TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Jukka Ilmonen

Aikalogiikoista

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
2005

Tampereen yliopisto
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

ILMONEN, JUKKA: Aikalogiikoista

Pro gradu -tutkielma, 49 s.
Matematiikka
Kesäkuu 2005

TIIVISTELMÄ

Työssä käsitellään kahta modaalista aikalogiikkaa: perusaikalogiikaa ja Until-Since -logiikkaa. Näihin tutustutaan antamalla kyseisille logiikoille semantiikat, jotka pohjautuvat ns. Kripke-malleihin. Malliteorian ohella perusaikalogiikkaa lähestytään myös aksiomaattisesti ja työssä todistetaankin pienimmän normaalin aikalogiikan täydellisyys suhteessa kaikkien aikalogiikan kehysten luokkaan. Näin ollen työ tarjoaa myös yksinkertaisen esimerkin formaalista aksioomasysteemistä, jolla on intuitiivisesti selkeä tulkinta.

Lisäksi työssä näytetään, että perusaikalogiikka on ilmaisuvoimaisempi kuin tavallinen modaalilogiikka ja vastaavasti Until-Since -logiikka on ilmaisuvoimaisempi kuin perusaikalogiikka. Tätä varten määritellään mallien samanlaisuutta tosien kaavojen mielessä kuvaavat bisimulaatio-relaatiot. Samalla todistetaan useita vastaavuustuloksia kaavojen validisuuden ja kehyksen relaation ominaisuuksien välillä. Yllä mainitut ilmaisuvoiman vertailut tehdään siis kahden modaalisen kielen välillä, mutta lisäksi työssä mainitaan lyhyesti (esimerkin avulla) miten modaalista kieltä voidaan verrata predikaattilogiikkaan.

Myös modaliteettien lukumäärää eräässä lineaarisessa aikalogiikassa tutkitaan.

Tärkeimmät viitekirjat työssä ovat Blackburn, Patrick & de Rijke, Maarten & Venema, Yde: *Modal Logic* ja Burgess, John P.: *Basic Tense Logic* (Teoksessa *Handbook of Philosophical Logic, Vol. II*).

Sisältö

Johdanto **1**

1 Aikalogiikat ja määriteltävyys **5**
1.1 Perusaikalogiikka 5
1.2 Bisimulaatio 9
1.3 Bijektion määriteltävyys 11
1.4 Until Since -logiikka 18
1.5 US-logiikan bisimulaatio 23
1.6 US- ja predikaattilogiikan vertaamisesta 25

2 Todistusteoriaa **28**
2.1 Käsitteitä 28
2.2 Pienin aikalogiikka 30
2.3 Luotettavuus 30
2.4 Täydellisyys 34

3 Modaliteeteista aikalogiikassa **42**

Viitteet **49**

Johdanto

Käsitteitä

Tässä työssä tutkitaan erilaisia modaalilogiikoita. Modaalilogiikoissa tarkastellaan relationaalisia struktuureja, jotka koostuvat tietystä joukosta ja siinä määritellystä relaatiosta. Modaaliset kielet tarjoavat sisäisen, lokaalin näkemyksen näistä struktuureista ([1], s. xi-xii). Kieli tarkoittaa tarkasteltavan logiikan kaavanmuodostussääntöjä. Modaalisten kielien rakenteeseen kuuluu oleellisesti erilaisia modaalioperaattoreita. Tavallisen (aleettisen) modaalilogiikan kielessä on yksi modaalioperaattori ($\Diamond$). *Multimodaalilogiikka* on modaalilogiikka, jonka kielessä on useampia sellaisia operaattoreita, jotka eivät palaudu toisiinsa. Tässä käsiteltävät aikalogiikat ovat esimerkkejä multimodaalilogiikoista, joissa on kaksi modaalioperaattoria.

Seuraavassa luonnehditaan havainnollisesti tässä työssä tarkasteltavia modaalioperaattoreita: Perusaikalogiikan operaattorien F ja P merkitykset ovat

$F\alpha$: lause α on tosi (vähintään kerran) tulevaisuudessa
$P\alpha$: lause α oli tosi (vähintään kerran) menneisyydessä.

Tarkastellaan esimerkkinä lausetta

$p =$ "Sarajevo on kaupunki Jugoslaviassa."

Jotta aikalogiikassa voitaisiin ottaa kantaa lauseen p totuuteen, täytyy ensin määritellä ajanhetki, jolloin lausetta tarkastellaan. Olkoot nämä hetket vuosia. Nyt p on tosi esimerkiksi hetkellä 1980, ja epätosi hetkellä 2004. Mutta kumpanakin näistä hetkistä lause Pp on tosi! Toisaalta esimerkiksi vuonna 1592 lause Fp on tosi.

Toisenlaisen Until Since -logiikan operaattorit U ja S ovat kaksipaikkaisia eli ne sitovat kaksi lausetta; toisin kuin perusaikalogiikan operattorit, jotka siis sitovat vain yhden lauseen. Ne tulkitaan seuraavasti

$U(\alpha, \beta)$: lause β on tosi siihen asti, kunnes lause α on tosi
$S(\alpha, \beta)$: lause β on ollut tosi siitä lähtien, kun lause α oli tosi.

Tarkastellaan nyt esimerkkilauseita

$q =$ "Kroatia on itsenäinen valtio"
$r =$ "Zagreb on valtion pääkaupunki."

Tällöin esimerkiksi lause $S(q, r)$ on tosi vuonna 2004.

Oletetaan, että jokin logiikka tulkitaan struktuuriluokassa $\mathcal{S}$. Olkoon $\mathcal{L}$ kyseisen logiikan hyvinmuodostettujen kaavojen joukko (kieli). Tällöin luokka $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ on *$\mathcal{L}$-määriteltävä*, jos on olemassa sellainen kaava $\alpha \in \mathcal{L}$, että α on tosi struktuurissa $S \in \mathcal{S}$ jos ja vain jos $S \in \mathcal{T}$.

Olkoot seuraavassa $\mathbf{L}_1$ ja $\mathbf{L}_2$ logiikoita, jotka tulkitaan samassa struktuuriluokassa $\mathcal{S}$. Olkoot lisäksi $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ vastaavasti näiden logiikoiden hyvinmuodostettujen kaavojen joukot. Tällöin kaavat $\alpha \in \mathcal{L}_1$ ja $\beta \in \mathcal{L}_2$ ovat *ekvivalentit*, jos α on tosi struktuurissa $S \in \mathcal{S}$ jos ja vain jos β on tosi (ts. jos näiden kaavojen totuusehdot eli tulkinnat struktuurissa $S \in \mathcal{S}$ ovat samanlaiset).

Lisäksi sanotaan, että logiikka $\mathbf{L}_1$ on *yhtä ilmaisuvoimainen kuin* $\mathbf{L}_2$, jos jokaisella $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ pätee, että luokka $\mathcal{T}$ on $\mathcal{L}_1$-määriteltävä jos ja vain jos se on $\mathcal{L}_2$- määriteltävä. (Vrt. [3], s. 17.)

Toisaalta logiikka $\mathbf{L}_1$ on *ilmaisuvoimaisempi kuin* $\mathbf{L}_2$, jos on olemassa sellainen $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$, että sitä vastaava logiikka on yhtä ilmaisuvoimainen kuin $\mathbf{L}_2$ ja on olemassa sellainen kaava $\alpha \in \mathcal{L}_1$, että se ei ole ekvivalentti minkään kaavan $\beta \in \mathcal{L}_2$ kanssa. Edellinen ehdoista siis tarkoittaa, että kaikki joukon $\mathcal{L}_2$ kaavat ovat ekvivalentteja jonkin joukon $\mathcal{L}_1$ kaavan kanssa.

Vielä määritellään, että logiikka $\mathbf{L}_1$ on *selvästi ilmaisuvoimaisempi kuin* $\mathbf{L}_2$, jos logiikka $\mathbf{L}_1$ on ilmaisuvoimaisempi kuin $\mathbf{L}_2$ ja on olemassa sellainen luokka $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, että se on $\mathcal{L}_1$-määriteltävä muttei ole $\mathcal{L}_2$- määriteltävä.

Kuten alussa mainittiin, modaalilogiikat tulkitaan struktuureissa, jotka koostuvat joukosta ja siinä määritellystä relaatiosta. Näin ollen edellisissä määritelmissä luokka $\mathcal{T}$ voidaan luonnehtia asettamalla relaatiolle jokin vaatimus. Lisäksi huomattavaa määritelmissä on, että koska tarkasteltavien logiikoiden semantiikkojen pitää olla samankaltaiset (eli ne pitää voida tulkita samanlaisessa mallissa), niin kaksi mielivaltaista logiikkaa eivät ole välttämättä vertailullisia "ilmaisuvoiman" suhteen. Tässä työssä käsiteltävät logiikat ovat vertailullisia ilmaisuvoiman suhteen.

Ilmaisuvoimaisempi kuin -määritelmän edellinen ehto on usein ilmeinen. Jälkimmäisen ehdon käsittelemiseksi jatkossa määritellään erityinen mallien välinen relaatio: *bisimulaatio*. Jos kahden mallin joidenkin tilojen välillä on tällainen relaatio, niin nämä tilat ovat tarkasteltavan semantiikan mielessä identtiset. Nyt jos löytyy kaksi mallia joiden välillä on logiikan $\mathbf{L}_2$ bisimulaatio ja toinen malli toteuttaa jonkin kaavan $\alpha \in \mathcal{L}_1$ mutta toinen malli ei toteuta sitä, niin edellä mainittu ehto on saatu todistettua.

Selvästi ilmaisuvoimaisempi kuin -määritelmän jälkimmäisen ehdon tapauksessa toimitaan samoin: etsitään kaksi mallia joiden välillä on logiikan $\mathbf{L}_2$ bisimulaatio ja joista toinen ei toteuta ja toinen toteuttaa jonkin $\mathcal{L}_1$-määriteltävän ominaisuuden.

Työn sisältö

Tämän työn ensimmäisessä luvussa esitellään perusaikalogiikan (aikalogiikan) ja Until Since -logiikan (US-logiikan) semantiikat. Lisäksi siinä määritellään kolme mallien välistä relaatiota: tavallisen modaalilogiikan, aika-

logiikan ja US-logiikan bisimulaatiot. Yllä esitetyllä tavalla bisimulaatioita hyödyntämällä näytetään, että aikalogiikka on tavallista modaalilogiikkaa selvästi ilmaisuvoimaisempi ja US-logiikka aikalogiikkaa ilmaisuvoimaisempi. Samalla todistetaan muutamia vastaavuustuloksia. Tämä tarkoittaa määriteltävyyden määritelmässä esiintyvän kaavan α ja sitä vastaavan luokan $\mathcal{T}$ etsimistä. Luvun lopussa määritellään vielä ns. ekspressiivinen täydellisyys, joka liittyy US- ja predikaattilogiikan ilmaisukyvyn vertaamiseen.

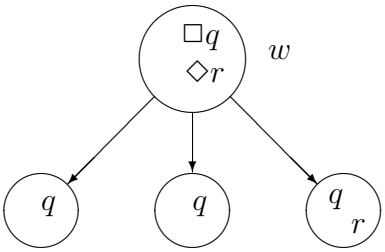
Toisessa luvussa käsitellään aikalogikkaa formaalisti todistusteorian kannalta; ensimmäisessä luvussa lähestymistapa oli lähinnä malliteoreettinen. Nyt määritellään täsmällisesti pienin aikalogiikka $\mathbf{K}_t$ ja todistetaan tämän täydellisyys. Täydellisyys osoittaa, että kaikissa aikalogiikan malleissa tosien kaavojen joukko on täsmälleen sama kuin $\mathbf{K}_t$-todistuvien kaavojen joukko.

Viimeisessä luvussa tutkitaan luonnolliseen aikakäsitykseen verrattavissa olevaa aikalogiikkaa ja modaliteettien määrää tässä logiikassa. Tällaisessa semantiikassa modaliteetti vastaa kysymyksiin: milloin, minkä ajan?

Tämän työn lukijan oletetaan hallitsevan klassisen logiikan ja tavallisen modaalilogiikan alkeet. Erityisesti modaalilogiikan Kripke-semantiikka on syytä tuntea, sillä aikalogiikan semantiikka on eräänlainen laajennettu Kripke-semantiikka. Luonnehditaan Kripke-semantiikkaa lyhyesti ja havainnollisesti: Lähtökohtana on joukko tiloja (mahdollisia maailmoja), joita yhdistävät tietyt saavutettavuusrelaatiot. Kaavan totuus tulkitaan tällaisessä tilassa, jossa on tosia tietyt atomilauseet. Kun modaalioperaattorit tulkitaan

$\Diamond\alpha$: jossain saavutettavassa tilassa on voimassa lause α
$\Box\alpha$: kaikissa saavutettavissa tiloissa on voimassa lause α

niin kaava voidaan ajatella automaatiksi, joka kyseisestä tilasta lähteviä relaatioita pitkin selvittää, ovatko vaaditut lauseet voimassa (vrt. [1], s. 67). Alla olevan kuvan maailmassa w toteutuu esimerkiksi kaava $\Diamond r$, sillä eräässä sen nuolen mukaan saavutettavissa olevassa maailmassa on tosi r.



