TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Saara Lahtinen

Joukot metrisissä avaruuksissa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka

Elokuu 2013

Sisältö

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

LAHTINEN, SAARA: Joukot metrisissä avaruuksissa

Pro gradu -tutkielma, 28 s.

Matematiikka

Elokuu 2013

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa esitetään metrisen avaruuden käsite ja tutkitaan erilaisten joukkojen ominaisuuksia metrisissä avaruuksissa. Metriset avaruudet ovat joukkoja, joissa voidaan mitata pisteiden välisiä etäisyyksiä. Aluksi määritellään avoin pallo, jota käytetään tutkielmassa esiintyvien muiden käsitteiden, kuten sisäpiste ja kasautumispiste, määrittelyssä. Tutkielma painottuu suljettuihin joukkoihin metrisissä avaruuksissa. Lukijalta edellytetään joukon infimumin ja supremumin käsitteiden tuntemusta, sillä nämä ovat keskeisessä osassa rajoitettujen joukkojen havainnoillistamisessa. Lopuksi tutkitaan metrisen aliavaruuden avoimien ja suljettujen joukkojen suhdetta metrisen avaruuden avoimiin ja suljettuihin joukkoihin. Tutkielman päälähteenä käytetään Satish Shiralin ja Harkrishan L. Vasudevan teosta Metric Spaces.

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee metrisen avaruuden ominaisuuksia ja erityisesti joukkoja metrisissä avaruuksissa. Luvussa 2 tarkastellaan metrisen avaruuden perusmääritelmien lisäksi myös diskreettiä ja euklidista avaruutta.

Luvussa 3 havainnoidaan avoimien joukkojen ominaisuuksia metrisessä avaruudessa. Topologian peruskäsitteiden, kuten sisäpiste ja kasautumispiste, määrittely on joukkojen tutkimisen kannalta tärkeässä asemassa. Tutkielma painottuu lukuun 4, jossa esitetään suljettuihin joukkoihin liittyviä käsitteitä ja lauseita. Lopuksi luvussa 5 määritellään aliavaruus, ja tarkastellaan avoimiin ja suljettuihin osajoukkoihin liittyviä lauseita.

Lukijalta edellytetään joidenkin joukko-opin perusasioiden tuntemista. Lukijan olisi hyvä tietää yhdisteen ja leikkauksen käsitteet sekä osajoukon tarkka määritelmä. Myös analyysin perusasioiden, kuten kolmioepäyhtälön, supremumin ja infimumin olisi hyvä olla lukijalle tuttuja.

Tutkielman lähdemateriaalina on käytetty pääasiassa Satish Shiralin ja Harkrishan L. Vasudevan teosta Metric Spaces. Täydentävinä lähdemateriaaleina on käytetty Wilson A. Sutherlandin teosta Introduction to Metric and Topological Spaces, Brian S. Thomsonin, Judith B. Brucknerin ja Andrew M. Brucknerin teosta Elementary Real Analysis sekä Seymour Lipschutzin teosta Theory and Problems of General Topology.

2 Metriset avaruudet

Luvussa 2 esitetään jatkon kannalta oleellisia määritelmiä. Tutkielmassa luonnollisilla luvuilla tarkoitetaan joukkoa $\{1, 2, ...\}$ ja merkitään symbolilla $\mathbb{N}$. Tutkielman alussa esitetään diskreetti ja euklidinen avaruus havainnollistamaan metrisen avaruuden ominaisuuksia. Tunnetuimpia euklidisia avaruuksia ovat reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja taso $\mathbb{R}^2$. Lähteinä käytetään teoksia [1, s. 121], [2, s. 38], [3, s. 40–42] ja [4, s. 576–578].

2.1 Tarvittavia määritelmiä

Tässä kappaleessa esitetään metriikan, metrisen avaruuden ja raja-arvon määritelmät. Lisäksi tarkastellaan metriikan ominaisuuksia esimerkin avulla.

Määritelmä 2.1. Olkoon X epätyhjä joukko. Kuvausta

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

kutsutaan *metriikaksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, x) = 0$,

(ii) $d(x, y) > 0$, jos $x \neq y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Jatkossa metriikkaa merkitään myös lyhyemmin kirjaimella d.

Määritelmä 2.2. *Metrinen avaruus* on järjestetty pari (X, d), jossa X on epätyhjä joukko ja d on joukon X metriikka. Metristä avaruutta (X, d) merkitään jatkossa myös metrisen avaruuden joukolla X, jos metriikka d on kerrottu tai muuten ilmeinen.

Esimerkki 2.1. Olkoon d epätyhjän joukon X metriikka. Osoitetaan, että kuvaus

$$e(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

missä $x, y \in X$, on myös joukon X metriikka. Kuvaus e toteuttaa metriikan määritelmän ehdot (i)-(iii), sillä d on joukon X metriikka. Kuvauksen e tulisi siis toteuttaa vielä kolmioepäyhtälö (iv), jotta se olisi joukon X metriikka. Olkoot $x, y, z \in X$. Nyt

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = e(x, y)$$

ja

$$\frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \leq \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = e(y, z).$$

Nähdään, että

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

sillä d on joukon X metriikka. Saadaan, että

$$\begin{aligned} e(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq e(x,y)+e(y,z). \end{aligned}$$

Täten e on joukon X metriikka.

Määritelmä 2.3. Olkoon $\{x_n\}$ jono joukossa X metrisessä avaruudessa (X,d). Piste $x \in X$ on jonon $\{x_n\}$ *raja-arvo*, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \text{kun} \quad n \geq n_0.$$

Jos x toteuttaa nämä ehdot, niin jono $\{x_n\}$ *suppenee* pistettä x kohti. Tätä suppenemista merkitään $x_n \to x$.

2.2 Diskreetti ja euklidinen avaruus

Metriset avaruudet ovat siis joukkoja, joissa voidaan mitata pisteiden välisiä etäisyyksiä. Seuraavissa esimerkeissä tutkitaan metriikan määritelmän ehtojen toteutumista erilaisissa kuvauksissa.

Esimerkki 2.2. Olkoon X epätyhjä joukko. Määritellään kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \neq y, \\ 0, & \text{kun } x = y. \end{cases} \tag{2.1}$$

Osoitetaan, että d on metriikka joukossa X. Ehdot (i)-(iii) seuraavat suoraan kuvauksen d määrittelevästä ehdosta (2.1). Olkoot $x, y, z \in X$. Jos $x = z$, niin $d(x,z) = 0$ ja kolmioepäyhtälö (iv) toteutuu. Jos taas $x \neq z$, niin joko $x \neq y$ tai $y \neq z$, jolloin kolmioepäyhtälön (iv) oikea puoli on vähintään yksi. Kuvausta d kutsutaan *diskreetiksi metriikaksi.* Järjestettyä paria (X,d) kutsutaan *diskreetiksi avaruudeksi.*

Esimerkki 2.3. Olkoon $X = \mathbb{R}^n$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $i = 1, \dots, n$. Metriikkaa

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

missä $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, kutsutaan *euklidiseksi metriikaksi.* Merkintää d_2 käytetään myös tutkielmassa myöhemmin kuvaamaan euklidista metriikkaa. Osoitetaan, että pari $(\mathbb{R}^n, d_2)$ on metrinen avaruus. Joukko $\mathbb{R}^n$ on epätyhjä, joten riittää osoittaa, että d_2 on joukon $\mathbb{R}^n$ metriikka. Nyt

$$d_2(x, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i)^2} = 0,$$

joten ehto (i) toteutuu. Jos $x \neq y$, niin

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} > 0,$$

sillä positiivisten lukujen summan neliöjuuri on positiivinen. Selvästi myös $d_2(x, y) = d_2(y, x)$ pätee. Ehtojen (ii) ja (iii) toteuduttua tutkitaan vielä ehtoa (iv). Olkoon $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ ja merkitään $x_i - y_i = r_i$ ja $y_i - z_i = s_i$. Ehdon (iv) toteutumiseksi tulisi epäyhtälön

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}$$

päteä. Korotetaan epäyhtälö puolittain neliöön, jolloin saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} r_i s_i \leq \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}.$$

Jäljelle jäävää epäyhtälöä

$$\sum_{i=1}^{n} r_i s_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}$$

kutsutaan *Cauchy-Schwarzin epäyhtälöksi*, jonka todistus löytyy teoksesta [2, s. 25]. Näin ollen d_2 on joukon $\mathbb{R}^n$ metriikka ja paria $(\mathbb{R}^n, d_2)$ kutsutaan *euklidiseksi avaruudeksi.*

Esimerkki 2.4. Reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ yleinen metriikka on

$$d_2 = |x - y|, \quad \text{jossa} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Nyt $(\mathbb{R}, d_2)$ on euklidinen avaruus. Toinen tunnettu euklidinen avaruus on taso $\mathbb{R}^2$, jossa metriikkana on

$$d_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad \text{kun} \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3 Avoimet joukot metrisessä avaruudessa

Tässä luvussa keskitytään avoimia joukkoja koskeviin määritelmiin ja lauseisiin. Avoimien joukkojen tutkimisessa tarvitaan avoimen pallon määritelmää, jota käytetään muun muassa tulevissa todistuksissa. Lähteinä on käytetty teoksia [2, s. 64–70] ja [3, s. 51].

