TAMPEREEN YLIOPISTO
Matematiikan Pro Gradu -tutkielma

Outi Vatula

Büchin lause ja transitiivisen sulkeuman logiikat

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka

Joulukuu 2005

TAMPEREEN YLIOPISTO
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
VATULA,OUTI: Büchin lause ja transitiivisen sulkeuman logiikat
Pro gradu -tutkielma, 43 s.
Matematiikka
Joulukuu 2005

Büchin lauseen merkittävin tulos on, että äärellisellä automaatilla tunnistettavat säännölliset kielet ovat määriteltävissä monadisessa toisen kertaluvun logiikassa. Tässä tutkielmassa todistamme lisäksi, että monadisen toisen kertaluvun logiikan rinnalle Büchin lauseeseen voimme nostaa transitiivisen sulkeuman ja deterministisen transitiivisen sulkeuman logiikat.

Tutkielman päälähdeteoksena on käytetty Heinz-Dieter Ebbinghausin ja Jörg Flumin kirjaa Finite Model Theory. Pitkälti tämän kirjan pohjalta esittelemme ensin säännölliset kielet, äärelliset automaatit ja äärelliset mallit. Myös tutkielmassa käytetyt merkintätavat vastaavat pääosin kirjassa käytettyjä merkintöjä. Logiikoista esittelemme ensimmäisen ja toisen kertaluvun logiikat, monadinen toisen kertaluvun logiikan sekä transitiivisen sulkeuman ja deterministisen transitiivisen sulkeuman logiikat. Luomme myös yleissilmäyksen vaativuusteoriaan ja edellä mainittujen logiikkojen vaativuusluokkiin. Büchin lauseen todistusta varten tutustumme ensimmäisen kertaluvun ja monadisen toisen kertaluvun logiikkojen Ehrenfeucht-Fraïsse peleihin. Näiden pelien avulla tarkastelemme logiikan kaavojen toteutumista äärellisissä malleissa ja edelleen äärellisten mallien keskinäistä samankaltaisuutta. Tutkielman viimeisessä luvussa esitämme Büchin lauseen laajennoksen, joka siis kokoaa säännölliset kielet, äärelliset automaatit, monadisen toisen kertaluvun logiikan sekä transitiivisen sulkeuman logiikat samaan lauseeseen.

Oletamme entuudestaan tunnetuiksi tavallisimmat joukko-opin ja logiikan merkinnät, rekursiivisen määrittelyn ja induktioperiaatteen. Tampereen Yliopiston kurssi Johdatus äärellisten mallien teoriaan tarjoaa hyvät pohjatiedot aihealueen ymmärtämiseen.

Sisältö

Johdanto

Todistamme tässä tutkielmassa Büchin lauseen. Tämän lauseen merkittävin tulos on, että äärellisellä automaatilla (deterministisellä tai epädeterministisellä) tunnistettavat säännölliset kielet ovat määriteltävissä monadisessa toisenkertaluvun logiikassa. Lisäksi esittelemme transitiivisen sulkeuman ja deterministisen transitiivisen sulkeuman logiikat ja nostamme nämä monadisen toisen kertaluvun logiikan rinnalle Büchin lauseeseen. Tutkielman päätulos onkin kiteytettävissä yhteen lauseeseen, jossa on seitsemän kohtaa:

Olkoon $L \subseteq \Sigma^*$ kieli. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) On olemassa sellainen invariantti joukon Σ^* ekvivalenssirelaatio $\sim$, jolla on äärellisen monta ekvivalenssiluokkaa, että kieli L on yhdiste relaation $\sim$ ekvivalenssiluokista.

(ii) Kieli L voidaan tunnistaa deterministisellä automaatilla.

(iii) Kieli L voidaan tunnistaa epädeterministisellä automaatilla.

(iv) Kieli L on säännöllinen.

(v) Kieli L on määriteltävissä logiikassa FO(DTC).

(vi) Kieli L on määriteltävissä logiikassa FO(TC).

(vii) Kieli L on määriteltävissä logiikassa MSO.

Luvussa 1 esittelemme tutkielman kannalta oleellisia käsitteitä, määritelmiä ja tuloksia liittyen kieliin, automaatteihin ja äärellisiin malleihin. Oletamme, että tavallisimmat joukko-opin merkinnät, rekursiivinen määrittely ja induktio ovat lukijalle jo entuudestaan tuttuja.

Luvussa 2 esittelemme ensimmäisen ja toisen kertaluvun logiikat sekä transitiivisen sulkeuman ja deterministisen transitiivisen sulkeuman logiikat. Toisen kertaluvun logiikan osalta tässä tutkielmassa pääpaino on monadisessa toisen kertaluvun logiikassa. Esittelemme kunkin logiikan syntaksin ja semantiikan sekä tarkastelemme logiikkojen välisiä suhteita. Tässä kohdin oletamme tunnetuksi yleensä logiikkaan liittyvät perusmerkinnät ja -käsitteet. Luvun lopussa luomme yleissilmäyksen vaativuusteoriaan.

Ensimmäisen ja toisen kertaluvun logiikkojen pelikarakterisointeihin perehdymme luvussa 3. Esittelemme Ehrenfeucht-Fraïssé pelin, joka on hyvä työkalu tutkittaessa äärellisten mallien samankaltaisuutta ja määriteltävyyttä ensimmäisen kertaluvun logiikassa ja monadisessa toisen kertaluvun logiikassa.

Viimeisessä luvussa 4 pääsemme viimein Büchin lauseen ja sen laajennoksen todistukseen. Edellä esittelemämme lauseen todistamme kahtena toisiinsa liittyvinä implikaatioketjuina.

Päälähdeteoksena käytämme Heinz-Dieter Ebbinghausin ja Jörg Flumin kirjaa Finite Model Theory. Muut lähteet ovat lueteltuina kohdassa Viitteet.

1 Alustavia tarkasteluja

Tässä luvussa esittelemme kielistä, automaateista ja malleista ne merkinnät ja määritelmät, joita tulemme myöhemmin tarvitsemaan. Erityisesti tutustumme säännöllisiin kieliin, joilla on oma merkittävä roolinsa Büchin lauseessa. Kappaleessa 1.2 esittelemme deterministisen ja epädeterministisen äärellisen automaatin. Näiden abstraktien koneiden avulla voimme tunnistaa kieliä.

1.1 Kielet

Kuten luonnolliset kielet myös matematiikassa tarkastelemamme niin sanotut formaalit kielet koostuvat sanoista. Sanat puolestaan koostuvat merkeistä ja toisinaan kutsummekin sanoja merkkijonoiksi. Emme kuitenkaan hyväksy sanoihin mitä tahansa merkkejä, vaan kussakin kielessä käytetyt merkit kuuluvat annettuun merkistöön. Merkistö on äärellinen epätyhjä joukko merkkejä. Merkistöön kuuluvat kaikki ne merkit, joita kulloinkin kyseessä olevassa kielessä voidaan käyttää. Merkitsemme yleisen tavan mukaan merkistöä kreikan kielen kirjaimella Σ.

Katenaatio (engl. concatenation) on alkioiden yhdistämistä merkkijonoiksi. Sana on merkistön Σ merkeistä katenaatiolla muodostettu äärellinen merkkijono. Olkoon $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ merkistö. Merkkien a ja b katenaatio on yksinkertaisesti ab. Vastaavasti joukkojen $A = \{a, b\}$ ja $B = \{c, d\}$ katenaatio $AB = \{ac, ad, bc, bd\}$. Alkion katenaatioille itsensä kanssa käytämme eksponentiaalista merkintää. Siis $aa \cdots a = a^k$ ja joukoille $AA \cdots A = A^k$, missä $k \in \mathbb{N}$ on perättäisten alkioiden lukumäärä. Tässä k voi olla myös nolla, mikä tarkoittaa tyhjää merkkiä tai tyhjää sanaa ja joukoille vastaavasti tyhjää joukkoa. Tyhjää sanaa merkitsemme kreikkalaisella kirjaimella λ.

Merkinnällä a^* tarkoitamme kaikkia mahdollisia merkin a katenaatioita itsensä kanssa. Toisin sanoen $a^* = \{a^0, a^1, a^2, \ldots\}$. Tätä Kleenen tähdeksi kutsuttua operaattoria voidaan soveltaa myös joukkouhin. Tällöin

$$A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i = A^0 \cup A^1 \cup \cdots .$$

Kieli on tietyn merkistön merkeistä koostuvien sanojen joukko. Merkitsemme useimmiten kieltä isolla kirjaimella L. Kieli voi olla tyhjä, tällöin $L = \{\quad\} = \emptyset$. Koska kielet ovat sanoista muodostuneita joukkoja, niin voimme konstruoida uusia kieliä käyttämällä joukko-opin operaattoreita (yhdiste $\cup$, leikkaus $\cap$ ja erotus $\setminus$) sekä katenaatiota ja Kleenen tähteä.

Merkintä Σ^* tarkoittaa kaikkien mahdollisten merkistön Σ merkeistä muodostuvien merkkijoukkojen joukkoa. Toisin sanoen, mikä tahansa merkistön Σ kieli L on joukon Σ^* osajoukko. Aina merkistöstä Σ riippumatta tyhjä sana $\lambda \in \Sigma^*$, sillä $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \cdots$ ja $\Sigma^0 = \emptyset$.

Määritelmässä 1.1 annamme säännöt säännöllisten lausekkeiden muodostamiseen. Tässä määritelmässä ja myös myöhemmin tässä tutkielmassa aakkostolla tarkoitamme kaikkia niitä merkkejä, joita on luvallista käyttää kulloisessakin yhteydessä. Usein aakkosto sisältää merkistön kuten tässä.

Määritelmä 1.1. Säännölliset lausekkeet ovat merkkijonoja, joiden aakkosto on $\{\emptyset\} \cup \{a \in \Sigma\} \cup \{\cup, +,), (\}$. Säännölliset lausekket määritellään rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

(i) $\emptyset$ on säännöllinen lauseke, joka vastaa tyhjää kieltä.

(ii) a on säännöllinen lauseke, joka vastaa kieltä $\{a\}$.

(iii) Jos r ja s ovat säännölliset lausekkeet, jotka vastaavat kieliä R ja S, niin $(r \cup s)$, (rs) ja r^* ovat säännöllisiä lausekkeita, jotka vastaavat kieliä $R \cup S$, RS ja R^*.

Nyt kun olemme määritelleet säännölliset lausekkeet, on säännöllisten kielten määritteleminen yksinkertaista.

Määritelmä 1.2. Kieli on säännöllinen, jos se voidaan esittää säännöllisellä lausekkeella.

1.2 Automaatit

Seuraavaksi tutustumme abstraktiin koneeseen, joka pystyy tunnistamaan, kuuluuko annettu sana tiettyyn kieleen. Kutsumme tällaista kuvitteellista konetta äärelliseksi automaatiksi (engl. finite automaton).

Yksinkertaistaen äärellinen automaatti on tiettyä algoritmia noudattava abstrakti kone, joka saa syötteenään sanoja. Lukiessaan sanaa merkki kerrallaan kone siirtyy eri tilojen välillä sen mukaan, minkä merkin kone on viimeksi lukenut. Tiloja on äärellinen määrä ja niitä on kahdenlaisia; hyväksyviä ja hylkääviä. Jos kone jää sanan loputtua hyväksyvään tilaan, niin luettu sana kuuluu kyseiseen kieleen.

Tutustumme kahteen äärelliseen automaattiin; epädeterministiseen ja deterministiseen. Määrittelemme ensin epädeterministisen automaatin.

Määritelmä 1.3. Äärellinen epädeterministinen automaatti M on viisikko $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, missä

Q	on äärellinen joukko tiloja,
Σ	on aakkosto,
$q_0 \in Q$	on alkutila,
$F \subseteq Q$	on hyväksyvien tilojen joukko ja
$\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$	on siirtymärelaatio tilojen välillä.

Relaatio $\delta(q_i, a, q_j)$ on voimassa, kun automaatilla on mahdollisuus siirtyä tilaan q_j luettuaan merkin a tilassa q_i.

Määrittelemme rekursiivisesti funktion $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Pow(Q)$, missä $Pow(Q)$ on joukon Q potenssijoukko. Tämän funktion arvo on joukko, joka muodostuu niistä tiloista, joihin automaatti voi päätyä lukiessaan sanan x tilassa q.

Määritelmä 1.4. Olkoon $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ automaatti. Funktio $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Pow(Q)$ määritellään seuraavasti:

(1) $\delta^*(q, \lambda) = \{q\}$, aina kun $q \in Q$ ja

(2) $\delta^*(q, wa) = \{p \mid \delta(r, a) = p \text{ jollakin } r \in \delta^*(q, w)\}$, aina kun $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ ja $a \in \Sigma$.

Deterministinen automaatti $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ on muilta osin samanlainen kuin epädeterministinen automaatti, mutta funktio $\delta^*(q, a)$ on määritelty erikseen kaikilla $a \in \Sigma$ jokaiselle tilalle q. Nyt $\delta^*(q, a) = \{p\}$ sijaan merkitsemme yksinkertaisesti $\delta^*(q, a) = p$.

Funktion δ^* avulla voimme tarkasti määritellä, mitä tarkoitamme sillä, että äärellinen automaatti hyväksyy tai hylkää syötteeksi saamansa sanan.

Määritelmä 1.5. Olkoon $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ äärellinen automaatti. Se *hyväksyy* sanan $w \in \Sigma^*$, jos $\delta^*(q_0, w) \subseteq F$. Jos M ei hyväksy sanaa, sanomme, että M *hylkää* sen. Äärellisen epädeterministisen automaattin M hyväksymä kieli on joukko

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

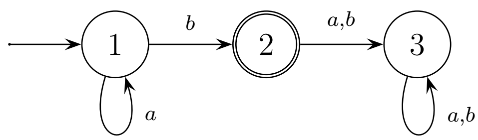
Jos M on deterministinen, niin automaatin M hyväksymä kieli on joukko

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F\}.$$

Olkoon L mikä tahansa aakkoston Σ kieli. Äärellinen automaatti M hyväksyy eli *tunnistaa* kielen L, jos $L = L(M)$.

Esimerkki 1.1. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$ aakkosto ja $L = a^*b$ aakkoston Σ kieli. Olkoon lisäksi $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ sellainen deterministinen automaatti, että $Q = \{1, 2, 3\}, F = \{2\}$ ja $(1, a, 1), (1, b, 2), (2, x, 3)$ ja $(3, x, 3) \in \delta$, missä $x \in \Sigma$.

Automaatin M toimintaa kuvaa alla oleva kuvio, jossa automaatin tilat on kuvattu ympyröinä ja siirtymäfunktio δ nuolina. Vahvennettu ympyrä on hyväksyvä tila.



Alussa automaatti M on tilassa q_0. Jos M lukee tilassa q_0 merkin a, niin se pysyy tilassa q_0. Vasta merkin b lukeminen siirtää automaatin tilasta q_0 hyväksyvään tilaan q_1. Jos M lukee tämän jälkeen yhdenkin merkin, se siirtyy pois hyväksyvästä tilasta q_1 tilaan q_2. Nyt automaatti hyväksyy vain ne sanat, joiden alussa on mielivaltainen määrä merkkejä a ja joiden lopussa on yksi b. Näin ollen automaatin M hyväksymä kieli on

$$L(M) = \{b, ab, aab, aaab, \ldots\} = a^*b = L.$$

Siis deterministinen automaatti M hyväksyy kielen L.

