TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Pauliina Ilmonen

SYT-matriisien ominaisarvojen asymptoottisesta käyttäytymisestä

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Huhtikuu 2007

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

ILMONEN, PAULIINA: SYT-matriisien ominaisarvojen asymptoottisesta käyttäytymisestä

Pro gradu -tutkielma, 51 s., 2 liites.

Matematiikka

Huhtikuu 2007

Tiivistelmä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku, α positiivinen reaaliluku ja olkoon

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

sellainen järjestetty joukko, jonka alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja. Joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi $(A^\alpha) = [a_{ij}]$ on $n \times n$-matriisi, jonka alkio

$$a_{ij} = (a_i, a_j)^\alpha, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Shaofang Hong ja Raphael Loewy esittävät artikkelissa *Asymptotic Behavior of Eigenvalues of Greatest Common Divisor Matrices* alarajan matriisin (A^α) pienimmälle ominaisarvolle. Lisäksi artikkelissa tarkastellaan matriisin (A^α) ominaisarvojen käyttäytymistä kokonaisluvun n kasvaessa mielivaltaisen suureksi.

Tässä tutkielmassa syvennytään yksityiskohtaisesti artikkelin *Asymptotic Behavior of Eigenvalues of Greatest Common Divisor Matrices* todistuksiin.

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan SYT-matriiseja eli suurin yhteinen tekijä -matriisseja ja SYT-potenssimatriiseja. (SYT- ja SYT-potenssimatriisin tarkka määritelmä esitetään alaluvussa 1.2.) Tampereen yliopistossa SYT-matriiseihin liittyvää tutkimusta ovat tehneet Pentti Haukkanen, Ismo Korkee ja Juha Sillanpää. Ismo Korkee tarkasteli vuonna 2006 tarkastetussa väitöskirjassaan *On Meet and Join Matrices Associated with Incidence Functions* SYT-matriisien hilateoreettisia ominaisuuksia. Tässä tutkielmassa tarkastellaan Shaofang Hongin ja Raphael Loewyn artikkelissa *Asymptotic Behavior of Eigenvalues of Greatest Common Divisor Matrices* esittämiä SYT-matriisien ja SYT-potenssimatriisien ominaisarvoja koskevia tuloksia. Tutkielmassa syvennytään yksityiskohtaisesti artikkelissa esitettyihin lauseisiin ja niiden todistuksiin.

Tutkielma sijoittuu matematiikan osa-alueista lukuteorian piiriin, mutta tarkasteluissa käytetään myös lineaarialgebran ja analyysin tietoja. Tämän vuoksi lukijalla tulisi olla lukuteorian perustietojen lisäksi analyysin ja lineaarialgebran tuntemusta.

Kyetäkseen ymmärtämään tutkielmaa vaivattomasti lukijan tulisi osata erityisesti matriisilaskennan perustaidot ja tuntea matriiseihin ja matriisilaskentaan liittyvät yleisimmät käsitteet. Lukijan oletetaan tuntevan käsitteet alimatriisi, diagonaalimatriisi, kolmiomatriisi, alakolmiomatriisi, symmetrinen matriisi, konjugaattisymmetrinen matriisi, käänteismatriisi, transpoosi, permutaatiomatriisi, determinantti, ominaisarvo ja karakteristinen polynomi sekä tuntevan matriisin kääntyvyyden ja ominaisarvojen välisen yhteyden. Lukijan oletetaan osaavan laskea matriisin determinantin ja ominaisarvot.

Analyysin perustiedoista lukijan tulisi hallita erityisesti raja-arvon määritelmä. Lisäksi lukijan oletetaan tuntevan käsitteet funktio, polynomifunktio, funktion raja-arvo, jono, osajono, aritmeettinen jono, vähenevä jono, suppeneva jono, hajaantuva jono, alhaalta rajoitettu jono, sarja, sarjan summa, suppeneva sarja ja hajaantuva sarja. Polynomifunktioiden käyttäytymisen tarkastelun oletetaan olevan lukijalle tuttua.

Lukuteorian osa-alueelta lukijan tulisi olla tutustunut alkulukuihin ja positiivisten kokonaislukujen kanoniseen alkutekijäesitykseen. Lukijan oletetaan tuntevan kokonaislukuihin liittyvät käsitteet suurin yhteinen tekijä, kongruenssirelaatio ja aritmeettinen funktio.

Lukijan oletetaan tuntevan käsitteet joukon mahtavuus, kertolaskun suhteen suljettu joukko ja tekijäsuljettu joukko.

Tämän tutkielman luvussa 2 tarkasteltavissa tuloksissa esitetään alaraja SYT-potenssimatriisin pienimmälle ominaisarvolle ja tarkastellaan SYT-potenssimatriisin ominaisarvojen käyttäytymistä matriisin dimension kasvaessa rajatta. Luvussa 1 esitetään luvun 2 todistuksissa tarvittavia määritelmiä ja lauseita.

1 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa tutustutaan tutkielmassa käytettäviin merkintöihin ja esitetään tarvittavia määritelmiä. Lisäksi esitetään sekä todistetaan joitakin tutkielman luvussa 2 tarvittavia lauseita.

1.1 Merkintöjä

Tässä alaluvussa kerrotaan tutkielmassa käytettävistä merkinnöistä.

Tutkielmassa merkitään pienillä kirjaimilla $a, b, c, \ldots$ sekä $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ (kokonais)lukuja. Alkulukuja merkitään kirjaimilla $p, p_1, p_2, \ldots$ Isoilla kirjaimilla $A, B, C, \ldots$ merkitään lukujoukkoja. Merkinnällä $\mathbb{R}$ tarkoitetaan reaalilukujen joukkoa ja merkinnällä $\mathbb{C}$ tarkoitetaan kompleksilukujen joukkoa. Merkintää $\mathbb{F}$ käytetään joukosta, joka on vaihtoehtoisesti joko reaalilukujen joukko tai kompleksilukujen joukko. Merkinnällä $\mathbb{Z}$ tarkoitetaan kokonaislukujen joukkoa, $\mathbb{Z}_+$ positiivisten kokonaislukujen joukkoa ja merkinnällä $\mathbb{P}$ tarkoitetaan alkulukujen joukkoa. Merkinnällä $|a|$ tarkoitetaan luvun a itseisarvoa ja merkinnällä $|A|$ tarkoitetaan joukon A mahtavuutta. Merkinnällä $\min A$ tarkoitetaan joukon A pienintä alkiota ja merkinnällä $\max A$ tarkoitetaan joukon A suurinta alkiota. Merkinnällä $\bar{a}$ tarkoitetaan luvun a kompleksikonjugaattia. Merkinnällä $\lfloor a \rfloor$ tarkoitetaan sellaista suurinta mahdollista kokonaislukua, että luku $a \geq \lfloor a \rfloor$.

Pienillä kirjaimilla $x, y, z, \ldots$ merkitään vektoreita ja isoilla kirjaimilla $X, Y, Z, \ldots$ matriiseja. Jos matriisin X i. vaakarivin j. pystyrivin alkio on a_{ij}, voidaan merkitä $X = [a_{ij}]$. Lisäksi merkitään $|X| = [\ |a_{ij}|\ ]$. Merkinnällä E_n tarkoitetaan sellaista $n \times n$-matriisia, jonka jokainen alkio on 1. Merkinnällä I tarkoitetaan asiayhteyteen sopivan kokoista identiteettimatriisia. Merkinnällä $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tarkoitetaan sellaista diagonaalimatriisia, jonka alkio $a_{ii} = a_i$, kun $1 \leq i \leq n$. Merkinnällä $\det X$ tarkoitetaan matriisin X determinanttia. Matriisien ominaisarvoja merkitään pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla λ, μ ja γ. Merkinnällä X^T tarkoitetaan matriisin X transpoosia ja vastaavasti merkinnällä x^T tarkoitetaan vektorin x transpoosia. Merkinnällä X^* tarkoitetaan matriisin X konjugaattitranspoosia ja merkinnällä x^* tarkoitetaan vektorin x konjugaattitranspoosia.

Tutkielmassa merkinnällä $\mathbb{R}^{m\times n}$ tarkoitetaan reaalialkiosten $m\times n$-matriisien joukkoa. Merkintä $\mathbb{R}^n$ tarkoittaa n-alkioisten reaalivektorien joukkoa. Merkinnällä Θ tarkoitetaan asiayhteyteen sopivaa nolla-alkiota.

Merkinnällä $a(p)$ tarkoitetaan alkuluvun p potenssia positiivisen kokonaisluvun a kanonisessa alkutekijäesityksessä. Siis luvun a kanoninen alkutekijäesitys on muotoa $\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a(p)}$. Merkinnällä (a,b) tarkoitetaan kokonaislukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää.

Selkeyden vuoksi ja sekaannusten estämiseksi tutkielman joissakin kohdissa on poikettu jonkin verran yllä esitetyistä merkinnöistä. Kyseisissä kohdissa merkintä on asiayhteydestä selvä tai se on selitetty erikseen.

1.2 Määritelmiä ja esimerkkejä

Tässä alaluvussa esitetään tutkielmassa tarvittavia määritelmiä sekä tarkastellaan määritelmiä havainnollistavia esimerkkejä.

Tässä tutkielmassa järjestetyllä joukolla $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ja äärettömällä järjestetyllä joukolla $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ tarkoitetaan sellaisia lukujoukkoja, joiden alkiot on järjestetty lukujen tavanomaiseen suuruusjärjestykseen. Jos lukujen järjestys poikkeaa tavanomaisesta suuruusjärjestyksestä, niin asiasta on mainittu erikseen.

Seuravaksi esitetään matriiseihin ja matriisilaskentaan liittyviä määritelmiä. Ellei määritelmässä mainita toisin, ovat tarkasteltavat matriisit joukon $\mathbb{F}^{m\times n}$ alkioita.

Määritelmä 1. (Ks. [15, s. 25].) Olkoon $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sellainen järjestetty joukko, jonka alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja. Tällöin joukon A määräämä *SYT-matriisi* $(A) = [a_{ij}]$ on $n \times n$-matriisi, jonka alkio

$$a_{ij} = (a_i, a_j), \quad 1 \le i, j \le n.$$

Koska kahden positiivisen kokonaisluvun suurin yhteinen tekijä on positiivinen kokonaisluku, niin SYT-matriisien alkiot ovat aina positiivisia kokonaislukuja.

Esimerkki 1. Olkoon $A = \{1, 2, 4, 6\}$ järjestetty joukko. Tällöin

$$(A) = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,4) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,4) & (2,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,4) & (4,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,4) & (6,6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 2. (Ks. [15, s. 25].) Olkoon $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sellainen järjestetty joukko, jonka alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja ja olkoon α positiivinen reaaliluku. Tällöin joukon A ja luvun α määräämä *SYT-potenssimatriisi* $(A^\alpha) = [a_{ij}]$ on $n \times n$-matriisi, jonka alkio

$$a_{ij} = (a_i, a_j)^\alpha, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Kun A on kokonaislukualkioinen järjestetty joukko ja reaaliluku $\alpha = 1$, niin edellä olevasta määritelmästä seuraa, että joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi (A^α) on itse asiassa joukon A määräämä SYT-matriisi (A).

Aiemmin todettiin, että SYT-matriisien alkiot ovat aina positiivisia kokonaislukuja. Tämän vuoksi kokonaislukualkioisen joukon SYT-potenssimatriisi voidaan määritellä jokaisella reaalilukupotenssilla α ja SYT-potenssimatriisien alkiot ovat aina positiivisia reaalilukuja. Tässä tutkielmassa SYT-potenssimatriisi määritellään kuitenkin vain positiivisilla reaalilukupotensseilla.