Toisaalta luvun 2 ymmärtämisen kannalta todistusteoriasta on hyvä olla pohjatietoa, sillä vaikka keskeiset käsitteet on määritelty, esitellään ne melko luettelomaisesti. Lisäksi kaksi maksimaalisesti ristiriidattomia joukkoja

koskevaa tulosta otetaan käyttöön todistamatta niitä. Nämä tiedot, kuten tiedot Kripke-semantiikastakin sekä em. todistukset, voi hankkia esimerkisi kirjasta Rantala & Virtanen: Johdatus modaalilogiikkaan [7]. Pääasiallisina lähteinä työssä on käytetty teosta Blackburn et.al.: Modal Logic [1] ja artikkelia Burgess: Basic Tense Logic [2]. Näiden teosten kirjallisuusluetteloista löytyy lisää aihepiiriä käsitteleviä julkaisuja.

Aikalogiikan historiaa

Aikalogiikan perustajana voidaan pitää uusiseelantilaista Arthur Prioria (1914–1969). Hän aloitti työnsä aikalogiikan ja -filosofian parissa 1950-luvun alussa. Prior kehitti sekä modaalisia että ei-modaalisia aikalogiikoita, mutta tärkein hänen ajatuksistaan oli juuri se, että hän keksi antaa Saul Kripken (s. 1940) nimeä kantavalle mahdollisten maailmojen semantiikalle aikatulkinnan. Tämä intuitiiviseen aikakäsitykseen sopiva *tense logic*, kuten Prior sitä kutsui, oli (ja on) lähtökohtana suurelle edistykselle ja uusille ideoille logiikan piirissä. Esimerkiksi Hans Kampin (s. 1940) huomattavat saavutukset logiikan alalla ovat pohjautuneet Priorin työhön. Eräänlainen läpimurto aikalogiikan piirissä olikin Kampin keksimä Until Since -logiikka 60-luvun loppupuolella. US-logiikka on nimittäin "yhtäilmaisuvoimainen" Dedekind-täydellisten[1] lineaaristen järjestysten joukossa kuin yhden vapaan muuttujan ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka ([1], s. 429–430). Lineaarinen järjestys on antisymmetrinen, transitiivinen ja vertailullinen relaatio.[2] Koska predikaattilogiikka tulkitaan eri tavoin kuin modaalilogiikat, niin ilmaisuvoiman määritelmä vaatii tarkennusta, kun verrataan US-logiikkaa ja predikaattilogiikkaa. Tähän asiaan palataan täsmällisesti alaluvussa 1.6, mutta äskeinen tulos jää silloinkin maininnaksi.

Matematiikan lisäksi aikalogiikkaa voidaan soveltaa monilla muilla aloilla – esimerkiksi filosofiassa, kielitieteessä ja tietojenkäsittelytieteessä. 1970-luvulta alkaen aikalogiikka onkin tullut erityisen tärkeäksi tietojenkäsittelytieteiden sovelluksissa. Myös edellä mainitulla bisimulaation käsiteellä on sovelluksia. Se vastaa esimerkiksi prosessialgebran ongelmaan: mitkä siirtojärjestelmät (engl. *transition system*) vastaavat samaa prosessia? Lisäksi bisimulaatio liittyy läheisesti peliteoriaan – se on analoginen käsite voittostrategialle.

[1] Järjestetty joukko on Dedekind-täydellinen, kun sen jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä osajoukolla on pienin yläraja.

[2] Relaatio R on antisymmetrinen, kun $\forall x, y : xRyRx \Rightarrow x = y$.
Relaatio R on transitiivinen, kun $\forall x, y, z : xRzRy \Rightarrow xRy$.
Relaatio R on vertailullinen, kun $\forall x, y : xRy \vee yRx \vee x = y$.

1 Aikalogiikat ja määriteltävyys

1.1 Perusaikalogiikka

Aikalogiikan kieli saadaan lauselogiikan (propositiologiikan) kielestä lisäämällä siihen modaalioperaattorit F ja P. (Vrt. engl. *Future* ja *Past.*) Nyt kaavanmuodostussäännöt ovat:

- Atomilauseet p_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ ovat kaavoja.
- Jos α ja β ovat kaavoja, niin $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $F\alpha$ ja $P\alpha$ ovat kaavoja.
- Muita kaavoja ei ole.

Merkitään kaavoja kirjaimin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ja atomilauseita usein $p, q, r, \ldots$ Jatkossa symboleita $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\perp$ ja $\top$ käytetään tuttuun tapaan ja myös sulut jätetään kirjoittamatta normaalin käytännön mukaan. Lisäksi otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät

$$G\alpha = \neg F \neg \alpha \quad \text{ja} \quad H\alpha = \neg P \neg \alpha.$$

Kun muistetaan Johdanto-luvussa esitetty operaattorin F intuitiivinen merkitys, niin kaavan $G\alpha$ merkitykseksi tulee: $\neg\alpha$ ei tapahdu koskaan tulevaisuudessa, eli α tapahtuu aina tulevaisuudessa. (Vrt. engl. *something is always Going to be.*) Vastaavasti kaava $H\alpha$ merkitsee: α tapahtui aina menneisyydessä. (Vrt. engl. *something Has always been.*)

Kehys on struktuuri $F = \langle W, R \rangle$, jossa W on epätyhjä joukko ja $R \subseteq W \times W$. Jos lisäksi V on kuvaus atomilauseiden joukolta joukkoon $\mathcal{P}(W)$, niin struktuuri $M = \langle F, V \rangle = \langle W, R, V \rangle$ on (tavallisen modaalilogiikan) *malli.* Alempana määritellään mitä ominaisuuksia kehykseltä vaaditaan, jotta se olisi *aikalogiikan kehys. Aikalogiikan malli* on tavallisen modaalilogiikan malli, jossa kehys on aikalogiikan kehys.

Siis muodollisesti aikalogiikan ja tavallisen modaalilogiikan mallit ovat samanlaisia, mutta nyt voidaan ajatella, että joukon W alkiot ovat mahdollisia ajanhetkiä (jatkossa abstraktimmin "tiloja"), ja kehys $\langle W, R \rangle$ muodostaa (järjestetyn) ajanjakson, jossa relaatio R on "aikaisemmin kuin"-relaatio. Merkitään

$$M, w \vDash \alpha,$$

kun kaava α on tosi mallin M tilassa w. Tämä määritellään seuraavasti:

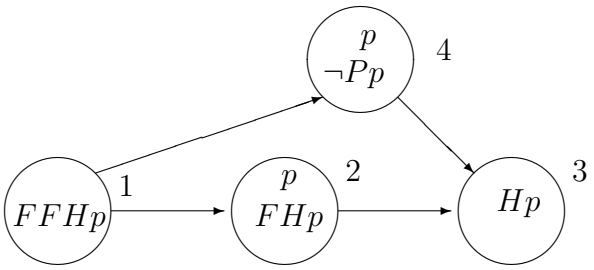
$$\begin{aligned} M, w \vDash p_i &\Leftrightarrow w \in V(p_i) \\ M, w \vDash \neg\alpha &\Leftrightarrow M, w \nvDash \alpha \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M, w \vDash \alpha \wedge \beta \quad &\Leftrightarrow \quad M, w \vDash \alpha \text{ ja } M, w \vDash \beta \\
M, w \vDash F\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \exists w' \in W : wRw' \ \wedge \ M, w' \vDash \alpha \\
M, w \vDash P\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \exists w' \in W : w'Rw \ \wedge \ M, w' \vDash \alpha.
\end{aligned}
$$

Siis totuusehtojen kannalta F ja P vastaavat täysin tavallisen modaalilogiikan operaattoria $\Diamond$; operaattorin P tapauksessa relaationa on vain R^{-1}. Nyt operaattoreita G ja H sisältävien kaavojen totuusmääritelmiksi saadaan

$$
\begin{aligned}
M, w \vDash G\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \forall w' \in W : (wRw' \Rightarrow M, w' \vDash \alpha) \\
M, w \vDash H\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \forall w' \in W : (w'Rw \Rightarrow M, w' \vDash \alpha).
\end{aligned}
$$

Alla olevassa kuvassa on havainnollistettu esimerkin vuoksi mallia $M = \langle W, R, V \rangle$, jossa $W = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 3)\}$ ja $V(p) = \{2, 4\}$ sekä $V(p_i) = \emptyset$, kun $p_i \neq p$. (Jatkossa tilanteen kannalta merkityksettömien atomilauseiden totuusjakaumat jätetään mainitsematta.)



Nyt siis tilassa 3 on tosi Hp eli $M, 3 \vDash Hp$, sillä tiloissa 2 ja 4 on voimassa p. Toisaalta $M, 4 \vDash \neg Pp$, koska se ei ole saavutettavissa mistään, missä p olisi totta. Siis aikalogiikan semantiikka on samanlainen kuin tavallisen modaalilogiikan Kripke-semantiikka, mutta nyt "nähdään" myös taaksepäin.

Jos $M, w \vDash \alpha$ aina, kun $w \in W$, niin sanotaan, että α on *validi mallissa* M, ja merkitään $M \vDash \alpha$. Vastaavasti jos $\langle F, V \rangle \vDash \alpha$, aina kun V on kehykseen F liittyvä kuvaus, niin sanotaan että α on *validi kehyksessä* F, ja merkitään $F \vDash \alpha$. Tarvittaessa voidaan kuvaus V laajentaa (rekursiivisesti) kuvaukseksi kaikkien kaavojen joukolta joukkoon $\mathcal{P}(W)$, jolloin siis

$$V(\alpha) = \{x \in W \mid M, x \vDash \alpha\}.$$

Yleisesti multimodaalilogiikoissa jokaiseen operaattoriin liittyy oma relaationsa. Siis täsmällisemmin operaattoreihin F ja P liittyy molempiin omat relaationsa R_F ja R_P. Tällöin malliksi on otettava struktuuri $\langle W, R_F, R_P, V \rangle$ ja silloin myös operaattorien F ja P totuusmääritelmät ovat täsmälleen kuten tavallisella operaattorilla $\Diamond$:

$$w \vDash \Diamond\alpha \Leftrightarrow \exists w' : wR_\Diamond w' \wedge w' \vDash \alpha.$$

Ajan intuitiivisen luonteen takia on kuitenkin luonnollista sopia, että operaattori P "katsoo" taaksepäin relaatiota R_F, jota F katsoo eteenpäin. Toisin sanoen $R_P = R_F^{-1}$. Tämän takia mallissa tarvitaan vain yksi relaatio R $(= R_F)$. Todetaan vielä seuraavassa lauseessa mitä tästä sopimuksesta seuraa.

Lause 1 Olkoon $W \neq \emptyset$ ja $R_F, R_P \subseteq W \times W$. Tällöin

$$R_P = R_F^{-1} \Leftrightarrow \langle W, R_F, R_P \rangle \vDash (p \to GPp) \wedge (p \to HFp).$$

(Vrt. [1], tehtävä 3.1.1.)

Todistus. Osoitetaan ensin ekvivalenssi

$$R_P \subseteq R_F^{-1} \Leftrightarrow \langle W, R_F, R_P \rangle \vDash p \to HFp. \qquad (*)$$

Oletetaan aluksi, että $R_P \subseteq R_F^{-1}$. Olkoon sitten $M = \langle W, R_F, R_P, V \rangle$ malli, jossa kuvaus V joukolle W on mielivaltainen. Oletetaan vielä, että $M, w \vDash p$, jollain $w \in W$. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että wR_Pw'. Nyt oletuksen $R_P \subseteq R_F^{-1}$ mukaan $w'R_Fw$, joten $M, w' \vDash Fp$. Koska wR_Pw' ja w' oli mielivaltainen, niin $M, w \vDash HFp$. Täten

$$\langle W, R_F, R_P \rangle \vDash p \to HFp.$$

Oletetaan sitten, että $\langle W, R_F, R_P \rangle \vDash p \to HFp$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen pari $(w, w') \in R_P$, että $(w, w') \notin R_F^{-1}$. Olkoon V sellainen kuvaus, että $V(p) = \{w\}$. Koska $(w', w) \notin R_F$ ja p toteutuu ainoastaan hetkellä w, niin $\langle W, R_F, R_P, V \rangle, w' \nvDash Fp$. Toisaalta wR_Pw', joten

$$\langle W, R_F, R_P, V \rangle, w \nvDash HFp.$$

Siis $\langle W, R_F, R_P, V \rangle \nvDash p \to HFp$, joten vastaoletus ei pidä paikkaansa.