Huomautus 1.1. Deterministinen automaatti on epädeterministisen automaatin erikoistapaus. Kaikki kielet, jotka voidaan tunnistaa deterministisellä automaatilla, voidaan tunnistaa myös epädeterministisellä automaatilla.

Kuten jo johdannossa totesimme äärellisillä automaateilla tunnistettavat kielet ovat säännöllisiä. Tämän todistamme lemmassa 1.1. Tulos on voimassa myös toiseen suuntaan. Siis kaikki säännölliset kielet voidaan tunnistaa jollakin äärellisellä automaatilla. Tämä tulee todistetuksi luvussa 4.

Lemma 1.1. *Kaikki kielet, jotka voidaan tunnistaa epädeterministisellä automaatilla, ovat säännöllisiä.*

Todistus. [4, s. 146][1, s. 108] Olkoon $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ epädeterministinen automaatti, missä $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$. Olkoon $L \subseteq \Sigma^*$ automaatin M tunnistama kieli. Merkitsemme $L(i, j, k)$ niiden sanojen joukkoa, jotka M voi lukea alkaen tilasta q_i päätyen tilaan q_j käymällä niiden välissä vain sellaisissa tiloissa, joiden indeksi on $< k$. Voimme olettaa, että $0 \leq k \leq n$. Nyt

$$(*) \qquad L(M) = \bigcup_{q_j \in F} L(0, j, n+1).$$

Riittää siis osoittaa, että kaikilla k:n arvoilla kieli $L(i, j, k)$ on säännöllinen. Todistamme tämän induktiolla k:n suhteen. Oletamme ensin, että $k = 0$. Tällöin on olemassa kaksi vaihtoehtoa. Joko automaatti M lukee tyhjän sanan λ ja jää tilaan q_i tai M lukee merkin $a \in \Sigma$ ja siirtyy tilaan q_j. Ensimmäisessä tapauksessa $i = j$, mikä on toki mahdollista myös jälkimmäisessä vaihtoehdossa. Joka tapauksessa $L(i, j, 0) = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\lambda\} \subseteq \Sigma$. Merkitkäämme $L(i, j, 0) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Tällöin kielen L säännöllinen ilmaus on $r = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_r$. Jos $L(i, j, 0) = \emptyset$, niin $r = \emptyset$.

Oletamme sitten, että $L(i, j, k)$ on säännöllinen, kun $k > 0$. Osoitamme, että $L(i, j, k+1)$ on myös säännöllinen. Kieli $L(i, j, k+1)$ sisältää siis kaikki ne sanat, jotka M voi lukea aloittaen tilasta q_i päätyen tilaan q_j ja käyttäen vain tiloja, joiden indeksi on $< k+1$. Lukiessaan näitä sanoja automaatti M voi käydä tilassa q_k yhden tai useampia kertoja tai ei lainkaan. Voimme siis kirjoittaa kielen $L(i, j, k+1)$ muotoon $L(i, j, k) \cup L(i, k, k) L(k, k, k)^* L(k, j, k)$. Olkoon r_k^{ij} kielen $L(i, j, k)$ säännöllinen ilmaus. Tällöin kielen $L(i, j, k+1)$ säännöllinen ilmaus on $r_k^{ij} + r_k^{ik}(r_k^{kk})^* r_k^{kj}$.

Näin ollen kaavan $(*)$ ja edellisen induktion perusteella $L(M)$ on yhdiste säännöllisistä kielistä. Siis $L(M)$ on säännöllinen. $\square$

1.3 Äärelliset mallit

Aloitamme esittelemällä käsitteet symboli ja aakkosto. Symboleja on kolmenlaisia; vakio-, relaatio- ja funktiosymboleja. Jokaisella relaatio- ja funktiosymbolilla on paikkaluku $n \geq 1$. Aakkosto on äärellinen joukko edellä mainittuja symboleja. Käytämme aakkostolle yleisen tavan mukaan merkintää τ. Aakkosto on relationaalinen, jos se sisältää vain relaatiosymboleja.

Aakkoston τ mallia $\mathcal{A}$ kutsumme τ-malliksi. Jokaisella τ-mallilla $\mathcal{A}$ on epätyhjä määrittelyjoukko, jota merkitsemme $dom(\mathcal{A}) = A$. Malli $\mathcal{A}$ on äärellinen, jos A on äärellinen. Merkitsemme mallissa $\mathcal{A}$ vakiosymbolin $c \in \tau$ tulkintaa $c^{\mathcal{A}}$, relaatiosymbolin $R \in \tau$ tulkintaa $R^{\mathcal{A}}$ ja vastaavasti funktiosymbolin $f \in \tau$ tulkintaa $f^{\mathcal{A}}$. Jokainen tällainen tulkinta $c^{\mathcal{A}}$ on joukon A alkio ja edelleen tulkinta $R^{\mathcal{A}}$ on joukon A relaatio ja $f^{\mathcal{A}}$ joukon A funktio.

Malli on siis tarkasti määritelty struktuuri. Esimerkiksi reaalilukujen järjestetty kunta voidaan ajatella mallina $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$, missä aakkostona on $\tau = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$. $\mathbb{R}$ on mallin $\mathcal{R}$ määrittelyjoukko, $+$ ja $\cdot$ ovat kaksipaikkaisia funktiosymboleja, $\leq$ on kaksipaikkainen relaatiosymboli ja 0 ja 1 ovat vakiosymboleja. Nyt esimerkiksi funktiosymbolin $+$ tulkinta mallissa $\mathcal{R}$ on reaalilukujen tavanomainen yhteenlasku.

Esimerkki 1.2. Esimerkkinä relationaalisesta mallista otamme järjestyksen. Olkoon $\tau = \{<\}$, missä $<$ on kaksipaikkainen relaatio. Nyt τ-malli $\mathcal{A} = (A, <^{\mathcal{A}})$ on järjestys, jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee:

(a) $\neg a <^{\mathcal{A}} a$,

(b) joko $a <^{\mathcal{A}} b$ tai $b <^{\mathcal{A}} a$ tai $a = b$,

(c) jos $a <^{\mathcal{A}} b$ ja $b <^{\mathcal{A}} c$, niin $a <^{\mathcal{A}} c$.

Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ aakkoston τ malleja. Riippumatta mallien $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ määrittelyjoukoista ja yksittäisistä alkioista kyseiset mallit voivat olla keskenään rakenteellisesti samankaltaisia. Tätä mallien samankaltaisuutta kuvaa käsite isomorfismi.

Määritelmä 1.6. Olkoot τ aakkosto, $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ τ-malleja ja $h : A \to B$ kuvaus. Kuvaus h on isomorfismi, jos h on bijektio ja toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) Jokaiselle vakiosymbolille $c \in \tau$ pätee:
$$h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

(ii) Jokaiselle n-paikkaiselle relaatiosymbolille R ja jokaiselle $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ pätee:
$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

(iii) Jokaiselle n-paikkaiselle funktiosymbolille f ja jokaiselle $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ pätee:
$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

Määritelmä 1.7. τ-mallit $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat isomorfiset, jos on olemassa isomorfismi $A \to B$. Tällöin merkitsemme $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Kaksi mallia $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat siis isomorfiset, jos malli $\mathcal{B}$ voidaan muodostaa mallista $\mathcal{A}$ korvaamalla jokainen alkio $a \in A$ sellaisella alkiolla $h(a) \in B$, että mallin $\mathcal{A}$ struktuuri säilyy ennallaan.

Saman aakkoston τ relationaaliset järjestetyt mallit voidaan yhdistää uudeksi malliksi järjestämällä mallien alkiot peräkkäin. Kyseistä operaatiota kutsutaan järjestetyksi summaksi.

Määritelmä 1.8. Olkoon $<$ järjestysrelaatio ja τ sellainen relationaalinen aakkosto, että $< \in \tau$. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ τ-malleja. Jos $A \cap B \neq \emptyset$, niin etsimme mallille $\mathcal{B}$ sellaisen isomorfisen kopion $\mathcal{B}'$, että $A \cap B' = \emptyset$. Jos $A \cap B = \emptyset$, niin $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Määrittelemme mallien $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}'$ järjestetyn summan $\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B}'$ asettamalla:

(i) $dom(\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B}') = A \cup B'$,

(ii) $<^{\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B}'} = <^{\mathcal{A}} \cup <^{\mathcal{B}'} \cup \{(a, b) \mid a \in A), b \in B')\}$,

(iii) $R^{\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B}'} = R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}'}$, kun $R \in \tau \setminus \{<\}$.

1.4 Sanamallit

Sanamalli on äärellinen järjestetty malli, joka määrittelee tarkasti jonkin sanan struktuurin. Sanamallin määrittelyjoukko on järjestetty joukko alkioita, joihin kyseessä olevan sanan merkit liitetään vastaavassa järjestyksessä. Jos sana on tyhjä, niin myös määrittelyjoukko jäisi tyhjäksi. Koska mallin määrittelyjoukon tulee olla epätyhjä, niin sanamallien yhteydessä lisäämme jokaisen sanan alkuun aloitusmerkin $\Delta \notin \Sigma$. Tällöin myös tyhjälle sanalle λ on oma sanamallinsa. Sanojen katenaatiossa jälkimmäisen sanan alusta merkki Δ on jätettävä pois.

Olkoon Σ äärellinen joukko merkkejä ja $w = w_1 \cdots, w_n \in \Sigma^*$ sana. Olkoon lisäksi B järjestetty joukko, jossa on $n+1$ alkiota, ja olkoon $<$ joukon B järjestys. Määrittelemme relaation P_a erikseen jokaiselle $a \in \Sigma$:

$$P_a = \{b \in B \mid b \text{ on järjestyksen} < \text{ (j+1):s alkio ja } w_j = a\}.$$

Koska jokaisen sanan alussa on nyt aloitusmerkki $\Delta \notin \Sigma$, niin varaamme sanamallin määrittelyjoukon pienimmän alkion vastaamaan tätä merkkiä. Siis

$$P_\Delta = \{b \in B \mid b \text{ on järjestyksen} < \text{ ensimmäinen alkio}\}.$$

Merkitsemme $\tau(\Sigma)$ aakkostoa $\{<\} \cup \{P_\Delta\} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\}$. Nyt malli $\mathcal{B}_w = (B, <, P_\Delta, (P_a)_{a\in\Sigma})$ on sanan w sanamalli.

Esimerkki 1.3. Olkoon $\Sigma = \{a, i, l, m, n\}$ ja olkoon w sana *malli*. Nyt sanaa w vastaava sanamalli $\mathcal{B}_w = (\{0, 1, \cdots, 5\}, P_\Delta, P_a, P_i, P_l, P_m, P_n)$, missä $P_\Delta = \{0\}, P_a = \{2\}, P_i = \{5\}, P_l = \{3, 4\}, P_m = \{1\}$ ja $P_n = \emptyset$.

Mitkä tahansa sanan w kaksi sanamallia $\mathcal{B}_w$ ja $\mathcal{B}'_w$ ovat keskenään isomorfiset. Siksi voimmekin jatkossa olettaa, että sanan $w = w_1 \cdots w_n$ sanamallin $\mathcal{B}_w$ määrittelyjoukko B on selkeyden vuoksi aina $\{0, \ldots, n\}$. Sanan w kaikkien sanamallien luokkaa merkitsemme K_w. Toisin sanoen $K_w = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \cong \mathcal{B}_w\}$.

Sanamallien yhteydessä on otettava huomioon aloitusmerkki Δ ja sille varattu ensimmäinen alkio järjestettyä summaa määritettäessä.

Huomautus 1.2. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ sanamalleja ja olkoon lisäksi $A = \{0, \cdots, k\}$. Määrittelemme sellaisen isomorfismin $f : B \to B'$, että kuvaus f 'siirtää' joukon B alkiot joukon A alkioiden perään. Olkoon siis $f(x) = x + k$, kun $x \neq 0$, ja lisäksi $f(0) = 0$. Edelleen jokaisella $a \in \Sigma$ ja $b \in B$ pätee, että $b \in P_a^{\mathcal{B}}$, jos ja vain jos $f(b) \in P_a^{\mathcal{B}'}$. Nyt $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}'$. Mallien $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ määrittelyjoukot ovat nyt erilliset lukuunottamatta ensimmäistä alkiota 0. Sanamallien $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ järjestettyn summan $\mathcal{A} \lhd \mathcal{B}$ saamme seuraavasti:

(i) $dom(\mathcal{A} \lhd \mathcal{B}') = A \cup B'$,

(ii) $<^{\mathcal{A} \lhd \mathcal{B}'} = <^{\mathcal{A}} \cup <^{\mathcal{B}'} \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B'\}$,

(iii) $P_a^{\mathcal{A} \lhd \mathcal{B}'} = P_a^{\mathcal{A}} \cup P_a^{\mathcal{B}'}$, jokaisella $a \in \Sigma$ ja

(iv) $P_\Delta = \{0\}$.

Sanamallin $\mathcal{B}$ edustaman sanan aloitusmerkin 'paikka' jää pois samaan tapaan kuin sanojen katenaatiossa. Sanojen katenaatiolla ja samallien järjestetyllä summalla on muutakin yhteistä. Nimittäin sanojen u ja v katenaation uv sanamalli $\mathcal{B}_{uv}$ on isomorfinen sanamallien $\mathcal{B}_u$ ja $\mathcal{B}_v$ järjestetyn summan kanssa.

Lemma 1.2. *Olkoon Σ merkistö ja $\tau(\Sigma)$ sitä vastaava sanamallien aakkosto. Nyt kaikilla sanoilla $u, v \in \Sigma^*$ pätee*

$$\mathcal{B}_{uv} \cong \mathcal{B}_u \lhd \mathcal{B}_v.$$

Todistus. Todistamme, että on olemassa isomorfismi $h : \mathcal{B}_{uv} \cong \mathcal{B}_u \lhd \mathcal{B}_v$. Olkoot u ja v sellaisia sanoja, että sanan u pituus on n ja sanan v pituus on m. Nyt $B_u = \{0, 1, \ldots, n\}$ ja $B_v = \{0, 1, \ldots, m\}$. Tällöin $B_u \cap B_v \neq \emptyset$. Olkoon $f : B_v \to B'_v$ kuvaus kuten huomautuksessa 1.2. Näin ollen $dom(\mathcal{B}_u \lhd \mathcal{B}'_v) = \{0, 1, \cdots, n+m\}$. Toisaalta sanojen u ja v katenaatiosta muodostetun sanamallin $\mathcal{B}_{uv}$ määrittelyjoukko on myös $B_{uv} = \{0, 1, \ldots, n+m\}$.

Olkoon $h : B_u \cup B'_v \to B_{uv}$ identtinenkuvaus. Siis $h(x) = x$ kaikilla $x \in B_u \cup B'_v$. Koska kuvaus h on isomorfismi ja $\mathcal{B}_{uv} \cong \mathcal{B}_u \lhd \mathcal{B}'_v$ ja koska $\mathcal{B}_v \cong \mathcal{B}'_v$, niin $h : \mathcal{B}_{uv} \cong \mathcal{B}_u \lhd \mathcal{B}_v$. □

Olkoon $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ sana. Otamme käyttöön merkinnän $\mathcal{B}[s, t]$. Tällä tarkoitamme rajoittumaa sanamallin $\mathcal{B}_w$ määrittelyjoukossa B välille $[s, t] = \{u \in B \mid s \leq^{\mathcal{B}} u \leq^{\mathcal{B}} t\}$. Rajoitetussa sanamallissa $\mathcal{B}[s, t]$ määrittelyjoukon pienin alkio s on jälleen varattu aloitusmerkille Δ. Tällöin merkintä $w_{\mathcal{B}[s,t]}$ tarkoittaa sanan w osaa, jossa ovat merkit $w_{s+1} \cdots w_t$. Jos $t \leq^{\mathcal{B}} s$, niin $w_{\mathcal{B}[s,t]} = \lambda$.