Esimerkki 2. Olkoon $A = \{1, 2, 4, 6\}$ järjestetty joukko. Tällöin

$$(A^{\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} (1,1)^{\frac{1}{2}} & (1,2)^{\frac{1}{2}} & (1,4)^{\frac{1}{2}} & (1,6)^{\frac{1}{2}} \\ (2,1)^{\frac{1}{2}} & (2,2)^{\frac{1}{2}} & (2,4)^{\frac{1}{2}} & (2,6)^{\frac{1}{2}} \\ (4,1)^{\frac{1}{2}} & (4,2)^{\frac{1}{2}} & (4,4)^{\frac{1}{2}} & (4,6)^{\frac{1}{2}} \\ (6,1)^{\frac{1}{2}} & (6,2)^{\frac{1}{2}} & (6,4)^{\frac{1}{2}} & (6,6)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1^{\frac{1}{2}} & 1^{\frac{1}{2}} & 1^{\frac{1}{2}} & 1^{\frac{1}{2}} \\ 1^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}} \\ 1^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}} & 4^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}} \\ 1^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}} & 6^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 3. (Ks. [7, s. 115].) Matriisi X on *similaarinen* matriisin Y kanssa, jos on olemassa sellainen kääntyvä matriisi Z, että

$$X = ZYZ^{-1}.$$

Tällöin merkitään

$$X \sim Y.$$

Määritelmä 4. (Ks. [13, s. 396].) Konjugaattisymmetrinen $n \times n$-matriisi X on *positiivisesti definiitti*, jos

$$x^* X x > 0 \text{ jokaisella } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}.$$

Esimerkki 3. Olkoon $n \times n$-matriisi X kääntyvä. Tällöin matriisi X^*X on konjugaattisymmetrinen. Jos valitaan mielivaltainen $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}$ ja merkitään $Xx = y$, niin

$$x^*X^*Xx = (Xx)^*Xx = y^*y.$$

Matriisi X on kääntyvä, joten $Xx = y \neq \Theta$. Täten $y^*y > 0$. Matriisi X^*X on siis positiivisesti definiitti.

Määritelmä 5. (Ks. [13, s. 396].) Konjugaattisymmetrinen $n \times n$-matriisi X on *ei-negatiivisesti definiitti*, jos

$$x^*Xx \geq 0 \text{ jokaisella } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}.$$

Esimerkki 4. Olkoon X $n \times m$-matriisi. Tällöin matriisi X^*X on konjugaattisymmetrinen $n \times n$-matriisi. Jos valitaan mielivaltainen $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}$ ja merkitään $Xx = y$, niin

$$x^*X^*Xx = (Xx)^*Xx = y^*y.$$

Koska $y^*y \geq 0$, niin matriisi X^*X on ei-negatiivisesti definiitti.

Kaikki reaalialkioiset symmetriset matriisit ovat myös konjugaattisymmetrisiä. Jos tarkastellaan reaalisia matriiseja, niin edellisissä määritelmissä vaatimus matriisin konjugaattisymmetrisyydestä voidaan korvata vaatimuksella symmetrisyydestä.

Määritelmä 6. (Ks. [13, s. 490].) Reaalialkioinen matriisi X on *positiivinen*, jos sen kaikki alkiot ovat positiivisia. Tällöin merkitään

$$X > 0.$$

Vastaavasti reaalialkioinen matriisi X on *ei-negatiivinen*, jos sen kaikki alkiot ovat ei-negatiivisia. Tällöin merkitään

$$X \geq 0.$$

Aiemmin todettiin, että SYT-matriisien alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja ja SYT-potenssimatriisien alkiot ovat positiivisia reaalilukuja. Tästä seuraa, että kaikki SYT-matriisit ja SYT-potenssimatriisit ovat positiivisia.

Edellä olevista määritelmästä seuraa, että jokainen positiivisesti definiitti matriisi on myös ei-negatiivisesti definiitti ja jokainen positiivinen matriisi on myös ei-negatiivinen.

Määritelmä 7. (Ks. [13, s. 490].) Matriisi X *on suurempi tai yhtä suuri kuin matriisi* Y, jos

$$X - Y \geq 0.$$

Tällöin käytetään merkintää

$$X \geq Y.$$

Määritelmä 8. (Ks. [13, s. 295].) Olkoon X $n \times n$-matriisi. Tällöin matriisin X *spektraalinormi*

$$||X|| = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ on matriisin } X^*X \text{ ominaisarvo}\}.$$

Määritelmä 9. (Ks. [14, s. 243].) Olkoon $X = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $Y \in \mathbb{R}^{k\times l}$. Tällöin matriisien X ja Y *Kroneckerin tulo* $X \otimes Y$ on matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{11}Y & \cdots & a_{1n}Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}Y & \cdots & a_{mn}Y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mk\times nl}.$$

Esimerkki 5. Olkoon $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ja $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tällöin

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} 1Y & 2Y \\ 3Y & 4Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ja

$$Y \otimes X = \begin{bmatrix} 1X & 1X \\ 1X & 0X \\ 1X & 1X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Edellä olevan esimerkin nojalla matriisien välinen Kroneckerin tulo ei ole vaihdannainen.

Seuraavaksi esitetään kokonaislukuihin ja kokonaislukualkioisiin joukkoihin liittyviä määritelmiä.

Määritelmä 10. (Ks. [9, s. 6].) Kokonaisluvut a ja b ovat *suhteellisia alkulukuja*, jos
$$(a, b) = 1.$$

Esimerkki 6. Lukujen 4 ja 9 suurin yhteinen tekijä $(4, 9) = 1$, joten 4 ja 9 ovat keskenään suhteellisia alkulukuja. Luvut 4 ja 9 eivät kuitenkaan kumpikaan ole alkulukuja.

Määritelmä 11. (Ks. [12, s. 557].) Olkoot $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ja $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ järjestettyjä joukkoja. Tällöin joukkojen A ja B *suora tulo* $A \odot B$ on järjestety joukko
$$A \odot B = \{a_1b_1, \ldots, a_1b_m, a_2b_1, \ldots, a_2b_m, \ldots, a_nb_1, \ldots, a_nb_m\}.$$

Esimerkki 7. Olkoot $A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 4\}$ järjestettyjä joukkoja. Tällöin
$$A \odot B = \{1 \cdot 1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 4, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 4\} = \{1, 2, 4, 2, 4, 8\}$$
ja
$$B \odot A = \{1 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 4 \cdot 1, 4 \cdot 2\} = \{1, 2, 2, 4, 4, 8\}.$$

Edellä olevasta esimerkistä huomataan, että kahden järjestetyn joukon välinen suora tulo ei ole vaihdannainen. Lisäksi suora tulo voi olla monijoukko, eikä alkioden järjestys välttämättä noudata lukujen tavanomaista suuruusjärjestystä.

Seuraavaksi esitetetään aritmeettisiin funktioihin liittyviä määritelmiä ja määritellään tiettyjä aritmeettisia funktioita, joita käytetään alaluvun 2.3 todistuksissa. (Kaikkien määritelmissä 18-21 esitettävien funktioiden määrittelyjoukkona on positiivisten kokonaislukujen joukko.)

Määritelmä 12. (Ks. [3, s. 53].) *Eulerin vakio* C määritellään seuraavasti:
$$C = \lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\Big).$$

Määritelmä 13. (Ks. [10, s. 28].) Aritmeettisten funktioiden f ja g *summa* $f + g$ on sellainen aritmeettinen funktio, että
$$(f + g)(n) = f(n) + g(n),$$
kun n on positiivinen kokonaisluku.

Määritelmä 14. (Ks. [10, s. 28].) Aritmeettisten funktioiden f ja g *tulo* fg on sellainen aritmeettinen funktio, että
$$(fg)(n) = f(n)g(n),$$
kun n on positiivinen kokonaisluku.

Määritelmä 15. (Ks. [10, s. 28].) Aritmeettisten funktioiden f ja g *Dirichtlet'n konvoluutio* $f * g$ on sellainen aritmeettinen funktio, että

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\Big(\frac{n}{d}\Big),$$

kun n on positiivinen kokonaisluku.

Määritelmä 16. (Ks. [10, s. 30].) Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Aritmeettinen funktio f on *multiplikatiivinen,* jos

$$f(1) = 1$$

ja

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

aina, kun $(m, n) = 1$.

Määritelmä 17. (Ks. [3, s. 53].) Olkoon $g(x) > 0$, kun $x \geq a$. Tällöin merkintä

$$f(x) = O(g(x))$$

tarkoittaa sitä, että on olemassa sellainen positiivinen vakio M, että

$$|f(x)| \leq Mg(x), \quad x \geq a.$$

Merkintä

$$f(x) = h(x) + O(g(x))$$

tarkoittaa, että $f(x) - h(x) = O(g(x))$.

Määritelmä 18. (Ks. [3, s. 24].) *Möbiuksen funktio* μ määritellään seuraavasti:

Jos $n = 1$, niin

$$\mu(n) = 1.$$

Jos $n > 1$, niin esitetään n alkulukujen tulona $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$. Tällöin

$$\mu(n) = \mu(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{jos } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritelmä 19. (Ks. [10, s. 27].) Olkoon α reaaliluku. Funktio N^α määritellään seuraavasti:

$$N^\alpha(n) = n^\alpha.$$

Kun $\alpha = 1$, niin merkitään $N^\alpha = N$.

Esimerkki 8. (Ks. [10, s. 27].) Edellä olevasta määritelmästä seuraa, että $N(n) = n^1 = n$ ja $N^0(n) = n^0 = 1$, kun n on positiivinen kokonaisluku.

Määritelmä 20. (Ks. [10, s. 32].) *Eulerin funktio* φ määritellään seuraavasti:

$$\varphi(n) = |\{a \mid 1 \leq a \leq n, (a, n) = 1\}|.$$

Esimerkki 9. Selvästi $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$ ja $\varphi(n) \geq 2$, kun $n > 2$.

Määritelmä 21. (Ks. [12, s. 561].) Olkoon α positiivinen reaaliluku. *Jordanin funktio* J_α on aritmeettinen funktio

$$J_\alpha = \mu * N^\alpha.$$

Määritelmä 22. (Ks. [12, s. 561].) *Riemannin zeta-funktio* ζ määritellään seuraavasti:

Jos $0 < s < 1$, niin

$$\zeta(s) = \lim_{x \to \infty} \Big(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big).$$

Jos $s > 1$, niin

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Edellä määritelty Riemannin zeta-funktio ei ole aritmeettinen funktio. Riemannin zeta-funktio on määritelty kaikille luvusta 1 eroaville positiivisille reaaliluvuille. Riemannin zeta-funktio voidaan määritellä myös kompleksiluvuille.

1.3 Lauseita ja esimerkkejä

Tässä alaluvussa esitetään luvun 2 todistuksissa apuna tarvittavia lauseita. Osa lauseista todistetaan ja osaan lauseista todistukset löytyvät viittausten mukaisesti tutkielman lähdeteoksista. Lisäksi tarkastellaan lauseiden käyttökelpoisuutta havainnollistavia esimerkkejä.

Seuraavaksi esitettävät lauseet liittyvät matriiseihin ja matriisien ominaisarvoihin.

Lause 1. *Olkoon $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sellainen järjestetty joukko, jonka alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja. Olkoon α positiivinen reaaliluku. Olkoon (A^α) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Tällöin (A^α) on positiivisesti definiitti.*

Todistus. Ks. [4, s. 262].

Lause 2. (Ks. [16, s. 303], tehtävä 25.) *Olkoon $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kääntyvä ja olkoon λ matriisin X ominaisarvo. Tällöin λ^{-1} on matriisin X^{-1} ominaisarvo.*

Todistus. Olkoon $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta\}$ matriisin X ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, jolloin $Xy = \lambda y$. Koska matriisi X on kääntyvä, niin tiedetään, että $\lambda \neq 0$. Nyt

$$X^{-1}Xy = X^{-1}\lambda y,$$

joten

$$X^{-1}y = \lambda^{-1}y.$$

□

Lause 3. *Similaarisilla matriiseilla on samat ominaisarvot.*

Todistus. Ks. [13, s. 45].

