kun verrataan muuttujan x eksponenttia funktion $(x)_n$ molemmilla esitystavoilla, on oltava

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k).$$

□

Esimerkki 4.4. Kaavan (4.4) ja esimerkin 4.3 perusteella

$$\begin{aligned}s(5,3) &= s(4,2) - (5-1)s(4,3) \\ &= 11 - 4\cdot(-6) \\ &= 35.\end{aligned}$$

Esimerkki 4.5. Taulukossa 2 on esitetty Stirlingin lukujen $s(n,k)$ arvot, kun $1 \leq k \leq n \leq 5$.

				k		
	0	1	2	3	4	5
	1	1	0	0	0	0
	2	-1	1	0	0	0
n	3	2	-3	1	0	0
	4	-6	11	-6	1	0
	5	24	-50	35	-10	1

Taulukko 2: Stirlingin lukuja $s(n,k)$.

Lause 4.2. $s(n, n-1) = -\binom{n}{2}$, *kun* $n \geq 1$.

Todistus. Määritelmän 4.2 mukaan $s(n,n-1)$ on termin x^{n-1} kerroin laskevassa kertomassa $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$. Siis

$$\begin{aligned}
s(n,n-1) &= (-1) + (-2) + \cdots + (n-1) \\
&= (-1-2-\cdots-n+1) \\
&= -(1+2+\cdots+n-1) \\
&= -\frac{n(n-1)}{2} \\
&= -\binom{n}{2}.
\end{aligned}$$

□

Lause 4.3. $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, *kun* $n \geq 1$.

Todistus. Määritelmän 4.2 mukaan $s(n,1)$ on termin x kerroin laskevassa kertomassa $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$. Siis

$$\begin{aligned}
s(n,1) &= (-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(n-1) \\
&= (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1) \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{aligned}$$

□

Lause 4.4. $\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = 0$, *kun* $n \geq 2$.

Todistus. (Vrt. [5, s. 106]). Tarkastellaan lukuja $s(n,k)$, kun n on mielivaltainen, mutta kiinteä. Jos $n > k$, niin $s(n,k) = 0$. Oletetaan siis, että $1 \leq k \leq n$, jolloin luvut $s(n,k)$ saadaan kaavalla (4.3). Kertomafunktio $(x)_n$ saa arvon 0 aina, kun x on positiivinen kokonaisluku ja $n > x$. Täten, asettamalla $x = 1$ kaavaan (4.3) saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) = 0, \qquad \text{kun } n \geq 2.$$

$\square$

Lause 4.5. *Olkoon $n \geq 0$ kokonaisluku ja $x \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k. \tag{4.5}$$

Todistus. (Vrt. [3, s. 31]). Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Jos $n = 0, 1$, niin väite on tosi, sillä $x^0 = 1 = S(0,0)(x)_0$ ja $x^1 = x = S(1,0)(x)_0 + S(1,1)(x)_1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x$. Oletetaan sitten, että väite on tosi, kun $n = m - 1$ ($n \geq 1$). Tällöin

$$\begin{aligned}
x^m = x \cdot x^{m-1} &= x \sum_{k=0}^{m-1} S(m-1,k)(x)_k \\
&= \big((x-k)+k\big) \sum_{k=0}^{m-1} S(m-1,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} S(m-1,k)(x)_{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} kS(m-1,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} S(m-1,k-1)(x)_k + \sum_{k=0}^{m} kS(m-1,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} S(m,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=0}^{m} S(m,k)(x)_k,
\end{aligned}$$

sillä $S(m-1,k) = 0$, kun $k > m-1$ ja $S(m,0) = 0$, kun $m \geq 1$. $\square$

Esimerkki 4.6. Esitetään polynomi x^4 kertomafunktioiden $(x)_k$ lineaarikombinaationa:

$$\begin{aligned}
x^4 &= \sum_{k=0}^{4} S(4,k)(x)_k \\
&= S(4,0)(x)_0 + S(4,1)(x)_1 + S(4,2)(x)_2 + S(4,3)(x)_3 + S(4,4)(x)_4 \\
&= (x)_1 + 7(x)_2 + 6(x)_3 + (x)_4.
\end{aligned}$$

4.3 Polynomien matriisiesitys

Tässä aliluvussa jatkamme muuttujan $x \in \mathbb{R}$ astetta n olevien reaalikertoimisten polynomien tutkimista. Käytämme tarkastelussa apuna matriiseja ja niille määriteltyjä laskutoimituksia. Esimerkissä 4.8 osoitamme, että Stirlingin luvuista $S(n,k)$ ja $s(n,k)$ muodostetut matriisit ovat polynomivektoriavaruuden kannanmuutosmatriiseja ja lauseessa 4.7 osoitamme, että ne ovat toistensa käänteismatriiseja.