2 Logiikoista

Tässä luvussa esittelemme ensimmäisen ja toisen kertaluvun logiikat sekä ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennuksena transitiivisen sulkeuman ja deterministisen transitiivisen sulkeuman logiikat. Toisen kertaluvun logiikan osalta keskitymme monadiseen toisen kertaluvun logiikkaan. Jokaiseen logiikkaan liittyy käsitteet syntaksi ja semantiikka. Syntaksi tarkoittaa sääntöjä, joiden mukaan kaavoja voidaan muodostaa. Semantiikka tarkoitaa sääntöjä, joilla kaavojen totuusarvot päätellään.

2.1 Ensimmäisen kertaluvun logiikka

2.1.1 Syntaksi

Ensimmäisen kertaluvun logiikalle käytämme lyhennettä FO, mikä on lyhenne englannin kielen sanoista *first-order logic*. Olkoon τ jälleen aakkosto. Ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavat ovat äärellisiä objekteja, jotka muodostuvat seuraavista merkeistä:

- muuttujat $v_1, v_2, v_3 \ldots,$
- konnektiivit $\neg, \vee,$
- olemassaolokvanttori $\exists$,
- yhtäsuuruusmerkki $=$,
- sulkeet $), ($ ja
- aakkoston τ symbolit.

Muuttujasymboleja ja aakkoston τ vakiosymboleja kutsumme termeiksi.

Ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavoja voidaan muodostaa seuraavien sääntöjen mukaan:

(F1) Jos t_0 ja t_1 ovat termejä, niin $t_0 = t_1$ on kaava.

(F2) Jos $R \in \tau$ on n-paikkainen relaatio ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $R(t_1, \ldots, t_n)$ on kaava.

(F3) Jos φ on kaava, niin $\neg\varphi$ on kaava.

(F4) Jos φ ja ψ ovat kaavoja, niin $(\varphi \vee \psi)$ on kaava.

(F5) Jos φ on kaava ja x on muuttuja, niin $\exists x\varphi$ on kaava.

Sääntöjen (F1) ja (F2) mukaan muodostettuja kaavoja kutsumme atomikaavoiksi. Olkoot φ ja ψ FO-kaavoja. Otamme käyttöön seuraavat yleiset lyhennysmerkinnät:

$$\begin{array}{lcll}
(\varphi \wedge \psi) & = & \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), & \\
(\varphi \to \psi) & = & (\neg\varphi \vee \psi), & \\
(\varphi \leftrightarrow \psi) & = & ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)) & \text{ja} \\
\forall x\varphi & = & \neg\exists x\neg\varphi. &
\end{array}$$

Sanomme, että muuttuja on sidottu, jos se on kvanttorin vaikutuspiirissä. Jos muuttuja ei ole sidottu, se on vapaa. Seuraavassa määrittelemme tarkemmin tämän käsitteen.

Määritelmä 2.1. Olkoon φ ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava. Kaavan φ vapaiden muuttujien joukkon $\mathrm{free}(\varphi)$ määrittelemme induktiivisesti kaavan φ rakenteen suhteen.

- Jos φ on atomikaava, niin $\mathrm{free}(\varphi)$ on kaavassa φ esiintyvien muuttujien joukko.

- $\mathrm{free}(\neg\varphi) = \mathrm{free}(\varphi)$

- $\mathrm{free}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{free}(\varphi) \cup \mathrm{free}(\psi)$

- $\mathrm{free}(\exists \mathrm{x}\varphi) = \mathrm{free}(\varphi) \setminus \{\mathrm{x}\}$.

Jos $\mathrm{free}(\varphi) = \emptyset$, niin φ on lause.

Esimerkki 2.1. Olkoon $\tau = \{<\}$. Esimerkissä 1.2 määrittelemämme järjestyksen ehdot voimme ilmaista FO-logiikan kaavoilla.

(a) $\forall x(\neg x < x)$

(b) $\forall x\forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$

(c) $\forall x\forall y\forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$.

Yllä olevissa kaavoissa ei ole vapaita muuttujia. Ne ovat siis lauseita.

Ensimmäisen kertaluvun logiikkaan liittyy tiiviisti kvanttoriasteen käsite. Kaavan kvantoriaste kertoo kaavan sisäkkäisten kvantifiointien määrästä.

Määritelmä 2.2. Olkoon φ logiikan FO kaava. Kaavan φ kvanttoriasteen, $qr(\varphi)$, määrittelemme rekursiivisesti:

- $qr(\varphi) = 0$, jos φ on atomikaava,
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$,
- $qr(\varphi \vee \psi) = max\{qr(\varphi), qr(\psi)\}$,
- $qr(\exists x\varphi) = qr(\varphi) + 1$.

2.1.2 Semantiikka

Olkoon τ aakkosto ja $\mathcal{A}$ τ-malli. Olkoon α funktio, jonka määrittelyjoukkona on muuttujien joukko ja arvojoukkona A. Siis $\alpha : \{v_n \mid n \geq 1\} \rightarrow A$. Funktio α liittää jokaiseen muuttujasymboliin v_i mallin $\mathcal{A}$ jonkin alkion. Funktiota α kutsumme tulkintafunktioksi tai tulkinnaksi mallissa $\mathcal{A}$.

Määritelmä 2.3. Olkoon τ aakkosto, $\mathcal{A}$ τ-malli ja α tulkintafunktio. Termin t arvo mallissa $\mathcal{A}$ tulkinnalla α on

- $v_i^{\mathcal{A},\alpha} = \alpha(v_i)$, jos t on muuttujasymboli ja
- $c^{\mathcal{A},\alpha} = c^{\mathcal{A}}$, jos t on vakio.

Merkitsemme α_x^a sellaista tulkintafunktiota, joka on kuten funktio α, mutta $\alpha_x^a(x) = a$. Määrittelemme relaation $\mathcal{A} \models \varphi[\alpha]$ seuraavasti:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{A} \models t_0 = t_1[\alpha] & \Leftrightarrow & t_0^{\mathcal{A},\alpha} = t_1^{\mathcal{A},\alpha} \\
\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[\alpha] & \Leftrightarrow & R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A},\alpha}, \ldots, t_n^{\mathcal{A},\alpha}) \\
\mathcal{A} \models \neg\varphi[\alpha] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \not\models \varphi[\alpha] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[\alpha] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[\alpha] \text{ tai } \mathcal{A} \models \psi[\alpha] \\
\mathcal{A} \models \exists x\varphi[\alpha] & \Leftrightarrow & \text{on olemassa sellainen } a \in A, \text{ että } \mathcal{A} \models \varphi[\alpha_x^a].
\end{array}$$

Atomikaava $t_0 = t_1$ tulkinnalla α on siis totta mallissa $\mathcal{A}$ täsmälleen silloin, kun termien t_0 ja t_1 tulkinnat mallissa $\mathcal{A}$ ovat yhtäsuuret. Vastaavasti relaatio R termein $t_0, \ldots, t_n$ tulkinnalla α on totta mallissa $\mathcal{A}$ täsmälleen silloin, kun relaation R tulkinta mallissa $\mathcal{A}$ termein $t_0^{\mathcal{A},\alpha}, \ldots, t_n^{\mathcal{A},\alpha}$ pätee. Kaavan φ negaatio tulkinnalla α on totta mallissa $\mathcal{A}$ täsmälleen silloin, kun kaava φ tulkinnalla α ei päde mallissa $\mathcal{A}$. Kaavojen φ ja ψ disjuktio $\varphi \vee \psi$ tulkinnalla α on totta mallissa $\mathcal{A}$ silloin ja vain silloin, jos jompi kumpi tai molemmat kaavoista pätevät mallissa $\mathcal{A}$ tulkinnalla α. Viimeisessä kohdassa $\mathcal{A} \models \exists x \varphi[\alpha]$ pätee täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $a \in A$, että tulkitsemalla muuttuja x alkioksi a $\mathcal{A} \models \varphi[\alpha_x^a]$ pätee.

Koska lauseissa ei ole vapaita muuttujia, niin lauseen φ totuusarvo mallissa $\mathcal{A}$ ei riipu tulkintafunktiosta α. Lause φ on siis totta mallissa $\mathcal{A}$ eli $\mathcal{A} \models \varphi$, jos $\mathcal{A} \models \varphi[\alpha]$ pätee millä tahansa tulkintafunktiolla α.

2.1.3 Määriteltävyys

Määritelmä 2.4. Olkoon K jokin äärellisten τ-mallien luokka. Luokka K on määriteltävissä logiikassa $\mathcal{L}$, jos on olemassa sellainen logiikan $\mathcal{L}$ lause φ, että kaikilla τ-malleilla $\mathcal{A}$ pätee

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \in K.$$

Kaikki äärelliset mallit ovat isomorfiaa vaille määriteltävissä ensimmäisen kertaluokan logiikassa. Sanat 'isomorfiaa vaille' tarkoittavat sitä, että jos FO-lause φ on totta mallissa $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, niin lause φ on totta myös mallissa $\mathcal{B}$. Edellisen väittämän todistaa seuraava lemma.

Lemma 2.1. *Jokaiselle äärelliselle mallille $\mathcal{A}$ löytyy sellainen FO-logiikan lause φ, että kaikille malleille $\mathcal{B}$ pätee*

$$\mathcal{B} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Todistus. [1, s. 13] Olkoon $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Merkitsemme $\bar{a} = a_1 \cdots a_n$. Määrittelemme joukon $\theta_n := \{\psi \mid \psi$ on muotoa $R(x_1, \ldots, x_k), x = y$ tai $c = x$, muuttujilla $v_1 \ldots v_n\}$. Nyt haluamamme FO-lause φ on

$$\varphi := \exists v_1 \cdots \exists v_n (\bigwedge \{\psi \mid \psi \in \theta_n, \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\} \wedge \bigwedge \{\neg\psi \mid \psi \in \theta_n, \mathcal{A} \models \neg\psi[\bar{a}]\}$$

$$\wedge \forall v_{n+1}(v_{n+1} = v_1 \vee \cdots \vee v_{n+1} = v_n)).$$

Lauseeseen φ on siis koottu konjunktio kaikista niistä atomikaavoista ψ, joilla $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ pätee, ja toisaalta niiden atomikaavojen ψ negaatiot, joilla $\mathcal{A} \not\models \psi[\bar{a}]$ pätee. Lauseen lopussa varmistutaan siitä, että muuttujia v_i on yhtä paljon kuin mallissa $\mathcal{A}$ on alkioita. □

Olkoon τ aakkosto ja φ FO-lause. Ne äärelliset mallit, joissa lause φ pätee, muodostavat luokan, jota merkitsemme $Mod(\varphi)$. Sanomme, että lause φ määrittelee luokan $Mod(\varphi)$. Määriteltävyys ensimmäisen kertaluvun logiikassa voidaan näin ollen määritellä myös seuraavasti.

Määritelmä 2.5. Olkoon K jokin äärellisten mallien luokka. Luokka K on määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun logiikassa, jos on olemassa sellainen FO-lause, että $K = Mod(\varphi)$.

Esimerkki 2.2. Olkoon $\tau = \{<\}$ aakkosto ja olkoon ψ ensimmäisen kertaluvun logiikan lause:

$$\psi = \forall x(\neg x < x) \wedge \forall x \forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$$

$$\wedge \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z).$$

Nyt lause ψ määrittää luokan $Mod(\psi)$, johon kuuluvat kaikki äärelliset järjestetyt τ-mallit.

Sanan w kaikkien sanamallien luokka on siis $K_w = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \cong \mathcal{B}_w\}$, missä $\mathcal{B}_w$ on sanan w sanamalli. Nyt jokaista kieltä $L \subseteq \Sigma^*$ vastaa luokka $K_L = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \cong \mathcal{B}_w, \text{ kun } w \in L\}$. Saman voi ilmaista myös kääntäen. Olkoon K sellainen äärellisten mallien luokka, joka koostuu sanamallien kanssa isomorfisista malleista. Tällöin luokkaa K vastaa kieli

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{B}_w \in K\}.$$

Esimerkkinä kielten määriteltävyydestä ensimmäisen kertaluvun logiikassa tarkastelemme seuraavassa lemmassa mielivaltaista äärellistä kieltä L.

Lemma 2.2. *Jokainen äärellinen kieli $L \subseteq \Sigma^*$ on määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun logiikassa.*

Todistus. Koska kieli L on äärellinen, niin jokaiselle sanalle $w \in L$ voidaan määrittää sanamalli $\mathcal{B}_w$. Lemman 2.1 perusteella jokaiselle sanamallille löytyy sellainen FO-logiikan lause φ_w, että kaikille malleille $\mathcal{A}$ pätee $\mathcal{A} \models \varphi_w \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}_w$. Olkoon $\psi = \bigvee_{w \in L} \varphi_w$. Nyt luokkaan $Mod(\psi)$ kuuluvat kaikki ne sanamallit, jotka ovat isomorfisia jonkin sanaa $w \in L$ vastaavan sanamallin kanssa. Siis $Mod(\psi) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \cong \mathcal{B}_w, \text{ jollakin } w \in L\}$. Näin ollen $K_L = Mod(\psi)$ ja äärellinen kieli L on määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun logiikassa. □

2.2 Transitiivisen sulkeuman logiikat

Transitiivisen sulkeuman logiikka ja deterministinen transitiivisen sulkeuman logiikka ovat ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennuksia. Käytämmekin transitiivisen sulkeuman logiikalle lyhennettä FO(TC) (engl. transitive closure) ja deterministisen transitiivisen sulkeuman logiikalle lyhennettä FO(DTC). Määrittelemme ensin, mitä tarkoitamme transitiivisella sulkeumalla ja deterministisellä transitiivisella sulkeumalla.

Määritelmä 2.6. Olkoon R kaksipaikkainen relaatio joukossa M. Relaatioon R transitiivinen sulkeuma $TC(R)$ määritellään seuraavasti:

$$TC(R) := \{(a,b) \in M^2 \mid \text{ on olemassa } n \geq 0 \text{ ja sellaiset } e_0, \ldots, e_n \in M,$$
$$\text{että } a = e_0, b = e_n \text{ ja kaikilla } i < n \quad (e_i, e_{i+1}) \in R\}.$$

Relaation R deterministinen transitiivinen sulkeuma $DTC(R)$ määritellään seuraavasti:

$$DTC(R) := \{(a,b) \in M^2 \mid \text{ on olemassa } n \geq 0 \text{ ja sellaiset } e_0, \ldots, e_n \in M,$$
$$\text{että } a = e_0, b = e_n \text{ ja kaikilla } i < n \quad (e_i, e_{i+1}) \in R,$$
$$\text{missä } e_{i+1} \text{ on ainoa alkio } c \in M, \text{ jolla} (e_i, c) \in R\}.$$

Transitiivisen sulkeuman logiikassa pätevät samat kaavanmuodostussäännöt (F1) - (F5) kuin ensimmäisen kertaluvun logiikassa. Lisäksi tarvitsemme säännön (T6), missä $x \neq y$ sekä s ja t ovat termejä.