Esimerkki 10. Olkoon $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $Y = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Nähdään helposti, että luku 1 on matriisin X kaksinkertainen ominaisarvo. Jos tiedetään, että matriisi Y on similaarinen matriisin X kanssa, voidaan tästä lauseen 3 nojalla päätellä, että myös matriisin Y kaksinkertainen ominaisarvo on 1.

Jos tulee osoittaa, että tietyillä similaarisilla matriiseilla on samat ominaisarvot, niin toisinaan on yksinkertaisempaa laskea kummankin matriisin ominaisarvot erikseen, kuin osoittaa matriisit similaarisiksi.

Lause 4. *Positiivisesti definiitin matriisin ominaisarvot ovat positiivisia reaalilukuja.*

Todistus. (Ks. [13, s. 398].) Olkoon $n \times n$-matriisi X positiivisesti definiitti ja olkoon λ matriisin X ominaisarvo. Olkoon x ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Tällöin

$$0 < x^*Xx = x^*\lambda x = \lambda x^*x.$$

Koska $x^*x > 0$ aina, kun $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}$, niin $\lambda > 0$.

□

Kun tunnetaan matriisien kääntyvyyden ja ominaisarvojen välinen suhde, niin edellä olevan lauseen nojalla tiedetään, että jokainen positiivisesti definiitti matriisi on kääntyvä. Lauseiden 1 ja 4 nojalla jokaisen SYT-potenssimatriisin pienin ominaisarvo on suurempi kuin 0. Luvussa 2.3 esitetään tätä parempi tulos SYT-potenssimatriisin pienimmän ominaisarvon alarajaksi.

Lause 5. *Ei-negatiivisesti definiitin matriisin ominaisarvot ovat ei-negatiivisia reaalilukuja.*

Todistus. (Ks. [13, s. 398].) Olkoon $n \times n$-matriisi X ei-negatiivisesti definiitti ja olkoon λ matriisin X ominaisarvo. Olkoon x ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Tällöin

$$0 \leq x^* X x = x^* \lambda x = \lambda x^* x.$$

Koska $x^* x > 0$ aina, kun $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}$, niin $\lambda \geq 0$. □

Lause 6. *Jokaisella positiivisesti definiitillä $n \times n$-matriisilla on n positiivista (ei välttämättä erisuurta) ominaisarvoa ja jokaisella ei-negatiivisesti definiitillä $n \times n$-matriisilla on n ei-negatiivista (ei välttämättä erisuurta) ominaisarvoa.*

Todistus. Ks. [13, s. 192].

Lause 7. *Olkoot $n \times n$-matriisit X ja Y sellaisia, että $X - Y$ on ei-negatiivisesti definiitti. Olkoot*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

matriisin X ominaisarvot ja

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$$

matriisin Y ominaisarvot. Tällöin

$$\lambda_i \geq \mu_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Todistus. Ks. [13, s. 471].

Lause 8. *Olkoot $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Jos $X \geq |Y|$, niin*

$$\begin{aligned} & \max\{|\lambda| : \lambda \textit{ on matriisin } X \textit{ ominaisarvo } \} \\ \geq\ & \max\{|\lambda| : \lambda \textit{ on matriisin } |Y| \textit{ ominaisarvo } \} \\ \geq\ & \max\{|\lambda| : \lambda \textit{ on matriisin } Y \textit{ ominaisarvo } \}. \end{aligned}$$

Todistus. Ks. [13, s. 491].

Lause 9. *Olkoon* $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ja* $Y \in \mathbb{R}^{m\times m}$. *Jos* $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ *on matriisin* X *ja* $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ *matriisin* Y *ominaisarvojen joukko, niin tällöin*

$$\{\lambda_i \mu_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

on matriisin $X \otimes Y$ *ominaisarvojen joukko.*

Todistus. Ks. [14, s. 245].

Lause 10. *Olkoon* $n \times n$*-matriisi* X *konjugaattisymmetrinen ja olkoon* m *sellainen kokonaisluku, että* $1 \leq m \leq n$. *Olkoon* Y *matriisin* X *sellainen* $m \times m$*-alimatriisi, joka on saatu matriisista* X *poistamalla* $n - m$ *riviä ja niitä vastaavat sarakkeet. Olkoot*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

matriisin X *ominaisarvot ja olkoot*

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_m$$

matriisin Y *ominaisarvot. Olkoon* l *sellainen kokonaisluku, että* $1 \leq l \leq m$. *Tällöin*

$$\lambda_l \leq \mu_l \leq \lambda_{l+n-m}.$$

Todistus. Ks. [13, s. 189].

Lause 11. *Olkoot* X *ja* Y $n\times n$*-matriiseja ja olkoon* a *kompleksiluku. Tällöin*

1. $||XY|| \leq ||X|| \cdot ||Y||$
2. $||aX|| = |a| \cdot ||X||$.

Todistus. Ks. [13, s. 290, s. 293, s. 296] ja [7, s. 467–468].

Lause 12. (Ks. [13, s. 312], tehtävä 11.) *Olkoon* X $n \times n$*-matriisi. Tällöin*

$$||X^* X|| = ||X^*|| \cdot ||X||.$$

Todistus. Spektraalinormin määritelmän, esimerkin 4, lauseen 5 ja lauseen 6 nojalla

$$\begin{aligned}
& ||X^*|| \cdot ||X|| \\
= \; & \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ on matriisin } XX^* \text{ ominaisarvo}\} \cdot \\
& \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ on matriisin } X^*X \text{ ominaisarvo}\} \\
= \; & \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ on matriisin } X^*X \text{ ominaisarvo}\} \cdot \\
& \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ on matriisin } X^*X \text{ ominaisarvo}\} \\
= \; & (\max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ on matriisin } X^*X \text{ ominaisarvo}\})^2 \\
= \; & \max\{\lambda \mid \lambda \text{ on matriisin } X^*X \text{ ominaisarvo}\} \\
= \; & \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ on matriisin } (X^*X)^*(X^*X) \text{ ominaisarvo}\} = ||X^*X||.
\end{aligned}$$

□

Lause 13. *Olkoon X $n \times n$-matriisi ja olkoon λ matriisin X itseisarvoltaan suurin ominaisarvo. Tällöin*

$$|\lambda| \leq ||X||.$$

Todistus. Ks. [13, s. 297].

Seuraavaksi esitetään jonojen ja sarjojen suppenemista ja hajaantumista koskevia lauseita.

Lause 14. *Olkoon jono $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Tällöin $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee.*

Todistus. Ks. [17, s. 44].

Lause 15. *Olkoon $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ lukujonon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ osajono. Jos $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee ja sen raja-arvo on a, niin jono $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee myös ja sen raja-arvo on a.*

Todistus. Ks. [17, s. 40].

Lause 16. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Sarja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

suppenee, jos ja vain jos sarja

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i$$

suppenee.

Todistus. Ks. [18, s. 14].

Lause 17. *Positiiviterminen sarja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

joko suppenee tai hajaantuu kohti ääretöntä.

Todistus. Ks. [2, s. 178].

Lause 18 (minoranttiperiaate)**.** *Olkoot*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad ja \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

positiivitermisiä sarjoja ja olkoon $a_i \leq b_i$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin jos sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

hajaantuu kohti ääretöntä, niin sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

hajaantuu kohti ääretöntä myös.

Todistus. Ks. [1, s. 539].

Lause 19 (litistyslause)**.** (Vrt. [6, s. 103].) *Olkoot*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i \quad ja \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i$$

sellaisia sarjoja, että $a_i \leq c_i \leq b_i$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin jos sarjat

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad ja \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

suppenevat ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i = L,$$

niin myös sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i$$

suppenee ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = L.$$

Todistus. Olkoon

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = l_a(n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = l_b(n)$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = l_c(n).$$

Olkoon ε mielivaltaisesti valittu positiivinen reaaliluku. Oletusten nojalla on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut n_a ja n_b, että kun $n > n_a$, niin

$$|l_a(n) - L| \leq \varepsilon,$$

ja kun $n > n_b$, niin

$$|l_b(n) - L| \leq \varepsilon.$$

Olkoon $n_c = \max\{n_a, n_b\}$. Nyt kun $n > n_c$, niin

$$-\varepsilon + L \leq l_a(n) \leq l_c(n) \leq l_b(n) \leq \varepsilon + L,$$

joten kun $n > n_c$, niin

$$|l_c(n) - L| \leq \varepsilon.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = L.$$

□

Lause 20. *Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Tällöin lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on*

$$(a,b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{a(p),b(p)\}}.$$

Todistus. Ks. [9, s. 16].

Lause 21. *Olkoot a, b ja c positiivisia kokonaislukuja. Tällöin*

1. $(a,a) = a$
2. $(a,b) = (b,a)$
3. $(ca,cb) = c(a,b)$.

Todistus. Ks. [9, s. 5 ja s. 16].

Lauseen 21 kohdasta 2 seuraa, että jokainen SYT-matriisi ja jokainen SYT-potenssimatriisi on symmetrinen.

Esimerkki 11. Luvut 2 ja 3 ovat alkulukuja, joten tiedetään, että $(2,3) = 1$. Koska $26 = 13 \cdot 2$ ja $39 = 13 \cdot 3$, niin lauseen 21 nojalla

$$(26,39) = 13 \cdot (2,3) = 13 \cdot 1 = 13.$$

Lause 22. (Vrt. [3, s. 21], tehtävä 2.) *Olkoot a, b, c ja d pareittain suhteellisia alkulukuja. Tällöin*

$$(ab,cd) = 1.$$

Todistus. Olkoon p alkuluku. Nyt lauseesta 20 ja siitä, että a, b, c ja d ovat pareittain suhteellisia alkulukuja seuraa, että

$$\min\{(ab)(p),(cd)(p)\} = \min\{a(p)+b(p),c(p)+d(p)\} = 0.$$

Edelleen lauseen 20 nojalla

$$(ab,cd) = 1.$$

□

Lause 23 (Dirichlet'n lause)**.** *Olkoon a kokonaisluku ja b sellainen positiivinen kokonaisluku, että $(a,b) = 1$. Tällöin järjestetyssä joukossa*

$$A = \{a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots\}$$

on äärettömän monta alkulukua.

Todistus. Ks. [3, s. 154].

Lause 24. *Olkoon a kokonaisluku ja b sellainen positiivinen kokonaisluku, että $(a, b) = 1$. Olkoot*

$$A = \{a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots\}$$

ja

$$B = \{p \mid p \in A \text{ ja } p \in \mathbb{P}\} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

järjestettyjä joukkoja. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \infty.$$

Todistus. Ks. [5, s. 34].

Seuraavaksi tarkastellaan aritmeettisten funktioiden ominaisuuksia.

Lause 25. *Olkoot f ja g multiplikatiivisia funktioita. Tällöin myös funktio $f * g$ on multiplikatiivinen.*

Todistus. Ks. [10, s. 30].

Funktiot μ ja N^α ovat selvästi multiplikatiivisia, joten lauseen 25 nojalla Jordanin funktio J_α on multiplikatiivinen.

Lause 26. *Olkoon f multiplikatiivinen funktio. Jos*

$$\lim_{p^n \to \infty} f(p^n) = 0,$$

niin

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = 0.$$

Todistus. Ks. [8, s. 260].

Lause 27. *Olkoon n kokonaisluku. Tällöin Eulerin funktio*

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n, p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p}).$$

Todistus. Ks. [10, s. 33].