Esimerkki 4.7. Tarkastellaan muuttujan $x \in \mathbb{R}$ astetta n olevaa reaalikertoimista polynomia, jonka vakiotermi on 0. Tällainen polynomi on muotoa

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x.$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös matriisien (vektorien) tulona:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Vasemmanpuoleista vektoria sanotaan polynomin kerroinvektoriksi ja oikeanpuoleista polynomiavaruuden luonnolliseksi kannaksi.

Esimerkki 4.8. Lauseen 4.5 mukaan

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k.$$

Koska kuitenkin $S(n,0) = 0$ aina, kun $n > 0$, niin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} x^1 &= S(1,1)(x)_1 \\ x^2 &= S(2,1)(x)_1 + S(2,2)(x)_2 \\ &\vdots \\ x^n &= S(n,1)(x)_1 + S(n,2)(x)_2 + \cdots + S(n,n)(x)_n \end{aligned}$$

ja edelleen matriisikertolaskuna

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(1,1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S(2,1) & S(2,2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(n,1) & S(n,2) & S(n,3) & \cdots & S(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x)_1 \\ (x)_2 \\ \vdots \\ (x)_n \end{bmatrix}$$

tai lyhyemmin

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(i,j) \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} (x)_1 \\ (x)_2 \\ \vdots \\ (x)_n \end{bmatrix}.$$

Vastaavaan tapaan voidaan määritelmän 4.2 perusteella kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} (x)_1 \\ (x)_2 \\ \vdots \\ (x)_n \end{bmatrix} = \Big[s(i,j)\Big]_{n\times n} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Stirlingin toisten lukujen matriisi on siis polynomiavaruuden kannanmuutosmatriisi luonnolliselta kannalta $[x^i]_{i\geq 1}$ kertomakannalle $[(x)_i]_{i\geq 1}$ ja Stirlingin ensimmäisten lukujen matriisi on kannanmuutosmatriisi päinvastaiseen suuntaan.

Määritelmä 4.3. Funktiota $\delta(n,j)$, missä

$$\delta(n,j) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \neq j \\ 1, & \text{kun } n = j, \end{cases}$$

sanotaan *Kröneckerin delta-funktioksi.*

Lause 4.6. *Olkoot n ja j positiivisia kokonaislukuja ja olkoon $r = \min\{n,j\}$. Tällöin*

$$\sum_{k=0}^{r} S(n,k)s(k,j) = \delta(n,j) \tag{4.6}$$

ja

$$\sum_{k=0}^{r} s(n,k)S(k,j) = \delta(n,j). \tag{4.7}$$

Todistus. Lauseen 4.5 perusteella voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \sum_{j=0}^{n} s(k,j)x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} S(n,k)s(k,j) \right) x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} S(n,k)s(k,j) \right) x^j. \end{aligned}$$

Vertailemalla luvun x eksponentteja yhtälön molemmilla puolilla saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)s(k,j) = \delta(n,j).$$

Todistetaan jälkimmäinen väittämä kirjoittamalla

$$\begin{aligned}
(x)_n &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \sum_{j=0}^{n} S(k,j)(x)_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} s(n,k)S(k,j) \right) (x)_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)S(k,j) \right) (x)_j .
\end{aligned}$$

Vertailemalla nyt luvun x kertomafunktion arvoja yhtälön molemmilla puolilla saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)S(k,j) = \delta(n,j).$$

□

Lause 4.7. $[S(i,j)]_{n\times n} = [s(i,j)]_{n\times n}^{-1}$ ([3, s. 31]).