(T6) Jos φ on kaava, niin $[TC_{x,y}\varphi(x,y)](s,t)$ on kaava.

Deterministisen transitiivisen sulkeuman logiikassa on vastaava kaavanmuodostussääntö (D6), missä x, y, s ja t ovat kuten edellä.

(D6) Jos φ on kaava, niin $[DTC_{x,y}\varphi(x, y)](s, t)$ on kaava.

Kaavan $[TC_{x,y}\varphi(x, y)](s, t)$ merkitys on, että pari (s, t) kuuluu joukon $\{(x, y) \mid \varphi(x, y)\}$ transitiiviseen sulkeumaan, ja kaavan $[DTC_{x,y}\varphi(x, y)](s, t)$ merkitys on vastaavasti, että pari (s, t) kuuluu joukon $\{(x, y) \mid \varphi(x, y)\}$ deterministiseen transitiiviseen sulkeumaan. Toisin sanoen, jos $\mathcal{A} \models [TC_{x,y}\varphi(x, y)](s, t)[a, b]$, niin on olemassa sellaiset $e_0, \ldots, e_n$, että $a = e_0$, $b = e_n$ ja kaikilla $i < n$ pätee $\mathcal{A} \models \varphi(x, y)[e_i, e_{i+1}]$. Deterministisen transitiivisen sulkeuman logiikassa lisäksi e_{i+1} on ainoa sellainen $c \in M$, että $\mathcal{A} \models \varphi(x, y)[e_i, c]$.

Huomautus 2.1. [1, s. 124] FO(DTC) on logiikan FO(TC) alilogiikka, sillä kaikki logiikan FO(DTC) kaavat voidaan ilmaista myös logiikassa FO(TC). Huomaamme, että $[DTC_{x,y}\varphi(x, y)](u, v)$ on yhtä pitävä kaavan $[TC_{x,y}\varphi(x, y) \wedge \forall z(\varphi(x, z) \to z = y))](u, v)$ kanssa.

Esimerkki 2.3. Olkoon $X = \{0, \ldots, n\}$ juokko, missä $n \in \mathbb{N}$. Olkoon S seuraajarelaatio joukossa X. Siis

$$S = \{(k, k + 1) \in X \times X \mid k \in \{0, \ldots, n - 1\}\}.$$

Relaatio S toteuttaa esimerkin 1.2 ehdot (a) ja (b), sillä mikään alkio ei ole itsensä seuraaja ja jokainen alkio, jolla on seuraaja, on seuraajaansa pienempi. Olkoon $n \geq 2$. Nyt $(0, 1) \in S$ ja $(1, 2) \in S$, mutta $(0, 2) \notin S$. Näin ollen seuraajarelaatio ei täytä ehtoa (c). Toisin sanoen relaatio S ei ole transitiivinen.

Seuraajarelaation S transitiivinen sulkeuma $TC(S)$ täyttää kaikki ehdot (a) - (c). Näin ollen $TC(S) = \{(x, y) \in X \times X \mid x < y\}$. Siis esimerkissä 1.2 esitetyn järjestyksen ehdot voidaan ilmaista transitiivisen sulkeuman logiikan kaavalla

$$[TC_{u,v}S(u, v)](x, y).$$

Vaativuusluokista

Luvussa 1.2 esittelimme äärellisen automaatin, joka tunnistaa kieliä. Vastaavanlaisia kieliä tunnistavia tila-automaatteja on muitakin. Yleisimmin vaativuusteorian yhteydessä käytetty ja tunnetuin lienee Turingin kone, joka käsittelee syötteen ja tulosteen merkkijonoina syöte- ja tulostenauhoilla. Lisäksi koneella on käytössä yksi tai useampia työnauhoja, joissa varsinainen laskenta tapahtuu. Laskennan tilavaatimus on niiden työnauhan ruutujen määrä, joihin kone on laskennan aikana tehnyt merkintöjä. Turingin koneen suorittamat askeleet ovat keskenään hyvin saman tyyppisiä. Siksi voimmekin olettaa jokaisen askeleen vievän saman verran aikaa, joten laskennan aikavaatimus on koneen suorittamien askelten määrä laskennan aikana. Turingin kone onkin hyvä työkalu ongelmien aika- ja tilavaatumusten teoreettiseen käsittelyyn. Automaatein kuvatut laskennan mallit edustavat matalan tason abstraktiota.

Äärellisten mallien teoria tuo mukanaan korkean tason abstraktion. Mallit voidaan ajatella syötteenä logiikan lauseille ja tulokseksi saadaan tieto lauseen totuusarvosta kyseisessä mallissa. Koodaamalla malli merkkijonoksi, joka voidaan antaa syötteenä esimerkiksi Turingin koneelle, luodaan vastaavuuksia matalan ja korkean abstraktiotason välille.

Kielen tunnistamiseen johtavan laskennan aika- ja tilavaatimukset muodostavat vaativuusluokkia. Olkoon M Turingin kone ja $L \subseteq \Sigma^*$ jokin kieli. Olkoon lisäksi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktio, joka kuvaa luetun sanan pituuden suhdetta laskentaan vaatimaan aikaan tai tilaan. Merkintä $|w|$ tarkoittaa sanan w pituutta. Jos kone M käyttää kielen L kunkin sanan w laskentaan korkeintaan $f(|w|)$ ruutua, niin kone M on f tilarajoittunut. Vastaavasti sanomme, että M on f aikarajoittunut, jos kone M käyttää kielen L kunkin sanan w laskentaan korkeintaan $f(|w|)$ askelta.

Esimerkkinä aikavaativuusluokasta otamme luokan PTIME eli polynomisessa ajassa laskettavien kielten luokan. Olkoon p polynomi, jonka kertoimet ovat positiivisia kokonaislukuja. Kieli L kuuluu aikavaativuusluokkaan PTIME, jos kielen L tunnistaa sellainen kone M, joka on p aikarajoittunut. Vastaavasti jos kone M on p tilarajoittunut ja M tunnistaa kielen L, niin kieli L kuuluu tilavaativuusluokkaan PSPACE eli polynomisessa tilassa laskettavien kielten luokaan. Jos kone M on epädeterministinen ja p aika- tai tilarajoittunut, niin koneen M tunnistama kieli L kuuluu luokkaan NPTIME tai NPSPACE samaan tapaan kuin edellä. Mainittakoon vielä tilavaativuusluokat LOGSPACE, logaritmisessa tilassa laskettavien kielten luokka, ja NLOGSPACE, epädeterministinen logaritmisessa tilassa laskettavien kielten luokka.

Voidaan todistaa, että äärellisten mallien luokka K, jonka mallit sisältävät järjestyksen, on määriteltävissä logiikassa FO(DTC) täsmälleen silloin, kun K kuuluu vaativuus luokkaan LOGSPACE. Vastaavasti K on määriteltävissä logiikassa FO(TC)täsmälleen silloin, kun K kuuluu vaativuusluokkaan NLOGSPACE. Huomautuksessa 2.1 totesimme, että FO(DTC) on logiikan FO(TC) alilogiikka. Vastaavasti vaativuusluokka LOGSPACE on luokan NLOGSPACE osajoukko, sillä kuten äärellisten automaattien tapauksessa (huomautus 1.1) myös Turingin koneille pätee, että deterministinen kone on epädeterministisen koneen erikoistapaus.

2.3 Monadinen toisen kertaluvun logiikka

Toisen kertaluvun logiikalle käytämme lyhennettä SO, mikä tulee englannin kielen sanoista *second order logic*. Ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavanmuodostussääntöjen (F1) - (F5) lisäksi otamme käyttöön uuden kaavanmuodostussäännön:

(S6) Jos φ on kaava ja R on relaatiosymboli, niin $\exists R\varphi$ on kaava.

Toisen kertaluvun logiikka on siis syntaksiltaan kuten ensimmäisen kertaluvun logiikka, mutta lisäksi se sallii relaatiosymbolien kvantifioinnin. Olkoon $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_k)$ toisen kertaluvun logiikan kaava, missä $x_1, \ldots, x_n$ ovat vapaita muuttujia ja $Y_1, \ldots, Y_k$ ovat vapaita relaatiomuuttujia. Olkoon $\mathcal{A}$ τ-malli ja $a_1, \ldots, a_n \in A$. Vielä lisäksi oletamme, että mallin $\mathcal{A}$ määrittelyjoukossa on sellaiset relaatiot $R_1, \ldots, R_k$, että niiden paikkaluvut vastaavat relaatiomuuttujien $Y_1, \ldots, Y_k$ paikkalukuja. Merkintä $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, R_1, \ldots, R_k]$ tarkoittaa, että φ on totta mallissa $\mathcal{A}$, kun kaavan φ vapaat muuttujat tulkitaan mallin $\mathcal{A}$ alkioksi $a_1, \ldots, a_n$ ja relaatiomuuttujat mallin $\mathcal{A}$ relaatioiksi $R_1, \ldots, R_k$.

Tässä tutkielmassa keskitymme monadiseen toisen kertaluvun logiikaan, jolle käytämme lyhennettä MSO. Monadisen toisen kertaluvun logiikan lauseissa kvantifioidut relaatiosymbolit ovat aina yksipaikkaisia. Ensimmäisen kertaluvun logiikka on selvästi toisen kertaluvun logiikan ja näin ollen myös monadisen toisen kertaluvun logiikan alilogiikka, sillä kaikki FO-kaavat ovat myös SO- ja MSO-kaavoja. Transitiivisen sulkeuman logiikat ovat ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennoksia siinä, missä toisen kertaluvun logiikkakin. Voidaan kuitenkin osoittaa, että transitiivisen sulkeuman logiikan kaavat voidaan ilmaista monadisessa toisen kertaluvun logiikassa.

Lemma 2.3. *Logiikat FO(TC) ja FO(DTC) ovat logiikan MSO alilogiikoita.*

Todistus. [2, s. 11] Koska FO(DTC) on logiikan FO(TC) alilogiikka, niin riittää todistaa, että FO(TC) on logiikan MSO alilogiikka. Logiikan FO(TC) määritelmän mukaan $\mathcal{A} \models [TC_{u,v}\varphi(u,v)](x,y)[a,b]$ pätee, jos on olemassa sellainen joukko alkioita $e_0, \ldots, e_n$, että $a = e_0$, $b = e_n$ ja kaikilla $i < n$ pätee $\mathcal{A} \models \varphi(x,y)[e_i, e_{i+1}]$. Toisin sanoen on olemassa joukko U,

(a) jonka pienin alkion on a ja suurin on b ja

(b) jos alkio c kuuluu joukkoon U ja $\mathcal{A} \models \varphi(x,y)[c,d]$, niin myös alkio d kuuluu joukkoon U.

Esittelemme ensin kaavan ψ, joka pätee sellaisilla joukoilla U, joilla on ominaisuus (b). Olkoon

$$\psi(X) = \forall x \forall y (X(x) \land E(x,y) \to X(y)),$$

missä $E(c,d) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi(x,y)[c,d]$.

Kohta (a) edellyttää, että alkiot a ja b kuuluvat joukkoon U ja että joukon muut alkiot asettuvat näiden väliin. Näin ollen haluamamme MSO-lause on

$$\exists U(\psi(U) \land U(a) \land U(b) \land \forall V(V \subseteq U \land \psi(V) \to V = U)).$$

□

3 Pelikarakterisoinneista

Tässä luvussa esittelemme Ehrenfeucht-Fraïssé-pelin ensimmäisen ja toisen kertaluvun logiikoille. Tämä peli on käyttökelpoinen työkalu tutkittaessa sitä, onko jokin äärellisten mallien luokka määriteltävissä logiikassa FO tai

MSO. Pelikarakterisointi helpottaa myös tulosten todistamista; voimme keskittyä pelin yksittäiseen kierrokseen ja osoittaa halutun tuloksen induktiolla kierrosten lukumäärän suhteen.

Määrittelemme aluksi joitakin käsitteitä ja esittelemme merkintöjä. Olkoon τ aakkosto, jossa on vain relaatiosymboleja ja vakioita. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ äärellisiä τ-malleja. Mallit $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat ekvivalentit ensimmäisen kertaluvun logiikan suhteen, jos samat FO-lauseet ovat tosia molemmissa. Tällöin kaikille FO-lauseille φ pätee $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ ja merkitsemme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.Vastaavasti sanomme, että mallit $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat m-ekvivalentit ensimmäisen kertaluvun logiikan suhteen, jos kaikilla FO-lauseilla φ, joilla $qr(\varphi) \leq m$, pätee $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$. Tällöin merkitsemme $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.

Samaan tapaan merkintä $\mathcal{A} \equiv_m^{MSO} \mathcal{B}$ tarkoittaa, että malleissa $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ pätevät samat MSO-logiikan lauseet φ, joissa $qr(\varphi) \leq m$.

Määritelmä 3.1. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ malleja. Olkoon p sellainen kuvaus, että $dom(p) \subseteq A$ ja $ran(p) \subseteq B$. Nyt kuvaus p on osittaisisomorfismi, jos

(a) p on injektio,

(b) $c^{\mathcal{A}} \in dom(p)$ ja $p(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ kaikilla $c \in \tau$ ja

(c) $R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_n))$ kaikilla n-paikkaisilla relaatioilla R ja kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in dom(p)$.

Kaikkien osittaisisomorfismien joukolle mallilta $\mathcal{A}$ mallille $\mathcal{B}$ käytämme merkintää $Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Olkoon $\varphi(v_1, \ldots, v_s)$ ensimmäisen kertaluvun logiikan atomikaava. Jos $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{v})[\bar{a}]$ täsmälleen silloin, kun $\mathcal{B} \models \varphi(\bar{v})[\bar{b}]$, niin tuntuisi luonnolliselta, että mallien välille löytyisi osittaisisomorfismi. Näin itse asiassa onkin ja tuloksen voi laajentaa koskemaan kaikkia kvantifioimattomia FO-kaavoja $\varphi(v_1, \ldots, v_s)$. Tämän todistamme seuraavassa lemmassa. Jatkossa käytämme merkintää $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ kuvaamaan mallin $\mathcal{A}$ relaatiot toteuttavien alkioiden ja vakioiden kuvautumista mallin $\mathcal{B}$ vastaaville alkioille.