Vastaavasti osoitetaan, että

$$R_F^{-1} \subseteq R_P \Leftrightarrow \langle W, R_F, R_P \rangle \vDash p \to GPp. \qquad (**)$$

Lause on voimassa, kun yhdistetään rivien $(*)$ ja $(**)$ tulokset. □

Olkoon

$$\mathcal{F} = \{\langle W, R_1, R_2 \rangle \mid W \neq \emptyset \text{ ja } R_1, R_2 \subseteq W \times W\}$$

kaikkien kehysten luokka suhteessa kieleen, jossa on kaksi modaalioperaattoria. Määritellään kaikkien *aikalogiikan kehysten luokka* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ seuraavasti

$$\langle W, R_1, R_2 \rangle \in \mathcal{F}_t \;\Leftrightarrow\; R_1^{-1} = R_2 \text{ ja } R_1 \text{ on antisymmetrinen.}$$

Aikalogiikan kehys on siis antisymmetrinen. Huomattavaa on, että teorian kannalta antisymmetrisyysoletusta ei tarvita missään tämän työn tuloksista. (Tosin lausetta 17 todistettaessa on "mukavaa", että luokka $\mathcal{F}_t$ on antisymmetrinen, mutta lause on voimassa myös ilman antisymmetrisyyttä.) Lisäksi on muistettava, että tässä aikalogiikan kehyksiltä ei vaadita muita ominaisuuksia – esimerkiksi irrefleksisyyttä[3].

Aikalogiikan kehysten luokkaa $\mathcal{F}_t$ voidaan kutsua myös kaksisuuntaisten kehysten luokaksi (vrt. [1], s. 21). Kuten edellä mainittiin, näistä kehyksistä puhuttaessa riittää mainita vain yksi relaatio (R_1). Koska lisäksi operaattorien alkuperäisten totuusmääritelmien nojalla aina on

$$\langle W, R\rangle \vDash (p \to GPp) \wedge (p \to HFp),$$

niin voidaakin kirjoittaa

$$\mathcal{F}_t = \{\langle W, R\rangle \mid W \neq \emptyset \text{ ja } \ R \subseteq W \times W \text{ on antisymmetrinen } \}.$$

Siis kaavat $p \to GPp$ ja $p \to HFp$ ovat aina tosia aikalogiikoissa. Tämä on myös semantiikan kannalta mielekästä[4]: jos p tapahtuu nyt, niin se on aina tulevaisuudessa mennyt tapahtuma (GPp), ja toisaalta se on aina menneisyydessä tuleva tapahtuma (HFp).

[3]Relaatio R on irrefleksiivinen, jos $\forall x : (x, x) \notin R$.

[4]Aikalogiikan tulkinnan kannalta olisi järkevää, että R olisi ainakin antisymmetrinen *ja* transitiivinen. Tässä olevissa teoreettisissa tarkasteluissa tulevaisuuden ja menneisyyden käsitteet hämärtyvät, kun kehyksen relaatiota ei oleteta transitiiviseksi: Esimerkiksi rakenne $xRyRx$ ei ole sallittu aikalogiikan kehyksessä, mutta suurempien rengasrakenteiden (syklien) olemassaoloa ei kielletä. Siis esimerkiksi rakenne $xRyRzRx$ on sallittu.

1.2 Bisimulaatio

Olkoot $M = \langle W, R, V \rangle$ ja $M' = \langle W', R', V' \rangle$ tavallisen modaalilogiikan malleja. Tällöin epätyhjä relaatio $Z \subseteq W \times W'$ on mallien M ja M' välinen *bisimulaatio*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) Jos wZw', niin $M, w \vDash p_i \Leftrightarrow M', w' \vDash p_i$ aina, kun $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(2) Jos wZw' ja $w'R'v'$, niin $\exists v \in W : vZv'$ ja wRv.

(3) Jos wZw' ja wRv, niin $\exists v' \in W' : vZv'$ ja $w'R'v'$.

Jos wZw', niin sanotaan, että tilat w ja w' ovat *bisimilaariset*. (Vrt. [7], s. 213.)

Lause 2 Olkoon $Z \subseteq W \times W'$ mallien $M = \langle W, R, V \rangle$ ja $M' = \langle W', R', V' \rangle$ välinen bisimulaatio. Jos tilat $w \in W$ ja $w' \in W'$ ovat bisimilaariset, niin

$$M, w \vDash \alpha \Leftrightarrow M', w' \vDash \alpha,$$

jokaisella modaalilogiikan kaavalla α.

Lause 2 todistetaan induktiolla kaavan α rakenteen suhteen: ks. esimerkiksi [7], s. 213–214.

Edellisen lauseen mukaan siis mikään modaalilogiikan kaava ei erota kahta bisimilaarista maailmaa. Johdannossa esitetyn "kaavat automaatteina"-havainnollistuksen mukaan tämä tarkoittaa sitä, että automaatti ei huomaa eroa, jos se siirretään bisimilaarisesta tilasta toiseen. Mutta koska nämä automaatit toimivat lokaalisti eli ne näkevät vain naapuritiloihinsa (relaation mielessä), niin mallit, joiden välillä on bisimulaatio, voivat olla hyvinkin erilaisia. Esimerkkejä tällaisistä malleista ja bisimulaatioista yleensäkin on esimerkiksi lauseiden 4 ja 5 todistuksissa.

Aikalogiikan mallien M ja M' välinen *aikalogiikan bisimulaatio* Z saadaan, kun lisätään bisimulaation määritelmään ehdot:

(4) Jos wZw' ja $v'R'w'$, niin $\exists v \in W : vZv'$ ja vRw.

(5) Jos wZw' ja vRw, niin $\exists v' \in W' : vZv'$ ja $v'R'w'$.

Lausetta 2 vastaava tulos on voimassa aikalogiikassa:

Lause 3 Jos aikalogiikan mallien välillä on aikalogiikan bisimulaatio, niin tällöin kaksi bisimilaarista tilaa toteuttavat täsmälleen samat aikalogiikan kaavat. (Vrt. [1] s. 67 ja 70.)

Todistus. Todistus tapahtuu induktiolla aikalogiikan kaavan rakenteen suhteen. Koska aikalogiikan bisimulaatio on tavallisen modaalilogiikan bisimulaatio ja aikalogiikan kieli eroaa modaalilogiikan kielestä vain operaattorin P osalta, niin lauseen 2 mukaan riittää tutkia tapaus $P\alpha$, jossa kaavalle α on voimassa induktio-oletus. Olkoon siis M ja M' malleja, joiden välillä on bisimulaatio Z. Induktio-oletus on

$$\text{jos } wZw', \text{ niin } M, w \vDash \alpha \Leftrightarrow M', w' \vDash \alpha.$$

Oletetaan, että $M, w \vDash P\alpha$ ja wZw'. Nyt operaattorin P määritelmän mukaan

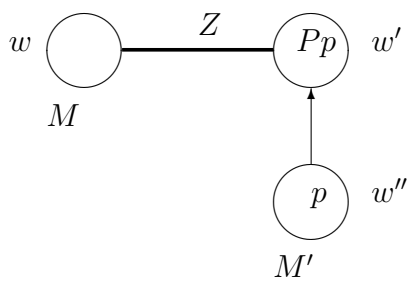
$$\exists v : vRw \wedge M, v \vDash \alpha.$$

Edelleen bisimulaation määritelmän kohdan (5) mukaan on olemassa sellainen v', että vZv' ja $v'R'w'$. Koska vZv' ja $M, v \vDash \alpha$, niin induktio-oletuksen mukaan $M', v' \vDash \alpha$. Koska lisäksi $v'R'w'$, niin $M', w' \vDash P\alpha$. Täten

$$M, w \vDash P\alpha \Rightarrow M', w' \vDash P\alpha.$$

Implikaatio toiseen suuntaan saadaan vastaavasti käyttämällä bisimulaation määritelmän kohtaa (4). □

Tarkastellaan alla olevan kuvan mukaisia malleja $M = \langle \{w\}, \emptyset, V \rangle$ ja $M' = \langle \{w', w''\}, \{(w'', w')\}, V' \rangle$, joiden tiloissa w ja w' ovat tosia täsmälleen samat atomilauseet. Nyt nämä mallit osoittavat, että perusaikalogiikan kaava Pp ei ole ekvivalentti minkään tavallisen modaalilogiikan kaavan kanssa: Selvästi relaatio $Z = \{(w, w')\}$ on mallien M ja M' välinen bisimulaatio, koska määritelmän ehdot (2) ja (3) ovat triviaalisti voimassa. Siis tilat w ja w' ovat bisimilaariset tavallisen modaalilogiikan mielessä. Täten lauseen 2 mukaan ne toteuttavat samat kaavat. Kuitenkin Pp on tosi vain tilassa w'.



Yllä esitetyn havainnon mukaan perusaikalogiikka on ilmaisuvoimaisempi kuin tavallinen modaalilogiikka (ks. määrielmä johdannosta). Nimittäin selvästi se perusaikalogiikan "osakieli", joka ei sisällä operaattoria P, on yhtä ilmaisuvoimainen kuin tavallinen modaalilogiikka (koska nämä kielet eroavat vain operaattoreiden $\Diamond$ ja F suhteen ja kaavat $\Diamond p$ ja Fp ovat ekvivalentit).

1.3 Bijektion määriteltävyys

Alla tarkastellaan joitakin kehysvastaavuuksia. Kehysvastaavuudella tarkoitetaan, että tietyn muotoisen kaavan validisuus kehyksessä on yhtäpitävää määrätyn kehykseen liittyvän relaation ominaisuuden kanssa. Tällöin sanotaan, että kyseinen kaava *määrittelee* tämän omimaisuuden. Koska relaation ominaisuus määrää kehysluokan, niin määritelmä voidaan myös muotoilla: kaava α määrittelee kehysluokan $\mathcal{F}^*$, jos jokaisella kehyksellä F pätee

$$F \in \mathcal{F}^* \Leftrightarrow F \vDash \alpha.$$

Huomattavaa on, että kaava α ei ole syntaktisesti yksikäsitteinen – ratkaisevaa on sen looginen muoto. Siis jos α määrittelee jonkin ominaisuuden, niin sen määrittelee myös kaava α', joka on saatu kaavasta α korvaamalla siinä esiintyvän tietyn atomilauseen kaikki esiintymät jollain muulla atomilla.

Todistetaan ensin eräs jatkossa hyödyllinen tavallisen modaalilogiikan vastaavuustulos (vrt. [7], s. 210):

Aputulos 1 Olkoon $\langle W, R\rangle$ tavallisen modaalilogiikan kehys. Tällöin

$$\langle W, R\rangle \vDash \Box p \leftrightarrow \Diamond p \quad \Leftrightarrow \quad R \text{ on kuvaus.}$$

Todistus. Validisuus $\langle W, R\rangle \vDash \Box p \leftrightarrow \Diamond p$ on voimassa, jos ja vain jos $\langle W, R\rangle \vDash \Box p \rightarrow \Diamond p$ ja $\langle W, R\rangle \vDash \Diamond p \rightarrow \Box p$. Tarkastellaan näitä kahta implikaatiomuotoista kaavaa – osoittautuu nimittäin, että ne vastaavat kuvauksen määritelmän kahta ehtoa. Näytetään siis, että

$$\langle W, R\rangle \vDash \Diamond p \rightarrow \Box p \Leftrightarrow \forall w_1, w_2, w_3 \in W : (w_1 R w_2 \wedge w_1 R w_3 \Rightarrow w_2 = w_3) \quad (1)$$

ja

$$\langle W, R\rangle \vDash \Box p \rightarrow \Diamond p \Leftrightarrow \forall w \in W : \exists w' \in W : wRw'. \quad (2)$$

Oletetaan ensin, että $\langle W, R\rangle \vDash \Diamond p \rightarrow \Box p$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellaiset $w_1, w_2, w_3 \in W$, että $w_1 R w_2, w_1 R w_3$ ja $w_2 \neq w_3$. Olkoon $M = \langle W, R, V\rangle$ malli, missä $V(p) = \{w_2\}$. Nyt vastaoletuksen mukaan $M, w_1 \vDash \Diamond p$, ja toisaalta pätee $M, w_1 \nvDash \Box p$. Siis $\langle W, R\rangle \nvDash \Diamond p \rightarrow \Box p$, mikä on ristiriita.

Oletetaan sitten, että R toteuttaa ekvivalenssin (1) oikean puolen. Olkoon $M = \langle W, R, V\rangle$ malli, $w \in W$ ja $M, w \vDash \Diamond p$. Siis on olemassa $w' \in W$, jolla wRw' ja $M, w' \vDash p$. Olkoon wRw''. Nyt oletuksen mukaan $w' = w''$, eli $M, w'' \vDash p$. Siis $M, w \vDash \Box p$. Näin ollen $\langle W, R\rangle \vDash \Diamond p \rightarrow \Box p$.

Täten ekvivalenssi (1) on voimassa.

Oletetaan seuraavaksi, että $\langle W, R\rangle \vDash \Box p \rightarrow \Diamond p$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $w \in W$, että wRw' ei päde millään $w' \in W$. Olkoon

$M = \langle W, R, V \rangle$. Nyt vastaoletuksen mukaan $M, w \vDash \Box p$ (tyhjä ehto), joten oletuksen mukaan $M, w \vDash \Diamond p$. Täten on olemassa sellainen $w' \in W$, että wRw', mikä on ristiriita.