Todistus. Matriisit $[S(i,j)]_{n\times n}$ ja $[s(i,j)]_{n\times n}$ ovat toistensa käänteismatriiseja, jos niiden tulo on identiteettimatriisi $\mathbf{I}_n = [\delta(i,j)]_{n\times n}$. Matriisien kertolaskusäännön ja kaavan (4.6) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
[S(i,j)]_{n\times n} \cdot [s(i,j)]_{n\times n} &= \left[\sum_{k=1}^{n} S(i,k) \cdot s(k,j) \right]_{n\times n} \\
&= [\delta(i,j)]_{n\times n} \\
&= \mathbf{I}_n ,
\end{aligned}$$

joten lause on todistettu. □

Esimerkki 4.9. Tarkastellaan matriiseja $S = [S(i,j)]_{n\times n}$ ja $s = [s(i,j)]_{n\times n}$, kun $n = 4$. Tällöin

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{bmatrix} = s.$$

4.4 Syklinen permutaatio

Tässä luvussa tutkimme joukon $[n]$ permutaatioita, jotka antavat kombinatorisen tulkinnan Stirlingin ensimmäisten lukujen $s(n,k)$ itseisarvoille. Esimerkissä 2.3 samaistimme joukon $[n]$ permutaation bijektion $\pi : [n] \to [n]$ kanssa. Otetaan käyttöön merkintä kaikkien bijektioiden $[n] \to [n]$ joukolle.

Määritelmä 4.4. Olkoon

$$S_n = \{\text{bijektiot } [n] \to [n]\}.$$

Määritelmä 4.5. Jonon $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ permutaatio $\pi \in S_n$ on *syklinen*, jos

$$\pi(a_i) = a_{i+1}, \text{ kun } i = 1, 2, \ldots, n-1, \text{ ja } \pi(a_n) = a_1.$$

Tällöin merkintää $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$ sanotaan *sykliksi*. Merkintä $(a_2\ \cdots\ a_n\ a_1)$ tarkoittaa samaa sykliä.

Esimerkki 4.10. Olkoon $\pi : [7] \to [7]$ bijektio siten, että $\pi(1) = 7$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 3$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 6$, $\pi(6) = 5$ ja $\pi(7) = 4$. Tämä voidaan merkitä 7-jonona

$$\pi = (7, 1, 3, 2, 6, 5, 4)$$

tai taulukkona

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Permutaatio π voidaan esittää myös erillisten syklien tulona. Nyt

$$1 \to \pi(1) = 7 \to \pi(7) = 4 \to \pi(4) = 2 \to \pi(2) = 1$$

tarkoittaa sykliä (1742). Vastaavasti

$$3 \to \pi(3) = 3$$

tarkoittaa sykliä (3) ja

$$5 \to \pi(5) = 6 \to \pi(6) = 5$$

sykliä (56). Merkitään nyt

$$\pi = (1742)(3)(56).$$

Koska syklien alkukohdalla ja syklien keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä, niin esimerkiksi merkinnät

$$\pi = (3)(56)(4217) \quad \text{ ja } \pi = (65)(7421)(3)$$

tarkoittavat samaa permutaatiota.

Määritelmä 4.6. Luku $c(n,k)$ on joukon $[n]$ niiden permutaatioiden lukumäärä, joissa on tasan k sykliä. Erityisesti $c(n,0) = 0$, kun $n > 0$, ja $c(n,k) = 0$ aina, kun $n < k$. Sovitaan lisäksi, että $c(0,0) = 1$ (ks. [4, s. 170]).

Esimerkki 4.11. Joukon [4] 3-sykliset permutaatiot ovat

$$\begin{gathered}(12)(3)(4), \quad (13)(2)(4), \quad (14)(2)(3), \\ (23)(1)(4), \quad (24)(1)(3) \quad \text{ja} \quad (34)(1)(2).\end{gathered}$$

Täten $c(4,3) = 6$.

Esimerkki 4.12. Identtinen kuvaus $f_{id} : [n] \to [n]$, $f_{id}(x) = x$ kaikilla $x \in [n]$, on joukon $[n]$ ainoa permutaatio, jossa on n sykliä. Siis $c(n,n) = 1$.