Lemma 3.1. *Olkoon $\bar{a} = a_1, \ldots, a_s \in A$ ja $\bar{b} = b_1, \ldots, b_s \in B$. Seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:*

(i) Lauseet

$$p(a_i) = b_i, \qquad \textit{kun} \quad i = 1, \ldots, s,$$

$$\textit{ja} \quad p(c^A) = c^B, \qquad \textit{kun} \quad c \in \tau$$

määrittävät sellaisen kuvauksen p, että $p \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(ii) Kaikille kvantifioimattomille kaavoille $\varphi(v_1, \ldots, v_s)$ pätee $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$, jos ja vain jos $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

(iii) Kaikille atomikaavoille $\varphi(v_1, \ldots, v_s)$ pätee $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$, jos ja vain jos $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

Todistus. [1, s.15 idea] Todistamme ensin, että kohdat (i) ja (iii) ovat keskenään ekvivalentit. Olkoon p sellainen osittaisisomorfinen kuvaus, että $p(a_i) = b_i$, kun $i = 1, \ldots, s$, ja $p(c^A) = c^B$, kun $c \in \tau$. Olkoon $\varphi(v_i, \ldots, v_s)$ sellainen atomikaava, että $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Nyt kaava φ voi olla muotoa $t_0 = t_1$ tai muotoa $R(t_1, \ldots, t_n)$. Jos $\mathcal{A} \models (v_j = v_k)[\bar{a}]$, niin silloin ja vain silloin $a_j = a_k$. Koska $p(a_i) = b_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, s$ ja koska p on injektio, niin $p(a_j) = p(a_k)$ täsmälleen silloin, kun $b_j = b_k$. Edelleen $b_j = b_k$, jos ja vain jos $\mathcal{B} \models (v_j = v_k)[\bar{b}]$. Siis $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$. Vastaava tulos pätee, jos jompikumpi termeistä t_0 tai t_1 on vakio, sillä jokaiselle vakiolle $c \in \tau$ pätee $p(c^A) = c^B$. Jos ja vain jos $\mathcal{A} \models R(c, v_j, v_k)[\bar{a}]$, niin silloin relaatio $R^A(c^A, a_j, a_k)$ on voimassa. Koska $p(c^A) = c^B$ pätee jokaisella vakiolla $c \in \tau$ ja kaikilla $i = 1, \ldots, s$ pätee $p(a_i) = b_i$ ja koska p on injektio, niin $R^B(p(c^A), p(a_j), p(a_k))$ pätee täsmälleen silloin, kun $R^B(c^B, b_j, b_k)$ pätee. Edelleen $R^B(c^B, b_j, b_k)$, jos ja vain jos $\mathcal{B} \models R(c, v_j, v_k)[\bar{b}]$. Siis $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

Oletamme sitten, että kohta (iii) pitää paikkansa. Olkoon siis $\varphi(v_1, \ldots, v_s)$ atomikaava, jolle pätee

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \quad \text{joss} \quad \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}].$$

Kaava φ on siis muotoa $t_0 = t_1$ tai muotoa $R(t_1, \ldots t_n)$. Molemmissa tapauksissa, jotta kohdan (iii) ehto täyttyy, on oltava olemassa sellainen kuvaus p, että kaikille vakioille $c \in \tau$ pätee $p(c^A) = c^B$ ja kaikilla $i = 1, \ldots, s$ pätee $p(a_i) = b_i$. Kuvaus p on injektio, sillä kaikilla j ja $k \in \{1, \ldots, s\}$ pätee, että jos $p(a_j) = p(a_k)$, niin $a_j = a_k$. Näin ollen määritelmän 3.1 kaikki kohdat pätevät. Siis kuvaus p on osittaisisomorfismi mallilta $\mathcal{A}$ mallille $\mathcal{B}$.

Kohdat (ii) ja (iii) ovat myös keskenään ekvivalentit. Kvantifioimattomat ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavat saadaan atomikaavoista kaavanmuodostussääntöjä (F3) ja (F4) käyttämällä. On siis selvää, että kohdasta (ii) seuraa kohta (iii). Todistamme, että väitteestä (iii) seuraa kohta (ii). Olkoot ϕ ja φ sellaisia atomikaavoja, joille kohta (iii) pätee. Oletamme, että $\mathcal{A} \models \neg\psi[\bar{a}]$. Nyt siis $\mathcal{A} \not\models \psi[\bar{a}]$. Koska kaavalle ψ pätee kohta (iii), niin $\mathcal{B} \not\models \psi[\bar{b}]$. Edelleen siis $\mathcal{B} \models \neg\psi[\bar{b}]$. Ekvivalenssin käänteinen suunta todistuu vastaavasti. Oletamme sitten, että $\mathcal{A} \models (\psi \vee \varphi)[\bar{a}]$. Nyt pätee joko $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ tai $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ tai molemmat. Koska kaavoille ϕ ja φ on voimassa kohdan (iii) ehto, niin ainakin toinen joko $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$ tai $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$ pätee. Näin ollen $\mathcal{B} \models (\psi \vee \varphi)[\bar{b}]$. Jälleen ekvivalenssin käänteinen suunta todistuu vastaavasti. Siis kohtien (ii) ja (iii) ovat yhtäpitäviä. □

3.1 Ehrenfeucht-Fraïssé-peli ensimmäisen kertaluvun logiikalle

Ehrenfeucht-Fraïssé pelille käytämme lyhennettä EF-peli ja yksittäistä EF-peliä ensimmäisen kertaluvun logiikalle merkitsemme $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, missä $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat malleja ja $\bar{a} \in A^s$ ja $\bar{b} \in B^s$ ovat näiden mallien alkiojonoja.

Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ τ-malleja, $\bar{a} \in A^s$ ja $\bar{b} \in B^s$ sekä $m \in \mathbb{N}$. EF-pelissä on kaksi pelaajaa; spoiler (S) sekä duplicator (D). Nimensä mukaisesti D yrittää 'kopioida' malleja eli näyttää, että mallit ovat samankaltaisia. Pelaaja S taas yrittää tehdä tämän mahdollisimman vaikeaksi. Pelaajilla on m vuoroa, jotka he käyttävät vuorotellen. Pelaaja S aloittaa pelin.

Kullakin kierroksella i S valitsee alkion e_i mallista $\mathcal{A}$ tai alkion f_i mallista $\mathcal{B}$. Jos S valitsee alkion e_i, niin D vastaa pelaajan S valintaan etsimällä mallista $\mathcal{B}$ sellaisen alkion f_i, että kuvaus $\bar{a}e_1 \cdots e_i \mapsto \bar{b}f_1 \cdots f_i$ on osittaisisomorfismi mallista $\mathcal{A}$ mallille $\mathcal{B}$. Jos S valitsee alkion f_i, niin D etsii vastaavasti alkion e_i mallista $\mathcal{A}$.

Jos ja vain jos $\bar{a}, e_1, \ldots, e_m \mapsto \bar{b}, f_1, \ldots, f_m \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, niin D voittaa pelin. Lemmasta 3.1 seuraa, että jos $m = 0$, niin pelaajan D voittoon vaaditaan vain, että $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Jos D ei voita, niin S voittaa. Toisin sanoen S voittaa, jos jollakin $i \leq n$ kierroksella $\bar{a}e_1 \cdots e_i \mapsto \bar{b}f_1 \cdots f_i$ ei ole osittaisisomorfismi. Pelaajalla joko D tai S on voittostrategia pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, jos tämä voittaa kyseisen pelin riippumatta vastustajan valinnoista. Toisin sanoen voittostrategian omaavalla pelaajalla on tietty pelijärjestys, jota käyttämällä hän voittaa ko. pelin aina.

Seuraavaan lemmaan on kerätty joitakin EF-pelin ominaisuuksia, jotka ovat suoria seurauksia pelin määrittelystä.

Lemma 3.2. *Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ malleja, $\bar{a} \in A^s, \bar{b} \in B^s$ ja $m \geq 0$.*

(a) Pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, jos ja vain jos $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ on osittaisisomorfismi.

(b) Kun $m > 0$, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) Pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

(ii) Jokaiselle $a \in A$ on olemassa sellainen $b \in B$ ja jokaiselle $b \in B$ on olemassa sellainen $a \in A$, että dublicatorilla on voittostrategia pelissä $G_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$.

(c) Jos pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ ja jos $n < m$, niin pelaajalla D on voittostrategia myös pelissä $G_n(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Olkoon malli $\mathcal{A}$ annettu ja olkoot $\bar{a} = a_1 \cdots a_s \in A$ ja $m \geq 0$. Määrittelemme seuraavaksi kaavan $\varphi_{\bar{a}}^m(v_1, \cdots, v_s)$, joka kuvaa alkioiden $\bar{a}$ peliteoreettisia ominaisuuksia missä tahansa EF-pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Määritelmä 3.2. Olkoon $\bar{v} = v_1, \ldots, v_s$. Määrittelemme kaavan $\varphi_{\bar{a}}^m$ rekursiivisesti. Kun $m = 0$, niin

$$\varphi_{\bar{a}}^0(\bar{v}) := \bigwedge\{\varphi(\bar{v}) \mid \varphi \text{ on atomikaava tai sellaisen negaatio ja } \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

Kun $m > 0$, niin

$$\varphi_{\bar{a}}^m(\bar{v}) := \bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(\bar{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(\bar{v}, v_{s+1}).$$

Kun $m = 0$, niin kaava $\varphi_{\bar{a}}^m$ on konjunktio sellaisista atomikaavoista tai niiden negaatioista, jotka pätevät mallissa $\mathcal{A}$, kun muuttujat $v_1, \ldots, v_s$ tulkitaan alkioiksi $a_1, \ldots, a_s$. Kun $m > 0$, niin kaava $\varphi_{\bar{a}}^m$ sanoo, että kaikilla $a \in A$ on olemassa sellainen v_{s+1}, jolla kaava $\varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(\bar{v}, v_{s+1})$ pätee, ja toisaalta kaikille v_{s+1} löytyy sellainen $a \in A$, että kaava $\varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(\bar{v}, v_{s+1})$ pätee.

Nyt kaava $\varphi_{\bar{a}}^m$ on itseasiassa määritelty siten, että kaikilla malleilla $\mathcal{B}$ ja $\bar{b} \in B$ pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ täsmälleen silloin, kun $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}}^m[\bar{b}]$. Tämän todistamme Lemmassa 3.5. Ennen sitä esittelemme ja todistamme EF-peliin liittyviä tuloksia.

Lemma 3.3. *Kaikilla $s, m \geq 0$ arvoilla joukko $B_m = \{\varphi_{\bar{a}}^m \mid \mathcal{A}$ on äärellinen malli ja $\bar{a} \in A^s\}$ on äärellinen.*

Todistus. Olkoon $C = \{\varphi(v_1, \ldots, v_s) \mid \varphi \text{ on atomikaava tai sellaisen negaatio}\}$. Jos muuttujien määrää ei oteta lukuun, niin ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavat muodostuvat äärellisestä määrästä merkkejä, sillä aakkosto τ on äärellinen. Näin ollen joukko C on äärellinen, sillä muuttujia $v_1, \ldots, v_s$ on äärellinen määrä.

Todistamme induktiolla kvanttoriasteen m suhteen, että kullakin s:n arvolla joukon B_m kaavat voidaan valita 2^m tavalla.

Oletamme ensin, että $m = 0$. Jokainen joukon C kaava on joko tosi tai epätosi mallissa $\mathcal{A}$. Jos kaava $\varphi \in C$ on epätosi mallissa $\mathcal{A}$, niin kaavaan $\varphi_{\bar{a}}^0$ otetaan konjunktio ko. kaavan negaatiosta ja päin vastoin. Näin ollen jokaisella s:n arvolla kaavoja $\varphi_{\bar{a}}^0$ on täsmälleen yksi. Siis väite pätee joukolle B_0, sillä $2^0 = 1$.

Oletamme sitten, että joukon B_m alkiot voidaan valita 2^m tavalla. Määritelmän 3.2 mukaan

$$\varphi_{\bar{a}}^{m+1}(\bar{v}) := \bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \varphi_{\bar{a}a}^m(\bar{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \varphi_{\bar{a}a}^m(\bar{v}, v_{s+1}).$$

Nyt alkio $a \in A$ kaavassa $\varphi_{\bar{a}a}^m(\bar{v}, v_{s+1})$ voidaan valita kahdella tavalla. Joko niin, että ensin kiinnitetään alkio a ja etsitään sopiva muuttujan v_{s+1} arvo, tai päinvastoin. Näin ollen kaavat $\varphi_{\bar{a}}^{m+1}$ voidaan valita $2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$ tavalla kullakin s:n arvolla. Induktioperiaatteen mukaan kullakin s:n arvolla joukon B_m alkiot voidaan valita 2^m tavalla kaikilla $m \geq 0$. Näin ollen joukko B_m on äärellinen kaikilla $s, m \geq 0$. $\square$

Lemma 3.4. *Seuraavat tulokset ovat yleisesti voimassa.*

(a) $qr(\varphi_{\bar{a}}^m) = m$

(b) $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}}^m[\bar{a}]$

(c) Kaikille malleille $\mathcal{B}$ *ja* $\bar{b} \in B$ *on voimassa, että* $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}}^0[\bar{b}]$ *silloin ja vain silloin, kun* $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Todistus. [1, s. 18(idea)]

(a) Olkoon ensin $m = 0$. Nyt määritelmän 3.2 mukaan $\varphi_{\bar{a}}^0$ muodostuu atomikaavojen ja niiden negaatioiden konjunktioista, joten selvästi $qr(\varphi_{\bar{a}}^0) = 0$. Olkoon $m > 0$ ja oletamme, että $qr(\varphi_{\bar{a}}^{m-1}) = m - 1$. Nyt

$$qr(\varphi_{\bar{a}}^m) = max\{qr(\bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(\bar{v}, v_{s+1})), qr(\forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(\bar{v}, v_{s+1}))\}$$
$$= max\{(m-1)+1, (m-1)+1\} = m.$$

Induktioperiaatteen nojalla $qr(\varphi_{\bar{a}}^m) = m$ kaikilla $m \geq 0$.

(b) Todistamme väitteen induktiolla kvanttoriasteen m suhteen. Olkoon ensin $m = 0$. Nyt $\varphi_{\bar{a}}^0$ on kaikkien niiden atomikaavojen tai atomikaavojen negaatioiden φ konjunktio, joille pätee $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Näin ollen $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}}^0[\bar{a}]$. Olkoon sitten $m > 0$ ja oletamme, että $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}}^m[\bar{a}]$ pätee. Nyt määritelmän 3.2 mukaan $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}}^{m+1}(\bar{v})[\bar{a}]$ pätee, kun jokaiselle $a \in A$ löytyy sellainen alkio $b \in A$, että $\varphi_{\bar{a}a}^m(\bar{v}, v_{s+1})$ pätee mallissa $\mathcal{A}$, kun muuttuja v_{s+1} tulkitaan alkioksi $b \in A$, ja toisaalta tulkittiinpa muuttuja v_{s+1} miksi tahansa alkioksi $b \in A$, niin on olemassa sellainen $a \in A$, että $\varphi_{\bar{a}a}^m(\bar{v}, v_{s+1})$ pätee mallissa $\mathcal{A}$. Molemmissa tapauksissa tällainen $b \in A$ on varmasti olemassa, sillä voimme aina valita kunkin alkion vastaamaan itseään; siis $b = a$. Näin ollen induktioperiaatteen nojalla $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}}^m[\bar{a}]$ kaikilla $m \geq 0$.

(c) Määritelmän 3.2 mukaan $\varphi_{\bar{a}}^0$ on kvantifioimaton. Edellisen kohdan (b) mukaan aina pätee $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}}^0[\bar{a}]$. Oletamme nyt, että $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}}^0[\bar{b}]$. Tämä on Lemman 3.1 mukaan yhtäpitävää sen kanssa, että $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

□

Lemma 3.5. *Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ malleja, $\bar{a} \in A^s$, $\bar{b} \in B^s$ ja $m \geq 0$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) Pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

(ii) $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}}^m[\bar{b}]$.

(iii) Olkoon $\varphi(v_1, \ldots, v_s)$ sellainen FO-kaava, että $qr(\varphi) \leq m$. Nyt

$$(*) \qquad \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}].$$

Todistus. [1, s. 18] Oletamme ensin, että kohta (iii) on voimassa. Lemman 3.4 mukaan $qr(\varphi_{\bar{a}}^m) = m$ ja $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}}^m[\bar{a}]$. Koska kohta (iii) pätee, niin selvästi $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}}^m[\bar{b}]$. Siis kohdasta (iii) seuraa kohta (ii).