Oletetaan lopuksi, että relaatio R toteuttaa ekvivalenssin (2) oikean puolen. Olkoon $M = \langle W, R, V \rangle$ malli, $w \in W$ ja $M, w \vDash \Box p$. Siis on olemassa $w' \in W$, jolla wRw', joten $M, w \vDash \Diamond p$. Siis $\langle W, R \rangle \vDash \Box p \to \Diamond p$.

Täten myös ekvivalenssi (2) on voimassa. $\Box$

Edellä esiteltyä bisimulaatiota koskevaa lausetta 2 voidaan kätevästi soveltaa, kun halutaan näyttää, että jotain ominaisuutta ei voida määritellä tavallisella modaalilogiikalla. Alla "modaalilogiikka" tarkoittaa tavallista modaalilogiikkaa.

Lause 4 Mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele sitä, että kehyksen relaatio on injektio[5].

Todistus. Tehdään vastaoletus, että on olemassa modaalilogiikan kaava α, joka määrittelee relaation injektio-ominaisuuden. Tällöin siis

$$\langle W, R \rangle \vDash \alpha \Leftrightarrow R \text{ on injektio.}$$

Olkoon $F = \langle W, R \rangle$ kehys, jossa $W = \{w, w'\}$ ja $R = \{(w, w), (w', w)\}$. Täten vastaoletuksen mukaan $F \nvDash \alpha$, eli on olemassa sellainen malli $M = \langle F, V \rangle$, että $M \nvDash \alpha$.

Olkoon sitten $M' = \langle W', R', V' \rangle$ malli, jossa $W' = \mathbb{N}$, $R' = \{(n, n+1) |\ n \in \mathbb{N}\}$ ja määritellään kuvaus V' jokaisella atomilauseella p seuraavaasti

$$V'(p) = \begin{cases} \{0\}, & \text{jos } V(p) = \{w'\} \\ \mathbb{N} \setminus \{0\}, & \text{jos } V(p) = \{w\} \\ \mathbb{N}, & \text{jos } V(p) = W \\ \emptyset & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Voidaan todeta (käymällä bisimulaation määritelmän ehdot (1)–(4) läpi), että relaatio

$$Z = \{(w', 0)\} \cup \{(w, n) |\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

on bisimulaatio mallien M ja M' välillä. Nyt $M' \vDash \alpha$, sillä R' on injektio. Tämä on ristiriita, sillä lauseesta 2 seuraa (koska molempien mallien jokainen maailma on bisimilaarinen jonkin toisen mallin maailman kanssa), että mallien M ja M' pitäisi toteuttaa täsmälleen samat kaavat. $\Box$

[5]Kuvaus on injektio, kun kaikki määrittelyjoukon alkiot kuvautuvat eri alkioiksi.

Huomattavaa edellisen, ja myös seuraavan, lauseen todistusmenetelmässä on, että kuvaus V saadaan vastaoletuksesta ja kuvaus V' konstruoidaan tämän avulla.

Lause 5 Mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele sitä, että kehyksen relaatio on surjektio[6].

Todistus. Tehdään vastaoletus, että on olemassa modaalilogiikan kaava α, joka määrittelee relaation surjektio-ominaisuuden. Tällöin siis

$$\langle W, R\rangle \vDash \alpha \Leftrightarrow R \text{ on surjektio.}$$

Olkoon F sama kehys kuin edellisen lauseen todistuksessa, jolloin nytkin on olemassa sellainen malli $M = \langle F, V\rangle$, että $M \nvDash \alpha$.

Olkoon sitten $M' = \langle W', R', V'\rangle$ malli, jossa $W' = \mathbb{N}$, $R' = \{(0,0)\} \cup \{(n+1, n) |\ n \in \mathbb{N}\}$ ja

$$V'(p) = \begin{cases} \{0\}, & \text{jos } V(p) = \{w\} \\ \{1\}, & \text{jos } V(p) = \{w'\} \\ \{0,1\}, & \text{jos } V(p) = W \\ \emptyset & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Voidaan todeta, että relaatio

$$Z = \{(w, 0), (w', 1)\}$$

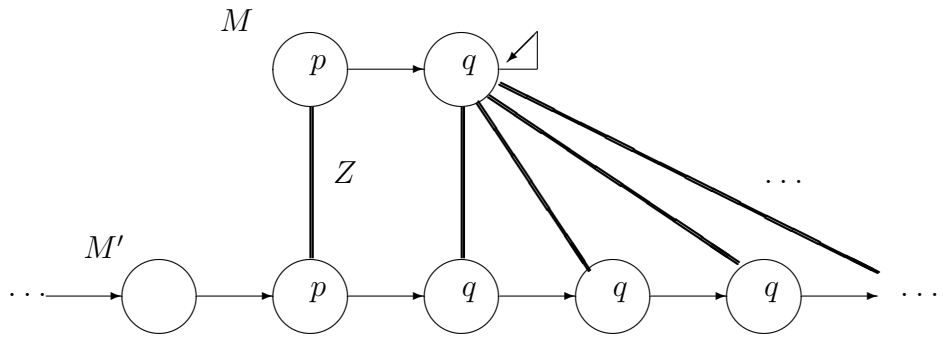
on bisimulaatio mallien M ja M' välillä. Nyt $M' \vDash \alpha$, sillä R' on surjektio, joten $M', 0 \vDash \alpha$ ja $M', 1 \vDash \alpha$. Kuitenkin joko $M, w \nvDash \alpha$ tai $M, w' \nvDash \alpha$, mikä on lauseen 2 mukaan ristiriita. □

Tavoittena on vakuuttua siitä, että mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele bijektiivisyyttä eli sitä, että kuvaus on sekä injektio että surjektio. Vaikka lauseet 4 ja 5 antavat aihetta otaksua, että näin olisi, niin tutkitaan asiaa tarkemmin seuraavassa lauseessa.

Lause 6 Mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele, sitä että kehyksen relaatio on bijektio.

Lauseen todistus on edellisten kaltainen – tyydytään nyt selostamaan asia kuvan avulla. Alla olevassa kuvassa mallien M ja M' välillä on bisimulaatio Z (paksut viivat). Koska mallin M relaatio ei ole bijektio, mutta mallin M' relaatio on, niin ei voi olla olemassa modaalilogiikan kaavaa, joka määrittelisi bijektiivisyyden.

[6]Kuvaus on surjektio, kun jokaisella maalijoukon alkiolla on alkukuva.



Olkoon tästä eteenpäin $\langle W, R\rangle$ perusaikalogiikan kehys, ts. $\langle W, R\rangle \in \mathcal{F}_t$. Aputuloksen 1 mukaan aikalogiikassa on siis voimassa:

$$\langle W, R\rangle \vDash Fp \leftrightarrow Gp \Leftrightarrow R \text{ on kuvaus.}$$

Jos edellisen lisäksi $\langle W, R\rangle \vDash Pp \to Hp$, niin R on injektio, ja jos $\langle W, R\rangle \vDash Hp \to Pp$, niin R on surjektio. Näiden tulosten yhdistelmä todistetaan lauseessa 8, jota ennen suoritetaan joitakin yleisempiä tarkasteluja.

Määritellään aikalogiikan kaavan α *peilikuva* α^m seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(p_i)^m &= p_i, \quad i \in \mathbb{N} \\
(\neg\alpha)^m &= \neg\alpha^m \\
(\alpha \wedge \beta)^m &= \alpha^m \wedge \beta^m \\
(F\alpha)^m &= P\alpha^m \\
(P\alpha)^m &= F\alpha^m.
\end{aligned}$$

Peilikuvan ottaminen tarkoittaa siis tapahtuman peilaamista nykyhetken suhteen: menneisyydestä tulee tulevaisuutta, ja päinvastoin (vrt. [1], s. 427, [2], s. 92). Helposti huomataan, että esimerkiksi $(\alpha \to \beta)^m = \alpha^m \to \beta^m$, $(G\alpha)^m = H\alpha^m$ ja $(H\alpha)^m = G\alpha^m$.

Aputulos 2 Olkoon $\langle W, R\rangle \in \mathcal{F}_t$. Tällöin

$$\langle W, R\rangle \vDash \alpha \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}\rangle \vDash \alpha^m.$$

Todistus. Valitaan kuvaus V, ja todistetaan induktiolla, että

$$\langle W, R, V\rangle \vDash \alpha \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}, V\rangle \vDash \alpha^m.$$

Tällöin lause on voimassa, koska V on mielivaltainen.

Olkoon $w \in W$. Tällöin

$$\langle W, R, V\rangle, w \vDash p_i \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash p_i \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash (p_i)^m,$$

sillä relaatiolla ei ole vaikutusta atomilauseen totuuteen. Siis asia on kunnossa, kun α on atomilause.

Olkoon induktio-oletus (I.O.), että

$$\langle W, R, V\rangle, w \vDash \beta \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash \beta^m \quad \text{ja}$$

$$\langle W, R, V\rangle, w \vDash \gamma \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash \gamma^m,$$

jokaisella $w \in W$. Käydään läpi seuraavat tapaukset

- $\alpha = \neg\beta$:

$$\begin{aligned} & \langle W, R, P\rangle, w \vDash \neg\beta \Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \nvDash \beta \overset{I.O.}{\Leftrightarrow} \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \nvDash \beta^m \\ \Leftrightarrow\ & \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash \neg\beta^m \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash (\neg\beta)^m. \end{aligned}$$

- $\alpha = \beta \wedge \gamma$:

$$\begin{aligned} & \langle W, R, V\rangle, w \vDash \beta \wedge \gamma \\ \Leftrightarrow\ & \langle W, R, V\rangle, w \vDash \beta \text{ ja } \langle W, R, V\rangle, w \vDash \gamma \\ \overset{I.O.}{\Leftrightarrow}\ & \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash \beta^m \text{ ja } \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash \gamma^m \\ \Leftrightarrow\ & \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash \beta^m \wedge \gamma^m \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash (\beta \wedge \gamma)^m. \end{aligned}$$

- $\alpha = F\beta$:

$$\begin{aligned} & \langle W, R, V\rangle, w \vDash F\beta \\ \Leftrightarrow\ & \exists w' \in W : wRw' \text{ ja } \langle W, R, V\rangle, w' \vDash \beta \\ \overset{I.O.}{\Leftrightarrow}\ & \exists w' \in W : wRw' \text{ ja } \langle W, R^{-1}, V\rangle, w' \vDash \beta^m \\ \Leftrightarrow\ & \exists w' \in W : w'R^{-1}w \text{ ja } \langle W, R^{-1}, V\rangle, w' \vDash \beta^m \\ \Leftrightarrow\ & \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash P\beta^m \\ \Leftrightarrow\ & \langle W, R^{-1}, V\rangle, w \vDash (F\beta)^m. \end{aligned}$$

- $\alpha = P\beta$: todistetaan vastaavasti kuin edellinen kohta.

Täten induktioperiaatteen mukaan $\langle W, R, V\rangle \vDash \alpha \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}, V\rangle \vDash \alpha^m$, jokaisella aikalogiikan kaavalla α. $\square$

Lause 7 Olkoon $\langle W, R\rangle \in \mathcal{F}_t$ ja tarkoittakoon merkintä $\mathcal{O}(R)$, että relaatiolla R on ominaisuus $\mathcal{O}$. Tällöin

$$\langle W, R\rangle \vDash \alpha \Leftrightarrow \mathcal{O}(R) \text{ jos ja vain jos } \langle W, R\rangle \vDash \alpha^m \Leftrightarrow \mathcal{O}(R^{-1}).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\langle W, R\rangle \vDash \alpha \Leftrightarrow \mathcal{O}(R)$, jokaisella $R \subseteq W^2$. On helppo todeta, että $(\alpha^m)^m = \alpha$, joten aputuloksesta 2 seuraa

$$\langle W, R\rangle \vDash \alpha^m \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}\rangle \vDash \alpha.$$

Tällöin $\quad \langle W, R\rangle \vDash \alpha^m \Leftrightarrow \langle W, R^{-1}\rangle \vDash \alpha \overset{\text{oletus}}{\Leftrightarrow} \mathcal{O}(R^{-1})$.

Oletetaan sitten, että

$$\langle W, R\rangle \vDash \alpha^m \Leftrightarrow \mathcal{O}(R^{-1}).$$

Nyt $\quad \langle W, R\rangle \vDash \alpha \overset{\text{Aputulos 2.}}{\Leftrightarrow} \langle W, R^{-1}\rangle \vDash \alpha^m \overset{\text{oletus}}{\Leftrightarrow} \mathcal{O}((R^{-1})^{-1}) \Leftrightarrow \mathcal{O}(R)$. □

Tarkastellaan esimerkkinä edellisen tuloksen käyttämisestä tunnettua tietoa: kaava $p \to Fp$ määrittelee kehyksen relaation R refleksisyyden. Nyt siis lauseen 7 mukaan $\langle W, R\rangle \vDash p \to Pp \quad [= (p \to Fp)^m]$, jos ja vain jos relaatio R^{-1} on refleksinen. Alla on lisää esimerkkejä lauseen 7 soveltamisesta.