3.1 Avoin ja suljettu pallo

Avoimen ja suljetun pallon määritelmät ovat joukkojen tutkimisen kannalta tärkeässä asemassa. Tässä pykälässä määritellään myös pisteen ympäristö metrisessä avaruudessa.

Määritelmä 3.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin joukkoa

$$B_r(x_0) = \{\, x \in X : d(x, x_0) < r \,\},$$

jossa keskipisteenä on $x_0 \in X$ ja säteenä on $0 < r \in \mathbb{R}$, kutsutaan *avoimeksi palloksi.* Joukkoa, jossa keskipisteenä on $x_0 \in X$, säteenä on $0 < r \in \mathbb{R}$ ja

$$B_r^*(x_0) = \{\, x \in X : d(x, x_0) \leq r \,\},$$

kutsutaan *suljetuksi palloksi.*

Määritelmä 3.2. Olkoon U metrisen avaruuden (X, d) osajoukko. Joukko U on *avoin*, mikäli jokaista pistettä $x \in U$ kohti on olemassa $r > 0$ siten, että $B_r(x) \subseteq U$. Toisin sanottuna joukko U on avoin, jos jokainen sen piste x on keskipiste avoimelle pallolle, joka sisältyy joukkoon U.

Lause 3.1. *Metrisen avaruuden (X, d) jokainen avoin pallo on avoin joukko.*

Todistus (vrt. [2, s. 66]). Olkoon $B_r(x)$ avoin pallo. Nyt $B_r(x)$ on epätyhjä, sillä $x \in B_r(x)$. Olkoon $y \in B_r(x)$ siten, että $d(y, x) < r$. Merkitään

$$r' = r - d(y, x) > 0.$$

Osoitetaan, että $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x)$. Nyt olkoon $z \in B_{r'}(y)$. Tästä seuraa, että

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < r' + d(y, x) = r,$$

joten $z \in B_r(x)$. Näin ollen jokaiselle pisteelle $y \in B_r(x)$ on olemassa avoin pallo $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x)$. Täten on todistettu, että $B_r(x)$ on metrisen avaruuden (X, d) avoin osajoukko. □

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan erilaisia avoimia joukkoja.

(i) Jos $X = \mathbb{R}$, niin $B_r(x_0)$ on avoin väli $(x_0 - r, x_0 + r)$.

(ii) Jos $X = \mathbb{R}^3$ ja $d = d_2$ on euklidinen metriikka, niin $B_r(x_0)$ on x_0-keskinen ja r-säteinen avoin pallo.

Määritelmä 3.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Pisteen $x_0 \in X$ *ympäristö* on mielivaltainen x_0-keskinen metriseen avaruuteen (X, d) kuuluva avoin pallo.

3.2 Avoimien joukkojen havainnointia

Tässä pykälässä esitetään avoimien joukkojen yhdisteitä ja leikkauksia metrisessä avaruudessa koskevia lauseita.

Lause 3.2. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Nyt*

(i) *joukot $\emptyset$ ja X ovat avoimia,*

(ii) *avoimien joukkojen kaikki yhdisteet ovat avoimia,*

(iii) *avoimien joukkojen äärelliset leikkaukset ovat avoimia.*

Todistus (vrt. [2, s. 67]). (i) Tyhjä joukko $\emptyset$ ei sisällä yhtään pistettä. Avoimen joukon ehtona on, että jokainen joukon $\emptyset$ piste on keskipisteenä avoimelle pallolle, joten ehto pätee automaattisesti. Koko avaruus X on avoin, sillä jokaisen avoimen pallon, jonka keskipiste kuuluu joukkoon X, pisteet kuuluvat joukkoon X.

(ii) Olkoon I mielivaltainen indeksijoukko. Nyt olkoon $\{\, G_i \colon i \in I \,\}$ mielivaltainen avoimien joukkojen joukkoperhe ja

$$H = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Jos joukko H on tyhjä, niin se on avoin kohdan (i) nojalla. Oletetaan siis, että joukko H on epätyhjä ja sisältää alkion $x \in H$. Tällöin $x \in G_i$ jollakin $i \in I$. Koska G_i on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että

$$B_r(x) \subseteq G_i \subseteq H.$$

Täten jokaisella alkiolle $x \in H$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B_r(x) \subseteq H$. Tästä seuraa, että avoimien joukkojen yhdiste on avoin.

(iii) Olkoon $\{\, G_j \colon j = 1, 2, \ldots, n \,\}$ äärellinen avoimien joukkojen joukkoperhe ja

$$G = \bigcap_{j=1}^{n} G_j.$$

Jos joukko G on tyhjä, niin se on avoin kohdan (i) nojalla. Oletetaan, että G on epätyhjä ja sisältää alkion $x \in G$. Nyt $x \in G_k$ kaikilla $k = 1, \ldots, n$. Koska G_k on avoin, niin on olemassa $r_k > 0$ siten, että $B_{r_k}(x) \subseteq G_k$ kaikilla $k = 1, \ldots, n$. Olkoon $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Tällöin $r > 0$ ja $B_r(x) \subseteq B_{r_k}(x)$, kun $k = 1, \ldots, n$. Nyt siis

$$B_r(x) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} B_{r_k} \subseteq G,$$

joten avoimien joukkojen äärellinen leikkaus on avoin. $\square$

Lause 3.3. *Metrisen avaruuden (X, d) osajoukko G on avoin jos ja vain jos se on avoimien pallojen yhdiste.*

Todistus (vrt. [2, s. 68]). Lauseen 3.2 nojalla avoimien joukkojen yhdiste on avoin. Osoitetaan siis, että jos joukko on avoin, niin se on avoimien pallojen yhdiste. Oletetaan, että G on avoin joukko. Jos $G = \emptyset$, niin se on avoin lauseen 3.2 nojalla. Tyhjien joukkojen yhdiste on tyhjä joukko, ja täten myös avoin. Oletetaan siis, että G on epätyhjä joukko ja olkoon $x \in G$. Tällöin on olemassa $r_x > 0$ siten, että $B_{r_x}(x) \subseteq G$. Täten

$$G = \bigcup_{x \in G} B_{r_x}(x),$$

sillä jokainen avoimen joukon G piste kuuluu avoimeen palloon, joka sisältyy kokonaan joukkoon G. □

3.3 Sisäpiste ja sisäpisteistö

Monet metrisiin avaruuksiin liittyvät käsitteet voidaan määritellä pelkästään avoimien pallojen avulla. Näitä ovat muun muassa sisäpiste ja sisäpisteistö. Tässä kappaleessa todistetaankin, että avoin joukko koostuu pelkistä sisäpisteistä.

Määritelmä 3.4. Olkoon U metrisen avaruuden (X, d) osajoukko. Piste $u \in X$ on joukon U *sisäpiste*, jos $u \in B_r(u) \subseteq U$ jollakin $r > 0$. Joukkoa U^o sanotaan joukon U *sisäpisteistöksi*, jos se sisältää täsmälleen joukon U sisäpisteet.

Esimerkki 3.2. Joitakin esimerkkejä sisäpisteistä.

(i) Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $d = d_2$ on euklidinen metriikka. Tällöin joukko $B_r(x_0)$ sisältää x_0-keskisen ja r-säteisen ympyrän sisäpisteet.

(ii) Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Tällöin $B_r(x_0)$ on sisäpisteiden joukko sellaisesta x_0-keskisestä neliöstä, jonka $2r$-pituiset lävistäjät ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset.