Seuraavaksi todistamme induktiolla kvanttoriasteen m suhteen, että kohdat (i) ja (ii) ovat yhtäpitäviä. Olkoon ensin $m = 0$. Lemman 3.2 mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, jos ja vain jos $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ on osittaisisomorfismi mallista $\mathcal{A}$ malliin $\mathcal{B}$. Edelleen Lemman 3.4 perusteella tällainen osittaisisomorfismi on olemassa silloin ja vain silloin, kun $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}}^0[\bar{b}]$.

Oletamme sitten, että $m > 0$ ja että ekvivalenssi (i) $\Leftrightarrow$ (ii) on voimassa kvantoriasteen ollessa $m-1$. Nyt Lemman 3.2 kohdan (b) mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, jos ja vain jos jokaiselle $a \in A$ on olemassa sellainen $b \in B$ ja jokaiselle $b \in B$ on olemassa sellainen $a \in A$, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$. Induktio-oletuksen mukaan jokaiselle $a \in A$ on olemassa sellainen $b \in B$ ja jokaiselle $b \in B$ on olemassa sellainen $a \in A$, että $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}[\bar{b}b]$. Tämä on juuri se, mitä kaava $\varphi_{\bar{a}}^m$ sanoo; $\mathcal{B} \models \bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(\bar{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(\bar{v}, v_{s+1})[\bar{b}]$. Siis $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}}^m[\bar{b}]$. Näin ollen induktioperiaatteen nojalla kohdat (i) ja (ii) ovat yhtäpitäviä kaikilla $m \geq 0$.

Oletamme sitten, että kohta (i) on voimassa. Todistamme induktiolla kvanttoriasteen m suhteen, että kohta (iii) pätee. Olkoon $m = 0$. Yllä olevan todistuksen mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ täsmälleen silloin, kun $\mathcal{B} \models \varphi_{\bar{a}}^0[\bar{b}]$. Lemman 3.4 mukaan $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}}^0(\bar{a})$. Siis kohdan (iii) väite on tosi, kun $m = 0$.

Oletamme sitten, että $m > 0$ ja että implikaatio (i)$\Rightarrow$(iii) on voimassa kvanttoriasteen ollessa $m - 1$. Edellisen perusteella atomikaavat kuuluvat niiden kaavojen $\varphi(v_1, \ldots, v_s)$ joukkoon, jotka toteuttavat ehdon $(*)$. Näiden kaavojen muodostama joukko on selvästi suljettu negaation ja disjunktion suhteen. Olkoon nyt $\varphi(\bar{x}) = \exists y \psi$ sellainen kaava, että $qr(\varphi) \leq m$. Muuttuja y on sidottu, joten voimme olettaa, että $y \neq x_i$ kaikilla $1 \leq i \leq s$. Siis $\psi = \psi(\bar{x}, y)$. Oletamme, että $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Siis on olemassa sellainen $a \in A$, että $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}, a]$. Oletuksen mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$. Siis on olemassa sellainen $b \in B$, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$. Nyt $qr(\psi) \leq m - 1$, joten induktio-oletuksen mukaan $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}, b]$. Siis $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$. Siis induktioperiaatteen nojalla kohdasta (i) seuraa kohta (iii) kaikilla m. $\square$

Edellisen lemman kohta (iii) on yhtä pitävää sen kanssa, että $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$. Toisin sanoen pelaajalla D on voittostrategia pelissä $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ täsmälleen silloin, kun mallit $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat m-ekvivalentit.

3.2 Monadisen toisen kertaluvun logiikan pelikarakterisointi

Myös relaatiolle $\equiv_m^{MSO}$ on peliteoreettinen karakterisointi. Merkitsemme yksittäistä monadisen toisen kertaluvun logiikan EF-peliä MSO-$\mathrm{G_m}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Peli etenee kuten ensimmäisen kertaluvun logiikan EF-peli, mutta nyt kullakin kierroksella S voi valita joko yksittäisen alkion tai joukon alkioita. Alkiojoukon valinta vastaa yksipaikkaisen relaatiomuuttujan kvantifiointia. Jos S valitsee yksittäisen alkion, niin D vastaa kuten FO-logiikan EF-pelissä. Jos S valitsee alkiojoukon $P \subseteq A$, niin D vastaa joukolla $Q \subseteq B$. Ja päin vastoin jos S valitsee alkiojoukon $Q \subseteq B$, niin D vastaa joukolla $P \subseteq A$. Kun on pelattu m kierrosta, niin mallista $\mathcal{A}$ on valittu alkiot $a_1, \ldots, a_r$ ja alkiojoukot $P_1, \ldots, P_s$ sekä mallista $\mathcal{B}$ vastaavasti alkiot $b_1, \ldots, b_r$ ja alkiojoukot $Q_1, \ldots, Q_s$. Nyt $r + s = m$. Pelaajalla D on voittostrtegia pelissä MSO-$\mathrm{G_m}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, jos $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in Part((\mathcal{A}, \bar{P}), (\mathcal{B}, \bar{Q}))$.

Edellisen kappaleen tulokset EF-peleille ovat voimassa myös monadisen toisen kertaluvun logiikan tapauksessa pienin lisäyksin. Käymme läpi nämä tulokset todistuksineen. Tosin seuraavaan lemmaan on koottu EF-pelin ominaisuuksia, jotka ovat suoria seurauksia pelin määrittelystä.

Lemma 3.6. *Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ malleja, $\bar{a} \in A^r, \bar{b} \in B^r, P_1, \ldots, P_s \subseteq A$ ja $Q_1, \ldots, Q_s \subseteq B$.*

(a) Pelaajalla D on voittostrategia pelissä MSO-$G_0(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, jos ja vain jos $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(b) Kun $m > 0$, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) Pelaajalla D on voittostrategia pelissä MSO-$G_m((\mathcal{A}, \bar{P}, \bar{a}), (\mathcal{B}, \bar{Q}, \bar{b}))$.

(ii) Jokaiselle $a \in A$ on olemassa sellainen $b \in B$ ja jokaiselle $b \in B$ on olemassa sellainen $a \in A$, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä MSO-$G_{m-1}((\mathcal{A}, \bar{P}, \bar{a}a), (\mathcal{B}, \bar{Q}, \bar{b}b)$, ja vastaavasti jokaiselle $P \subseteq A$ on olemassa sellainen $Q \subseteq B$ ja jokaiselle $Q \subseteq B$ on olemassa sellainen $P \subseteq A$, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä MSO-$G_{m-1}((\mathcal{A}, \bar{P}P, \bar{a}), (\mathcal{B}, \bar{Q}Q, \bar{b})$.

(c) Jos pelaajalla D on voittostrategia pelissä MSO-$G_m((\mathcal{A}, \bar{P}, \bar{a}), (\mathcal{B}, \bar{Q}, \bar{b}))$ ja jos $n < m$, niin pelaajalla D on voittostrategia myös pelissä MSO-$G_n((\mathcal{A}, \bar{P}, \bar{a}), (\mathcal{B}, \bar{Q}, \bar{b}))$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikan EF-pelien yhteydessä määrittelimme kaavan $\varphi^m_{\bar{a}}$. Määrittelemme nyt vastaavan kaavan $\psi^m_{\bar{a},\bar{P}}$ $MSO - G_m$ peleille ottaen huomioon mahdolliset alkiojoukkojen valinnat. Edelleen kaava $\psi^m_{\bar{a},\bar{P}}$ määritellään siten, että kaikilla malleilla $\mathcal{B}$ pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}((\mathcal{A}, \mathrm{\bar{P}}, \mathrm{\bar{a}}), (\mathcal{B}, \mathrm{\bar{Q}}, \mathrm{\bar{b}}))$ täsmälleen silloin, kun $\mathcal{B} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$. Tälle väitteelle esitämme perustelut Lemman 3.9 todistuksessa.

Määritelmä 3.3. Olkoon $\bar{v} = v_1, \ldots, v_r$ ja $\bar{V} = V_1, \ldots, V_s$. Määrittelemme kaavan $\psi^m_{\bar{a},\bar{P}}$ rekursiivisesti. Kun $m = 0$, niin

$$\psi^0_{\bar{a},\bar{P}} := \bigwedge\{\varphi(\bar{v}, \bar{V}) \mid \varphi \text{ on atomikaava tai sellaisen negaatio, } \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{P}]\}.$$

Kun $m > 0$, niin

$$\psi^{m+1}_{\bar{a},\bar{P}} := \bigwedge_{a\in A} \exists v_{r+1}\psi^m_{\bar{a}a,\bar{P}} \wedge \forall v_{r+1} \bigvee_{a\in A} \psi^m_{\bar{a}a\bar{P}} \wedge \bigwedge_{P\subseteq A} \exists V_{s+1}\psi^m_{\bar{a},\bar{P}P} \wedge \forall V_{s+1} \bigvee_{P\subseteq A} \psi^m_{\bar{a},\bar{P}P}.$$

Lemma 3.7. *Kaikilla $m \geq 0$ arvoilla joukko $B_m = \{\psi^m_{\bar{a},\bar{P}} \mid \mathcal{A}$ on äärellinen malli, $\bar{a} \in A^r$ ja $P_1, \ldots, P_s \subseteq A\}$ on äärellinen.*

Todistus. Todistamme induktiolla kvanttoriasteen m suhteen, että kullakin s:n arvolla joukon B_m kaavat voidaan valita 4^m tavalla.

Oletamme ensin, että $m = 0$. Vastaavin perusteluin kuin Lemmassa 3.3 joukko B_0 on yksikäsitteinen.

Oletamme sitten, että joukon B_m alkiot voidaan valita 4^m tavalla. Määritelmän 3.3 mukaan

$$\psi^{m+1}_{\bar{a},\bar{P}} := \bigwedge_{a\in A} \exists v_{r+1}\psi^m_{\bar{a}a,\bar{P}} \wedge \forall v_{r+1} \bigvee_{a\in A} \psi^m_{\bar{a}a\bar{P}} \wedge \bigwedge_{P\subseteq A} \exists V_{s+1}\psi^m_{\bar{a},\bar{P}P} \wedge \forall V_{s+1} \bigvee_{P\subseteq A} \psi^m_{\bar{a},\bar{P}P}.$$

Nyt alkio $a \in A$ kaavassa $\psi^m_{\bar{a}a,\bar{P}}(\bar{v}, v_{s+1}, \bar{V})$ voidaan valita kahdella tavalla. Joko niin, että ensin kiinnitetään alkio a ja etsitään sopiva muuttujan v_{s+1} arvo, tai päinvastoin. Vastaavasti osajoukko $\bar{P} \subseteq A$ kaavassa $\psi^m_{\bar{a},\bar{P}P}(\bar{a}, \bar{V}, v_{s+1})$ voidaan valita kahdella tavalla. Siis kaavat $\psi^{m+1}_{\bar{a},\bar{P}}$ voidaan valita $(2+2)\cdot 4^m = 4^{m+1}$ tavalla. Induktioperiaatteen mukaan kullakin s:n arvolla joukon B_m alkiot voidaan valita 4^m tavalla kaikilla $m \geq 0$. Näin ollen joukko B_m on äärellinen kaikilla $s, m \geq 0$. □

Lemma 3.8. *Seuraavat tulokset ovat yleisesti voimassa.*

(a) $qr(\psi^m_{\bar{a},\bar{P}}) = m$

(b) $\mathcal{A} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{a}, \bar{P}]$

(c) Kaikilla malleilla $\mathcal{B}$ *sekä* $\bar{b} \in B$ *ja* $\bar{Q} \subseteq B$ *pätee* $\mathcal{B} \models \psi^0_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$ *silloin ja vain silloin, kun* $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Todistus. [1, s. 18(idea)]

(a) Jos $m = 0$, niin määritelmän 3.3 mukaan $\psi^0_{\bar{a},\bar{P}}$ muodostuu atomikaavoista tai niiden negaatiosta, joten selvästi $qr(\psi^0_{\bar{a},\bar{P}}) = 0$. Jos $m > 0$, niin

$$qr(\psi^m_{\bar{a},\bar{P}}) = max\{qr(\bigwedge_{a\in A} \exists v_{r+1}\psi^{m-1}_{\bar{a}a,\bar{P}}), qr(\forall v_{r+1} \bigvee_{a\in A} \psi^{m-1}_{\bar{a}a\bar{P}}),$$

$$qr(\bigwedge_{P\subseteq A} \exists V_{s+1}\psi^{m-1}_{\bar{a},\bar{P}P}), qr(\forall V_{s+1} \bigvee_{P\subseteq A} \psi^{m-1}_{\bar{a},\bar{P}P})\}$$

$$= max\{(m-1)+1, (m-1)+1, (m-1)+1, (m-1)+1\} = m.$$

(b) Todistamme väitteen induktiolla kvanttoriasteen m suhteen. Olkoon ensin $m = 0$. Nyt $\psi^0_{\bar{a},\bar{P}}$ on kaikkien niiden atomikaavojen tai atomikaavojen negaatioiden φ konjunktio, joille pätee $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{P}]$. Näin ollen $\mathcal{A} \models \psi^0_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{a}, \bar{P}]$. Olkoon sitten $m > 0$ ja oletamme, että $\mathcal{A} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{a}, \bar{P}]$ pätee. Nyt määritelmän 3.3 perusteella $\mathcal{A} \models \psi^{m+1}_{\bar{a},\bar{P}}(\bar{v}, \bar{V})[\bar{a}, \bar{P}]$ pätee, kun jokaiselle $a \in A$ löytyy sellainen $b \in A$ ja jokaiselle $b \in A$ löytyy sellainen $a \in A$, että $\mathcal{A} \models \psi^m_{\bar{a}a,\bar{P}}(\bar{v}, v_{s+1}, \bar{V})[\bar{a}, b, \bar{P}]$ pätee ja vastaavasti jokaiselle $P \subseteq A$ löytyy sellainen $Q \subseteq A$ ja jokaiselle $Q \subseteq A$ löytyy sellainen $P \subseteq A$, että $\mathcal{A} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}P}(\bar{v}, \bar{V}, V_{s+1})[\bar{a}, \bar{P}, Q]$ pätee. Tällaiset alkiot $b \in A$ ja joukot $Q \subseteq A$ löytyvät varmasti, kun asetamme kunkin alkion vastaamaan itseään. Toisin sanoen olkoon $b = a$ ja $Q = P$. Induktioperiaatteen nojalla $\mathcal{A} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{a}, \bar{P}]$ kaikilla $m \geq 0$.

(c) Määritelmän 3.3 mukaan $\psi^0_{\bar{a},\bar{P}}$ on kvantifioimaton. Edellisen kohdan (b) mukaan aina pätee $\mathcal{A} \models \psi^0_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{a}, \bar{P}]$. Oletamme nyt, että $\mathcal{B} \models \psi^0_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$. Tämä on Lemman 3.1 mukaan yhtäpitävää sen kanssa, että $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

□

Lemma 3.9. *$A \equiv^{MSO}_m B$, jos ja vain jos pelaajalla D on voittostrategia pelissä MSO-$G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Todistus. Todistus etenee kolmessa osassa kuten lemmassa 3.5. Toisin sanoen on todistettava, että seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

(i) Pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{P}}, \bar{\mathrm{a}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{Q}}, \bar{\mathrm{b}}))$.

(ii) $\mathcal{B} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$.