Lause 4.8. (Ks. [4, s. 170]). *Olkoon $n \geq 1$ ja $k \geq 1$. Tällöin*

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k). \tag{4.8}$$

Todistus. Joukon $[n]$ permutaatiot, joissa on k sykliä, voidaan jakaa kahteen ryhmään. Jos (n) on oma syklinsä, loput $k-1$ sykliä muodostavat joukon $[n-1] = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaation. Määritelmän 4.6 mukaan tällaisia permutaatiota on $c(n-1,k-1)$ kappaletta. Jos (n) ei ole oma syklinsä, se kuuluu johonkin joukon $[n-1]$ permutaation k sykleistä. Tällaisia permutaatioita on $(n-1)c(n-1,k)$ kappaletta, sillä n voi sijaita $n-1$ eri kohdassa. $\square$

Esimerkki 4.13. Taulukossa 3 on esitetty lukujen $c(n,k)$ arvot, kun $1 \leq k \leq n \leq 5$.

		k				
	0	1	2	3	4	5
	1	1	0	0	0	0
	2	1	1	0	0	0
n	3	2	3	1	0	0
	4	6	11	6	1	0
	5	24	50	35	10	1

Taulukko 3: Lukuja $c(n,k)$.

Lause 4.9. $c(n,n-1) = \binom{n}{2}$, *kun* $n \geq 1$.

Todistus. Olkoon π joukon $[n]$ mielivaltainen permutaatio, jossa on $n-1$ sykliä. Laatikkoperiaatteen nojalla permutaatiossa π on yksi sykli, jossa on 2 alkiota ja loput $n-2$ alkiota kuvautuvat itselleen. Tällöin kahden alkion sykli määrää permutaation π yksikäsitteisesti. Se voidaan valita $\binom{n}{2}$ tavalla, sillä alkioiden keskinäisellä järjestyksellä ei ole väliä. $\square$

Lause 4.10. $\sum_{k=0}^{n} c(n,k) = n!$, *kun* $n \geq 0$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Kun $n = 1$, väite on tosi sillä $c(n,n) = 1$ ja $c(n,0) = 0$. Oletetaan sitten, että väite on tosi, kun $n = m - 1$ $(n \geq 1)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} c(m,k) = \sum_{k=1}^{m} c(m,k) &= \sum_{k=1}^{m} \Big(c(m-1,k-1) + (m-1) \cdot c(m-1,k) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c(m-1,k-1) + (m-1) \sum_{k=1}^{m} c(m-1,k) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} c(m-1,k) + (m-1) \sum_{k=0}^{m-1} c(m-1,k) \\
&= (m-1)! + (m-1)(m-1)! \\
&= (1 + m - 1)(m-1)! \\
&= m(m-1)! \\
&= m!.
\end{aligned}$$

Väitteen voi todistaa myös kombinatorisella päättelyllä (ks. [2, s. 248]). Summalauseke $\sum_{k=0}^{n} c(n,k)$ nimittäin laskee yhteen joukon $[n]$ kaikki permutaatiot, joissa on k sykliä, kun $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Koska joukolla $[n]$ ei ole muita permutaatioita, on summaksi tultava $n!$ eli joukon $[n]$ kaikkien permutaatioiden lukumäärä.

□

Esimerkki 4.14. Olkoon $n = 5$. Tällöin lauseen 4.10 mukaan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{5} c(5,k) &= c(5,0) + c(5,1) + c(5,2) + c(5,3) + c(5,4) + c(5,5) \\
&= 0 + 24 + 50 + 35 + 10 + 1 \\
&= 120 \\
&= 5!.
\end{aligned}$$

Lause 4.11. ([4, s. 174: 7]). *Jos* $n \geq 0$ *ja* $x \in \mathbb{R}$, *niin*

$$\sum_{k=0}^{n} c(n,k) x^k = x(x+1) \cdots (x+n-1) = x^{(n)}. \tag{4.9}$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Kun $n = 1$, väite on tosi, sillä $c(1,0)x^0 + c(1,1)x^1 = x$. Oletetaan sitten, että väite on tosi mielivaltaisella kokonaisluvulla $n = m - 1$ ($n \geq 1$). Tällöin