Lause 3.4. *Olkoon U metrisen avaruuden (X, d) osajoukko. Nyt*

(i) *sisäpisteistö U^o on joukon U avoin osajoukko, joka sisältää kaikki joukon U avoimet osajoukot,*

(ii) *joukko U on avoin jos ja vain jos $U = U^o$.*

Todistus (vrt. [2, s. 69]). (i) Jos $U^o = \emptyset$, niin väite pätee. Olkoon $U^o \neq \emptyset$ ja $x \in U^o$ mielivaltainen piste. Tällöin on olemassa avoin pallo $B_r(x) \subseteq U$

jollakin $r > 0$. Koska $B_r(x)$ on avoin joukko, niin jokainen tämän joukon piste on keskipisteenä avoimelle pallolle. Nämä avoimet pallot kuuluvat joukkoon $B_r(x)$ ja siten myös joukkoon U. Täten jokainen joukon $B_r(x)$ piste on joukon U sisäpiste eli $B_r(x) \subseteq U^o$. Koska $x \in U^o$ valittiin mielivaltaisesti, niin jokainen piste $x \in U^o$ on keskipiste avoimelle pallolle $B_r(x) \subseteq U^o$ jollakin $r > 0$. Täten U^o on avoin joukko.

Osoitetaan vielä, että sisäpisteistö U^o sisältää kaikki avoimet osajoukot $G \subseteq U$. Olkoon $x \in G$. Koska G on avoin joukko, niin on olemassa avoin pallo $B_r(x) \subseteq G \subseteq U$, jollakin $r > 0$. Tällöin $x \in U^o$. Täten jos $x \in G$, niin $x \in U^o$ eli $G \subseteq U^o$.

(ii) Kohdassa (i) on todistettu, että joukon U sisäpisteistö U^o on avoin ja sisältää joukon U kaikki avoimet osajoukot. Jos joukko U on avoin, niin se sisältää vain sisäpisteensä, eli $U = U^o$. Jos taas $U = U^o$, niin U sisältää vain sisäpisteensä eli U on avoin joukko.

$\square$

Lause 3.5. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Olkoot A ja B joukon X osajoukkoja. Tällöin*

(i) $A \subseteq B \Rightarrow A^o \subseteq B^o$,

(ii) $A^o \cap B^o = (A \cap B)^o$,

(iii) $A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$.

Todistus (vrt. [2, s. 69]). (i) Olkoon x joukon A^o mielivaltainen piste. Määritelmän 3.4 nojalla on olemassa $r > 0$ siten, että $B_r(x) \subseteq A$. Jos $A \subseteq B$, niin $B_r(x) \subseteq B$ eli $x \in B^o$.

(ii) Leikkauksen määritelmän nojalla tiedetään, että

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{ja} \quad A \cap B \subseteq B.$$

Kohdan (i) perusteella voidaan nyt todeta, että

$$(A \cap B)^o \subseteq A^o \quad \text{kuin myös} \quad (A \cap B)^o \subseteq B^o.$$

Täten $(A \cap B)^o \subseteq A^o \cap B^o$. Toisaalta, olkoon $x \in A^o \cap B^o$ eli $x \in A^o$ ja $x \in B^o$. On siis olemassa $r_1 > 0$ ja $r_2 > 0$ siten, että $B_{r_1}(x) \subseteq A$ ja $B_{r_2}(x) \subseteq B$. Jos merkitään $r = \min\{r_1, r_2\}$, niin $r > 0$ ja $B_r(x) \subseteq A \cap B$. Nyt siis $x \in (A \cap B)^o$, joten $A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)^o$. Täten väite $A^o \cap B^o = (A \cap B)^o$ on tosi.

(iii) Yhdisteen määritelmän nojalla tiedetään, että

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{ja} \quad B \subseteq A \cup B.$$

Kohdan (i) perusteella voidaan nyt todeta, että $A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$. $\square$

Esimerkki 3.3. Osoitetaan, että joukon $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ sisäpisteistö on joukko $(0, 1)$. Olkoon $x \in (0, 1)$. Avoin väli $(0, 1)$ on avoin joukko, joten on olemassa $r > 0$ siten, että $(x - r, x + r) \subseteq [0, 1]$. Nyt siis x on joukon $[0, 1]$ sisäpiste. Tutkitaan vielä joukon $[0, 1]$ päätepisteet. Piste 0 ei ole joukon $[0, 1]$ sisäpiste, sillä ei ole olemassa sellaista $r > 0$, joka toteuttaisi ehdon $(-r, r) \subseteq [0, 1]$. Myös piste 1 ei kuulu joukon $[0, 1]$ sisäpisteistöön, sillä ei ole olemassa sellaista $r > 0$, joka toteuttaisi ehdon $(1 - r, 1 + r) \subseteq [0, 1]$.

4 Suljetut joukot metrisessä avaruudessa

Jotta metrisiä avaruuksia pystyttäisiin tutkimaan paremmin, tarvitaan suljettuihin joukkoihin liittyviä määritelmiä. Tässä kappaleessa määritellään muun muassa joukon kasautumispiste ja sulkeuma. Sulkeuman käsitettä tarvitaan yhtenäisten joukkojen tutkimiseen. Tässä luvussa lähteenä käytetään teosta [2, s. 70–77, s. 156–158].

4.1 Kasautumispiste

Joukon F kasautumispisteellä metrisessä avaruudessa (X, d) tarkoitetaan pistettä, jonka jokainen ympäristö sisältää joukkoon F kuuluvan kasautumispisteestä eriävän pisteen. Kasautumispisteen ei siis tarvitse välttämättä kuulua joukkoon F.

Määritelmä 4.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $F \subseteq X$. Piste $x \in X$ on joukon F *kasautumispiste*, jos jokainen x-keskinen avoin pallo sisältää vähintään yhden pisteen $y \in F$ siten, että $x \neq y$. Joukon F *kasautumispisteiden joukkoa* merkitään F'.

Määritelmä 4.2. Joukko F metrisessä avaruudessa (X, d) on *suljettu*, jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.

Lause 4.1. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Nyt tyhjä joukko $\emptyset$ ja koko joukko X ovat suljettuja joukkoja.*

Todistus (vrt. [2, s. 73]). Tyhjällä joukolla $\emptyset$ ei ole kasautumispisteitä. Suljettu joukko sisältää kaikki kasautumispisteensä, ja täten tyhjä joukko $\emptyset$ on suljettu. Koska koko joukko X sisältää kaikki pisteet, niin se sisältää myös kaikki kasautumispisteensä ja on täten suljettu joukko. $\square$

Lause 4.2. *Joukko F metrisessä avaruudessa (X, d) on suljettu jos ja vain jos sen komplementti $X \backslash F$ on avoin.*

Todistus (vrt. [2, s. 74]). Oletetaan, että metrisen avaruuden (X, d) joukko F on suljettu. Jos $F = \emptyset$, niin $X \backslash F = X$ on avoin lauseen 3.2 nojalla. Samoin, jos $F = X$, niin $X \backslash X = \emptyset$ on avoin. Oletetaan siis, että

$$F \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad X \backslash F \neq \emptyset,$$

ja olkoon $x \in X \backslash F$. Koska F on suljettu ja $x \notin F$, niin x ei voi olla joukon F kasautumispiste. On siis olemassa $r > 0$ siten, että $B_r(x) \subseteq X \backslash F$. Täten jokainen joukon $X \backslash F$ piste sisältyy avoimeen palloon, joka sisältyy joukkoon $X \backslash F$. Tästä seuraa, että joukko $X \backslash F$ on avoin.