Lause 8 Olkoon $\langle W, R\rangle \in \mathcal{F}_t$. Tällöin

$$\langle W, R\rangle \vDash (Gp \leftrightarrow Fp) \wedge (Hp \leftrightarrow Pp) \Leftrightarrow R \text{ on bijektio.}$$

Todistus. Oletetaan ensin, että R on bijektio. Tällöin R ja R^{-1} ovat molemmat kuvauksia. Koska R on kuvaus, niin aputuloksen 1 mukaan $\langle W, R\rangle \vDash Gp \leftrightarrow Fp$. Koska myös R^{-1} on kuvaus, niin lauseen 7 ja edellisen havainnon mukaan $\langle W, R\rangle \vDash Pp \leftrightarrow Hp$, sillä $(Gp \leftrightarrow Fp)^m = Pp \leftrightarrow Hp$. Näin ollen haluttu konjunktio on validi kehyksessä $\langle W, R\rangle$.

Oletetaan sitten, että $\langle W, R\rangle \vDash (Gp \leftrightarrow Fp) \wedge (Hp \leftrightarrow Pp)$, ja tehdään vastaoletus, että R ei ole bijektio. Nyt siis R tai R^{-1} ei ole kuvaus. Oletetaan, että R ei ole kuvaus. Nyt aputuloksen 1 mukaan $\langle W, R\rangle \nvDash Fp \leftrightarrow Gp$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Vastaavasti päädytään ristiriitaan, jos R^{-1} ei ole kuvaus. □

Nyt perusaikalogiikka on selvästi ilmaisuvoimaisempi kuin tavallinen modaalilogiikka (ks. määrielmä johdannosta). Nimittäin edellisen alaluvun mukaan ilmaisuvoimaisempi kuin -suhde on voimassa ja lisäksi bijektiivisten aikalogiikan kehysten luokka on määriteltävissä edellissä logiikassa lauseen 8 mukaan, mutta se ei ole määriteltävissä jälkimmäisellä logiikalla (lause 6). Tämä vahvemmuus on voimassa suhteessa struktuuriluokkaan $\mathcal{F}_t$.

Myös esimerkiksi surjektiivisten aikalogiikan kehysten luokka sopisi edellisen päätelmän tekoon: Olkoon R kuvaus. Jos aputuloksen 1 todistuksessa olevassa ehdossa (2) R korvataan relaatiolla R^{-1}, niin saadaan surjektion määritelmä. Siis

$$\begin{aligned} R \text{ on surjektio} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall w \in W : \exists w' \in W : wR^{-1}w' \\ &\overset{\text{em. ehto (2)}}{\Leftrightarrow} \quad \langle W, R^{-1} \rangle \vDash Gp \to Fp \\ &\Leftrightarrow \quad \langle W, R \rangle \vDash Hp \to Pp, \end{aligned}$$

missä viimeinen ekvivalenssi on voimassa aputuloksen 2 mukaan. Toisaalta on todistettu lause 5.

Siis lause $\langle W, R \rangle \nvDash (Gp \leftrightarrow Fp) \wedge (Hp \leftrightarrow Pp)$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $R \subseteq W \times W$ ei ole bijektio. Huomattavaa on kuitenkin, että esimerkiksi kaava $\neg((Gp \leftrightarrow Fp) \wedge (Hp \leftrightarrow Pp))$ ei määrittele "ei-bijektiivisyyttä"; nimittäin tarkoittaahan merkintä

$$\langle W, R \rangle \vDash \alpha,$$

että jokaisella V on voimassa $\langle W, R, V \rangle \vDash \alpha$, kun taas merkintä

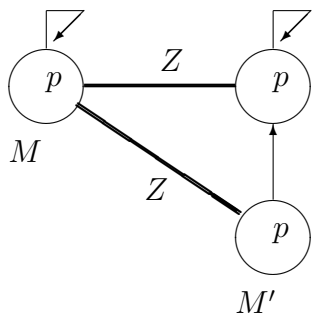
$$\langle W, R \rangle \nvDash \alpha$$

tarkoittaa, että on olemassa sellainen V, että $\langle W, R, V \rangle \nvDash \alpha$.

Näin ollen on mielekästä kysyä, että voisiko tavallisessa modaalilogiikassa olla kaavaa, joka määrittelee bijektiivisyyden kiellon? Lause 9 osoittaa, että vastaus on kielteinen.

Lause 9 Mikään tavallisen modaalilogiikan kaava ei määrittele kehyksen relaation ominaisuutta "ei-surjektio" tai "ei-injektio".

Perustellaan lause taas kuvan avulla.



Kuvassa siis mallin M relaatio on bijektio, ja mallin M' relaatio ei ole injektio eikä surjektio. Kuitenkin näiden mallien välillä on bisimulaatio Z (paksut viivat), joten lause 9 on voimassa.

1.4 Until Since -logiikka

Perusaikalogiikkaa ilmaisuvoimaisemman Until Since - eli US-logiikan kieli saadaan lauselogiikan kielestä ottamalla käyttöön binääriset operaattorit U ja S. Siis jos α ja β ovat kaavoja, niin myös $U(\alpha, \beta)$ ja $S(\alpha, \beta)$ ovat kaavoja, jotka voidaan lukea seuraavasti

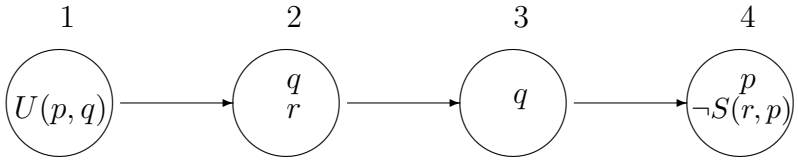
$U(\alpha, \beta)$: kaava β on tosi siihen asti, kunnes kaava α on tosi
$S(\alpha, \beta)$: kaava β on ollut tosi siitä lähtien, kun kaava α oli tosi.

US-logiikan malli on samanlainen kuin perusaikalogiikassa. Uusien operaattorien totuusehdot mallissa $M = \langle W, R, V \rangle$ ja hetkellä $w \in W$ ovat

$$\begin{aligned} &M, w \vDash U(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \\ &\exists w' \in W : (wRw' \text{ ja } M, w' \vDash \alpha \text{ ja } \forall v \in W : (wRvRw' \Rightarrow M, v \vDash \beta)), \\ &M, w \vDash S(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \\ &\exists w' \in W : (w'Rw \text{ ja } M, w' \vDash \alpha \text{ ja } \forall v \in W : (w'RvRw \Rightarrow M, v \vDash \beta)). \end{aligned}$$

Siis operaattorit U ja S ovat ikäänkuin toistensa peilikuvat: S "katsoo" relaatiota R toiseen suuntaan kuin U. Huomattavaa on, että kumpikaan operaattoreista ei vaadi kaavan β toteutumista tarkasteluhetkellä w (ellei ole wRw), ja että relaatiosta R ei oleteta muuta kuin antisymmetrisyys – myös US-logiikan kaavat tulkitaan kaksisuuntaisten kehysten luokassa $\mathcal{F}_t$.

Tarkastellaan esimerkkinä seuraavan kuvan tilannetta ja pidetään kuvan relaatiota transitiivisena, vaikka transitiivisuuden vaatimat nuolet onkin jätetty piirtämättä. (Nuolet osoittavat "tulevaisuuteen".)

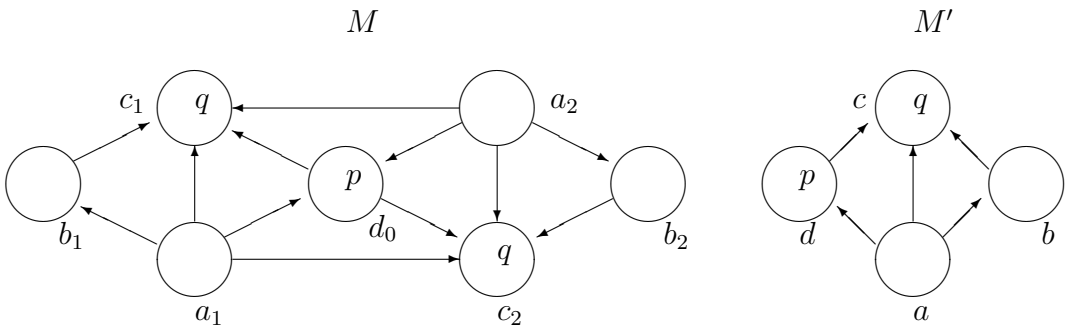


Tilassa 1 on voimassa kaava $U(p, q)$, koska on olemassa tulevaisuuden tila, jossa on tosi p, ja jokaisessa tilassa ennen sitä on tosi q.

Helposti nähdään, että $U(\alpha, \top)$ on ekvivalentti kaavan $F\alpha$ kanssa ja vastaavasti $S(\alpha, \top)$ ja $P\alpha$ ovat ekvivalentit.[7] Siis US-logiikan kielen osa, joka sisältää vain kaavoja muotoa $U(\alpha, \top)$ ja $S(\alpha, \top)$ lauselogiikan kaavojen lisäksi on yhtä ilmaisuvoimainen kuin perusaikalogiikka. Täten edellisen alaluvun mukaan esimerkiksi bijektio voidaan määritellä US-logiikalla.

[7] Looginen totuus $\top$ voidaan määritellä kaavalla $p \vee \neg p$. Looginen epätotuus $\bot$ on edellisen negaatio.

Seuraavassa kuvassa annetut mallit M ja M' osoittavat, että operaattoria U ei voi määritellä operaattorien F ja P avulla (vrt. [1], tehtävä 2.2.4.).



Kuvassa siis $M, a_1 \vDash U(q,p)$, sillä kaikilla reiteillä tilasta a_1 tilaan c_2, missä on totta q, on tosi p. (Tällaisia reittejä on vain yksi, kun suoraa yhteyttä (a_1, c_2) ei lasketa.) Toisaalta selvästi $M', a \nvDash U(q,p)$. Kuitenkin voidaan todeta käymällä aikalogiikan bisimulaation määritelmän ehdot (1)-(5) läpi, että relaatio

$$Z = \{(d_0, d), (a_1, a), (a_2, a), (b_1, b), (b_2, b), (c_1, c), (c_2, c)\}$$

on bisimulaatio mallien M ja M' välillä. Nyt lauseen 3 mukaan mikään aikalogiikan kaava ei erota malleja M ja M', joten kaava $U(q,p)$ ei ole ekvivalentti mikään perusaikalogiikan kaavan kanssa. Täten US-logiikka on ilmaisuvoimaisempi kuin perusaikalogiikka (jälleen suhteessa struktuuriluokkaan $\mathcal{F}_t$).

Vertaillaan vielä (esimerkinomaisesti) perusaika- ja US-logiikkaa määrittelemällä eräs ominaisuus sekä edellisen että jälkimmäisen logiikan kaavan avulla. Määritellään relaation diskreettisyys tiheyden[8] "vastakohdaksi": relaatio $R \subseteq W \times W$ on *diskreetti*, jos kaikilla $w \in W$ on voimassa ehdot:

- Jos tilalla w on R-seuraaja, niin sillä on välitön R-seuraaja.
- Jos tilalla w on R-edeltäjä, niin sillä on välitön R-edeltäjä.

Siis formaalisti: $\forall w \in W$:

[8]Relaatio R on tiheä, jos $\forall x \forall y : xRy \Rightarrow \exists z : (x \neq z \neq y \wedge xRzRy)$. Joskus tiheyden määritelmässä ei ole $\neq$-vaatimusta, mutta se on tässä oleellinen: nimittäin kun "löyhempi" määritelmä on käytössä, niin kaava $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$ määrittelee tiheyden.

$$\exists v : (v \neq w \wedge wRv) \Rightarrow \exists w' : (w' \neq w \wedge wRw' \wedge \neg\exists v : (w \neq v \neq w' \wedge wRvRw'))$$

ja

$$\exists v : (v \neq w \wedge vRw) \Rightarrow \exists w' : (w' \neq w \wedge w'Rw \wedge \neg\exists v : (w \neq v \neq w' \wedge w'RvRw)).$$

Havainnollisesti sanottuna diskreetti relaatio R ei "järjestä" joukkoon W lainkaan tiheitä kohtia. Huomattavaa on, että yleensä relaation diskreettisyydestä (ja tiheydestä) puhutaan vain lineaaristen järjestysrelaatioiden tapauksissa. Koska lineaarisuutta ei tässä vaadittu, niin välitön R-edeltäjä ja välitön R-seuraaja (täsmällisessä määritelmässä tilat w') eivät ole välttämättä yksikäsitteisiä! Esimerkiksi diskreetissä relaatiossa $R = \{(1,2),(1,3),(3,3)\}$ tilalla 1 on kaksi välitöntä seuraajaa, 2 ja 3, mutta tila 3 on itsensä yksikäsitteinen välitön seuraaja. Jos diskreetti relaatio on lineaarinen järjestys, niin tällöin välitön seuraaja ja välitön edeltäjä ovat yksikäsitteiset.