(iii) Olkoon $\psi[\bar{x}, \bar{Y}]$ sellainen MSO-kaava, jolle $qr(\psi) \leq m$. Nyt

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}, \bar{P}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}, \bar{Q}].$$

Oletamme ensin, että kohdan (iii) väittämä on voimassa. Lemman 3.8 mukaan $qr(\psi^m_{\bar{a},\bar{P}}) = m$ ja $\mathcal{A} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{a}, \bar{P}]$. Koska kohta (iii) pätee, niin selvästi $\mathcal{B} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$. Siis kohdasta (iii) seuraa kohta (ii).

Seuraavaksi todistamme induktiolla kvanttoriasteen m suhteen, että kohdat (i) ja (ii) ovat yhtäpitäviä. Olkoon ensin $m = 0$. Lemman 3.6 mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_0}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{a}}, \bar{\mathrm{P}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}}, \bar{\mathrm{Q}}))$, jos ja vain jos $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Edelleen Lemman 3.8 perusteella tällainen osittaisisomorfismi on olemassa silloin ja vain silloin, kun $\mathcal{B} \models \psi^0_{\bar{a}, \bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$.

Oletamme sitten, että $m > 0$ ja että ekvivalenssi (i)$\Leftrightarrow$(ii) pitää paikkansa kvantoriasteen ollessa $m - 1$. Oletamme, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{a}}, \bar{\mathrm{P}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}}, \bar{\mathrm{Q}}))$. Jos edellinen valinta on ollut pistesiirto, niin Lemman 3.6 kohdan (b) mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{a}}, \bar{\mathrm{P}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}}, \bar{\mathrm{Q}}))$, jos ja vain jos jokaiselle $a \in A$ on olemassa sellainen $b \in B$ ja jokaiselle $b \in B$ on olemassa sellainen $a \in A$, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_{m-1}}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{a}}\mathrm{a}, \bar{\mathrm{P}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}}\mathrm{b}, \bar{\mathrm{Q}}))$. Nyt induktio-oletuksen mukaan jokaiselle $a \in A$ on olemassa sellainen $b \in B$ ja jokaiselle $b \in B$ on olemassa sellainen $a \in A$, että $\mathcal{B} \models \psi^{m-1}_{\bar{a}a, \bar{P}}[\bar{b}b, \bar{Q}]$. Mikäli edellinen valinta on ollut joukkosiirto, niin vastaavasti Lemman 3.6 mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{a}}, \bar{\mathrm{P}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}}, \bar{\mathrm{Q}}))$, jos ja vain jos jokaiselle $P \subseteq A$ on olemassa sellainen $Q \subseteq B$ ja jokaiselle $Q \subseteq B$ on olemassa sellainen $P \subseteq A$, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_{m-1}}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{a}}, \bar{\mathrm{P}}\mathrm{P}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}}, \bar{\mathrm{Q}}\mathrm{Q}))$. Induktio-oletuksen mukaan jokaiselle $P \subseteq A$ on olemassa sellainen $Q \subseteq B$ ja jokaiselle $Q \subseteq B$ on olemassa sellainen $P \subseteq A$, että $\mathcal{B} \models \psi^{m-1}_{\bar{a}, \bar{P}P}[\bar{b}, \bar{Q}Q]$.

Yhdistämällä nämä kaksi tapausta saamme määritelmän 3.3 mukaisen kaavan, joka pätee mallissa $\mathcal{B}$. Siis $\mathcal{B} \models \bigwedge_{a \in A} \exists v_{r+1} \psi^m_{\bar{a}a, \bar{P}} \wedge \forall v_{r+1} \bigvee_{a \in A} \psi^m_{\bar{a}a\bar{P}} \wedge \bigwedge_{P \subseteq A} \exists V_{s+1} \psi^m_{\bar{a}, \bar{P}P} \wedge \forall V_{s+1} \bigvee_{P \subseteq A} \psi^m_{\bar{a}, \bar{P}P}$. Siis $\mathcal{B} \models \psi^m_{\bar{a}, \bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$. Näin ollen induktioperiaatteen nojalla kohdat (i) ja (ii) ovat yhtäpitäviä kaikilla $m \geq 0$.

Oletamme sitten, että kohta (i) on voimassa. Todistamme induktiolla kvanttoriasteen m suhteen, että tällöin myös kohta (iii) pätee. Olkoon ensin $m = 0$. Edellisen todistuksen mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_0}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{a}}, \bar{\mathrm{P}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}}, \bar{\mathrm{Q}}))$ täsmälleen silloin, kun $\mathcal{B} \models \psi^0_{\bar{a}, \bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$. Lemman 3.8 mukaan $\mathcal{A} \models \psi^0_{\bar{a}, \bar{P}}(\bar{a}, \bar{P})$. Siis kohdan (iii) väite on tosi, kun $m = 0$.

Oletamme sitten, että $m > 0$ ja että implikaatio (i)$\Rightarrow$(iii) on voimassa kvanttoriasteen ollessa $m - 1$. Edellisen perusteella atomikaavat kuuluvat niiden kaavojen $\varphi(v_1, \ldots, v_r, V_1, \ldots, V_s)$ joukkoon, jotka toteuttavat ehdon $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{P}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}, \bar{Q}]$. Näiden kaavojen muodostama joukko on suljettu negaation ja disjunktion suhteen. Olkoon $\varphi(\bar{x}, \bar{X}) = \exists Y \psi$ sellainen kaava, että $qr(\varphi) \leq m$. Kaava φ voisi olla myös muotoa $\exists y \psi$, silloin todistus etenisi kuten Lemman 3.5 todituksessa. Relaatiomuuttuja Y on sidottu, joten voimme olettaa, että $Y \neq X_i$ kaikilla $1 \leq i \leq s$. Näin ollen $\psi = \psi(\bar{x}, \bar{X}, Y)$. Oletamme, että $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{P}]$. Siis on olemassa sellainen $P \subseteq A$, että $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}, \bar{P}, P]$. Oletuksen mukaan pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{P}}, \bar{\mathrm{a}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{Q}}, \bar{\mathrm{b}}))$. Näin ollen on olemassa sellainen $Q \subseteq B$, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_{m-1}}((\mathcal{A}, \bar{\mathrm{P}}\mathrm{P}, \bar{\mathrm{a}}), (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{Q}}\mathrm{Q}, \bar{\mathrm{b}}))$. Nyt $qr(\psi) \leq m-1$, joten induktio-oletuksen mukaan $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}, \bar{Q}, Q]$. Siis $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}, \bar{Q}]$. Nyt induktioperiaatteen mukaan kohdasta (i) seuraa kohta (iii) kaikilla m. Ja edelleen kohdat (i), (ii) ja (iii) ovat yhtäpitäviä. □

Lemma 3.10. *Relaatio $\equiv_m^{MSO}$ on ekvivalenssirelaatio, jolla on äärellisen monta ekvivalenssiluokkaa.*

Todistus. Selvästi $\equiv_m^{MSO}$ on ekvivalenssirelaatio, sillä se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. Lemman 3.9 perusteella kaksi mallia $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat m-ekvivalentit täsmälleen silloin, kun $\mathcal{B} \models \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}]$. Edelleen Lemman 3.3 mukaan lauseita $\psi^m_{\bar{a},\bar{P}}$ on äärellinen määrä kullakin m. Näin ollen relaatiolla $\equiv_m$ on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia. □

Lemma 3.11. *Olkoot $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_1$ ja $\mathcal{B}_2$ τ-malleja. Tällöin on voimassa: Jos $\mathcal{A}_1 \equiv_m^{MSO} \mathcal{B}_1$ ja $\mathcal{A}_2 \equiv_m^{MSO} \mathcal{B}_2$, niin $\mathcal{A}_1 \lhd \mathcal{A}_2 \equiv_m^{MSO} \mathcal{B}_1 \lhd \mathcal{B}_2$.*

Todistus. [1, s. 39] Olkoon $\mathcal{A}_1 \equiv_m^{MSO} \mathcal{B}_1$ ja $\mathcal{A}_2 \equiv_m^{MSO} \mathcal{B}_2$. Lemman 3.9 mukaan pelaajalla D on voittostrategia S_1 pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ ja voittostrategia S_2 pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$. Osoitamme, että pelaajalla D on voittostrategia myös pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}(\mathcal{A}_1 \lhd \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \lhd \mathcal{B}_2)$.

Kullakin kierroksella on kaksi vaihtoehtoa. Pelaaja S voi tehdä joko piste- tai joukkosiirron. Oletamme ensin, että S valitsee alkion $a \in A_1 \lhd A_2$. Nyt D poimii vastauksensa voittostrategiasta S_1, jos $a \in A_1$, ja voittostrategiasta S_2, jos $a \in A_2$. Siis pistesiirron tapauksessa pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{MSO\text{-}G_m}(\mathcal{A}_1 \lhd \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \lhd \mathcal{B}_2)$. Oletamme sitten, että S tekeekin joukkosiirron ja valitsee osajoukon $P \subseteq A_1 \cup A_2$. Merkitsemme $P_1 = P \cap A_1$ ja $P_2 = P \cap A_2$. Olkoon Q_1 voittostrategian S_1 mukainen vastaus siirrolle P_1

ja vastaavasti Q_2 voittostrategian S_2 mukainen vastaus siirrolle P_2. D vastaa siis $Q_1 \cup Q_2$. Tämä pitää sisällään kaikki ne siirrot, jotka vastaavat relaatioiden kuvautumista mallista $\mathcal{A}_1 \triangleleft \mathcal{A}_2$ mallille $\mathcal{B}_1 \triangleleft \mathcal{B}_2$. Näin ollen pelaajalla D on voittostrategiapelissä MSO-$\mathrm{G_m}(\mathcal{A}_1 \triangleleft \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \triangleleft \mathcal{B}_2)$ myös joukkosiirron tapauksessa. Nyt lemmasta 3.9 seuraa, että $\mathcal{A}_1 \triangleleft \mathcal{A}_2 \equiv_m^{MSO} \mathcal{B}_1 \triangleleft \mathcal{B}_2$. $\square$

4 Büchin lause ja transitiivisen sulkeuman logiikat

Richard Büchi esitti ja todisti vuonna 1960 lauseen, joka oli ensimmäisiä deskriptiiviseen vaativuusteoriaan liittyviä tuloksia. Büchin alkuperäisessä lauseessa oli allaolevien kohtien (i) - (iv) ja (vii) lisäksi kohta, jonka mukaan kieli L on logiikassa $Mon - \Sigma_1^1$ määriteltävissä. Logiikkan $Mon - \Sigma_1^1$ lauseita ovat ne MSO logiikan lauseet, jotka ovat muotoa $\exists R_1 \cdots \exists R_n \varphi$. Tässä tutkielmassa logiikan $Mon - \Sigma_1^1$ tilalla tarkastelemme transitiivisen sulkeuman logiikoita FO(TC) ja FO(DTC). Säännöllisten kielten määriteltävyyttä transitiivisen sulkeuman logiikoissa ovat tarkastellet Andreas Potthoff väitöskirjassaan vuodelta 1994 sekä Lauri Hella kokouksessa Workshop on Automata and Finite Model Theory Helsingissä 2001.

Esittelemme tutkielman päätuloksen seuraavassa lauseessa. Lauseen todistus on yhteenveto jo aiemmin todistetuista tai tässä luvussa esiteltävistä lemmoista. Jätämmekin todistuksen tästä syystä myöhemmäksi. Lauseessa 4.1 esiintyy käsite invarianttius, jota emme ole vielä esitellet. Joukon Σ^* relaatio $\sim$ on (oikealta) invariantti, jos kaikille sanoille $u, v, w \in \Sigma^*$ pätee $u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$.

Lause 4.1. *Olkoon $L \subseteq \Sigma^*$ kieli. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) On olemassa sellainen invariantti joukon Σ^* ekvivalenssirelaatio $\sim$, jolla on äärellisen monta ekvivalenssiluokkaa, että L on yhdiste relaation $\sim$ ekvivalenssiluokista.

(ii) L voidaan tunnistaa deterministisellä automaatilla.

(iii) L voidaan tunnistaa epädeterministisellä automaatilla.

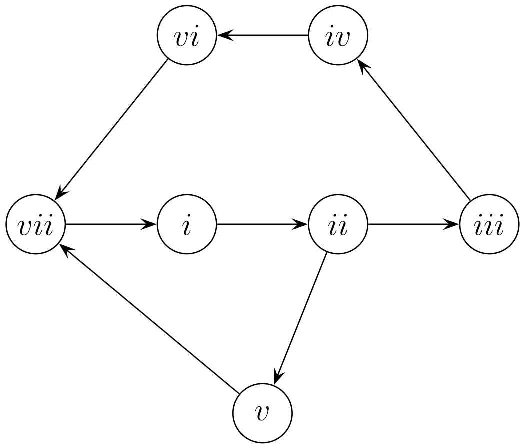
(iv) L on säännöllinen.

(v) L on määriteltävissä logiikassa FO(DTC).

(vi) L on määriteltävissä logiikassa FO(TC).

(vii) L on määriteltävissä logiikassa MSO.

Tarkastelemme Lauseen 4.1 kohtien (i) - (vii) välisiä yhteyksiä. Lähdemme rakentamaan todistusta varten kahta implikaatiorengasta. Todistusketjun muodostumista havainnollistaa alla oleva kuvio.



Todistamme ensin, että väitteestä (i) seuraa kohta (ii). Tämän jälkeen käymme läpi implikaatioketjun (ii)-(iii)-(iv)-(vi)-(vii) ja edelleen ketjun (ii)-(v)-(vii). Lopuksi yhdistämme ketjut todistamalla, että kohdasta (vii) seuraa väite (i). Lemma 4.1 todistaa implikaation väitteestä (i) väitteeseen (ii).

Lemma 4.1. *Olkoon $\sim$ invariantti joukon Σ^* ekvivalenssirelaatio, jolla on äärellisen monta ekvivalenssiluokkaa. Olkoon kieli $L \subseteq \Sigma^*$ yhdiste relaation $\sim$ ekvivalenssiluokista. Tällöin on olemassa deterministinen automaatti, joka tunnistaa kielen L.*

Todistus. [1, s. 107] Kieli L on siis yhdiste relaation $\sim$ ekvivalenssiluokista. Sanan w määräämää ekvivalenssiluokkaa merkitsemme $[w]$. Olkoon kieli $L = [u_1] \cup \cdots \cup [u_r]$, joillakin $u_1, \ldots, u_r \in \Sigma^*$. Muodostamme relaation $\sim$ ekvivalenssiluokista deterministisen automaatin $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, missä

$$Q = \{[u] \mid u \in \Sigma^*\},$$

$$q_0 = [\lambda],$$

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q, \quad \delta([u], a) = [ua] \text{ ja}$$

$$F = \{[u_1], \ldots [u_r]\}.$$

Selvästi joukko Q on äärellinen, sillä ekvivalenssirelaatiolla $\sim$ on vain äärellisen monta ekvivalenssiluokkaa.

Seuraavaksi tarkastamme, että tilasiirtymärelaatio δ on hyvinmääritelty: Olkoot $u, v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ ja $[u] = [v]$ eli $u \sim v$. Relaation $\sim$ invarianttiudesta seuraa, että $ua \sim va$ eli $[ua] = [va]$. Siis δ on hyvinmääritelty.