Oletetaan nyt, että $X \backslash F$ on avoin joukko. Osoitetaan, että F on suljettu joukko eli sisältää kaikki kasautumispisteensä. Olkoon $x \in X$ joukon F kasautumispiste. Tehdään vastaväite, että $x \notin F$ eli $x \in X \backslash F$ ja täten F olisi avoin joukko. On siis olemassa $r > 0$ siten, että

$$B_r(x) \subseteq X \backslash F \quad \text{eli} \quad B_r(x) \cap F = \emptyset.$$

Nyt x ei voi olla joukon F kasautumispiste, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Täten alkuperäinen väite pätee eli $x \in F$. Joukko F sisältää siis kaikki kasautumispisteensä ja on siten suljettu. Täten on osoitettu, että metrisen avaruuden osajoukko on suljettu jos ja vain jos sen komplementti on avoin. $\square$

Lause 4.3. *Olkoon* (X, d) *metrinen avaruus ja* $F \subseteq X$. *Jos* x_0 *on joukon* F *kasautumispiste, niin jokainen avoin pallo* $B_r(x_0)$, *jossa* $r > 0$, *sisältää äärettömän määrän joukon* F *pisteitä.*

Todistus (vrt. [2, s. 70]). Tehdään vastaväite, että avoin pallo $B_r(x_0)$ sisältää vain äärellisen määrän joukon F pisteitä. Olkoot $y_i \neq x_0$, missä $i = 1, \ldots, n$, joukkojen $B_r(x_0)$ ja F yhteiset pisteet. Merkitään

$$\delta = \min\{d(y_1, x_0), \ldots, d(y_n, x_0)\}.$$

Nyt avoin pallo $B_\delta(x_0)$ ei sisällä yhtään joukon F pistettä $y_i \neq x_0$, mikä on ristiriidassa kasautumispisteen määritelmän kanssa. Täten vastaväite on väärä, joten jokainen joukon F kasautumispisteen ympäristö sisältää äärettömän määrän joukon F pisteitä. □

Lause 4.4. *Olkoon* (X, d) *metrinen avaruus ja* $F \subseteq X$. *Piste* x_0 *on joukon* F *kasautumispiste jos ja vain jos joukosta* F *voidaan valita jono erillisiä pisteitä* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *siten, että*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

Todistus (vrt. [2, s. 71]). Jos $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$, missä $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ on jono erillisiä joukkoon F kuuluvia pisteitä, niin jokainen avoin pallo $B_r(x_0)$ sisältää jokaisen pisteen x_n, missä $n \geq n_0$ jollakin sopivasti valitulla $n_0 \in \mathbb{N}$. Koska $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ovat joukon F erillisiä pisteitä, niin avoin pallo $B_r(x_0)$ sisältää pisteestä x_0 eriävän joukon F pisteen. Täten x_0 on joukon F kasautumispiste.

Oletetaan nyt, että x_0 on joukon F kasautumispiste. Valitaan avoimen joukon $B_1(x_0)$ piste $x_1 \in F$ siten, että $x_1 \neq x_0$. Seuraavaksi valitaan avoimen pallon $B_{1/2}(x_0)$ piste $x_2 \in F$ siten, että $x_2 \neq x_1$ ja $x_2 \neq x_0$. Tämä on mahdollista lauseen 4.3 nojalla. Jatketaan pisteestä x_0 ja aikaisemmista valituista pisteistä eriävien pisteiden valintaa n kertaa. Nyt siis olemme valinneet avoimen pallon $B_{1/n}(x_0)$ pisteen $x_n \in F$, joka eroaa pisteistä $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Nähdään, että jonon $\{x_n\}$ pisteet toteuttavat raja-arvon $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. □

Esimerkki 4.1. (i) Joukon $F = \{ 1/n : n = 1, 2, \ldots \}$ kasautumispisteiden joukko metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}, d_2)$ on $\{ 0 \}$. Nyt joukko F ei ole suljettu,

sillä se ei sisällä kasautumispisteitään.
(ii) Eri joukoilla voi olla samat kasautumispisteet. Esimerkiksi

$$(0,1)' = (0,1]' = [0,1)' = [0,1]' = [0,1].$$

Lause 4.5. *Olkoon F metrisen avaruuden (X,d) osajoukko. Joukon F kasautumispisteiden joukko F' on suljettu.*

Todistus (vrt. [2, s. 71]). Joukko F' on suljettu, jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä eli $(F')' \subseteq F'$. Tyhjä joukko $\emptyset$ on lauseen 4.1 nojalla suljettu. Olkoon $F' \neq \emptyset$ ja $x_0 \in (F')'$. Valitaan mielivaltainen avoin pallo $B_r(x_0)$ jollakin $r > 0$. Kasautumispisteen määritelmän nojalla on olemassa piste $y \in F'$ siten, että $y \in B_r(x_0)$. Jos $r' = r - d(y,x_0)$, niin avoin pallo $B_{r'}(y)$ sisältää äärettömän monta joukon F pistettä. Nyt siis $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x_0)$, joten ääretön määrä joukon F pisteitä sisältyy avoimeen joukkoon $B_r(x_0)$. Täten x_0 on joukon F kasautumispiste eli $x_0 \in F'$. Joukko F' sisältää kaikki kasautumispisteensä ja on täten suljettu. □

Lause 4.6. *Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Olkoot F_1 ja F_2 joukon X osajoukkoja. Tällöin*

(i) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_1' \subseteq F_2'$,

(ii) $(F_1 \cup F_2)' = F_1' \cup F_2'$,

(iii) $(F_1 \cap F_2)' \subseteq F_1' \cap F_2'$.

Todistus (vrt. [2, s. 71-72]). Kohtien (i) ja (iii) todistukset tehdään samoin kuin kohdan (ii) todistus.

(ii) Kohdan (i) nojalla $F_1' \cup F_2' \subseteq (F_1 \cup F_2)'$. Osoitetaan siis vielä, että $(F_1 \cup F_2)' \subseteq F_1' \cup F_2'$. Olkoon $x_0 \in (F_1 \cup F_2)'$. On siis olemassa lauseen 4.4 nojalla jono erillisiä joukon $F_1 \cup F_2$ pisteitä $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

Jos ääretön määrä pisteitä x_n sisältyy joukkoon F_1, niin $x_0 \in F_1'$ eli $x_0 \in F_1' \cup F_2'$. Jos vain äärellinen määrä jonon $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ pisteitä sisältyy joukkoon F_1, niin

$$x_0 \in F_2' \subseteq F_1' \cup F_2'.$$

Nyt $x_0 \in F_1' \cup F_2'$ kummassakin tapauksessa, joten $(F_1 \cup F_2)' \subseteq F_1' \cup F_2'$. Täten $(F_1 \cup F_2)' = F_1' \cup F_2'$. $\square$

Lause 4.7. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Suljettu pallo*

$$B_r^*(x) = \{ y \in X : d(y, x) \leq r \},$$

missä $x \in X$ ja $0 < r \in \mathbb{R}$, on suljettu joukko.

Todistus (vrt. [2, s. 74]). Olkoon $B_r^*(x)$ suljettu pallo. Suljetun joukon komplementti on avoin joukko. Osoitetaan siis, että $X \backslash B_r^*(x)$ on avoin joukko. Olkoon $y \in X \backslash B_r^*(x)$ eli $d(y, x) > r$. Jos $r_1 = d(y, x) - r$, niin $r_1 > 0$. Nyt siis on olemassa avoin pallo $B_{r_1}(y) \subseteq X \backslash B_r^*(x)$. Olkoon $z \in B_{r_1}(y)$. Nyt

$$d(z, x) \geq d(y, x) - d(y, z) > d(y, x) - r_1 = r.$$

Nyt siis $z \notin B_r^*(x)$ eli $z \in X \backslash B_r^*(x)$. Täten joukko $B_r^*(x)$ on suljettu. $\square$

4.2 Joukon sulkeuma

Sulkeumalla tarkoitetaan joukkoa, joka sisältää kaikki kasautumispisteensä. Toisin sanoen joukon F sulkeuma on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon F.