Huomattavaa on myös, että yleisesti minkään modaalilogiikan kaava ei voi määritellä vertailullisuutta, joka siis vaaditaan relaation lineaarisuuteen (vrt. [8], Tulenheimo): Jos nimittäin kaava α määrittelisi vertailullisuuden, niin esimerkiksi $\langle\{1\},\{(1,1)\}\rangle \vDash \alpha$ ja $\langle\{2\},\{(2,2)\}\rangle \vDash \alpha$. Mutta myös

$$\langle\{1,2\},\{(1,1),(2,2)\}\rangle \vDash \alpha,$$

sillä kaava α toteutuu molemmissa joukon $\{1,2\}$ tiloissa.[9] Kuitenkaan kyseinen kehys ei ole vertailullinen! Vertailullisuuden määrittelyyn palataan luvussa 3.

Lause 10 Olkoon R irrefleksiivinen lineaarinen järjestys. Tällöin

$$\langle W,R\rangle \vDash (F\top \wedge p \wedge Hp \rightarrow FHp) \wedge (P\top \wedge p \wedge Gp \rightarrow GPp) \Leftrightarrow R \text{ on diskreetti.}$$

(Vrt. [2], s. 107.)

Todistus. Oletetaan että,

$$\langle W,R\rangle \vDash (F\top \wedge p \wedge Hp \rightarrow FHp) \ \wedge \ (P\top \wedge p \wedge Gp \rightarrow GPp).$$

Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $w \in W$, että sillä on seuraajia ja edeltäjiä, mutta ei ole välitöntä edeltäjää tai seuraajaa. (Ellei seuraajia tai edeltäjiä olisi ollenkaan, niin relaatio olisi diskreetti.) Tutkitaan tapausta jolloin tilalla w ei ole välitöntä seuraajaa.

[9] Yleisesti on voimassa: validisuus säilyy mallien ns. erillisessä yhdisteessä. Ks. tarkemmin [1], s. 53.

Nyt siis $\forall v : wRv \Rightarrow \exists z : w \neq z \neq v \wedge wRzRv$. Olkoon V sellainen kuvaus, että

$$V(p) = \{w' \in W \mid w'Rw \vee w' = w\}.$$

Nyt mallissa $\langle W, R, V\rangle$ on voimassa vastaoletuksen mukaan $w \vDash F\top$ ja kuvauksen V määritelmän mukaan $w \vDash p$ ja $w \vDash Hp$. Kuitenkin $w \nvDash FHp$, sillä aina kun v on tilan w seuraaja eli wRv, niin on olemassa sellainen z, että $wRzRv$ ja $z \nvDash p$. (Irrefleksisyyden takia $v \neq w$ ja antisymmetrisyyden takia $z \notin V(p)$.) Näin ollen $\langle W, R, V\rangle, w \nvDash F\top \wedge p \wedge Hp \rightarrow FHp$, mikä on on ristiriita oletuksen kanssa.

Tapaus, jossa tilalla w ei ole välitöntä edeltäjää johtaa vastaavasti ristiriitaan oletuksen $\langle W, R\rangle \vDash (P\top \wedge p \wedge Gp \rightarrow GPp)$ kanssa.

Oletetaan sitten, että R on diskreetti. Olkoon V kuvaus ja $w \in W$ sellainen, että $\langle W, R, V\rangle, w \vDash F\top \wedge p \wedge Hp$. Koska $w \vDash F\top$, niin tilalla w on seuraaja. Koska R on diskreetti lineaarinen järjestys, niin tilalla w on yksikäsitteinen välitön seuraaja, olkoon se v. Tällöin $v \vDash Hp$, joten $w \vDash FHp$. Siis $\langle W, R\rangle \vDash F\top \wedge p \wedge Hp \rightarrow FHp$.

Vastaavasti yksikäsitteisen välittömän edeltäjän avulla saadaan määrittelevän kaavan toinen konjunkti validiksi. □

Edellisen lauseen mukaan siis irrefleksiivisten lineaaristen aikalogiikan kehysten luokassa diskreettisyys voidaan määritellä perusaikalogiikalla. Tämä tietysti on mahdollista myös US-logiikassa, mutta seuraavassa lauseessa osoitetaan, että tällöin vastaava määrittely voidaan tehdä myös irrefleksiivisten kehysten luokassa ilman oletusta lineaarisuudesta. Lauseista 10 ja 11 ei kuitenkaan seuraa, että US-logiikka olisi selvästi ilmaisuvoimaisempi kuin perusaikalogiikka, sillä pitäisi vielä näyttää, että mikään jälkimmäisen logiikan kaava ei määrittele diskreettisyyttä irrefleksiivisten kehysten luokassa. Tämä lienee mahdollista, mutta kysymys jää tässä avoimeksi.

Lause 11 Olkoon R irrefleksiivinen. Tällöin

$$\langle W, R\rangle \vDash (F\top \rightarrow U(\top, \bot)) \wedge (P\top \rightarrow S(\top, \bot)) \Leftrightarrow R \text{ on diskreetti.}$$

(Vrt. [1], s. 430.)

Todistus. Oletetaan ensin että,

$$\langle W, R\rangle \vDash (F\top \rightarrow U(\top, \bot)) \wedge (P\top \rightarrow S(\top, \bot)).$$

Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $w \in W$, että sillä on edeltäjä ja seuraaja, mutta ei ole välitöntä edeltäjää tai seuraajaa. Tutkitaan tapausta jolloin tilalla w ei ole välitöntä seuraajaa. Olkoon M kehyksen $\langle W, R\rangle$ malli

ja wRw'. Nyt siis $M, w \vDash F\top$. Toisaalta $M, w \nvDash U(\top, \bot)$, koska aina on olemassa sellainen v, että $wRvRw'$ ja tietysti $M, v \nvDash \bot$. Siis $M \nvDash F\top \to U(\top, \bot)$, mikä on ristiriita.

Välittömän edeltäjän tapaus johtaa vastaavasti ristiriitaan.

Oletetaan sitten, että R on diskreetti sekä kuvaus V ja $w \in W$ ovat sellaiset, että $\langle W, R, V\rangle, w \vDash F\top$. Koska $w \vDash F\top$ ja R on irrefleksiivinen, niin tila w on relaatiossa ainakin yhden muun tilan kanssa. Edelleen koska R on diskreetti, niin on olemassa sellainen w', että se on tilan w välitön R-seuraaja, siis wRw'. Siis $\langle W, R, V\rangle, w \vDash U(\top, \bot)$. (Tällöin nimittäin U:n määritelmässä implikaatio $wRvRw' \Rightarrow v \vDash \bot$ on triviaalisti tosi, kun w' on w:n välitön R-seuraaja.)

Vastaavasti saadaan $\langle W, R\rangle \vDash P\top \to S(\top, \bot)$. $\square$

Irrefleksisyys-oletuksesta voidaan luopua, jos tiukennetaan operaattoriden U ja S määritelmiä seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&M, w \vDash U'(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \\
&\exists w' : (w' \neq w \text{ ja } wRw' \text{ ja } w' \vDash \alpha \text{ ja } \forall v \in W : (wRvRw' \Rightarrow v \vDash \beta)), \\
&M, w \vDash S'(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \\
&\exists w' : (w' \neq w \text{ ja } w'Rw \text{ ja } w' \vDash \alpha \text{ ja } \forall v \in W : (w'RvRw \Rightarrow v \vDash \beta)).
\end{aligned}
$$

Tällöin siis kaava $(U'(\top, \top) \to U'(\top, \bot)) \wedge (S'(\top, \top) \to S'(\top, \bot))$ määrittelee (lauseen 11 todistuksen mukaan) diskreettisyyden kaikkien aikalogiikan kehysten luokassa.

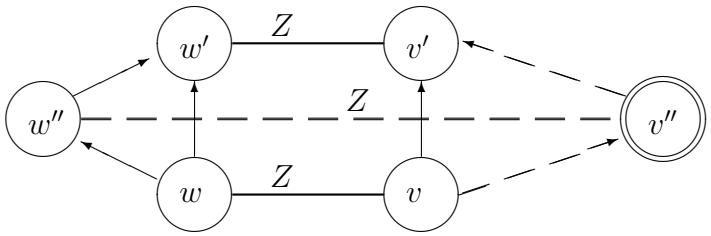
1.5 US-logiikan bisimulaatio

Mallien $M = \langle W, R, V \rangle$ ja $M' = \langle W', R', V' \rangle$ välinen *US-bisimulaatio* on aikalogiikan bisimulaatio $Z \subseteq W \times W'$, joka toteuttaa lisäksi seuraavat ehdot

(6) Jos wZv, $w'Zv'$, wRw', $wRw''Rw'$ ja $vR'v'$, niin $\exists v'' \in W' : vR'v''R'v'$ ja $w''Zv''$.

(7) Jos wZv, $w'Zv'$, $vR'v'$, $vR'v''R'v'$ ja wRw', niin $\exists w'' \in W : wRw''Rw'$ ja $w''Zv''$.

Nyt US-bisimulaation täytyy toteuttaa ehtojen (1)-(5), ks. s. 9, lisäksi kaksi uutta ehtoa. (Vrt. [6], s. 406–407 ja [8], Tulenheimo.) Seuraava kuva havainnollistaa ehtoa (6) siten, että ehjät viivat ovat oletuksia ja katkoviivat ehdon antamat relaatiot.



Esimerkiksi sivulla 19 olevien mallien M ja M' välillä oleva relaatio Z ei ole US-logiikan bisimulaatio. Nimittäin $aR'bR'c$, a_1Za, c_2Zc ja a_1Rc_2, mutta mallin M tilojen a_1 ja c_2 "välistä" ei löydy sellaista ehdon (7) vaatimaa tilaa, joka olisi bisimilaarinen tilan b kanssa (tila d_0 ei siis käy). Seuraava lause vahvistaa tämän havainnon.

Lause 12 Olkoon $Z \subseteq W \times W'$ US-logiikan mallien $M = \langle W, R, V \rangle$ ja $M' = \langle W', R', V' \rangle$ välinen US-bisimulaatio. Jos tilat $w \in W$ ja $w' \in W'$ ovat bisimilaariset, niin

$$M, w \vDash \alpha \Leftrightarrow M', w' \vDash \alpha,$$

jokaisella US-logiikan kaavalla α. (Vrt. [8], Tulenheimo.)

Todistus. Todistetaan induktiolla US-kaavan α rakenteen suhteen, että

$$\text{jos } wZw', \text{ niin } M, w \vDash \alpha \Leftrightarrow M', w' \vDash \alpha. \qquad (*)$$

Koska US-bisimulaatio on myös tavallinen bisimulaatio, niin lauseen 2 mukaan riittää tutkia tapaukset $\alpha = U(\beta, \gamma)$ ja $\alpha = S(\beta, \gamma)$. Olkoon induktio-oletus, että $(*)$ pätee kaavoille β ja γ.

Oletetaan aluksi, että wZw' ja $M, w \vDash S(\beta, \gamma)$. Nyt operaattorin S määritelmän mukaan

$$\exists v \in W : vRw \text{ ja } M, v \vDash \beta \text{ ja } vRtRw \Rightarrow M, t \vDash \gamma. \qquad (**)$$

Koska wZw' ja vRw, niin aikalogiikan bisimulaation määritelmän ehdon (5) mukaan

$$\exists v' : vZv' \text{ ja } v'R'w'.$$

Nyt induktio-oletuksen mukaan $M', v' \vDash \beta$, sillä $M, v \vDash \beta$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $t' \in W'$, että $v'R't'R'w'$. Nyt ehdosta (7) seuraa, että

$$\exists t \in W : vRtRw \text{ ja } tZt'.$$

Nyt rivin $(**)$ mukaan $M, t \vDash \gamma$, ja edelleen induktio-oletuksen mukaan $M', t' \vDash \gamma$. Siis implikaatio

$$v'R't'R'w' \Rightarrow M', t' \vDash \gamma$$

on aina tosi, sillä t' oli mielivaltainen. Täten $M', w' \vDash S(\beta, \gamma)$.

Käänteisen implikaation osoittamiseksi oletetaan wZw' ja $M', w' \vDash S(\beta, \gamma)$ ja toimitaan vastaavasti kuin edellä: Jälleen operaattorin S määritelmän mukaan saadaan

$$\exists v' \in W' : v'R'w' \text{ ja } M', v' \vDash \beta \text{ ja } v'R't'R'w' \Rightarrow M', t' \vDash \gamma. \qquad (**')$$

Koska wZw' ja $v'R'w'$, niin bisimulaation määritelmän ehdon (4) mukaan

$$\exists v : vZv' \text{ ja } vRw.$$

Nyt induktio-oletuksen mukaan $M, v \vDash \beta$, sillä $M', v' \vDash \beta$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $t \in W$, että $vRtRw$. Nyt ehdosta (6) seuraa, että

$$\exists t' \in W' : v'R't'R'w' \text{ ja } tZt'.$$

Nyt rivin $(**')$ mukaan $M', t' \vDash \gamma$, ja edelleen induktio-oletuksen mukaan $M, t \vDash \gamma$. Siis implikaatio

$$vRtRw \Rightarrow M, t \vDash \gamma$$

on aina tosi, ja täten $M, w \vDash S(\beta, \gamma)$.