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} c(m,k)x^k &= \sum_{k=1}^{m} \Big(c(m-1,k-1) + (m-1)c(m-1,k)\Big)x^k \\
&= x\sum_{k=1}^{m} c(m-1,k-1)x^{k-1} + (m-1)\sum_{k=1}^{m} c(m-1,k)x^k \\
&= x\sum_{k=0}^{m-1} c(m-1,k)x^k + (m-1)\sum_{k=0}^{m-1} c(m-1,k)x^k \\
&= x \cdot (x)^{(m-1)} + (m-1)(x)^{(m-1)} \\
&= (x+m-1)(x)^{(m-1)} \\
&= (x)^{(m)}.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 4.15. Kun verrataan laskevaa kertomafunktiota

$$\begin{aligned}
(x)_4 &= x(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \\
&= s(4,4)x^4 - s(4,3)x^3 + s(4,2)x^2 - s(4,1)x
\end{aligned}$$

nousevaan kertomafunktioon

$$\begin{aligned}
x^{(4)} &= x(x+1)(x+2)(x+3) \\
&= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x \\
&= c(4,4)x^4 + c(4,3)x^3 + c(4,2)x^2 + c(4,1)x,
\end{aligned}$$

niin huomataan, että tekijöiden x, x^2, x^3 ja x^4 vakiokertoimet ovat itseisarvoltaan samat. Osoitetaan tämä seuraavassa lauseessa.

Lause 4.12. *$s(n,k) = (-1)^{n+k}c(n,k)$, kun $n \geq 0$ ja $k \geq 0$.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 171]). Jos $k = 0$, niin väite on tosi kaikilla $n \geq 0$, sillä $s(0,0) = 1 = (-1)^0 c(0,0)$ ja $s(n,0) = 0 = c(n,0)$, kun $n > 0$. Jos $k > 0$, niin todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Väite on tosi, kun $n = 0$, sillä $s(0,k) = 0 = c(0,k)$ kaikilla $k > 0$. Oletetaan sitten, että väite on tosi mielivaltaisella kokonaisluvulla $n = m-1$ ($n \geq 1$). Kaavan (4.4) ja induktio-oletuksen perusteella voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
s(m,k) &= s(m-1,k-1) - (m-1)\cdot s(m-1,k) \\
&= (-1)^{m-1+k-1}c(m-1,k-1) - (m-1)^{m-1+k}c(m-1,k) \\
&= (-1)^{m+k}c(m-1,k-1) + (m-1)\cdot(-1)^{m+k}c(m-1,k) \\
&= (-1)^{m+k}\Big(c(m-1,k-1) + (m-1)\cdot c(m-1,k)\Big) \\
&= (-1)^{m+k}c(m,k).
\end{aligned}$$

□

4.5 Differenssioperaattori

Tässä aliluvussa tutustumme lukujonoihin. Valitsemme lukujonoksi kokonaisluvuilla $n \geq 0$ määritellyn funktion. Määrittelemme ensin funktion differenssin ja todistamme kaksi differensseihin liittyvää laskukaavaa. Esimerkissä 4.19 osoitamme differenssien avulla uuden yhteyden muotoa $f(x) = x^n$ olevien funktioiden ja Stirlingin lukujen $S(n,k)$ välille.

Määritelmä 4.7. Olkoon $f(n)$ kokonaisluvuilla $n \geq 0$ määritelty funktio. Tällöin funktion $f(n)$ ensimmäinen *differenssi* on

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n),$$

toinen differenssi

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n)$$

ja k:s differenssi

$$\Delta^k f(n) = \Delta\Big(\Delta^{k-1} f(n)\Big).$$

Sovitaan lisäksi, että $\Delta^0 f(n) = f(n)$.

Esimerkki 4.16. Olkoon $f(n)$ kokonaisluvuilla $n \geq 0$ määritelty funktio. Tällöin

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(n) &= \Delta\Big(\Delta f(n)\Big) \\
&= \Delta\Big(f(n+1) - f(n)\Big) \\
&= f(n+2) - f(n+1) - \Big(f(n+1) - f(n)\Big) \\
&= f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\Delta^3 f(n) &= \Delta\Big(\Delta^2 f(n)\Big) \\
&= \Delta\Big(f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)\Big) \\
&= f(n+3) - 2f(n+2) + f(n+1) \\
&\quad - \Big(f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)\Big) \\
&= f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n).
\end{aligned}$$

Lause 4.13. (Ks. [4, s. 171]). *Olkoon $f(n)$ kokonaisluvuilla $n \geq 0$ määritelty funktio. Tällöin*

$$\Delta^m f(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(n+m-k)$$

kaikilla $m \geq 1$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun m suhteen. Väite on tosi, kun $m = 1$, sillä