Määritelmä 4.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $F \subseteq X$. Joukon F *sulkeuma* on joukko

$$\overline{F} = F \cup F'.$$

Lause 4.8. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $F \subseteq X$. Joukon F sulkeuma $\overline{F}$ on suljettu joukko.*

Todistus (vrt. [2, s. 72]). Lauseiden 4.5 ja 4.6 nojalla voidaan kirjoittaa

$$(\overline{F})' = (F \cup F')' = F' \cup (F')' \subseteq F' \cup F' = F' \subseteq \overline{F}.$$

Täten joukon F sulkeuma $\overline{F}$ sisältää kaikki kasautumispisteensä ollen siis täten suljettu joukko. $\square$

Lause 4.9. *Olkoon F metrisen avaruuden (X, d) osajoukko. Joukko F on suljettu jos ja vain jos $F = \overline{F}$.*

Todistus (vrt. [2, s. 72]). Olkoon $F = \overline{F}$. Nyt lauseen 4.8 nojalla joukko F on suljettu. Oletetaan siis, että joukko F on suljettu. Nyt

$$\overline{F} = F \cup F' = F.$$

□

Lause 4.10. *Olkoot A ja B metrisen avaruuden (X, d) osajoukkoja.*

(i) *Jos $A \subseteq B$, niin $\overline{A} \subseteq \overline{B}$,*

(ii) *Jos $A \subseteq B$ ja B on suljettu joukko, niin $\overline{A} \subseteq B$.*

Todistus (vrt. [2, s. 72]). (i) Lauseen 4.6 kohdan (i) nojalla

$$\overline{A} = A \cup A' \subseteq B \cup B' = \overline{B}.$$

(ii) Lauseen 4.9 ja kohdan (i) nojalla

$$\overline{A} \subseteq \overline{B} = B.$$

□

Lause 4.11. *Olkoon F metrisen avaruuden (X, d) osajoukko. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

(i) $x \in \overline{F}$,

(ii) *$B_r(x) \cap F \neq \emptyset$ jokaisella x-keskisellä avoimella pallolla $B_r(x)$,*

(iii) *on olemassa ääretön jono $\{x_n\}$ joukon F pisteitä siten, että $x_n \to x$.*

Todistus (vrt. [2, s. 72–73]). (i)⇒(ii): Olkoon $x \in \overline{F}$. Jos $x \in F$, niin selvästi $B_r(x) \cap F \neq \emptyset$. Jos $x \neq F$, niin sulkeuman määritelmän nojalla $x \in F'$. Kasautumispisteen määritelmän nojalla

$$(B_r(x) \backslash \{x\}) \cap F \neq \emptyset,$$

joten myös $\mathrm{B}_r(x) \cap F \neq \emptyset$.

(ii)⇒(iii): Valitaan $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap F$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Nyt nähdään, että $x_n \to x$. Itse asiassa, jos valitaan $n_0 > \frac{1}{r}$, missä $r > 0$ on mielivaltainen, saadaan

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < r, \quad \text{kun} \quad n \geq n_0.$$

Täten $x_n \in B_r(x)$.

(iii)⇒(i): Oletetaan, että joukon F pisteistä muodostuva jono $\{x_n\}_{n\geq 1}$ sisältää äärellisen määrän erillisiä pisteitä. On siis olemassa osajono $\{x_{n_k}\}$ siten, että $x_{n_k} = x$ kaikilla $k \in I$, missä I on mielivaltainen indeksijoukko. Täten $x \in F \subseteq \overline{F}$.

Oletetaan, että jono $\{x_n\}_{n\geq 1}$ sisältää äärettömän määrän erillisiä pisteitä. On siis olemassa erillisiä pisteitä sisältävä osajono $\{x_{n_k}\}$ siten, että

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) = 0, \quad \text{kun} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0.$$

Lauseen 4.4 nojalla $x \in F' \subseteq \overline{F}$. □

Lause 4.12. *Olkoot F_1 ja F_2 metrisen avaruuden (X, d) osajoukkoja. Nyt*

(i) $\overline{(F_1 \cup F_2)} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$,

(ii) $\overline{(F_1 \cap F_2)} \subseteq \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$.

Todistus (vrt. [2, s. 73]). (i) Joukko-opin perusoperaatioiden ja lauseen 4.6 kohdan (ii) nojalla

$$\begin{aligned}
\overline{(F_1 \cup F_2)} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' \\
&= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\
&= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') \\
&= \overline{F_1} \cup \overline{F_2}.
\end{aligned}$$

(ii) Joukko-opin perusoperaatioiden ja lauseen 4.6 kohdan (iii) nojalla

$$\begin{aligned}
\overline{(F_1 \cap F_2)} &= (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_2)' \\
&\subseteq (F_1 \cap F_2) \cup (F_1' \cap F_2') \\
&\subseteq (F_1 \cup F_1') \cap (F_2 \cup F_2') \\
&= \overline{F_1} \cap \overline{F_2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 4.2. Monissa metrisissä avaruuksissa pätee $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Tällainen ominaisuus on esimerkiksi diskreetillä avaruudella. Tämä johtuu siitä, että $A = \overline{A}$ kaikilla $A \subseteq X$, missä (X, d) on diskreetti avaruus. Toisaalta on myös olemassa metrisiä avaruuksia, joilla $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ei päde. Olkoon $(\mathbb{R}, d)$ metrinen avaruus, missä $d = |x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Olkoon nyt $A = (0, 5)$ ja $B = (5, 12)$. Tällöin $A \cap B = \emptyset$, joten myös $\overline{(A \cap B)} = \overline{\emptyset} = \emptyset$. Toisaalta $\overline{A} = [0, 5]$ ja $\overline{B} = [5, 12]$, joten $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\} \neq \emptyset$. Tämä vielä havainnoillistaa väitteen $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ pätevyyttä.

4.3 Rajoitettu joukko

Tämä kappale painottuu reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ osajoukkojen tarkasteluun. Joukon infimumin ja supremumin avulla voidaan tutkia metristen avaruuksien osajoukkojen halkaisijoita ja joukkojen ja pisteiden välisiä etäisyyksiä. Rajoitetuilla joukoilla on aina reaalinen halkaisija. Lisäksi esitetään suljettuihin väleihin liittyen Cantorin joukko. Matemaatikkoja hämmentäneellä Cantorin joukolla on erikoisia topologisia ominaisuuksia. Cantorin joukko muun muassa sisältää vain kasautumispisteitä, mutta ei yhtään sisäpistettä.

Määritelmä 4.4. Olkoon F metrisen avaruuden (X, d) epätyhjä osajoukko. Joukko F on *rajoitettu*, jos on olemassa $M > 0$ siten, että $d(x, y) \leq M$ kaikilla $x, y \in F$.

Lause 4.13. *Olkoon $F \subseteq \mathbb{R}$ epätyhjä, rajoitettu ja suljettu joukko. Nyt joukon F infimum ja supremum kuuluvat joukkoon F. Toisin sanottuna*

$$\inf F \in F \quad \textit{ja} \quad \sup F \in F.$$

Todistus (vrt. [2, s. 75]). Osoitetaan, että jos $\inf F \notin F$, niin $\inf F$ on joukon F kasautumispiste. Joukon infimumin, eli suurimman alarajan, määritelmän nojalla jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $x \in F$ siten, että

$$\inf F \leq x < \inf F + \epsilon.$$

Koska kuitenkin $\inf F \notin F$ ja $x \in F$, niin

$$\inf F < x < \inf F + \epsilon.$$

Nyt jokainen pisteen $\inf F$ ympäristö sisältää pisteen $x \neq \inf F$. Täten $\inf F$ on joukon F kasautumispiste. Vastaavasti voidaan osoittaa, että piste $\sup F$ eli joukon F pienin yläraja, kuuluu joukkoon F. $\square$

Lause 4.14. *Jokainen reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ epätyhjä, avoin osajoukko G on yhdiste numeroituvasta joukkoperheestä, joka sisältää vain avoimia erillisiä välejä. Näiden avoimien joukkojen päätepisteet eivät kuulu joukkoon G. Päätepisteet eivät kuitenkaan ole pienempiä kuin joukon G infimum tai suurempia kuin joukon G supremum.*

Todistus (vrt. [2, s. 68]). Olkoon $G \subseteq \mathbb{R}$ epätyhjä joukko, ja olkoon $x \in G$. Koska G on avoin joukko, niin on olemassa rajoitettu, avoin x-keskinen väli, joka sisältyy joukkoon G. On siis olemassa $y > x$ ja $z < x$ siten, että $(x, y) \subseteq G$ ja $(z, x) \subseteq G$. Olkoon

$$(1) \quad a = \inf\{z : (z, x) \subseteq G\} \quad \text{ja} \quad b = \sup\{y : (x, y) \subseteq G\}.$$

Nyt $a < x < b$ ja $I_x = (a, b)$ on avoin väli, joka sisältää pisteen x. Osoitetaan, että $a \notin G$, $b \notin G$ ja $I_x \subseteq G$. Väite pätee, jos $a = -\infty$ tai $b = \infty$. Oletetaan siis, että $-\infty < a$ ja $b < \infty$. Jos $a \in G$, niin $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq G$ jollakin $\epsilon > 0$. Nyt siis $(a - \epsilon, x) \subseteq G$, mikä on ristiriidassa oletuksen (1) kanssa. Väite $b \notin G$ todistetaan samalla tavalla. Osoitetaan siis, että jos piste $w \in I_x$, niin $w \in G$. Jos $w = x$, niin selvästi $x \in G$. Olkoon siis $w \neq x$ siten, että $a < w < x$ tai $x < w < b$. Riittää siis osoittaa, että $a < w < x$ pätee. Jos $a < w < x$, niin oletuksen (1) nojalla on olemassa $z < w$ siten, että $(z, x) \subseteq G$. Koska $a < w < x$, niin $w \in G$. Täten $I_x \subseteq G$.