Siis $(*)$ pätee, kun $\alpha = S(\beta, \gamma)$. Tapaus $\alpha = U(\beta, \gamma)$ käsitellään vastaavasti. $\square$

Lause 13 Mikään US-logiikan kaava ei määrittele irrefleksisyyttä.

Todistus. Tarkastellaan malleja $M = \langle W, R, V \rangle$, jossa

$$W = \{w\}, \quad R = \{(w, w)\} \text{ ja } V \text{ valuaatio,}$$

ja $M' = \langle W', R', V' \rangle$, jossa

$$W' = \{x \in \mathbb{Q} |\ 0 < x < 1\},$$

R' on rationaalilukujen tavallinen järjestys $<$ ja

$$V'(p) = W', \text{ jos } V(p) = W, \text{ muuten } V'(p) = \emptyset.$$

Nyt relaatio

$$Z = W \times W'$$

on US-logiikan bisimulaatio mallien M ja M' välillä. Nimittäin ehto (6) täyttyy aina joukon W' tiheyden takia ja ehdon (7) voimassa olo on triviaalia. Koska R on refleksiivinen ja R' on irrefleksiivinen, niin lauseesta 12 seuraa, että irrefleksisyyttä määrittelevää kaavaa ei ole. □

1.6 US- ja predikaattilogiikan vertaamisesta

Jotta modaalilogiikkaa ja ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa voitaisiin vertailla keskenäään, niin täytyy johdannossa esitettyjä määritelmiä täsmentää.

Tarkastellaan esimerkkinä US-logiikkaa ja ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa (FO-logiikkaa), jonka aakkostossa on kaksipaikkainen relaatio ja predikaattisymboleja; olkoon aakkosto $\{<, P_i\}$, $i \in \mathbb{N}$. [10] Tällaiseen akkostoon liittyvä predikaattilogiikan malli on muodollisesti samanlainen kuin modaalilogiikan malli: modaalilogiikan mallia $M = \langle W, R, V \rangle$ *vastaava predikaattilogiikan malli* $\mathcal{M}$ on sellainen aakkoston $\{<, P_i\}$ malli, jossa universumi $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = W$, aakkoston symboli $<$ tulkitaan relaatioksi R ja predikaatin P_i totuusjoukoksi tulkitaan joukko $V(p_i)$.

Lause 13 siis osoittaa, että on olemassa ominaisuuksia, joita ei voi määritellä US-logiikalla. Irrefleksisyyden voi tietysti määritellä FO-logiikassa: Olkoon $\mathcal{M}$ jokin kehystä $\langle W, R \rangle$ vastaava predikaattilogiikan malli. Tällöin selvästi

$$\mathcal{M} \models \forall x \neg (x < x) \Leftrightarrow \text{ relaatio } R \text{ on irrefleksiivinen.}$$

[10] Predikaattilogiikkaan liittyvän käsitteistön voi palauttaa mieleen esimerkiksi teoksen Salminen & Väänänen: *Johdatus logiikkaan* (Gaudeamus. Helsinki. 1992.) avulla.

Toisaalta voidaan osoittaa, että ns. Löbin kaava

$$G(Gp \to p) \to Gp$$

(lyhennysmerkintä varsinaisesta US-logiikan kaavasta) määrittelee ominaisuuden (relaatio on transitiivinen ja kaikki polut ovat äärellisiä), jota ei voi määritellä FO-logiikalla. (Ks. tämän todistus [1], s. 130–132. Vrt. myös [7], s. 223–225.)

Edelliset havainnot osoittavat, että ei voi sanoa kumpi US- ja FO-logiikoista on ilmaisuvoimaltaan "parempi". Tämän takia onkin kiinnostavaa tutkia millaisissa tilanteissa (malleissa) näiden logiikoiden kaavat ilmaisevat samat asiat. Alla määritellään mitä tämä "yhtäilmaisuvoimaisuus" tarkoittaa.

Määritellään US- ja FO-logiikan välinen *standardikäännös* kuvauksena

$ST_x : \{US\text{-logiikan kaavat}\} \to \{\text{FO-kaavat, joissa on yksi vapaan muuttuja } x\}$,

$$\begin{aligned}
ST_x(p_i) &= P_i(x), \quad i \in \mathbb{N} \\
ST_x(\neg\alpha) &= \neg ST_x(\alpha) \\
ST_x(\alpha \wedge \beta) &= ST_x(\alpha) \wedge ST_x(\beta) \\
ST_x(U(\alpha,\beta)) &= \exists z(x < z \wedge ST_z(\alpha) \wedge \forall y(x < y < z \to ST_y(\beta))) \\
ST_x(S(\alpha,\beta)) &= \exists z(x > z \wedge ST_z(\alpha) \wedge \forall y(x > y > z \to ST_y(\beta))).
\end{aligned}$$

Määritelmän viimeisillä riveillä esimerkiksi merkintä $ST_y(\beta)$ tarkoittaa vastaavaa kaavan β käännöstä, jossa y on ainoa vapaa muuttuja. (Tällöin on tietysti käytettävä eri muuttujasymbolia $y \neq x$, jottei x tule sidotuksi.)

Nyt jokaisella US-logiikan mallilla $M = \langle W, R, V\rangle$, tilalla $w \in W$ ja kaavalla α pätee:

$$M, w \vDash \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash ST_x(\alpha)\ [w], \qquad (*)$$

missä $\mathcal{M}$ on mallia M vastaava predikaattilogiikan malli.[11]

Tulos $(*)$ todistetaan induktiolla kaavan α rakenteen suhteen. Siis rivin $(*)$ mukaan myös

$$M \vDash \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \forall x ST_x(\alpha),$$

kun predikaattilogiikan malli $\mathcal{M}$ on kuten edellä. (Vrt. [1], s. 84–85.)

Olkoon $\mathcal{K}$ jokin US-mallien luokka. Kun US-logiikan kaavalla ja yhden vapaan muuttujan FO-logiikan kaavalla on voimassa ekvivalenssi $(*)$ jokaisella $M \in \mathcal{K}$, niin nämä kaavat ovat $\mathcal{K}$-*ekvivalentit.* Koska standardikäännös

[11] Merkintä $\mathcal{M} \vDash \alpha\ [w]$ tarkoittaa, että kaavassa α esiintyvä vapaa muuttuja tulkitaan mallissa $\mathcal{M}$ alkioksi $w \in W$.

ST_x on kuvaus, niin rivin $(*)$ mukaan jokainen US-logiikan kaava on ekvivalentti jonkin yhden vapaan muuttujan FO-kaavan kanssa kaikkien mallien luokassa. (Siis α ja $ST_x(\alpha)$ ovat ekvivalentit.) Käänteisen tuloksen voimassa olo riippuu malliluokasta $\mathcal{K}$.

Jos jokainen yhden vapaan muuttujan FO-kaava on $\mathcal{K}$-ekvivalentti jonkin US-logiikan kaavan kanssa, niin US-logiikka on *ekspressiivisesti täydellinen* suhteessa luokkaan $\mathcal{K}$. Siis ekspressiivinen täydellisyys ikäänkuin osoittaa, että kuvaus ST_x on kääntyvä tietyssä malliluokassa.

Kuten Johdanto-luvussa mainittiin, niin voidaan osoittaa, että US-logiikka on ekspressiivisesti täydellinen suhteessa Dedekind-täydellisten linenaaristen US-mallien luokkaan. (Vrt. [1], s. 248–249, ja [5], Hodkinson.) Näin ollen US- ja FO-logiikalla voidaan "sanoa" näistä malleista täsmälleen samat asiat eli näiden logiikoiden ilmaisuvoima on sama em. malliluokassa. Huomattavaa on, että lause 13 ei ole ristiriidassa tämän faktan kanssa. (Nimittäin lauseen 13 todistuksessa käytetty malli M' ei ole Dedekind-täydellinen.)

Aikalogiikan kieltä voidaan kuitenkin edelleen "parantaa" ottamalla käyttöön entistä vahvempia operaattoreita. Esimerkiksi ns. Stavi-konnektiivit laajentavat US-logiikkaa siten, että saatu logiikka on ekspressiivisesti täydellinen suhteessa kaikkien lineaarisesti järjestettyjen US-mallien luokkaan. Stavi-konnektiiveilla "käsitellään" ei- Dedekind täydelliset järjestykset eli sellaiset, jotka ovat Dedekindin leikkauksia[12]. (Stavi-konnektiiveista enemmän [1], s. 428–430).

Standardikäännös predikaattilogiikkaan ja ekspressiivinen täydellisyys voidaan tietysti määritellä mille tahansa modaalilogiikalle – yllä US-logiikka toimi esimerkkinä.

[12]Joukko C on Dedekindin leikkaus, jos on olemassa sellainen epätyhjä $C_0 \subset C$, että siinä ei ole suurinta alkiota ja se on alaspäin suljettu.

2 Todistusteoriaa

2.1 Käsitteitä

Tässä alaluvussa palautetaan mieleen modaalilogiikan todistusteorian keskeistä käsitteistöä. (Vrt. [1], s. 189–194, [2], s. 94, [4], s. 16–17 ja [7], s. 185, 231.) Määritellään ensin peruskäsitteet yleisesti (suhteessa tavalliseen modaalilogiikkaan). Nyt tarkasteltavana on kieli, jonka kaavat määritellään lyhyesti ilmaisulla

$$\alpha := p \mid \neg\alpha \mid (\alpha \wedge \alpha) \mid \Diamond\alpha,$$

missä p käy läpi numeroituvan määrän atomilauseita. Merkitään $\Box\alpha = \neg\Diamond\neg\alpha$, ja käytetään taas symboleita $\vee, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ sekä sulkuja tuttuun tapaan. Modaalilogiikan kaavasta α on saatu *sijoittamalla* uusi kaava, kun jokainen kaavassa α esiintyvä tietty atomilause (tai tietty alikaava) korvataan jollain (yhdellä) kaavalla. *Modaalilogiikan tautologiat* on saatu sijoittamalla lauselogiikan tautologioista. Siis esimerkiksi tautologiasta $p \rightarrow p$ saadaan sijoittamalla tautologiat $\Diamond q \rightarrow \Diamond q$ ja $(\neg p \wedge \Box q) \rightarrow (\neg p \wedge \Box q)$.

(Modaali)logiikka $\mathbf{L}$ on sellainen kaavajoukko, joka sisältää kaikki tautologiat, on suljettu päättelysäännön modus ponens suhteen eli

$$\text{jos } \alpha \in \mathbf{L} \text{ ja } (\alpha \rightarrow \beta) \in \mathbf{L}, \text{ niin } \beta \in \mathbf{L}\ ,$$

ja toteuttaa universaalin sijoitussäännön, s.o.

jos $\alpha \in \mathbf{L}$, niin $\beta \in \mathbf{L}$ aina, kun kaava β on saatu sijoittamalla kaavasta α.

Olkoon $\mathbf{L}$ jokin logiikka. Jos $\alpha \in \mathbf{L}$, niin kaava α on $\mathbf{L}$-*teoreema*, ja tällöin merkitään $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ (jatkossa lyhyesti $\vdash \alpha$, kun on selvää mikä logiikka on kyseessä). Kaavajoukko G on $\mathbf{L}$-*ristiriidaton*, jos ei ole olemassa sellaista äärellistä joukkoa $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq G$, että

$$\vdash_{\mathbf{L}} \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n).$$

Kaava α on $\mathbf{L}$-ristiriidaton, kun $\{\alpha\}$ on $\mathbf{L}$-ristiriidaton.

Normaali modaalilogiikka on logiikka, joka sisältää lisäksi kaavan

(K) $\qquad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q),$

ja on suljettu generalisaation suhteen, s.o.

$$\text{jos } \vdash \alpha, \text{ niin } \vdash \Box\alpha.$$

Olkoon seuraavassa $\mathcal{F}$ jokin luokka kehyksiä. Jos kaava α on validi jokaisessa luokan $\mathcal{F}$ kehyksessä, niin α on $\mathcal{F}$-*validi*, jota merkitään $\vDash_{\mathcal{F}} \alpha$ (jatkossa lyhyesti $\vDash \alpha$). Siis esimerkiksi luokan $\mathcal{F}_t$ määritelmän ja lauseen 1 mukaan on voimassa $\vDash_{\mathcal{F}_t} p \to HFp$.

Jos on olemassa $\mathcal{F}$-malli ja sen tila, jossa kaava α on tosi, niin α on $\mathcal{F}$-*toteutuva*.

Systeemi **L**, eli kaavajoukko, joka on logiikka, on *luotettava* suhteessa luokkaan $\mathcal{F}$, jos jokainen **L**-teoreema on $\mathcal{F}$-validi.