Yksinkertaisella induktiolla sanan v pituuden suhteen todistamme, että $\delta^*([u], v) = [uv]$: Olkoon ensin $|v| = 0$ siis $v = \lambda$. Nyt $\delta^*([u], \lambda) = [u]$. Teemme induktio-oletuksen, että $\delta^*([u], v) = [uv]$, kun $|v| = k$ ja $k > 0$. Todistamme, että $\delta^*([u], va) = [uva]$, kun $a \in \Sigma$ ja $|va| = k + 1$. Nyt $\delta^*([u], va) = \delta(\delta^*([u], v), a) = \delta([uv], a) = [uva]$. Induktioperiaatteen mukaan siis $\delta^*([u], v) = [uv]$ kaikilla sanoilla $v \in \Sigma^*$.

Erityisesti siis $\delta^*([\lambda], v) = [v]$. Tällöin automaatin M tunnistama kieli on

$$\begin{aligned} L(M) &= \{v \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, v) \in F\} \\ &= \{v \in \Sigma^* \mid [v] \in F\} \\ &= [u_1] \cup \cdots \cup [u_r] \\ &= L. \end{aligned}$$

Siis on olemassa deterministinen automaatti, joka tunnistaa kielen L. $\square$

Huomautuksen 1.1 nojalla kohdasta (ii) seuraa kohta (iii). Olemme jo aikaisemmin luvussa 1 todistaneet Lemman 1.1, jonka mukaan kaikki äärellisellä epädeterministisellä automaatilla tunnistettavat kielet ovat säännöllisiä. Näin ollen kohdasta (iii) seuraa väite (iv).

Lemma 4.2. *Jokainen säännöllinen kieli L on logiikassa FO(TC) määriteltävissä.*

Todistus. [2, s. 8] Olkoon $L \subseteq \Sigma^*$ säännöllinen kieli, jonka säännöllinen ilmaus on r. Todistamme induktiolla säännöllisen ilmaisun pituuden suhteen, että on olemassa sellainen FO(TC)-kaava $\varphi_r(x, y)$, että kaikille sanamalleille $\mathcal{A}$ ja kaikille $s, t \in A$, pätee

$$\mathcal{A} \models \varphi_r(x, y)[s, t] \Leftrightarrow w_{\mathcal{A}[s,t]} \in r.$$

Kuten jo aiemmin mainitsimme $w_{\mathcal{A}[s,t]} = \lambda$, jos $t \leq^{\mathcal{A}} s$, ja rajoitetun sanamallin pienin alkio s on varattu aloitusmerkille Δ. Määrittelemme kaavat $min(x) := \forall y(\neg y < x)$ ja $max(x) := \forall y(\neg x < y)$. Nyt kielen L määrittelee lause $\exists x \exists y \varphi_r(x, y) \wedge min(x) \wedge max(y)$. Induktio etenee seuraavasti:

(i) $\varphi_\emptyset(x, y) = \neg(x = x)$,

(ii) $\varphi_a(x, y) = (x + 1 = y \wedge P_a(y))$,

(iii) $\varphi_{r \cup s}(x, y) = \varphi_r(x, y) \vee \varphi_s(x, y)$,

(iv) $\varphi_{rs}(x, y) = \exists z(x \leq z \leq y \wedge \varphi_r(x, z))$,

(v) $\varphi_{r^*}(x, y) = [TC_{u,v}\varphi_r(u, v)]\,(x, y)$.

Koska säännöllinen ilmaus $\emptyset$ vastaa tyhjää kieltä, niin määrittelemme kohdassa (i) kaavan $\varphi_\emptyset$ siten, että se on aina epätosi. Kohdassa (ii) kaava φ_a edustaa kaikkia yhden merkin $a \in \Sigma$ mittaisia säännöllisiä ilmaisuja. Jokaisen sanamallin ensimmäinen alkio on varattu aloitusmerkille Δ. Tällöin pienintä alkiota seuraavan alkion tulee kuulua joukkoon P_a jokaisella $a \in \Sigma$. Tämä alkio on samalla myös ko. sanamallin suurin alkio. Kohdan (iii) saamme suoraan yhdisteen määritelmästä. Olkoot R ja S kieliä, joiden säännölliset ilmaukset ovat r ja s. Jotta sana w kuuluisi kieleen $R \cup S$, niin sanan w on oltava joko kielestä R tai kielestä S. Siis määrittelemme kaavan $\varphi_{r \cup s}$ kaavojen φ_r ja φ_s disjunktiona. Kohdassa (iv) on olemassa $z \in A$, joka jakaa universumin kahteen sellaiseen osaan, että lause φ_r on totta ensimmäisessä ja lause φ_s toisessa osassa.

FO(TC)-logiikan määritelmän mukaan kohta (v) tarkoittaa, että on olemassa sellaiset $e_0, \ldots, e_n$, että $x = e_0, y = e_n$ ja kaikilla $i < n$ lause $\varphi_r(e_i, e_{i+1})$ on tosi. Siis löytyy joukko alkioita e_i, jotka jakavat universumin osiin, joissa kussakin pätee $\varphi_r(e_i, e_{i+1})$.

Näin ollen kaikki säännölliset kielet ovat määriteltävissä logiikassa FO(TC).

□

Nyt Lemman 4.2 mukaan kohdasta (iv) seuraa väite (vi). Edelleen Lemman 2.3 mukaan FO(TC) on logiikan MSO alilogiikka. Toisin sanoen jos kieli L on määriteltävissä logiikassa FO(TC), niin se on määriteltävissä myös monadisen toisen kertaluvun logiikassa. Näin olemme saaneet muodostetuksi ketjun (i)-(ii)-(iii)-(iv)-(vi)-(vii).

Seuraavaksi käymme läpi implikaatioketjun (ii)-(v)-(vii). Lemma 4.3 todistaa implikaation (ii)-(v).

Lemma 4.3. *Kaikki deterministisen automaatin M tunnistamat kielet ovat määriteltävissä logiikassa FO(DTC).*

Todistus. [3, s. 30] Olkoon $M = (\{1, \ldots, n\}, \Sigma, 1, \delta, F)$ deterministinen automaatti, joka tunnistaa kielen $L \subseteq \Sigma^*$. Tulemme osoittamaan, että ne automaatin M laskennat, jotka päättyvät hyväksyvään tilaan, voidaan ilmaista kaavalla, jossa on kaksi sisäkkäistä DTC-operaattoria.

Olkoon $w = w_1 \cdots w_r \in \Sigma^*$ sana ja $\mathcal{A}_w$ sanaa w vastaava sanamalli. Olkoon $m = 3n$, missä n on siis automaatin M tilojen lukumäärä. Lemman 2.2 mukaan jokainen äärellinen sanajoukko on määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun logiikassa, joten voimme rajoittua niihin sanoihin, joiden pituus on vähintään $2m$. Näin ollen sanan w pituus on $\geq 2m$. Jaamme sanan w sellaisiin osiin, että kussakin osassa on m merkkiä. Jos sanan w pituus ei ole jaollinen m:llä, niin viimeisessä osassa on merkkejä k kappaletta, missä $1 \leq k < m$. Tällöin sanan w pituus on siis $lm + k$, jollakin $l \geq 2$ ja $0 \leq k < m$.

Merkitsemme q_i sitä tilaa, jossa automaatti M on luettuaan sanasta w i ensimmäistä merkkiä, kun $1 \geq i \geq r$. Siis $q_i = \delta^*(1, w_{\mathcal{A}[0,i]})$. Lisäksi merkinnällä $x = max$ tarkoitamme sanamallin viimeistä alkiota. Tätä vastaa FO-kaava $\forall y(x >= y)$. Määrittelemme vielä tiloille $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ ja $i \in \mathbb{N}$ sellaiset ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavat $\psi^i_{j,k}$, joilla pätee

$$\mathcal{A} \models \psi^i_{p,q}(x)[k] \Leftrightarrow \delta^*(p, w_{\mathcal{A}[k,k+i]}) = q.$$

Nyt $\mathcal{A}_w \models \psi^i_{p,q}(x)[k]$ on voimassa täsmälleen silloin, kun alkaen merkistä w_{k+1} on olemassa sellainen i:n mittainen merkkijono, jota lukiessaan automaatti M siirtyy tilasta p tilaan q.

Tarkastelemme automaatin M laskentaa m:n mittaisissa jaksoissa. Tätä varten määrittelemme FO(DTC)-kaavan $\varphi_1(x)$, joka pätee niillä muuttujan

x arvoilla, jotka ovat m:n monikertoja. Olkoon siis

$$\varphi_1(x) := \exists z(z = 0 \vee [DTC_{y_1,y_2}(y_2 = y_1 + m)](z, x)).$$

Muuttujat tulkitsemme sanamallin $\mathcal{A}_w$ alkioiksi. Alussa automaatti M on tilassa 1. Kun automaatti on lukenut sanasta w merkkiin w_m saakka, niin se on siirtynyt tilaan q_m. Koodaamme tämän tilan sanamallin $\mathcal{A}_w$ alkioksi $m + q_m$. Automaatti lukee seuraavat m merkkiä ja päätyy tilaan q_{2m}, minkä koodaamme alkioksi $2m + q_{2m}$. Näin jatkamme kunnes sanasta on jäljellä korkeintaan $2m$ merkkiä. Koska $m = 3n$, niin ei ole vaaraa, että koodaukset menisivät päällekkäin tai ristiin, vaan kaikilla $i \in \mathbb{N}$ arvoilla $im + q_{im}$ tulee koodatuksi yksikäsitteiselle alkiolle kertoimen i mukaisessa järjestyksessä.

Edellä kuvattua koodausta varten tarvitsemme FO-kaavan φ_{askel}, joka kuvaa automaatin M laskennan etenemistä aina merkkiin $w_{r-(2m+k)}$ asti. Olkoon

$$\varphi_{askel}(x_1, x_2, x_3) := \exists x_4(x_4 = x_1 + 2m \wedge$$
$$\bigvee_{j=1,\ldots,n} \bigvee_{k=1,\ldots,n} (x_2 = x_1 + j \wedge x_3 = x_1 + m + k \wedge \psi^m_{j,k}(x_1))).$$

Nyt $\mathcal{A}_w \models \varphi_{askel}(x_1, x_2, x_3)[a_1, a_2, a_3]$ pätee, jos alkiota a_1 vastaavan merkin etäisyys sanan lopusta on $\geq 2m$, edellinen koodaus on tehty alkiolle a_2 ja viimeisin koodaus alkiolle a_3.

Tultaessa sanan w loppuun täytyy varmistua siitä, että automaatti M päätyy hyväksyvään tilaan. Määrittelemmekin FO-kaavan φ_{max} seuraavasti:

$$\varphi_{max}(x_1, x_2, x_3) := (x_3 = max) \wedge$$
$$\bigvee_{1=m,\ldots,2m-1} \bigvee_{j=1,\ldots,n} \bigvee_{k \in F} (x_3 = x_1 + j \wedge x_2 = x_1 + j \wedge \psi^i_{j,k}(x_1)).$$

Nyt $\mathcal{A}_w \models \varphi_{max}(x_1, x_2, x_3)[a_1, a_2, a_3]$ pätee, kun alkio a_3 on sanamallin $\mathcal{A}_w$ suurin alkio, alkiota a_1 vastaavan merkin etäisyys sanan lopusta on $< 2m$, edellinen koodaus on tehty alkiolle a_2 ja laskennan lopussa automaatti M jää hyväksyvään tilaan.

Lopuksi kokoamme määrittelemämme kaavat yhteen. Nyt automaatin M hyväksytyt laskennat voidaan ilmaista FO(DTC)-kaavalla

$$\exists x_1 \exists x_2(x_1 = 1 \wedge x_2 = max \wedge [TC_{z_1,z_2}\varphi(z_1, z_2)](x_1, x_2)),$$

missä $\varphi(x_1, x_2) := \exists z_3(\varphi_1(z_3) \wedge (\varphi_{askel}(z_3, z_1, z_2) \vee \varphi_{max}(z_3, z_1, z_2)))$. $\square$

Huomautuksen 2.1 mukaan FO(DTC) on logiikan FO(TC) alilogiikka. Ja edelleen Lemman 2.3 mukaan FO(TC) on logiikan MSO alilogiikka. Näin ollen, jos kieli L on määriteltävissä logiikassa FO(DTC), niin se on määriteltävissä myös logiikassa MSO. Näin ollen implikaatioketju (ii)-(v)-(vii) on todistettu. Nyt voimme todistaa Lauseen 4.1 liittämällä edellä muodostamamme implikaatioketjut toisiinsa.

Lauseen 4.1 todistus. [1, s. 110]

On siis toditettava vielä, että jos kieli $L \subseteq \Sigma^*$ määriteltävissä logiikassa MSO, niin silloin on olemassa sellainen invariantti joukon Σ^* ekvivalenssirelaatio $\sim$, jolla on äärellisen monta ekvivalenssiluokkaa, että L on yhdiste relaation $\sim$ ekvivalenssiluokista. Siis $L = [u_1] \cup \cdots \cup [u_r]$, joillakin $u_1, \ldots, u_r \in \Sigma^*$.

Olkoon nyt $L \subseteq \Sigma^*$ kieli, joka on määriteltävissä logiikassa MSO. On siis olemassa sellainen MSO-lause φ, että $Mod(\varphi) = \bigcup_{u \in L} \mathcal{B}_u$. Merkitsemme $qr(\varphi) = m$.

Olkoon $\sim$ sellainen relaatio, että jos ja vain jos $u \sim v$, niin $\mathcal{B}_u \equiv_m \mathcal{B}_v$. Lemman 3.10 perusteella relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Lauseita, joiden kvanttoriaste on $\leq m$, on vain äärellinen määrä. Tästä voimme päätellä, että relaatiolla $\sim$ on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia.

Oletamme, että $\mathcal{B}_u \models \varphi$ ja $u \sim v$. Siis $\mathcal{B}_u \equiv_m \mathcal{B}_v$. Nyt relaation $\equiv_m$ määritelmästä seuraa, että $\mathcal{B}_v \models \varphi$. Näin ollen voimme ilmaista kielen L muodossa $\bigcup\{[u] \mid u \in \Sigma^*, \mathcal{B}_u \models \varphi\}$. Siis kieli L on yhdiste relaation $\sim$ ekvivalenssiluokista.

Todistamme vielä lopuksi, että relaatio $\sim$ on invariantti: Olkoon $u \sim v$ ja $w \in \Sigma^*$. Siis $\mathcal{B}_u \equiv_m \mathcal{B}_v$. Nyt lemman 3.11 perusteella

$$\mathcal{B}_{uw} \cong \mathcal{B}_u \triangleleft \mathcal{B}_w \equiv_m \mathcal{B}_v \triangleleft \mathcal{B}_w \cong \mathcal{B}_{vw}.$$

Siis $uw \sim vw$. Näin ollen relaatio $\sim$ on invariantti.

Nyt ollen kohdasta (vii) seuraa väittämä (i), mikä liittää aiemmin todistamamme implikaatioketjut yhteen. Siispä ehdot (i) - (vii) ovat yhtäpitäviä. $\square$

Viitteet

[1] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum
Finite Model Theory
Springer-Verlag, 2nd edition, 1999
ISBN 3-540-65758-4

[2] Lauri Hella
Automata and Transitive Closure Logics
Workshop on Automata and Finite Model Theory, ESSLLI'01, Helsinki, 2001

[3] Andreas Potthoff
Logische Klassifizierung regulärer Baumsprachen
Institut für Informatik und Praktische Matematik
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Bericht Nr. 9410, Kiel, 1994

[4] John Martin
Introduction to Languages and the Theory of Computation
The McGraw-Hill Companies, Inc., 3rd edition, 2003
ISBN 0-07-119854-7(ISE)