Tarkastellaan vielä avoimia välejä sisältävää joukkoperhettä $\{I_x\}$, jossa $x \in G$. Nyt jokainen piste $x \in G$ sisältyy avoimeen väliin I_x ja jokainen avoin väli I_x sisältyy joukkoon G. Täten

$$G = \bigcup\{I_x : x \in G\}.$$

Osoitetaan, että mitkä tahansa kaksi väliä, jotka kuuluvat joukkoperheeseen $\{I_x : x \in G\}$, ovat erillisiä. Olkoot (a, b) ja (c, d) tämän joukkoperheen välejä, joilla on ainakin yksi yhteinen piste. Nyt siis $c < b$ ja $a < d$. Koska piste c ei kuulu joukkoon G, niin $c \notin (a, b)$, joten $c \leq a$. Koska piste a ei kuulu joukkoon G, niin $a \notin (c, d)$, joten $a \leq c$. Nyt $a = c$ ja samoin $b = d$.

Jos avoimet välit sisältävät yhden yhteisen pisteen, niin $(a, b) = (c, d)$, sillä $a, b, c, d \notin G$. Täten $\{I_x : x \in G\}$ on joukkoperhe erillisiä välejä.

Osoitetaan seuraavaksi, että joukkoperhe on numeroituva. Jokainen epätyhjä, avoin väli sisältää rationaaliluvun. Koska erilliset välit eivät voi sisältää samaa lukua ja rationaaliluvut ovat numeroituvia, niin joukkoperhe $\{I_x : x \in G\}$ on numeroituva.

Oletuksesta (1) seuraa, että $a \geq \inf G$ ja $b \leq \sup G$. Täten joukon G avoimien välien päätepisteet eivät ole pienempiä kuin joukon G infimum tai suurempia kuin joukon G supremum.

$\square$

Määritelmä 4.5. Olkoon $F \subseteq \mathbb{R}$ epätyhjä ja rajoitettu osajoukko. Olkoot $\alpha = \inf F$ ja $\beta = \sup F$. Joukkoa $[\alpha, \beta]$ sanotaan *pienimmäksi suljetuksi väliksi, joka sisältää joukon F.*

Lause 4.15. *Olkoon $F \subseteq \mathbb{R}$ epätyhjä, suljettu ja rajoitettu joukko. Jos joukko $[\alpha, \beta]$ on pienin suljettu väli, joka sisältää joukon F, niin*

$$[\alpha, \beta] \backslash F = (\alpha, \beta) \cap \mathbb{R} \backslash F.$$

Lisäksi joukko $[\alpha, \beta] \backslash F$ on avoin reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ osajoukko.

Todistus (vrt. [2, s. 75]). Olkoon $x_0 \in [\alpha, \beta] \backslash F$. Näin ollen $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ja $x_0 \notin F$. Nyt $x_0 \notin F$, joten $x_0 \neq \alpha$ ja $x_0 \neq \beta$, sillä $\alpha, \beta \in F$ lauseen 4.13 nojalla. Tästä seuraa, että $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ja $x_0 \in \mathbb{R} \backslash F$, joten

$$[\alpha, \beta] \backslash F \subseteq (\alpha, \beta) \cap \mathbb{R} \backslash F.$$

Oletetaan nyt, että $x_0 \in (\alpha, \beta) \cap \mathbb{R} \backslash F$. Näin ollen $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $x_0 \in (\alpha, \beta)$, mutta $x_0 \notin F$. Koska $\alpha, \beta \in F$, niin $x_0 \in [\alpha, \beta] \backslash F$. Täten

$$(\alpha, \beta) \cap \mathbb{R} \backslash F \subseteq [\alpha, \beta] \backslash F.$$

Joukko $(\alpha, \beta) \cap \mathbb{R} \backslash F$ on kahden avoimen joukon leikkauksena avoin joukko.

$\square$

Lause 4.16. *Olkoon $F \subseteq \mathbb{R}$ epätyhjä, suljettu ja rajoitettu joukko. Nyt F on joko suljettu väli tai suljetusta välistä jäljelle jäävä osa, kun poistetaan numeroituva määrä erillisiä, avoimia välejä (a_n, b_n), missä $a_n, b_n \in F$ ja $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus (vrt. [2, s. 76]). Olkoon $[\alpha, \beta]$ pienin suljettu väli, joka sisältää joukon F. Nyt $\alpha = \inf F$ ja $\beta = \sup F$. Lauseen 4.15 nojalla joukko

$$[\alpha, \beta] \backslash F = (\alpha, \beta) \cap \mathbb{R} \backslash F$$

on avoin ja täten numeroituva yhdiste erillisiä avoimia välejä lauseen 4.14 perusteella. Olkoot $(a_n, b_n) \subseteq [\alpha, \beta] \backslash F$ erillisiä avoimia välejä, missä $n \in \mathbb{N}$. Nyt $a_n, b_n \notin [\alpha, \beta] \backslash F$, mutta koska $a_n, b_n \in [\alpha, \beta]$, niin $a_n, b_n \in F$. Täten väite on tosi. □

Esimerkki 4.3. Jaetaan suljettu väli $I = [0, 1]$ kolmeen osaan pisteiden $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ kohdalta. Poistetaan sitten avoin väli $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ joukosta I. Jaetaan jäljelle jääneet kaksi suljettua väliä $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ja $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ kolmeen yhtä suureen osaan pisteiden $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ ja $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$ kohdalta. Poistetaan seuraavaksi avoimet välit $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ ja $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ joukosta I. Jaetaan neljä jäljelle jäänyttä suljettua väliä

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \quad \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \quad \text{ja} \quad \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

kolmeen yhtä suureen osaan ja poistetaan keskelle jääneet avoimet välit. Toistetaan tätä äärettömän monta kertaa. Joukko

$$G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \ldots$$

on yhdiste joukosta I poistettuja avoimia, erillisiä välejä ja täten avoin joukko. Joukon G komplementtia $I \backslash G$ kutsutaan *Cantorin joukoksi.*

Määritelmä 4.6. Olkoon F metrisen avaruuden (X, d) rajoitettu osajoukko. Joukon F *halkaisija* on

$$diam(F) = d(F) = \sup\{d(x, y) : x, y \in F\} \ .$$

Tyhjän joukon halkaisija $d(\emptyset)$ on nolla. Joukon F ja pisteen $x \in X$ välinen etäisyys on

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) : y \in F\} \ .$$

Joukon F ja joukon $E \subseteq X$ välinen etäisyys

$$d(F, E) = \inf\{d(x, y) : x \in F, y \in E\} \ .$$

Joukkojen F ja E välinen etäisyys on määritelty myös, jos $F = \emptyset$ tai $E = \emptyset$. Tällöin $d(F, E) = \infty$. Muussa tapauksessa, eli kun $F \neq \emptyset$ ja $E \neq \emptyset$, $d(F, E)$ on reaalinen ja ei negatiivinen.

Esimerkki 4.4. Väli $(0, \infty)$ ei ole rajoitettu reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ osajoukko. Jos kuitenkin varustetaan joukko $\mathbb{R}$ diskreetillä metriikalla, niin jokainen tämän diskreetin avaruuden osajoukko A on rajoitettu, sillä $d(x, y) \leq 1$ kaikilla $x, y \in A$. Tällöin $d(A) = 1$, jos osajoukossa A on enemmän kuin yksi piste. Voidaan yleistää, että jokaisen diskreetin avaruuden useamman kuin yhden pisteen sisältävän osajoukon halkaisija on yksi.

Lause 4.17. *Jos A on metrisen avaruuden (X, d) osajoukko, niin* $d(A) = d(\overline{A})$.