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{1}{k}f(n+1-k)\\
&= (-1)^0\binom{1}{0}f(n+1-0) + (-1)^1\binom{1}{1}f(n+1-1)\\
&= f(n+1) - f(n)\\
&= \Delta f(n).
\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että väite on tosi mielivaltaisella kokonaisluvulla $j = m-1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\Delta^m f(n) &= \Delta\Big(\Delta^{m-1} f(n)\Big)\\
&= \Delta^{m-1} f(n+1) - \Delta^{m-1} f(n).
\end{aligned}$$

Nyt induktio-oletuksen mukaan

$$\begin{aligned}
\Delta^{m-1} f(n+1) &= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}f(n+1+(m-1)-k)\\
&= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}f(n+m-k)\\
&= f(n+m) + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}f(n+m-k),
\end{aligned}$$

koska $(-1)^0\binom{m-1}{0} = 1\cdot 1 = 1$. Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned}
-\Delta^{m-1} f(n) &= -\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}f(n+m-1-k)\\
&= -\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m-1}{k-1}f(n+m-k)\\
&= \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k-1}f(n+m-k) + (-1)^m f(n).
\end{aligned}$$

Koska $\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} = \binom{m}{k}$, niin summalausekkeet voidaan yhdistää ja saadaan

$$\begin{aligned}
\Delta^m f(n) &= f(n+m) + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\binom{m}{k}f(n+m+k) + (-1)^m f(n)\\
&= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(n+m-k),
\end{aligned}$$

sillä $f(n+m) = (-1)^0\binom{m}{0}f(n+m-0)$ ja $f(n) = \binom{m}{m}f(n+m-m)$. $\square$

Esimerkki 4.17. (Ks. [4, s.172]). Olkoon $f(n)$ kokonaisluvuilla $n \geq 0$ määritelty funktio ja $m \geq 1$. Kun $n = 0$, niin lauseen 4.13 perusteella

$$\Delta^m f(0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(m-k).$$

Merkitään sitten $j = m - k$, jolloin lauseke saadaan muotoon

$$\Delta^m f(0) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(j).$$

Tällä lausekkeella voidaan ilmaista funktion $f(n)$ m:s differenssi pisteessä 0 arvojen $f(0), f(1), \ldots, f(m)$ avulla.

Lause 4.14. (Ks. [4, s. 172]). *Olkoon $f(n)$ kokonaisluvuilla $n \geq 0$ määritelty funktio. Tällöin*

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0). \tag{4.10}$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Kun $n = 0, 1$, väite on tosi, sillä

$$\binom{0}{0} \Delta^0 f(0) = 1 \cdot f(0) = f(0)$$

ja

$$\begin{aligned}\binom{1}{0} \Delta^0 f(0) + \binom{1}{1} \Delta f(0) &= 1 \cdot f(0) + 1 \cdot \Delta f(0) \\ &= f(0) + f(1) - f(0) \\ &= f(1).\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että väite on tosi, kun $n = m - 1$ $(n \geq 1)$. Kirjoitetaan ensin

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0) = \binom{n}{0} \Delta^0 f(0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0). \tag{4.11}$$

Huomataan, että $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n-1}{0}$. Kaavan (2.2) mukaan $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, jolloin (4.11) saadaan muotoon

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{0}\Delta^0 f(0) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k f(0)\\
&= \binom{n-1}{0}\Delta^0 f(0) + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right)\Delta^k f(0)\\
&= \binom{n-1}{0}\Delta^0 f(0) + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\Delta^k f(0) + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\Delta^k f(0)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\Delta^k f(0) + \Delta\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^k f(0)\Big)\\
&= f(n-1) + \Delta(f(n-1))\\
&= f(n-1) + f(n) - f(n-1)\\
&= f(n).
\end{aligned}
$$

□

Esimerkki 4.18. (Ks. [4, s.172]). Funktion $f(n)$, $n \geq 0$, *erotustaulukko* on

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f(0) & & f(1) & & f(2) & & f(3) & \dots \\
& \Delta f(0) & & \Delta f(1) & & \Delta f(2) & & \dots \\
& & \Delta^2 f(0) & & \Delta^2 f(1) & & \Delta^2 f(2) & \dots \\
& & & \Delta^3 f(0) & & \Delta^3 f(1) & & \dots \\
& & & & \Delta^4 f(0) & & \Delta^4 f(1) & \dots \\
& & & & & \ddots & & \ddots
\end{array}
$$