Lause 28. (Ks. [3, s. 48], tehtävä 17.) *Olkoon n kokonaisluku. Tällöin Jordanin funktio*

$$J_\alpha(n) = n^\alpha \prod_{p|n, p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^\alpha}).$$

Todistus. Jos $n = 1$, niin väite seuraa välittömästi, kun huomioidaan, että tyhjä tulo on 1.

Oletetaan, että $n > 1$.

Dirichtlet'n konvoluution ja Jordanin funktion määritelmän nojalla

$$J_\alpha(n) = \mu * N^\alpha(n) = \sum_{d|n} \mu(d) N^\alpha\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

Tämä voidaan esittää muodossa

$$\sum_{d|n} \mu(d) N^\alpha\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n^\alpha}{d^\alpha} = n^\alpha \sum_{d|n} \mu(d) \frac{1}{d^\alpha}.$$

Olkoot $q_1, q_2, \dots, q_l$ luvun n erisuuret alkulukutekijät. Tällöin

$$\prod_{p|n, p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^\alpha}) = \prod_{i=1}^{l} (1 - \frac{1}{q_i^\alpha}).$$

Tarkoitettakoon merkinnällä $\sum \frac{1}{(q_i q_j)^\alpha}$ sellaista summaa, jossa tulo $q_i q_j$ koostuu aina kahdesta luvun n eri alkulukutekijästä kerrallaan. (Käytetään vastaavanlaista merkintää, kun tulon tekijöitä on useampia.) Tällöin

$$\prod_{i=1}^{l} (1 - \frac{1}{q_i^\alpha}) = 1 - \sum \frac{1}{q_i^\alpha} + \sum \frac{1}{(q_i q_j)^\alpha} - \sum \frac{1}{(q_i q_j q_k)^\alpha} + \dots + \sum \frac{(-1)^l}{(q_1 q_2 \cdots q_l)^\alpha}.$$

Huomataan, että

$$1 - \sum \frac{1}{q_i^\alpha} + \sum \frac{1}{(q_i q_j)^\alpha} - \sum \frac{1}{(q_i q_j q_k)^\alpha} + \dots + \sum \frac{(-1)^l}{(q_1 q_2 \cdots q_l)^\alpha} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^\alpha}.$$

Siis

$$n^\alpha \prod_{p|n, p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^\alpha}) = n^\alpha \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^\alpha} = \sum_{d|n} \mu(d) N^\alpha\Big(\frac{n}{d}\Big) = J_\alpha(n).$$

$\square$

Esimerkki 12. Olkoon $\alpha = 1$. Tällöin lauseiden 28 ja 27 nojalla

$$J_\alpha = \varphi.$$

Esimerkki 13. (Vrt. [12, s. 564].) Olkoon α positiivinen reaaliluku. Tällöin selvästi

$$J_\alpha(1) = 1.$$

Kun esitetään Jordanin funktio lauseessa 28 olevassa muodossa, niin huomataan, että

$$J_\alpha(n) \geq 1, \quad n \geq 2.$$

Lause 29. *Olkoon $s > 1$ positiivinen reaaliluku. Tällöin*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s})$$

Todistus. Ks. [3, s. 231].

Lause 30. *Olkoon C Eulerin vakio. Tällöin*

$$\prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} (1 - \frac{1}{p}) = \frac{e^{-C}}{\log x} + O\Big(\frac{1}{\log^2 x}\Big).$$

Todistus. Ks. [3, s. 297].

2 SYT-potenssimatriisien ominaisarvojen tarkastelua

Tässä luvussa arvioidaan SYT-potenssimatriisin pienintä ominaisarvoa ja tarkastellaan SYT-potenssimatriisin ominaisarvojen käyttäytymistä matriisin dimension kasvaessa rajatta.

2.1 Tietynlaisen SYT-potenssimatriisin pienimmän ominaisarvon rajakäyttäytyminen

Tässä alaluvussa tarkastellaan sellaisten joukkojen määräämiä SYT-potenssimatriiseja, jotka on määritelty äärettömän jonon sellaisesta äärellisestä osajonosta, jonka alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja ja keskenään pareittain suhteellisia alkulukuja. Aiemmin todettiin, että kaikki SYT-potenssimatriisit ovat symmetrisiä. Tarkastelu aloitetaankin tutkimalla tietyn tyyppisiä symmetrisiä matriiseja.

Apulause 1. (Vrt. [12, s. 554].) *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellaisia reaalilukuja, että jokainen $a_i \neq 1$,* kun $1 \leq i \leq n$. *Tällöin*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} & -\frac{1}{a_1-1} & -\frac{1}{a_2-1} & \cdots & -\frac{1}{a_n-1} \\ -\frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{a_2-1} & 0 & \frac{1}{a_2-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{a_n-1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n-1} \end{bmatrix}.$$

Todistus. Olkoon

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix}$$

ja

$$Y = \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} & -\frac{1}{a_1-1} & -\frac{1}{a_2-1} & \cdots & -\frac{1}{a_n-1} \\ -\frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{a_2-1} & 0 & \frac{1}{a_2-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{a_n-1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n-1} \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} XY &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} & -\frac{1}{a_1-1} & -\frac{1}{a_2-1} & \cdots & -\frac{1}{a_n-1} \\ -\frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{a_2-1} & 0 & \frac{1}{a_2-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{a_n-1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} & -\frac{1}{a_1-1} + \frac{1}{a_1-1} & \cdots & -\frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n-1} \\ 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} + \frac{1-a_1}{a_1-1} & -\frac{1}{a_1-1} + \frac{a_1}{a_1-1} & \cdots & -\frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i-1} + \frac{1-a_n}{a_n-1} & -\frac{1}{a_1-1} + \frac{a_1}{a_1-1} & \cdots & -\frac{1}{a_n-1} + \frac{a_n}{a_n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

joten $X^{-1} = Y$.

$\square$

Apulause 2. *Olkoon $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ sellainen aidosti kasvava, ääretön reaalilukujono, että $b_1 > 1$. Olkoon*

$$
\begin{aligned}
X &= E_n + \operatorname{diag}(0, b_1 - 1, b_2 - 1, \ldots, b_{n-1} - 1) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} - 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & b_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & b_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & b_{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Tällöin matriisi X on positiivisesti definiitti. Lisäksi jos

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

ovat matriisin X ja

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$$

matriisin X^{-1} ominaisarvot, niin

$$\lambda_i \mu_{n-i+1} = 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 554].) Osoitetaan ensin, että matriisi X on positiivisesti definiitti.

Selvästi $X = X^T$ eli matriisi X on symmetrinen. Olkoon

$$x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
x^*Xx &= \begin{bmatrix} \bar{c_1} & \bar{c_2} & \cdots & \bar{c_n} \end{bmatrix} (E_n + \operatorname{diag}(0, b_1 - 1, b_2 - 1, \ldots, b_{n-1} - 1)) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{c_1} & \bar{c_2} & \cdots & \bar{c_n} \end{bmatrix} E_n \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \bar{c_1} & \bar{c_2} & \cdots & \bar{c_n} \end{bmatrix} \operatorname{diag}(0, b_1 - 1, b_2 - 1, \ldots, b_{n-1} - 1) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{c_i} & \sum_{i=1}^n \bar{c_i} & \cdots & \sum_{i=1}^n \bar{c_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & \bar{c_2}(b_1 - 1) & \cdots & \bar{c_n}(b_{n-1} - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \bar{c_i} \sum_{i=1}^n c_i + \sum_{i=2}^n (b_{i-1} - 1) c_i \bar{c_i} \\
&= \overline{\sum_{i=1}^n c_i} \sum_{i=1}^n c_i + \sum_{i=2}^n (b_{i-1} - 1) c_i \bar{c_i} \\
&= |\sum_{i=1}^n c_i|^2 + \sum_{i=2}^n (b_{i-1} - 1)|c_i|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että $\lambda_i \mu_{n-i+1} = 1$, kun $1 \leq i \leq n$.

Lauseen 4 nojalla kaikki matriisin X kaikki ominaisarvot ovat nollaa suurempia reaalilukuja, joten käänteismatriisi X^{-1} on olemassa. Jos

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

ovat matriisi X ominaisarvot, niin tällöin lauseen 2 nojalla

$$\lambda_n^{-1} \leq \lambda_{n-1}^{-1} \leq \cdots \leq \lambda_1^{-1}$$

ovat matriisin X^{-1} ominaisarvot. Täten

$$\lambda_i \mu_{n-i+1} = \lambda_i \lambda_i^{-1} = 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

□

Apulause 3. *Olkoon* $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ *sellainen aidosti kasvava, ääretön reaalilukujono, että* $a_1 > 1$. *Olkoon* $n \geq 2$ *ja olkoon*

$$\begin{aligned} X &= E_n + \mathrm{diag}(0, a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_{n-1} - 1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ja olkoon μ_n *käänteismatriisin* X^{-1} *suurin ominaisarvo. Tällöin*

$$\mu_n > 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i - 1}.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 554].) Olkoon

$$Y = \begin{bmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i - 1} & \frac{-1}{a_1 - 1} & \cdots & \frac{-1}{a_{n-1} - 1} \\ \frac{-1}{a_1 - 1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{a_{n-1} - 1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin kun n on parillinen, niin

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - Y) &= \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1} & \frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_2-1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}-1} \\ \frac{1}{a_1-1} & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2-1} & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}-1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= (\lambda - 1 - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1})\det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&- \frac{1}{a_1-1}\det\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_2-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}-1} \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{a_2-1}\det\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_2-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}-1} \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&- \cdots - \frac{1}{a_{n-1}-1}\det\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_2-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}-1} \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \\
&= (\lambda - 1 - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1})\lambda^{n-1} - \frac{1}{(a_1-1)^2}\lambda^{n-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{(a_2-1)^2}\lambda^{n-2} - \cdots - \frac{1}{(a_{n-1}-1)^2}\lambda^{n-2} \\
&= \lambda^{n-2}\Big(\lambda^2 - (1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1})\lambda - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(a_i-1)^2}\Big).
\end{aligned}
$$

Kun n on pariton, niin toimimalla vastaavasti kuin edellä, päädytään samaan tulokseen. Täten matriisin Y karakteristinen polynomi on

$$
k(\lambda) = \lambda^{n-2}\Big(\lambda^2 - (1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1})\lambda - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(a_i-1)^2}\Big),
$$

joten matriisin Y nollasta eroavat ominaisarvot ovat polynomin

$$
p(\lambda) = \lambda^2 - (1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1})\lambda - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(a_i-1)^2}
$$

nollakohdat. Kun tarkastellaan polynomia $p(\lambda)$, muuttujan λ ollessa

$$
1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1},
$$

niin havaitaan, että

$$
\begin{aligned}
& p(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1}) \\
&= (1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1})^2 - (1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1})(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1}) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(a_i-1)^2} \\
&= -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(a_i-1)^2} < 0.
\end{aligned}
$$

Koska $p(\lambda)$ on toista astetta oleva polynomi, jonka toisen asteen termin kerroin on positiivinen, niin edellisestä seuraa, että matriisin Y suurin ominaisarvo

$$
\lambda_n > 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1}.
$$

Apulauseen 1 nojalla matriisin X käänteismatriisi

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1} & -\frac{1}{a_1-1} & -\frac{1}{a_2-1} & \cdots & -\frac{1}{a_{n-1}-1} \\ -\frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{a_2-1} & 0 & \frac{1}{a_2-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{a_{n-1}-1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}-1} \end{bmatrix}.$$