Todistus (vrt. [2, s. 77]). Olkoot $x, y \in \overline{A}$. Nyt on olemassa jonot $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ja $\{y_n\}_{n \geq 1}$, jotka sisältyvät joukkoon A siten, että $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ ja $d(y, y_n) < \frac{\epsilon}{2}$, kun $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ ja $\epsilon > 0$ on mielivaltainen. Nyt

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + d(x_n, y_n) + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq d(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Nähdään, että $d(\overline{A}) \leq d(A)$, sillä ϵ valittiin mielivaltaisesti. Sulkeuman määritelmän nojalla $d(A) \leq d(\overline{A})$. Täten $d(A) = d(\overline{A})$. □

4.4 Yhtenäinen metrinen avaruus

Tutkielmassa on osoitettu, että tyhjä joukko ja koko metrinen avaruus ovat sekä avoimia että suljettuja joukkoja. Tällainen ominaisuus on mahdollista olla myös jollain metrisen avaruuden epätyhjällä, aidolla osajoukolla. Jos tällaista joukkoa ei löydy, niin metrinen avaruus on yhtenäinen. Esimerkiksi reaalilukujoukko $\mathbb{R}$ on yhtenäinen.

Määritelmä 4.7. Metrinen avaruus (X, d) on *yhtenäinen*, jos ei löydy kahta epätyhjää joukkoa A ja B, jotka toteuttavat ehdot

(i) $X = A \cup B$,

(ii) $A \cap \overline{B} = \emptyset$ ja $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Jos tällaiset joukot löytyvät, niin metrinen avaruus on *epäyhtenäinen*.

Esimerkki 4.5. Rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ metriikkana on $d = |x - y|$, missä $x, y \in \mathbb{Q}$. Osoitetaan, että metrinen avaruus $(\mathbb{Q}, d)$ on epäyhtenäinen. Valitaan

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \quad \text{ja} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}.$$

Nyt

$$A \cup B = \mathbb{Q}, \quad A \cap \overline{B} = \emptyset \quad ja \quad \overline{A} \cap B = \emptyset.$$

Lause 4.18. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

(i) *(X, d) on epäyhtenäinen.*

(ii) *On olemassa kaksi epätyhjää, avointa, erillistä joukkoa A ja B siten, että $X = A \cup B$.*

(iii) *On olemassa kaksi epätyhjää, suljettua, erillistä joukkoa A ja B siten, että $X = A \cup B$.*

(iv) *On olemassa joukko $A \subset X$, joka on avoin ja suljettu.*

Todistus (vrt. [2, s. 157–158]). (i)$\Rightarrow$(ii): Olkoon $X = A \cup B$, missä A ja B ovat epätyhjiä joukkoja, $A \cap \overline{B} = \emptyset$ ja $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Nyt $A = X \setminus \overline{B}$ on suljetun joukon komplementtina avoin joukko. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $B \subseteq X$ on avoin joukko. Koska A ja $\overline{B}$ ovat erillisiä, niin selvästi myös A ja B ovat erillisiä, joten väite (ii) on tosi.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Oletetaan, että väitteen (ii) ehdot pätevät. Osoitetaan, että A ja B ovat suljettuja joukkoja. Koska $X = A \cup B$ ja $A \cap B = \emptyset$, niin $A = X \setminus B$. Nyt B on oletuksen mukaan avoin joukko, joten A on suljettu joukko. Vastaavasti nähdään, että B on suljettu joukko.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Oletetaan, että väitteen (iii) ehdot pätevät. Nyt $A = X \setminus B$, joten A on suljetun joukon komplementtina avoin joukko. Täten A on metrisen avaruuden (X, d) avoin ja suljettu aito osajoukko.

(iv)$\Rightarrow$(i): Olkoon A sellainen metrisen avaruuden (X,d) aito osajoukko, joka on avoin ja suljettu. Olkoon nyt $B = X \backslash A$, joten $X = A \cup B$ ja $A \cap B = \emptyset$. Koska A on suljettu joukko, niin $A = \overline{A}$ ja täten myös $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Samoin voidaan osoittaa, että $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Väiteet (i)-(iv) ovat siis yhtäpitäviä. $\square$

5 Aliavaruuksista

Tässä luvussa tutkitaan metrisen aliavaruuden avoimien ja suljettujen joukkojen suhdetta metrisen avaruuden avoimiin ja suljettuihin joukkoihin. Todistetaan myös, että reaalilukujoukon osajoukko on yhtenäinen jos ja vain jos se on väli. Lähteenä käytetään teosta [2, s. 28, s. 78–81, s. 157–158].

Määritelmä 5.1. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Järjestettyä paria (Y, d_Y) kutsutaan metrisen avaruuden (X,d) *aliavaruudeksi*, missä $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ on metriikan *d indusoima metriikka* joukkoon $Y \times Y$. Toisin sanoen $d(x,y) = d_Y(x,y)$ kaikilla $x, y \in Y$.

Esimerkki 5.1. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $Z \subseteq Y \subseteq X$. Nyt Z voi olla samaan aikaan joukon Y avoin osajoukko ja joukon X ei avoin osajoukko. Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $d = d_2$ euklidinen metriikka. Olkoon (Y, d_Y) aliavaruus, missä $Y = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ ja d_Y metriikan d_2 indusoima metriikka joukkoon $Y \times Y$. Nyt Y on joukon X suljettu osajoukko, sillä joukon Y komplementti $\mathbb{R}^2 \backslash Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ on avoin joukossa X. Jos $Z = \{(x,0) : 0 < x < 1\}$, niin Z on avoin joukon Y osajoukko. Jos Z olisi joukon X avoin osajoukko, niin olisi olemassa avoin pallo $B_r((x,0)) \subseteq \mathbb{R}^2$, missä $r > 0$, $0 < x < 1$ ja $(x,0) \in Z$. Nyt yksikään tällainen ympäristö ei kuitenkaan sisälly joukkoon Z. Täten $Z = \{(x,0) : 0 < x < 1\}$ on joukon $Y = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ avoin osajoukko ja metrisen avaruuden $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ei avoin osajoukko.

Määritelmä 5.2. Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Epätyhjä *osajoukko* $Y \subseteq X$ *on yhtenäinen*, jos aliavaruus (Y, d_Y) on yhtenäinen. Jos aliavaruus (Y, d_Y) on epäyhtenäinen, niin *osajoukko* $Y \subseteq X$ *on epäyhtenäinen.*

Lause 5.1. *Olkoon* $(\mathbb{R}, d)$ *metrinen avaruus. Osajoukko* $I \subseteq \mathbb{R}$ *on yhtenäinen jos ja vain jos* I *on väli. Joukko* I *on siis yhtenäinen, jos ja vain jos se on muotoa*

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b], \quad (-\infty, b),$$

$$(-\infty, b], \quad (a, \infty), \quad [a, \infty) \quad \textit{tai} \quad (-\infty, \infty),$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$.

Todistus (vrt. [2, s. 158]). Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$ yhtenäinen joukko. Tehdään vastaväite, että joukko I ei ole väli. On siis olemassa $x, y, z \in \mathbb{R}$ siten, että $x < z < y$ ja $x, y \in I$, mutta $z \notin I$. Nyt $I = A \cup B$, missä

$$A = (-\infty, z) \cap I \quad \text{ja} \quad B = (z, \infty) \cap I.$$

Koska $x \in A$ ja $y \in B$, niin joukot A ja B ovat epätyhjiä, avoimia ja erillisiä joukossa I. Nyt I on epäyhtenäinen, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Täten vastaväite on väärä ja alkuperäinen väite tosi.

Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$ väli ja tehdään vastaväite, että I on epäyhtenäinen. On siis olemassa epätyhjät osajoukot A ja B siten, että

$$I = A \cup B, \quad A \cap \overline{B} = \emptyset \quad \text{ja} \quad \overline{A} \cap B = \emptyset.$$

Valitaan $x \in A$ ja $y \in B$. Voidaan olettaa, että $x < y$. Nyt I on väli, joten $[x, y] \subseteq I$. Merkitään

$$z = \sup(A \cap [x, y]).$$

Supremum on olemassa, sillä joukko $A \cap [x, y]$ on ylhäältä rajoitettu pisteellä y ja epätyhjä sisältäessään pisteen x. Supremumin määritelmän nojalla on olemassa $a \in A$ siten, että $z - \epsilon < a \leq z$ mielivaltaisella $\epsilon > 0$. Nyt siis jokainen pisteen z ympäristö sisältää joukon A pisteen, joten z on joukon A kasautumispiste. Koska $\overline{A} \cap B = \emptyset$, niin $z \notin B$ ja $x \leq z < y$. Jos $z \notin A$, niin $x < z < y$ ja $z \notin I$, mikä on ristiriidassa oletuksen $[x, y] \subseteq I$ kanssa.