Esimerkki 4.19. (Ks. [4, s.172]). Olkoon $f(n) = n^3$. Tällöin erotustaulukko on

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & \dots \\
& 1 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & \dots \\
& & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & \dots \\
& & & 6 & & 6 & & 6 & \dots \\
& & & & 0 & & 0 & \dots
\end{array}
$$

Taulukosta nähdään, että $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = 1$, $\Delta^2 f(0) = \Delta^3 f(0) = 6$ ja

$\Delta^m f(0) = 0$, kun $m > 3$. Lauseen 4.14 perusteella voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} n^3 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0) \\ &= 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 0\binom{n}{4} + \cdots + 0\binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}. \end{aligned}$$

Koska saatu tulos on voimassa äärettömän monella muuttujan n arvolla, polynomiyhtälönä se on voimassa myös mielivaltaisella muuttujalla $x \in \mathbb{R}$. Kirjoitetaan sitten $\binom{x}{k} = \frac{(x)k}{k!}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x^3 &= \binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3} \\ &= (x)_1 + \frac{6}{2!}(x)_2 + \frac{6}{3!}(x)_3. \end{aligned}$$

Yleisesti, kun $f(x) = x^n$, niin

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \Delta^k f(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} (x)_k.$$

Kuitenkin lauseen 4.5 mukaan

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k,$$

joten

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} (x)_k.$$

Kun tämä jaetaan puolittain termillä $(x)_k$, niin saadaan

$$S(n,k) = \frac{\Delta^k f(0)}{k!}, \quad \text{kun } 0 \leq k \leq n.$$

Tämä voidaan vielä kirjoittaa muotoon

$$\Delta^k f(0) = S(n,k)k!.$$

Lauseen 3.5 mukaan $S(n,k)k!$ on surjektioiden lukumäärä joukolta $[n]$ joukkoon $[k]$. Täten $\Delta^k f(0)$ saa kombinatorisen tulkinnan, kun $f(x) = x^n$.

5 Generoivista funktioista

Tässä luvussa annamme määritelmän lukujonon tavalliselle ja eksponentiaaliselle generoivalle funktiolle. Esimerkissä 5.2 johdamme lausekkeen lukujonon $S(n,k)_{n\geq 0}$ tavalliselle generoivalle funktiolle. Lauseessa 5.2 tutkimme lukujonon $S(n,k)_{n\geq 0}$ ja lauseessa 5.3 lukujonon $B(n)_{n\geq 0}$ eksponentiaalista generoivaa funktiota.

Määritelmä 5.1. Generoiva funktio jonolle $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ on muodollinen potenssisarja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Esimerkki 5.1. Olkoon $n \geq 0$ mielivaltainen, mutta kiinteä kokonaisluku ja $a_k = s(n,k)$. Määritelmien 4.2 ja 5.1 perusteella kertomafunktio $(x)_n$ on jonon $s(n,k)_{k\geq 0}$ generoiva funktio.

Esimerkki 5.2. (Ks. [4, s.163-164]). Olkoon $k \geq 0$ mielivaltainen, mutta kiinteä kokonaisluku ja $a_n = S(n,k)$. Merkitään

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n.$$

Jos $k = 0$, niin

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} S(n,0)x^n \\ &= S(0,0) + S(1,0)x + S(2,0)x^2 + \cdots \\ &= S(0,0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Jos $k > 0$, niin aloitetaan rekursiokaavasta (3.1):

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Kun tämä kerrotaan puolittain termillä x^n ja lasketaan yhteen muuttujan $n \geq 1$ arvoilla, niin saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n,k)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S(n-1,k-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} kS(n-1,k)x^n. \tag{5.1}$$

Nyt yhtälön (5.1) vasen puoli on

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S(n,k)x^n &= S(1,k)x + S(2,k)x^2 + \cdots \\ &= S(0,k) + S(1,k)x + S(2,k)x^2 + \cdots \\ &= f_k(x), \end{aligned}$$

sillä $S(0,k) = 0$, kun $k > 0$. Vastaavasti yhtälön (5.1) oikean puolen ensimmäinen summa on