Olkoon $Z = \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Selvästi matriisi Z on kääntyvä ja $Z^{-1} = Z$. Koska

$$ZYZ^{-1} = ZYZ$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1} & \frac{-1}{a_1-1} & \cdots & \frac{-1}{a_{n-1}-1} \\ \frac{-1}{a_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{a_{n-1}-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1} & \frac{1}{a_1-1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}-1} \\ \frac{-1}{a_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{a_{n-1}-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1} & \frac{1}{a_1-1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}-1} \\ \frac{1}{a_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = |Y|$$

ja lisäksi

$$ZX^{-1}Z^{-1} = ZX^{-1}Z$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1} & -\frac{1}{a_1-1} & \cdots & -\frac{1}{a_{n-1}-1} \\ -\frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_1-1} & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ -\frac{1}{a_{n-1}-1} & \vdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1} & \frac{1}{a_1-1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}-1} \\ -\frac{1}{a_1-1} & -\frac{1}{a_1-1} & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ -\frac{1}{a_{n-1}-1} & \vdots & 0 & -\frac{1}{a_{n-1}-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i-1} & \frac{1}{a_1-1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}-1} \\ \frac{1}{a_1-1} & \frac{1}{a_1-1} & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ \frac{1}{a_{n-1}-1} & \vdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}-1} \end{bmatrix} = |X^{-1}|,$$

niin $|Y|$ on similaarinen matriisin Y ja $|X^{-1}|$ on similaarinen matriisin X^{-1} kanssa. Täten lauseen 3 nojalla matriiseilla Y ja $|Y|$ on keskenään samat ominaisarvot sekä lisäksi matriiseilla X^{-1} ja $|X^{-1}|$ on keskenään samat ominaisarvot. Koska lisäksi apulauseen 2 nojalla matriisin X^{-1} kaikki ominaisarvot ovat positiivisia reaalilukuja ja koska $|X^{-1}| \geq |Y|$, niin nyt lauseen 8 nojalla

$$\begin{aligned} & \max\{\lambda : \lambda \text{ on matriisin } X^{-1} \text{ ominaisarvo }\} \\ = \;& \max\{|\lambda| : \lambda \text{ on matriisin } X^{-1} \text{ ominaisarvo }\} \\ = \;& \max\{|\lambda| : \lambda \text{ on matriisin } |X^{-1}| \text{ ominaisarvo }\} \\ \geq \;& \max\{|\lambda| : \lambda \text{ on matriisin } |Y| \text{ ominaisarvo }\} \\ \geq \;& \max\{\lambda : \lambda \text{ on matriisin } |Y| \text{ ominaisarvo }\} \\ = \;& \max\{\lambda : \lambda \text{ on matriisin } Y \text{ ominaisarvo }\}. \end{aligned}$$

Edellä osoitettiin, että matriisin Y suurin ominaisarvo

$$\lambda_n > 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i - 1},$$

joten tästä seuraa edelleen, että käänteismatriisin X^{-1} suurin ominaisarvo

$$\mu_n > 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i - 1}.$$

□

Seurauslause 1. *Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ sellainen aidosti kasvava, ääretön reaalilukujono, että $a_1 > 1$ ja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty.$$

Olkoon $\lambda_1(n)$ matriisin

$$X(n) = E_n + \mathrm{diag}(0, a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_{n-1} - 1)$$

pienin ominaisarvo. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(n) = 0.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 555].) Apulauseen 2 nojalla matriisi $X(n)$ on positiivisesti definiitti, joten lauseen 4 nojalla luku 0 ei ole matriisin $X(n)$ ominaisarvo. Täten käänteismatriisi $X(n)^{-1}$ on olemassa. Olkoon $\mu_n(n)$ käänteismatriisin $X(n)^{-1}$ suurin ominaisarvo. Tällöin lauseen 2 nojalla

$$\lambda_1(n) = \mu_n(n)^{-1}.$$

Apulauseen 3 nojalla

$$\mu_n(n) > 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i - 1},$$

joten

$$\lambda_1(n) = \mu_n(n)^{-1} < \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i - 1}} < \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i}}.$$

Totesimme, että matriisi $X(n)$ on positiivisesti definiitti, joten lauseen 4 nojalla

$$0 < \lambda_1(n).$$

Siis

$$0 < \lambda_1(n) < \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i}}.$$

Koska

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty,$$

niin nyt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i}} = 0.$$

Täten litistyslausetta soveltaen

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(n) = 0. \qquad \square$$

Seurauslause 2. *Olkoon* $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ *sellainen aidosti kasvava, ääretön reaalilukujono, että* $b_1 \geq 1$ *ja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i} = \infty.$$

Olkoon $\lambda_1(n)$ *matriisin*

$$Y(n) = E_n + \mathrm{diag}(b_1 - 1, b_2 - 1, \ldots, b_n - 1)$$

pienin ominaisarvo. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(n) = b_1 - 1.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 556].) Matriisi

$$\begin{aligned} & Y(n) = E_n + \mathrm{diag}(b_1 - 1, b_2 - 1, \ldots, b_n - 1) \\ = \; & (b_1 - 1)I + E_n + \mathrm{diag}\Big(0, (b_2 - b_1 + 1) - 1, (b_3 - b_1 + 1) - 1, \ldots, (b_n - b_1 + 1) - 1\Big). \end{aligned}$$

Oletusten nojalla

$$B = \{b_2 - b_1 + 1, b_3 - b_1 + 1, b_4 - b_1 + 1, \ldots\}$$

on sellainen ääretön järjestetty reaalilukujoukko, että

$$b_2 - b_1 + 1 > 1.$$

Oletuksista seuraa myös, että

$$\frac{1}{b_i - b_1 + 1} \geq \frac{1}{b_i},$$

joten koska

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i} = \infty,$$

niin minoranttiperiaatteen nojalla

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{b_i - b_1 + 1} = \infty.$$

Olkoon

$$Z(n) = E_n + \mathrm{diag}\Big(0, (b_2 - b_1 + 1) - 1, (b_3 - b_1 + 1) - 1, \ldots, (b_n - b_1 + 1) - 1\Big)$$

ja olkoon $\mu_1(n)$ matriisin $Z(n)$ pienin ominaisarvo ja $x \in \mathbb{R}^n$ sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin

$$\begin{aligned} & Y(n)x \\ = & \Big((b_1-1)I_n + E_n + \operatorname{diag}\big(0,(b_2-b_1+1)-1,(b_3-b_1+1)-1,\ldots,(b_n-b_1+1)-1\big)\Big)x \\ = & \Big((b_1-1)I_n + Z(n)\Big)x = (b_1-1)I_nx + Z(n)x \\ = & (b_1-1)x + \mu_1(n)x = (b_1-1+\mu_1(n))x. \end{aligned}$$

Seurauslauseen 1 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mu_1(n) = 0,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(n) = b_1 - 1.$$

□

Edellä tarkasteltiin tietyn tyyppisiä symmetrisiä matriiseja. Näitä tarkasteluja käytetään hyväksi, kun seuraavan lauseen myötä siirrytään tutkimaan tietyn tyyppisten SYT-potenssimatriisien pienimmän ominaisarvon rajakäyttäytymistä.

Lause 31. *Olkoon α sellainen positiivinen reaaliluku, että $0 < \alpha \leq 1$, ja olkoon a positiivinen kokonaisluku. Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ sellainen aidosti kasvava, ääretön lukujono, että sen alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja ja*

$$(a_i, a_j) = a, \quad i \neq j,$$

ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty.$$

Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ ja olkoon (A^α) järjestetyn joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoon $\lambda_1(n)$ matriisin (A^α) pienin ominaisarvo. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1(n) = a_1^\alpha - a^\alpha.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 556].) Olkoon b_i sellainen positiivinen kokonaisluku, että $a_i = ab_i$, kun $i \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin lauseen 21 kohdan 3 nojalla

$$a = (a_i, a_j) = (ab_i, ab_j) = a(b_i, b_j),$$

joten
$$(b_i, b_j) = 1, \quad i \neq j.$$
Koska
$$a_i \geq b_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$
niin
$$\frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{b_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$
joten minoranttiperiaatteen nojalla
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i} = \infty.$$
Olkoon
$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$$
ja olkoon (B^α) järjestetyn joukon B ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Tällöin
$$(B^\alpha) = E_n + \mathrm{diag}(b_1^\alpha - 1, b_2^\alpha - 1, b_3^\alpha - 1, \ldots, b_n^\alpha - 1).$$
Olkoon $\mu_1(n)$ matriisin (B^α) pienin ominaisarvo. Olkoon
$$c_i = b_i^\alpha, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$
Koska $0 < \alpha \leq 1$ ja koska b_i on positiivinen kokonaisluku, kun $i \in \mathbb{Z}_+$, niin
$$c_i \leq b_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$
joten
$$\frac{1}{c_i} \geq \frac{1}{b_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$
Nyt minoranttiperiaatteen nojalla
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} = \infty.$$
Koska lisäksi
$$c_1 = b_1^\alpha \geq 1,$$
niin seurauslauseen 2 nojalla
$$\lim_{n\to\infty} \mu_1(n) = c_1 - 1.$$
Koska
$$(A)^\alpha = a^\alpha (B^\alpha),$$

niin nyt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \lambda_1(n) = a^\alpha \lim_{n\to\infty} \mu_1(n)\\ = \quad & a^\alpha(c_1 - 1) = a^\alpha c_1 - a^\alpha \\ = \quad & a^\alpha b_1^\alpha - a^\alpha = (ab_1)^\alpha - a^\alpha \\ = \quad & a_1^\alpha - a^\alpha.\end{aligned}$$

□

2.2 Tietynlaisen SYT-potenssimatriisin ominaisarvojen rajakäyttäytyminen

Tässä alaluvussa tarkastellaan aritmeettisten jonojen alkioista muodostettujen joukkojen määräämiä SYT-potenssimatriiseja. Tarkastelun kohteena on tällaisen SYT-potenssimatriisin ominaisarvojen käyttäytyminen matriisin dimension kasvaessa rajatta.

Lause 32. *Olkoon $(a_i)_{i=1}^\infty$ positiivialkioinen, aidosti kasvava, ääretön kokonaislukujono ja olkoon α mielivaltaisesti valittu positiivinen reaaliluku. Olkoon $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ja olkoon (A^α) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot $\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$ matriisin (A^α) ominaisarvot. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Tällöin jono*

$$(\lambda_m(n))_{n=m}^\infty$$

suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m(n) \geq 0.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 553].) Lauseen 10 nojalla jono

$$(\lambda_m(n))_{n=m}^\infty$$

on vähenevä ja lauseiden 1 ja 4 nojalla se on alhaalta rajoitettu, joten lauseen 14 nojalla se suppenee. Lauseista 1 ja 4 seuraa, että $\lambda_m(n) > 0$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, joten

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m(n) \geq 0.$$

□

Apulause 4. *Olkoot n ja m positiivisia kokonaislukuja. Olkoot*

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

ja

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

sellaisia kokonaislukualkioisia järjestettyjä joukkoja, että joukon A alkiot ovat pareittain suhteellisia alkulukuja ja joukon B alkiot ovat pareittain suhteellisia alkulukuja. Oletetaan lisäksi vielä, että joukkojen A ja B alkiot ovat keskenään pareittain suhteellisia alkulukuja. Olkoon α positiivinen reaaliluku. Olkoon (A^α) järjestetyn joukon A sekä luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi, (B^α) järjestetyn joukon B sekä luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi ja $((A \odot B)^\alpha)$ järjestetyn joukon $A \odot B$ ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Tällöin

$$((A \odot B)^\alpha) = (A)^\alpha \otimes (B^\alpha).$$

Todistus. (Ks. [12, s. 557].) Oletusten nojalla

$$(A)^\alpha = \begin{bmatrix} a_1^\alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2^\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n^\alpha \end{bmatrix}$$

ja

$$(B^\alpha) = \begin{bmatrix} b_1^\alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & b_2^\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & b_m^\alpha \end{bmatrix}.$$