Nyt siis $z \in A$ ja $z \notin \overline{B}$, sillä $A \cap \overline{B} = \emptyset$. On siis olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$(z - \delta, z + \delta) \cap B = \emptyset.$$

Olkoon $z_1 \notin B$ siten, että $z < z_1 < y$. Nyt $x \leq z < z_1 < y$ ja $z_1 \notin I$, mikä on ristiriidassa oletuksen $[x, y] \subseteq I$ kanssa. Täten joukko $I \subseteq \mathbb{R}$ on yhtenäinen jos ja vain jos I on väli. $\square$

Lause 5.2. *Olkoon (Y, d_Y) metrisen avaruuden (X, d) aliavaruus. Olkoon $z \in Y$ ja $r > 0$. Nyt*

$$B_r^Y(z) = B_r^X(z) \cap Y,$$

missä $B_r^Y(z) \subseteq Y$ ja $B_r^X(z) \subseteq X$ ovat avoimia, z-keskisiä ja r-säteisiä palloja.

Todistus (vrt. [2, s. 79]). Koska $Y \subseteq X$, niin

$$\begin{aligned} B_r^X(z) \cap Y &= \{x \in X : d(x, z) < r\} \cap Y \\ &= \{x \in Y : d(x, z) < r\} \\ &= B_r^Y(z). \end{aligned}$$

$\square$

Lause 5.3. *Olkoon (Y, d_Y) metrisen avaruuden (X, d) aliavaruus. Olkoon Z joukon Y osajoukko. Nyt*

(i) *Z on avoin joukossa Y jos ja vain jos on olemassa avoin joukko $G \subseteq X$ siten, että $Z = G \cap Y$;*

(ii) *Z on suljettu joukossa Y jos ja vain jos on olemassa suljettu joukko $F \subseteq X$ siten, että $Z = F \cap Y$.*

Todistus (vrt. [2, s. 80]). (i) Olkoon Z joukon Y avoin osajoukko. Jos $z \in Z$, niin on olemassa $B_r^Y(z) \subseteq Z$. Avoimen pallon $B_r^Y(z)$ säteen r suuruus riippuu nyt pisteestä $z \in Z$. Nyt

$$\begin{aligned} Z &= \bigcup_{z \in Z} B_r^Y(z) \\ &= \bigcup_{z \in Z} \left(B_r^X(z) \cap Y\right) \\ &= \left(\bigcup_{z \in Z} B_r^X(z)\right) \cap Y \\ &= G \cap Y, \end{aligned}$$

missä $G = \bigcup_{z \in Z} B_r^X(z)$ on avoin joukon X osajoukko.

Olkoon nyt $Z = G \cap Y$, missä G on joukon X avoin osajoukko. Jos $z \in Z$ on mielivaltainen piste, niin $z \in G$ ja näin ollen on olemassa avoin pallo $B_r^X(z) \subseteq G$. Nähdään, että

$$B_r^Y(z) = B_r^X(z) \cap Y \subseteq G \cap Y = Z,$$

ja täten z on osajoukon $Z \subseteq Y$ sisäpiste. Koska piste z on mielivaltainen joukon Z piste, niin Z on avoin joukon Y osajoukko.

(ii) Joukko Z on joukon Y suljettu osajoukko jos ja vain jos $(X \backslash Z) \cap Y$ on avoin joukon Y osajoukko. Näin ollen $Z \subseteq Y$ on suljettu joukossa Y jos ja vain jos on olemassa avoin joukko $G \subseteq X$ siten, että

$$(X \backslash Z) \cap Y = G \cap Y.$$

Kun otetaan yhtälön molemmilta puolilta komplementit metrisessä avaruudessa (X, d), saadaan

$$Z \cup (X \backslash Y) = (X \backslash G) \cup (X \backslash Y).$$

Täten

$$\begin{aligned} Z = Z \cap Y &= (Z \cup (X \backslash Y)) \cap Y \\ &= ((X \backslash G) \cup (X \backslash Y)) \cap Y \\ &= (X \backslash G) \cap Y. \end{aligned}$$

Nähdään, että Z on joukkojen $X \backslash G$ ja Y leikkaus, missä $X \backslash G$ on suljettu joukon X osajoukko.

Olkoon nyt $Z = F \cap Y$, missä F on suljettu joukon X osajoukko. Nyt

$$X \backslash Z = (X \backslash F) \cup (X \backslash Y),$$

ja edelleen

$$(X \backslash Z) \cap Y = ((X \backslash F) \cup (X \backslash Y)) \cap Y = (X \backslash F) \cap Y,$$

missä $X \backslash F$ on avoin joukon X osajoukko. Nyt $X \backslash Z$ on avoin joukossa Y. Täten Z on suljettu joukossa Y. $\square$

Lause 5.4. *Olkoon* (Y, d_Y) *metrisen avaruuden* (X, d) *aliavaruus.*

(i) *Jokainen joukon* Y *avoin osajoukko on avoin joukossa* X *jos ja vain jos* Y *on avoin joukossa* X*.*

(ii) *Jokainen joukon* Y *suljettu osajoukko on suljettu joukossa* X *jos ja vain jos* Y *on suljettu joukossa* X*.*

Todistus (vrt. [2, s. 81]). (i) Oletetaan, että kaikki joukon Y avoimet osajoukot ovat avoimia myös joukossa X. Koska $Y \subseteq Y$ on nyt avoin joukossa Y, niin joukon Y täytyy olla avoin myös joukossa X.

Oletetaan, että Y on avoin joukossa X. Olkoon $Z \subseteq Y$ avoin joukko. Lauseen 5.3 kohdan (i) nojalla on olemassa avoin joukko $G \subseteq X$ siten, että $Z = G \cap Y$. Kahden avoimen joukon G ja Y leikkauksena joukon Z on oltava avoin joukossa X.

(ii) Todistetaan vastaavasti kuin kohta (i). □

Lause 5.5. *Olkoon* (X, d) *metrinen avaruus ja* $Z \subseteq Y \subseteq X$*. Jos* $\boldsymbol{cl}_X Z$ *ja* $\boldsymbol{cl}_Y Z$ *ovat joukon* Z *sulkeumat joukoissa* X *ja* Y*, niin*

$$\boldsymbol{cl}_Y Z = Y \cap \boldsymbol{cl}_X Z.$$

Todistus (vrt. [2, s. 81]). Nähdään, että $Z \subseteq Y \cap \mathbf{cl}_X Z$, sillä $Z \subseteq Y \subseteq X$. Lauseen 5.3 kohdan (ii) nojalla voidaan todeta, että $Y \cap \mathbf{cl}_X Z$ on suljettu joukossa Y. Lauseen 4.10 kohdan (i) nojalla nyt $\mathbf{cl}_Y Z \subseteq Y \cap \mathbf{cl}_X Z$.

Toisaalta lauseen 5.3 kohdan (ii) nojalla voidaan myös todeta, että $\mathbf{cl}_Y Z = Y \cap F$, missä F on joukon X suljettu osajoukko. Nyt siis

$$Z \subseteq \mathbf{cl}_Y Z \subseteq F.$$

Lauseen 4.10 kohdan (i) nojalla

$$\mathbf{cl}_X Z \subseteq F.$$

Täten

$$Y \cap \mathbf{cl}_X Z \subseteq Y \cap F = \mathbf{cl}_Y Z.$$

□

Viitteet

[1] Lipschutz, S., *Theory and Problems of General Topology.* New York: Schaum Publishing Company, 1965.

[2] Shirali, S. ja Vasudeva, H.S., *Metric Spaces.* Lontoo: Springer-Verlag, 2006.

[3] Sutherland, W.A., *Introduction to Metric and Topological Spaces, 2nd ed.* New York: Oxford University Press Inc., 2009.

[4] Thomson, B.S., Bruckner, J.B. ja Bruckner, A.M., *Elementary Real Analysis.* URL: http://www.im.pwr.wroc.pl/~kwasnicki/pl/stuff/tbb-hyper.pdf (Viitattu 13.11.2012).