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S(n-1,k-1)x^n &= x\sum_{n=1}^{\infty} S(n-1,k-1)x^{n-1}\\ &= xf_{k-1}(x)\end{aligned}$$

ja jälkimmäinen summa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} kS(n-1,k)x^n &= kx\sum_{n=1}^{\infty} S(n-1,k)x^{n-1}\\ &= kxf_k(x).\end{aligned}$$

Saadaan siis

$$f_k(x) = xf_{k-1}(x) + kxf_k(x).$$

Kun tästä ratkaistaan $f_k(x)$, saadaan rekursiivinen kaava

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx}f_{k-1}(x).$$

Edellä osoitettiin, että $f_0(x) = 1$, joten

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \frac{x}{1-x}f_0(x) = \frac{x}{1-x}\\ f_2(x) &= \frac{x}{1-2x}f_1(x) = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)}\\ f_3(x) &= \frac{x}{1-3x}f_2(x) = \frac{x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}\end{aligned}$$

ja niin edelleen. Olemme todistaneet seuraavan lauseen.

Lause 5.1. *Olkoon $k \geq 0$ mielivaltainen, mutta kiinteä kokonaisluku. Lukujonon $S(n,k)_{n\geq 0}$ generoiva funktio on 1, jos $k = 0$, ja*

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \prod_{j=1}^{k}\frac{x}{1-jx},$$

kun $k > 0$.

Määritelmä 5.2. Eksponentiaalinen generoiva funktio jonolle $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ on

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Lause 5.2. (Vrt. [5, s. 111]). *Olkoon k kiinteä positiivinen kokonaisluku ja $a_n = S(n,k)$. Tällöin*

$$g(x) = \frac{(e^x-1)^k}{k!}.$$

Todistus. Binomilauseen perusteella

$$\frac{1}{k!}(e^x-1)^k = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}e^{(k-j)x}.$$

Käytetään sitten tietoa, että

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^n}{n!},$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}(e^x-1)^k &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\sum_{n=0}^{\infty}(k-j)^n\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{k!}\binom{k}{j}(k-j)^n\right)\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

Lause 5.3. *Lukujonon $B(n)_{n\geq 0}$ eksponentiaalinen generoiva funktio on*

$$g(x) = e^{e^{x-1}}.$$

Todistus. (Vrt. [4, s.165]). Merkitään ensin

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n)\frac{x^n}{n!}.$$

Tutkitaan sitten kaavaa (3.7):

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}B(j).$$

Kun tämä kerrotaan puolittain termillä $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ ja lasketaan yhteen kaikilla $n \geq 1$, saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} B(n)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}B(j)\right)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{5.2}$$

Nyt yhtälön (5.2) vasen puoli on funktion $g(x)$ derivaatta, ts.

$$\sum_{n=1}^{\infty} B(n) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = g'(x).$$

Yhtälön (5.2) oikealla puolella voidaan merkitä $m = n-1$, jolloin se saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B(j) \right) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} B(k) \right) \frac{x^m}{m!} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B(n) \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= g(x) \cdot e^x.
\end{aligned}$$

Saadaan siis $g'(x) = e^x g(x)$, jonka yleinen ratkaisu on muotoa $g(x) = e^{e^x + C}$, missä $C \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen. Tässä kuitenkin $g(0) = B(0) = 1$, joten $1 = e^{e^0 + C} = e^{1+C}$. Siis on oltava $C = -1$. Tällöin lukujonon $B(n)$ eksponentiaalisen generoivan funktion lausekkeeksi saadaan

$$g(x) = e^{e^{x-1}}.$$

$\square$

Viitteet

[1] Bogart, Kenneth P. *Introductory Combinatorics*, 2nd ed. Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1990.

[2] Graham, Ronald L., Knuth, Donald E., Patashnik, Oren. *Concrete mathematics: a foundation for computer science.* Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[3] Haukkanen, Pentti. *Kombinatoriikkaa.* Opintomoniste. Tampereen yliopisto. `http://www.sis.uta.fi/matematiikka/kombinatoriikka/HaukkanenKomb.pdf`, viitattu 18.3.2014.

[4] Mazur, David R. *Combinatorics. A Guided Tour.* Mathematical Association of America (MAA), 2010.

[5] Michaels, John G., Rosen, Kenneth.R *Applications of Discrete Mathematics.* McGraw-Hill, Inc., 1991.