Olkoot $1 \leq i, j \leq n$ ja $1 \leq k, l \leq m$. Tällöin lauseiden 21 ja 22 nojalla

$$(a_i b_k, a_j b_l) = \begin{cases} 1, & \text{jos } i \neq j \text{ ja } k \neq l \\ a_i, & \text{jos } i = j \text{ ja } k \neq l \\ b_k, & \text{jos } i \neq j \text{ ja } k = l \\ a_i b_k, & \text{jos } i = j \text{ ja } k = l, \end{cases}$$

joten

$$
\begin{aligned}
((A \odot B)^{\alpha}) &= \begin{bmatrix}
(a_1b_1, a_1b_1)^{\alpha} & \cdots & (a_1b_1, a_1b_m)^{\alpha} & \cdots & (a_1b_1, a_nb_1)^{\alpha} & \cdots & (a_1b_1, a_nb_m)^{\alpha} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
(a_1b_m, a_1b_1)^{\alpha} & \cdots & (a_1b_m, a_1b_m)^{\alpha} & \cdots & \vdots & \cdots & (a_1b_m, a_nb_m)^{\alpha} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\
(a_nb_1, a_1b_1)^{\alpha} & \cdots & \vdots & \cdots & (a_nb_1, a_nb_1)^{\alpha} & \cdots & (a_nb_1, a_nb_m)^{\alpha} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(a_nb_m, a_1b_1)^{\alpha} & \cdots & (a_nb_m, a_1b_m)^{\alpha} & \cdots & (a_nb_m, a_nb_1)^{\alpha} & \cdots & (a_nb_m, a_nb_m)^{\alpha}
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
a_1^{\alpha}(B^{\alpha}) & (B^{\alpha}) & \cdots & (B^{\alpha}) \\
(B^{\alpha}) & a_2^{\alpha}(B^{\alpha}) & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & (B^{\alpha}) \\
(B^{\alpha}) & \cdots & (B^{\alpha}) & a_n^{\alpha}(B^{\alpha})
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
a_1^{\alpha} & 1 & \cdots & 1 \\
1 & a_2^{\alpha} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 1 \\
1 & \cdots & 1 & a_n^{\alpha}
\end{bmatrix} \otimes (B^{\alpha}) \\
&= (A)^{\alpha} \otimes (B^{\alpha}).
\end{aligned}
$$

□

Apulause 5. *Olkoon a positiivinen kokonaisluku ja α sellainen positiivinen reaaliluku, että $0 < \alpha \leq 1$. Olkoon*

$$A = \{1, 1 + a, 1 + 2a, \ldots, 1 + (n - 1)a\}$$

järjestetty joukko ja olkoon (A^{α}) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$

matriisin (A^{α}) ominaisarvot. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_m(n) = 0.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 558].) Dirichlet'n lauseen nojalla järjestetyssä joukossa

$$\{1, 1 + a, 1 + 2a, 1 + 3a, \ldots\}$$

on äärettömän monta alkulukua. Olkoon ääretön järjestetty joukko

$$B = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

näiden alkulukujen joukko. Lauseen 24 nojalla

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \infty.$$

Koska $0 < \alpha \leq 1$, niin

$$\frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{p_i^{\alpha}}, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Täten minoranttiperiaatteen nojalla

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\alpha}} = \infty.$$

Olkoon $q_i = p_{m-1+i}$, kun $i \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i^{\alpha}} = \sum_{i=m}^{k+m-1} \frac{1}{p_i^{\alpha}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Edellä totesimme, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\alpha}} = \infty,$$

joten nyt lauseiden 16 ja 17 nojalla

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i^{\alpha}} = \infty.$$

Olkoon $l \geq 2$ positiivinen kokonaisluku ja olkoot

$$C = \{1, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}\}$$

ja

$$D = \{1, q_1, q_2, \ldots, q_{l-1}\}$$

järjestettyjä joukkoja. Olkoon (C^{α}) järjestetyn joukon C sekä luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi, (D^{α}) järjestetyn joukon D sekä luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi ja $((C \odot D)^{\alpha})$ järjestetyn joukon $C \odot D$ ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. (Joukon $C \odot D$ alkioiden järjestys ei välttämättä noudata kokonaislukujen tavanomaista suuruusjärjestystä. Alkiot voidaan kuitenkin tässä tapauksessa järjestää uudelleen, sillä alkioiden uudelleen järjestäminen ei vaikuta matriisin $((C \odot D)^{\alpha})$ ominaisarvoihin.)

Apulauseen 4 nojalla

$$((C \odot D)^{\alpha}) = (C^{\alpha}) \otimes (D^{\alpha}).$$

Olkoot

$$\mu_1(m) \leq \cdots \leq \mu_m(m)$$

matriisin (C^{α}) ja

$$\gamma_1(l) \leq \cdots \leq \gamma_l(l)$$

matriisin (D^{α}) ominaisarvot. Lauseen 9 nojalla joukko

$$\{\mu_i(m)\gamma_j(l) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l\}$$

on matriisin $((C \odot D)^{\alpha})$ ominaisarvojen joukko.

Olkoot k ja r positiivisia kokonaislukuja. Tällöin

$$(1+ka)(1+ra) = 1 + ka + ra + kra^2 = 1 + (k + r + kra)a \equiv 1 \pmod{a},$$

joten järjestetty joukko

$$\{1, 1+a, 1+2a, 1+3a, \ldots\}$$

on suljettu kertolaskun suhteen. Täten jokainen joukon $C \odot D$ alkio on myös joukon

$$\{1, 1+a, 1+2a, 1+3a, \ldots\}$$

alkio.

Olkoon

$$n_s = \frac{p_{m-1}q_{s-1} - 1}{a} + 1, \quad s \geq 2.$$

Tällöin erityisesti

$$n_l = \frac{p_{m-1}q_{l-1} - 1}{a} + 1$$

ja

$$1 + (n_l - 1)a = 1 + \Big(\frac{p_{m-1}q_{l-1} - 1}{a} + 1 - 1\Big)a = 1 + p_{m-1}q_{l-1} - 1 = p_{m-1}q_{l-1},$$

joten jokainen joukon $C \odot D$ alkio on myös joukon

$$E = \{1, 1+a, 1+2a, 1+3a, \ldots, 1+(n_l - 1)a\}$$

alkio. Täten matriisi $((C \odot D)^\alpha)$ on järjestetyn joukon E sekä luvun α määräämän SYT-potenssimatriisin (E^α) alimatriisi. Olkoot

$$\eta_1(ml) \leq \cdots \leq \eta_{ml}(ml)$$

matriisin $((C \odot D)^\alpha)$ ominaisarvot. Tällöin lauseen 10 nojalla

$$\lambda_m(n_s) \leq \eta_m(ml).$$

Koska lisäksi

$$\mu_1(m)\gamma_1(l) \leq \cdots \leq \mu_m(m)\gamma_1(l),$$

niin

$$\eta_m(ml) \leq \mu_m(m)\gamma_1(l).$$

Täten

$$\lambda_m(n_s) \leq \mu_m(m)\gamma_1(l).$$

Nyt lauseen 31 nojalla, valittessa $a = a_1 = 1$ ja $a_i = q_{i-1}$, kun $i \geq 2$, pätee

$$\lim_{l \to \infty} \gamma_1(l) = 0.$$

Koska lisäksi lauseen 32 nojalla jonon $(\lambda_m(n))_{n=1}^\infty$ osajono $(\lambda_m(n_s))_{s=1}^\infty$ suppenee ja

$$\lim_{s \to \infty} \lambda_m(n_s) \geq 0,$$

niin litistyslausetta soveltaen

$$\lim_{s \to \infty} \lambda_m(n_s) = 0.$$

Täten lauseiden 15 ja 32 nojalla

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_m(n) = 0.$$

□

Edellä olevan apulauseen 5 avulla voidaan todistaa tässä alaluvussa tarkasteltavista tuloksista merkittävin. Se esitetään seuraavaksi.

Lause 33. *Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja ja olkoon α sellainen positiivinen reaaliluku, että $0 < \alpha \leq 1$. Olkoon $d \geq 0$ kokonaisluku. Olkoon*

$$A = \{a + db, a + (d+1)b, a + (d+2)b, \ldots, a + (d+n-1)b\}$$

järjestetty joukko ja olkoon (A^α) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$

matriisin (A^α) ominaisarvot. Olkoon l positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_l(n) = 0.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 560].) Tarkastellaan aritmeettisen jonon $(a + ib)_{i=d}^{\infty}$ osajonoa

$$\begin{aligned} (a + (d + (a+bd)i)b)_{i=0}^{\infty} &= (a + db + (a+bd)ib)_{i=0}^{\infty} \\ &= ((1+ib)(a+db))_{i=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

Olkoon

$$B = \{a + db, (1+b)(a+db), (1+2b)(a+db), \ldots, (1+(m-1)b)(a+db)\}$$

järjestetty joukko ja olkoon (B^α) joukon B ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\mu_1(m) \leq \cdots \leq \mu_m(m)$$

matriisin (B^α) ominaisarvot. Olkoon

$$C = \{1, 1+b, 1+2b, \ldots, 1+(m-1)b\}$$

järjestetty joukko ja olkoon (C^α) joukon C ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\gamma_1(m) \leq \cdots \leq \gamma_m(m)$$

matriisin (C^α) ominaisarvot. Selvästi

$$(B^\alpha) = (a+db)^\alpha (C^\alpha),$$

joten

$$\mu_j(m) = (a+db)^\alpha \gamma_j(m), \text{ kun } 1 \leq j \leq m.$$

Täten erityisesti

$$\mu_l(m) = (a+db)^\alpha \gamma_l(m).$$

Olkoon
$$m_n = 1 + \left\lfloor \frac{n-1}{a+db} \right\rfloor.$$
Tällöin
$$a + (d+n-1)b \geq (1 + (m_n - 1)b)(a+db),$$
joten (B^α) on matriisin (A^α) alimatriisi. Valitaan n siten, että $m_n \geq l$. Nyt lauseen 10 nojalla
$$\lambda_l(n) \leq \mu_l(m_n).$$
Nyt siis
$$\lambda_l(n) \leq \mu_l(m_n) = (a+db)^\alpha \gamma_l(m_n).$$
Apulauseen 5 nojalla
$$\lim_{m\to\infty} \gamma_l(m) = 0,$$
joten
$$\lim_{n\to\infty} \gamma_l(m_n) = 0.$$

Täten edellä olevan tarkastelun ja lauseen 32 nojalla sekä litistyslausetta soveltaen
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_l(n) = 0.$$
□

Lause 34. *Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja ja olkoon α sellainen positiivinen reaaliluku, että $0 < \alpha \leq 1$. Olkoon $d \geq 0$ kokonaisluku. Olkoon $(c_i)_{i=1}^\infty$ sellainen ääretön, positiivialkioinen, aidosti kasvava kokonaislukujono, että aritmeettinen jono $((a+ib))_{i=d}^\infty$ on sen osajono. Olkoon*
$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$
järjestetty joukko ja olkoon (C^α) joukon C ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot
$$\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$
matriisin (C^α) ominaisarvot. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Tällöin
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m(n) = 0.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 560].) Väite seuraa lauseista 10, 32 ja 33. □

Seurauslause 3. *Olkoon α sellainen positiivinen reaaliluku, että $0 < \alpha \leq 1$. Olkoon*

$$A = \{1, 2, \ldots, n\}$$

järjestetty joukko ja olkoon (A^α) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$

matriisin (A^α) ominaisarvot. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_m(n) = 0.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 561].) Väite seuraa välittömästi lauseesta 34. □

2.3 SYT-potenssimatriisin ominaisarvojen rajakäyttäytyminen ja alaraja SYT-potenssimatriisin pienimmälle ominaisarvolle

Edellisissä alaluvuissa tarkasteltiin tietyn tyyppisiä SYT-matriiseja. Tässä alaluvussa tarkastelua laajennetaan mielivaltaisesti valittujen, positiivialkioisten, järjestettyjen kokonaislukujoukkojen määräämiin SYT-potenssimatriiseihin.

Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ sellainen aidosti kasvava, ääretön jono, jonka alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja ja olkoon α mielivaltaisesti valittu positiivinen reaaliluku. Olkoon

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

ja olkoon

$$(A^\alpha)$$

joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$

matriisin (A^α) ominaisarvot. Lauseen 1 nojalla (A^α) on positiivisesti definiitti, joten lauseen 4 nojalla $\lambda_i(n) > 0$, kun $1 \leq i \leq n$. Tässä alaluvussa esitetään edellä olevaa parempi tulos matriisin (A^α) pienimmän ominaisarvon $\lambda_1(n)$ alarajaksi ja tarkastellaan matriisin (A^α) ominaisarvojen käyttäytymistä matriisin dimension kasvaessa rajatta. (Ks. [12, s. 561].)

Apulause 6. *Olkoon α positiivinen reaaliluku ja olkoon*

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

sellainen tekijäsuljettu, järjestetty, positiivialkioinen kokonaislukujoukko, että $A \subseteq B$. Olkoon J_α Jordanin funktio. Olkoon $Y = [c_{ij}]$ sellainen $n \times m$-matriisi, jonka alkio

$$c_{ij} = \begin{cases} \sqrt{J_\alpha(b_j)}, & \textit{jos } b_j | a_i, \\ 0 & \textit{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin

$$(A^\alpha) = YY^T.$$

Todistus. Ks. [11, s. 313].

Olkoon $K(n)$ sellaisten $n \times n$-alakolmiomatriisien joukko, joiden jokainen diagonaalialkio on 1 ja jokainen diagonaalin ulkopuolinen alkio on 0 tai 1. Selvästi joukko $K(n)$ on äärellinen. Jokaisen joukkoon $K(n)$ kuuluvan matriisin ainoa ominaisarvo on 1, joten joukon $K(n)$ alkiot ovat kääntyviä matriiseja. Esimerkin 3 nojalla joukko $L(n) = \{ZZ^T \mid Z \in K_n\}$ on äärellinen joukko positiivisesti definiittejä $n \times n$-matriiseja. Olkoon

$$L_\mu(n) = \{\mu_1(n) \mid ZZ^T \in L(n) \text{ ja } \mu_1(n) \text{ on matriisin } ZZ^T \text{ pienin ominaisarvo}\}.$$

Lauseen 4 nojalla joukon $L_\mu(n)$ alkiot ovat positiivisia reaalilukuja. Siis $L_\mu(n)$ on äärellinen joukko positiivisia reaalilukuja. Nyt voidaan määritellä ainoastaan kokonaisluvusta n riippuva positiivinen vakio

$$v_n = \min L_\mu(n). \tag{$\star$}$$

(Ks. [12, s. 561].)

Vakion v_n ja Jordanin funktion J_α avulla voidaan esittää alaraja matriisin (A^α) pienimmälle ominaisarvolle $\lambda_1(n)$. (Ks. [12, s. 562].)

Lause 35. *Olkoon $(a_i)_{i=1}^\infty$ aidosti kasvava, ääretön, positiivialkioinen kokonaislukujono ja olkoon α mielivaltaisesti valittu positiivinen reaaliluku. Olkoon*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

ja olkoon olkoon (A^α) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$

matriisin (A^α) ominaisarvot. Tällöin matriisin (A^α) pienin ominaisarvo

$$\lambda_1(n) \geq v_n \cdot \min\{J_\alpha(a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 562].) Olkoon Y apulauseessa 6 määritelty $n \times m$-matriisi. Nyt apulauseen 6 nojalla

$$(A^\alpha) = YY^T.$$

Olkoon P mielivaltaisesti valittu permutaatiomatriisi. Tällöin

$$(A^\alpha) = YY^T = YIY^T = Y(PP^T)Y^T = (YP)(P^TY^T) = (YP)(YP)^T.$$

Matriisin Y sarakkeita voidaan täten permutoida vapaasti, joten voidaan olettaa, että

$$b_i = a_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Esitetään nyt matriisi Y muodossa

$$Y = [W \mid V],$$

jossa W on $n \times n$-matriisi ja V on $n \times (m-n)$-matriisi. Tällöin

$$YY^T = [W \mid V][W \mid V]^T = [W \mid V]\left[\frac{W^T}{V^T}\right] = WW^T + VV^T.$$

Olkoot

$$\gamma_1(n) \leq \cdots \leq \gamma_n(n)$$

matriisin WW^T ominaisarvot. Koska

$$VV^T = YY^T - WW^T$$

ja esimerkin 3 nojalla matriisi VV^T on ei-negatiivisesti definiitti, niin lauseen 7 nojalla

$$\lambda_i(n) \geq \gamma_i(n), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Tarkastellaan matriisia $W = [d_{ij}]$. Nyt

$$d_{ij} = \begin{cases} \sqrt{J_\alpha(a_j)}, & \text{jos } a_j | a_i, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Matriisi W on sellainen alakolmiomatriisi, jonka jokainen diagonaalialkio $d_{ii} = \sqrt{J_\alpha(a_i)}$. Muodostetaan matriisit U ja D siten, että

$$D = \mathrm{diag}(\sqrt{J_\alpha(a_1)}, \sqrt{J_\alpha(a_2)}, \cdots, \sqrt{J_\alpha(a_n)})$$

ja matriisin $U = [u_{ij}]$ alkio

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } a_j | a_i, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Matriisi W voidaan esittää muodossa

$$W = UD.$$

Nyt

$$WW^T = (UD)(UD)^T = (UD)(D^TU^T) = U(DD^T)U^T = U(DD)U^T = UD^2U^T,$$

joten

$$(WW^T)^{-1} = (UD^2U^T)^{-1} = (U^T)^{-1}(D^2)^{-1}U^{-1}.$$

Selvästi matriisit U ja W ovat kääntyvä, joten esimerkin 3 nojalla UU^T ja WW^T ovat positiivisesti definiittejä. Lauseen 4 nojalla matriisien UU^T ja WW^T ominaisarvot ovat positiivisia reaalilukuja. Tämän vuoksi matriisien UU^T ja WW^T itseisarvoltaan suurimmat ominaisarvot ovat samalla niiden suurimmat ominaisarvot.

Olkoon $\mu_1(n)$ matriisin UU^T pienin ominaisarvo ja olkoon

$$\begin{aligned}\beta &= ||(D^2)^{-1}|| = ||\mathrm{diag}(\frac{1}{J_\alpha(a_1)}, \frac{1}{J_\alpha(a_2)}, \cdots, \frac{1}{J_\alpha(a_n)})|| \\ &= \max\{\frac{1}{J_\alpha(a_i)} \mid 1 \leq i \leq n\} = \frac{1}{\min\{J_\alpha(a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}}.\end{aligned}$$

Nyt lauseen 11 nojalla

$$||(WW^T)^{-1}|| = ||(U^T)^{-1}(D^2)^{-1}U^{-1}|| \leq ||(U^T)^{-1}||\cdot||(D^2)^{-1}||\cdot||U^{-1}|| = \beta||(U^T)^{-1}||\cdot||U^{-1}||.$$

Lauseen 12 nojalla

$$||(UU^T)^{-1}|| = ||(U^{-1})^TU^{-1}|| = ||(U^T)^{-1}|| \cdot ||U^{-1}||,$$

joten

$$||(WW^T)^{-1}|| \leq \beta \cdot ||(UU^T)^{-1}||.$$

Matriisi UU^T on konjukaattisymmetrinen ja totesimme edellä, että sen ominaisarvot ovat positiivisia reaalilukuja. Tämän ja lauseen 2 nojalla

$$||(UU^T)^{-1}|| = \frac{1}{\mu_1(n)}.$$

Nyt siis

$$||(WW^T)^{-1}|| \leq \frac{\beta}{\mu_1(n)}.$$

Matriisi UU^T on selvästi joukon $L_\mu(n)$ alkio, joten $\mu_1(n) \geq v_n$. Täten

$$\frac{\beta}{\mu_1(n)} \leq \frac{\beta}{v_n} = \frac{1}{v_n \cdot \min\{J_\alpha(a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}}.$$

Nyt siis

$$||(WW^T)^{-1}|| \leq \frac{1}{v_n \cdot \min\{J_\alpha(a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}}.$$

Lauseiden 2 ja 13 nojalla

$$||(WW^T)^{-1}|| \geq \frac{1}{\gamma_1(n)}.$$

Koska

$$\lambda_1(n) \geq \gamma_1(n),$$

niin täten

$$\lambda_1(n) \geq \gamma_1(n) \geq \frac{1}{||(WW^T)^{-1}||} \geq v_n \cdot \min\{J_\alpha(a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

□

Seurauslause 4. *Olkoon $(a_i)_{i=1}^\infty$ aidosti kasvava, ääretön, positiivialkioinen kokonaislukujono. Olkoon*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

ja olkoon (A) joukon A määräämä SYT-matriisi. Olkoot

$$\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$

matriisin (A) ominaisarvot. Tällöin matriisin (A) pienin ominaisarvo

$$\lambda_1(n) \geq v_n \cdot \min\{\varphi(a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 564].) Koska esimerkin 12 nojalla $J_1(a) = \varphi(a)$, kun a on positiivinen kokonaisluku, niin väite on tosi lauseen 35 nojalla. □

Seurauslause 5. *Olkoon $(a_i)_{i=1}^\infty$ sellainen aidosti kasvava, ääretön kokonaislukualkioinen jono, että $a_1 = 1$ ja olkoon α mielivaltaisesti valittu positiivinen reaaliluku. Olkoon*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

ja olkoon (A^α) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\lambda_1(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$

matriisin (A^α) ominaisarvot. Tällöin matriisin (A^α) pienin ominaisarvo

$$\lambda_1(n) \geq v_n.$$

Todistus. (Ks. [12, s. 564].) Koska esimerkin 13 nojalla $J_\alpha(1) = 1$ ja $J_\alpha(a) \geq 1$, kun kokonaisluku $a \geq 2$, niin väite on tosi lauseen 35 nojalla. □

Esimerkki 14. Olkoon α positiivinen reaaliluku ja olkoon

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

sellainen järjestetty joukko, jonka alkiot ovat positiivisia kokonaislukuja. Olkoon (A^α) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$$

matriisin (A^α) ominaisarvot. Tällöin kohdassa $(\star)$ määritelty vakio $v_3 > 0.198$ (ks. liite), joten lauseen 35 nojalla

$$\lambda_1 > \min\{0.198 \cdot J_\alpha(a_1),\ 0.198 \cdot J_\alpha(a_2),\ 0.198 \cdot J_\alpha(a_3)\}.$$

Jos $\alpha = 1$, niin seurauslauseen 4 nojalla

$$\lambda_1 > \min\{0.198 \cdot \varphi(a_1),\ 0.198 \cdot \varphi(a_2),\ 0.198\varphi(a_3)\}.$$

Jos $a_1 = 1$, niin seurauslauseen 5 nojalla

$$\lambda_1 > 0.198.$$

Apulause 7. *Olkoon $a > 1$ positiivinen kokonaisluku ja α positiivinen reaaliluku. Olkoon C Eulerin vakio. Tällöin on olemassa sellaiset vakiot $k > 0$ ja δ, $0 < \delta < 1$, sekä ainoastaan luvuista α ja δ riippuva funktio g, jolle pätee $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, että:*

1. *jos $\alpha > 1$, niin* $J_\alpha(a) \geq \dfrac{a^\alpha}{\zeta(\alpha)}$;

2. *jos $\alpha = 1$, niin* $J_1(a) \geq \dfrac{a \cdot e^{-C}}{\log a}\Big(1 - \dfrac{k}{\log a}\Big)$;

3. *jos $0 < \alpha < 1$, niin* $J_\alpha(a) = a^{\alpha(1-\delta)} \cdot g(a)$;

4. *jos $\alpha > 0$, niin* $\lim\limits_{a\to\infty} J_\alpha(a) = \infty$.

Todistus. (Ks. [12, s. 564].) Kun α on positiivinen reaaliluku, niin lauseen 28 nojalla

$$J_\alpha(a) = a^\alpha \prod_{p\in\mathbb{P},\ p|a} \Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big),$$

joten kun α on positiivinen reaaliluku, niin

$$J_\alpha(a) \geq a^\alpha \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big).$$

Kun $\alpha > 1$, niin lauseen 29 nojalla

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}.$$

Täten jos $\alpha > 1$, niin

$$J_\alpha(a) \geq \frac{a^\alpha}{\zeta(\alpha)}.$$

Kun $\alpha = 1$, niin lauseen 28 nojalla

$$J_1(a) = a \prod_{p\in\mathbb{P},\ p|a} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

joten

$$J_1(a) \geq a \prod_{p\in\mathbb{P},\ p\leq a} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

Lauseen 30 nojalla

$$\prod_{p\in\mathbb{P},\ p\leq a} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = \frac{e^{-C}}{\log a}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\log a}\Big)\Big),$$

joten on olemassa sellainen vakio $k > 0$, että

$$\prod_{p\in\mathbb{P},\ p\leq a} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \geq \frac{e^{-C}}{\log a}\Big(1 - \frac{k}{\log a}\Big).$$

Täten jos $\alpha = 1$, niin

$$J_1(a) \geq \frac{a\cdot e^{-C}}{\log a}\Big(1 - \frac{k}{\log a}\Big).$$

Olkoon $0 < \alpha < 1$. Olkoon

$$f(n) = \frac{n^{\alpha(1-\delta)}}{J_\alpha(n)}.$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

Jordanin funktio on multiplikatiivinen, joten selvästi myös f on multiplikatiivinen. Lauseen 26 nojalla riittää osoittaa, että

$$\lim_{p^n\to\infty} f(p^n) = 0.$$

Koska lauseen 28 nojalla

$$\lim_{p^n\to\infty} \frac{1}{f(p^n)} = \lim_{p^n\to\infty} p^{n\alpha\delta}\Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big) = \infty,$$

niin

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

Olkoon nyt $g = \frac{1}{f}$. Tällöin $J_\alpha(a) = a^{\alpha(1-\delta)} \cdot g(a)$ ja

$$\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty.$$

Täten jos $0 < \alpha < 1$, niin on olemassa sellainen vakio δ, $0 < \delta < 1$, sekä ainoastaan luvuista α ja δ riippuva funktio g, jolle pätee $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, että

$$J_\alpha(a) = a^{\alpha(1-\delta)} \cdot g(a).$$

Tiedetään, että (ks. [2, s. 197])

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log x} = \infty,$$

joten lauseen viimeinen kohta seuraa edellisistä kohdista ja minoranttiperiaatetta soveltamalla.

□

Seurauslause 6. *Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ sellainen aidosti kasvava, ääretön kokonaislukujono, että $a_1 > 1$, ja olkoon α positiivinen reaaliluku. Olkoon*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

ja olkoon (A^α) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoon $\lambda_1(n)$ matriisin (A^α) pienin ominaisarvo. Olkoon C Eulerin vakio ja olkoon g apulauseessa 7 määritelty funktio. Tällöin on olemassa sellaiset vakiot $k > 0$ ja δ, $0 < \delta < 1$, että:

1. *jos $\alpha > 1$, niin $\lambda_1(n) \geq v_n \cdot \dfrac{a_1^\alpha}{\zeta(\alpha)}$;*

2. *jos $\alpha = 1$, niin $\lambda_1(n) \geq v_n \cdot \min\Big\{\dfrac{a_i \cdot e^{-C}}{\log a_i}\Big(1 - \dfrac{k}{\log a_i}\Big) \mid 1 \leq i \leq n\Big\}$;*

3. *jos $0 < \alpha < 1$, niin $\lambda_1(n) \geq v_n \cdot \min\{a_{n-i}^{\alpha(1-\delta)} \cdot g(a_{n-i}) \mid 1 \leq i \leq n\}$.*

Todistus. (Ks. [12, s. 566].) Väite on tosi lauseen 35 ja apulauseen 7 nojalla. $\square$

Lause 36. *Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ sellainen aidosti kasvava, ääretön kokonaislukujono, että $a_1 > 1$, ja olkoon α positiivinen reaaliluku. Olkoot m ja n sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $n > m$. Olkoon*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

ja olkoon (A^{α}) joukon A ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\lambda_1(n) \leq \lambda_2(n) \leq \cdots \leq \lambda_n(n)$$

matriisin (A^{α}) ominaisarvot. Olkoon C Eulerin vakio ja olkoon g apulauseessa 7 määritelty funktio. Tällöin on olemassa sellaiset vakiot $k > 0$ ja δ, $0 < \delta < 1$, että:

1. *jos* $\alpha > 1$, *niin* $\lambda_{n-m+1}(n) \geq v_m \cdot \dfrac{a_{n-m+1}^{\alpha}}{\zeta(\alpha)}$;

2. *jos* $\alpha = 1$, *niin* $\lambda_{n-m+1}(n) \geq v_m \cdot \min\Big\{\dfrac{a_{n-i} \cdot e^{-C}}{\log a_{n-i}}\Big(1 - \dfrac{k}{\log a_{n-i}}\Big) \mid 0 \leq i \leq m-1\Big\}$;

3. *jos* $0 < \alpha < 1$, *niin* $\lambda_{n-m+1}(n) \geq v_m \cdot \min\{a_i^{\alpha(1-\delta)} \cdot g(a_i) \mid 0 \leq i \leq m-1\}$;

4. *jos* $\alpha > 0$, *niin* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{n-m+1}(n) = \infty$.

Todistus. (Ks. [12, s. 566].) Olkoon

$$B = \{a_{n-m+1}, a_{n-m+2}, \ldots, a_n\}$$

ja olkoon (B^{α}) joukon B ja luvun α määräämä SYT-potenssimatriisi. Olkoot

$$\mu_1(m) \leq \mu_2(m) \leq \cdots \leq \mu_m(m)$$

matriisin (B^{α}) ominaisarvot. Olkoon v_m kohdassa $(\star)$ määritelty vakio. Lauseen 35 nojalla

$$\mu_1(m) \geq v_m \cdot \min\{J_{\alpha}(a_{n-i}) \mid 0 \leq i \leq m-1\}.$$

Lauseen 10 nojalla

$$\lambda_{n-m+1}(n) \geq \mu_1(m).$$

Siis

$$\lambda_{n-m+1}(n) \geq v_m \cdot \min\{J_{\alpha}(a_{n-i}) \mid 0 \leq i \leq m-1\}.$$

Täten kolme ensimmäistä väitettä ovat tosia apulauseen 7 nojalla. Lauseen viimeinen väite seuraa edellisistä kohdista, kun sovelletaan minoranttiperiaatetta. □

3 SYT-matriisien ominaisarvojen tutkimuksesta

Tämän tutkielman luvussa 2 tarkasteltiin Shaofang Hongin ja Raphael Loewyn artikkelissa *Asymptotic Behavior of Eigenvalues of Greatest Common Divisor Matrices* esittämiä SYT-potenssimatriisien ominaisarvojen rajakäyttäytymistä koskevia tuloksia. Todennäköisesti lähitulevaisuudessa kyetään esittämään tarkempia arvioita SYT-potenssimatriisien ominaisarvoille. Tulevaisuudessa nähtäneen myös PYM-potenssimatriisien eli pienin yhteinen monikerta -potenssimatriisien ominaisarvojen tutkimusta. Tarkastelun kohteeksi voidaan ottaa esimerkiksi myös sellaisten matriisien ominaisarvot, joissa alkioiden muodostamisessa on käytetty suurimman yhteisen tekijän sijaan yleistä suurinta yhteistä tekijää. Tampereen yliopistossa tehdään SYT-potenssimatriiseihin liittyvää tutkimusta ja mahdollisesti lähitulevaisuudessa ominaisarvojen tarkastelu on yksi tutkimusalue.

Viitteet

[1] Adams, Robert A.: *Calculus – A Complete Course*. Pearson Education Canada Inc. Toronto 2003.

[2] Adams, Robert A.: *Calculus – A Complete Course, Student Solutions Manual*. Pearson Education Canada Inc. Toronto 2003.

[3] Apostol, Tom M.: *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer–Verlag New York Inc. 1995.

[4] Bourque, Keith & Ligh, Steve: *Matrices Associated with Arithmetical Functions*. Linear and Multilinear Algebra. Vol. 34.(1993) 261–267. USA 1993.

[5] Davenport, Harold: *Multiplicative Number Theory*. Springer–Verlag New York Inc. 1980.

[6] Etgen, Garrett; Hille, Einar & Salas, Saturnino : *Calculus – One and Several Variables*. John Wiley & Sons Inc. 2003.

[7] Friedberg, Stephen H.; Insel, Arnold J. & Spence, Lawrence E..: *Linear Algebra*. Pearson Education Inc. 2003.

[8] Hardy, Godfrey & Wright, Edward: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press. Hong Kong 1983.

[9] Haukkanen, Pentti: *Algebra 1*, luentomoniste. `http://mtl.uta.fi/Opiskelu/Algebra` (16.3.2007).

[10] Haukkanen, Pentti: *Lukuteoria*, luentomoniste. `http://mtl.uta.fi/Opiskelu/Algebra/ Lukuteoria` (16.3.2007).

[11] Hong, Shaofang: *Bounds for determinants of matrices associated with arithmetical functions*. Linear Algebra Appl. 281 (1998) 311–322.

[12] Hong, Shaofang & Loewy, Raphael: *Asymptotic Behavior of Eigenvalues of Greatest Common Divisor Matrices*. Glasgow Math. J. 46 (2004) 551–569. UK 2004.

[13] Horn, Roger A. & Johnson, Charles R.: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge 1985.

[14] Horn, Roger A. & Johnson, Charles R.: *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge 1991.

[15] Korkee, Ismo: *On Meet and Join Matrices Associated with Incidence Functions*. Tampere University Press. Tampere 2006.

[16] Lay, David C.: *Linear Algebra and Its Applications.* Addison Wesley Longman Inc. 2001.

[17] Myrberg, Lauri: *Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa I.* Kustannusosakeyhtiö Tammi. Tampere 2001.

[18] Myrberg, Lauri: *Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa II.* Kustannusosakeyhtiö Tammi. Saarijärvi 2001.

Liite

Matlab-ohjelman tulosteet

```
» A = [1 0 0;0 1 0;0 0 1];
» B = [1 0 0;1 1 0;1 1 1];
» C = [1 0 0;1 1 0;0 0 1];
» D = [1 0 0;0 1 0;1 0 1];
» E = [1 0 0;0 1 0;0 1 1];
» F = [1 0 0;0 1 0;1 1 1];
» G = [1 0 0;1 1 0;0 1 1];
» H = [1 0 0;1 1 0;1 0 1];
» eig(A*A')
ans =
1
1
1
» eig(B*B')
ans =
0.3080
0.6431
5.0489
» eig(C*C')
ans =
0.3820
1.0000
2.6180
» eig(D*D')
ans =
0.3820
1.0000
2.6180
» eig(E*E')
ans =
0.3820
1.0000
2.6180
» eig(F*F')
ans =
0.2679
1.0000
3.7321
```

```
» eig(G*G')
ans =
0.1981
1.5550
3.2470
» eig(H*H')
ans =
0.2679
1.0000
3.7321
»
```