Luotettava systeemi **L** on *täydellinen* suhteessa luokkaan $\mathcal{F}$, jos jokainen $\mathcal{F}$-validi kaava on **L**-teoreema.

Systeemin määritelmässä annetut kaavat ovat tämän systeemin *aksioomia*. Teoreemoja ovat siis kaikki aksioomista päättelysääntöjen avulla saadut kaavat (kun päättelysääntöjä on sovellettu äärellisen monta kertaa). Päättelyketjua aksioomista teoreemaan kutsutaan tämän teoreeman *deduktioksi* eli *todistukseksi*. Näin ollen täydellisessä systeemissä jokainen validi kaava on mekaanisesti johdettavissa aksioomista. Systeemin täydellisyys tarkoittaakin, että semanttisesti, eli mallien avulla, luonnehdittu systeemi ja aksioomien kautta saatava systeemi ovat täsmälleen samat. Logiikkoja tutkittaessa tämä pyritään usein osoittamaan.[13]

[13]Täydellisyys voidaan määritellä myös yleisemmin kaavajoukon Σ suhteen:

$$\forall \Sigma : \forall \alpha : \Sigma \vDash \alpha \Leftrightarrow \Sigma \vdash \alpha,$$

missä $\Sigma \vDash \alpha$ tarkoittaa, että α seuraa loogisesti kaavajoukon Σ kaavoista ja $\Sigma \vdash \alpha$, että α on todistuva eli johdettavissa ko. aksioomasysteemissä joukosta Σ.

2.2 Pienin aikalogiikka

Aikalogiikan kaavat saadaan siis samalla tavalla kuin yllä, paitsi että operaattorin $\Diamond$ paikalla on F, ja muotoa $P\alpha$ oleva ilmaisu on myös kaava. Kaavat $G\alpha$ ja $H\alpha$ käsitetään lyhennysmerkinnöiksi varsinaisen kielen kaavoista $\neg F \neg \alpha$ ja $\neg P \neg \alpha$.

Normaali aikalogiikka on normaali modaalilogikka suhteessa aikalogiikan kieleen, joka sisältää lisäksi kaavat $p \to HFp$ ja $p \to GPp$. Toisin sanoen pienimmän normaalin aikalogiikan $\mathbf{K}_t$ aksioomat ovat

- tautologiat
- $G(p \to q) \to (Gp \to Gq), \qquad H(p \to q) \to (Hp \to Hq) \qquad$ (K)
- $p \to HFp, \qquad p \to GPp \qquad$ (A)

ja päättelysäännöt ovat

- jos $\vdash \alpha$ ja $\vdash \alpha \to \beta$, niin $\vdash \beta \qquad$ (MP)
- jos $\vdash \alpha$, niin $\vdash \beta$,
  aina kun β on saatu sijoittamalla kaavasta $\alpha \qquad$ (US)
- jos $\vdash \alpha$, niin $\vdash G\alpha$ ja $\vdash H\alpha \qquad$ (TG)

Yleensäkin multimodaalilogiikoissa yo. käsitteet muotoillaan kuten yllä: lisätään jokaista uutta operaattoria vastaavat kohdat tavallisen modaalilogiikan määritelmään. Alaluvussa 2.4 osoitetaan systeemin $\mathbf{K}_t$ täydellisyys suhteessa aikalogiikan kehysten luokkaan. Sitä ennen käsitellään päätelmien tekoa aksioomasysteemissä ja todistetaan systeemin $\mathbf{K}_t$ luotettavuus.

2.3 Luotettavuus

Aksioomasysteemissä myös päättelysääntöjä voidaan johtaa lisää.

Lause 14 Systeemissä $\mathbf{K}_t$ on voimassa:

(a) Jos $\vdash \alpha \to \beta$, niin $\vdash G\alpha \to G\beta$ ja $\vdash H\alpha \to H\beta$.

(b) Jos $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ ja kaava γ' on saatu kaavasta γ korvaamalla siinä yksi tai useampi kaavan α esiintymä kaavalla β, niin $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma'$.

(c) Teoreeman peilikuva[14] on teoreema.

[14] Ks. määritelmää sivulta 14.

Jätetään lauseen 14 täsmällinen toditus muotoilematta, mutta selostetaan kuitenkin periaatteet. Ensimmäinen kohta saadaan soveltamalla ensin oletukseen sääntöä (TG), ja sitten sääntöä (MP) tulokseen ja aksioomaan (K), johon on sovellettu sääntöä (US). Toinen kohta todistetaan induktiolla kaavan γ rakenteen suhteen. (Ks. vastaavaa tulosta todistuksineen [7], s. 191.) Huomattavaa on, että (b)-kohta eroaa oleellisesti päättelysäännöstä (US): edellistä sääntöä käytettäessä mikä tahansa alikaava voidaan korvata sen kanssa ekvivalentilla kaavalla, jälkimmäisen säännön tapauksessa minkä tahansa alikaavan kaikki esiintymät täytyy korvata mielivaltaisella kaavalla. Kolmas kohta on selvä, koska systeemissä $\mathbf{K}_t$ jokaisen aksiooman peilikuva on myös aksiooma. Huomattavaa on, että kolmas kohta ei välttämättä päde systeemin $\mathbf{K}_t$ kaikissa laajennuksissa, toisin kuin muut kohdat.

Seuraavaksi suoritetaan esimerkkinä ja myöhempää käyttöä varten erään päättelysäännön johto ja muutamien teoreemojen deduktiot (vrt. [2], s. 97–98). Joka rivin lopussa on selityksenä maininta, mistä ja miten ko. rivi on päätelty (sääntöjen (MP) ja (US) käyttöä sekä yksinkertaisimpia tautologioita ei ole mainittu).

(1) $p \to q$	oletus
(2) $\neg q \to \neg p$	1, tautologia
(3) $G\neg q \to G\neg p$	2, Lause 14(a)
(4) $Fp \to Fq$	3, tautologia, G:n määritelmä

Siis jos $\vdash p \to q$, niin $\vdash Fp \to Fq$.

(1) $p \to (q \to p \wedge q)$	tautologia
(2) $Gp \to G(q \to p \wedge q)$	1, Lause 14(a)
(3) $G(q \to (p \wedge q)) \to (Gq \to G(p \wedge q))$	(K)
(4) $Gp \to (Gq \to G(p \wedge q))$	2–3, tautologia $(*)$
(5) $Gp \wedge Gq \to G(p \wedge q)$	4, tautologia $(**)$

$(*)$ $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ $\quad$ $(**)$ $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \wedge \beta \to \gamma)$

(1) $\neg p \to HF\neg p$	(A)
(2) $\neg p \to H\neg\neg F\neg p$	1, Lause 14(b)
(3) $\neg p \to H\neg Gp$	2, G:n määritelmä
(4) $PGp \to p$	3, tautologia, H:n määritelmä

Yllä oleva siis osoittaa, että $\vdash Gp \wedge Gq \to G(p \wedge q)$ ja $\vdash PGp \to p$. Edelleen lauseen 14(c) mukaan saadaan $\vdash Hp \wedge Hq \to H(p \wedge q)$ ja $\vdash FHp \to p$.

Lause 15 Systeemi $\mathbf{K}_t$ on luotettava suhteessa luokkaan $\mathcal{F}_t$.

Todistus. (Vrt. [7], s. 201–202.) Valitaan mielivaltainen systeemin $\mathbf{K}_t$ teoreema α. Tällöin on siis olemassa deduktio $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, jossa $\alpha_n = \alpha$ ja jokainen α_i $(1 \leq i \leq n)$ on joko systeemin $\mathbf{K}_t$ aksiooma tai saatu tämän systeemin päättelysäännöillä edellisistä kaavoista $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$. Näytetään, että jokainen kaava α_i on $\mathcal{F}_t$-validi. Tämä tehdään induktiolla:

(Lauselogiikan) tautologiat ovat valideja kaikkien (yhden relaation) kehysten luokassa

$$\mathcal{F}_1 = \{\langle W, R\rangle |\ W \neq \emptyset,\ R \subseteq W^2\}.$$

(Ks. [7], s. 172–175.) Koska $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_1$, niin asia on selvä, jos α_i on tautologia.

Olkoon $M = \langle W, R, V\rangle$ luokan $\mathcal{F}_t$ malli ja $w \in W$ sellainen, että $M, w \vDash H(p \to q) \wedge Hp$. Nyt jos $w'Rw$, niin $M, w' \vDash p \to q$ ja $M, w' \vDash p$. Täten

$$w'Rw \Rightarrow M, w' \vDash q,$$

eli $M, w \vDash Hq$. Siis jos $\alpha_i = H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$, niin $\vDash \alpha_i$. Vastaavasti käsitellään kaava $G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$.

Jos α_i on kumpi tahansa aksioomista (A), niin se on $\mathcal{F}_t$-validi lauseen 1 mukaan.

Koska α_1 on aina aksiooma, niin se tuli yllä käsiteltyä. Nyt voidaan tehdä induktio-oletus: olkoon $\vDash \alpha_j$ aina, kun $j < i$.

Oletetaan, että α_i on päätelty säännöllä (MP). Tällöin on olemassa kaavat $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$ ja α_j, joissa $k, j < i$. Nyt induktio-oletuksen mukaan $\vDash \alpha_j \to \alpha_i$ ja $\vDash \alpha_j$. Yksinkertainen mallitarkastelu osoittaa, että $\vDash \alpha_i$.

Oletetaan sitten, että α_i on päätelty säännöllä (TG). Tällöin on olemassa sellainen kaava α_j $(j < i)$, että α_i on joko $G\alpha_j$ tai $H\alpha_j$. Nyt induktio-oletuksen mukaan pätee $\vDash \alpha_j$. Jälleen yksinkertainen mallitarkastelu osoittaa, että $\vDash G\alpha_j$ ja $\vDash H\alpha_j$, joten päättelysäntö (TG) säilyttää validisuuden.

Säännön (US) käsittelyä varten tarvitaan merkintä: merkitään $\gamma(p/\delta)$, kun kaavaan γ sijoitetaan jokaiseen atomilauseen p esiintymän paikalle kaava δ. Siis esimerkiksi $p(p/q) = q$ ja $(p \wedge q)(p/(q \to p)) = (q \to p) \wedge q$. Sijoitus voidaan tehdä myös samanaikaisesti useille atomilauseille: $(p \to q)(p/q, q/p) = q \to p$.

Oletetaan lopuksi, että α_i on saatu sijoittamalla kaavaan α_j $(j < i)$ atomilauseen p paikalle mielivaltainen kaava β ja kaava α_i on ensimmäinen sijoituksella saatu kaava tarkasteltavassa deduktiossa. Osoitetaan, että $\vDash \alpha_j(p/\beta)$. Jos kaavassa α_i on sijoitettu useisiin atomilauseisiin samalla kertaa, niin alla oleva menettely pitää "toistaa" vastaavan monta kertaa.[15]

[15]Samanaikaiset sijoitukset voidaan tulkita peräkkäisiksi sijoituksiksi, jos sijoituksissa käytetään aina uusia atomilause-symboleja. Näin voidaan aina tehdä, jolloin vältytään

Jos kaavassa α_j ei esiinny symbolia p, niin asia on selvä. Nimittäin $\alpha_j(p/\beta) = \alpha_j$ ja induktio-oletuksen mukaan $\vDash \alpha_j$. Oletetaan siis, että p esiintyy kaavassa α_j. Siis α_j on joko

1) tautologia

2) toinen aksioomista (K)

3) toinen aksioomista (A) tai

4) saatu kaavoista $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}$ päättelysäännöillä (MP) tai (TG).

Sääntö (US) ei siis ole luettelossa, koska α_i oli ensimmäinen sijoituksella saatu kaava. Käydään läpi luettelon tilanteet: Tapauksessa 1) kaava $\alpha_j(p/\beta)$ on tautologia, ja asia on siten selvä. Tapauksessa 2) todistuksen alkuosan kaltainen tarkastelu osoittaa, että $\vDash \alpha_j(p/\beta)$. Tapauksessa 3) lauseen 1 tapainen tarkastelu osoittaa, että $\vDash \alpha_j(p/\beta)$. Tapauksessa 4) on edellisten kohtien ja induktio-oletuksen mukaan voimassa $\vDash \alpha_1(p/\beta)$, $\vDash \alpha_2(p/\beta), \ldots$ ja $\vDash \alpha_{j-1}(p/\beta)$. Koska säännöt (MP) ja (TG) säilyttävät validisuuden, niin nytkin $\vDash \alpha_j(p/\beta)$. Siis $\vDash \alpha_i$. □

Alaluvussa 2.4 käytetään hyväksi seuraavaa tulosta:

Lause 16 Jos jokainen $\mathbf{K}_t$-ristiriidaton kaava on $\mathcal{F}_t$-toteutuva, niin $\mathbf{K}_t$ on täydellinen suhteessa luokkaan $\mathcal{F}_t$. (Vrt. [1], s. 194.)

Todistus. Olkoon lauseen oletukset voimassa. Tehdään vastaoletus, että $\mathbf{K}_t$ ei ole täydellinen suhteessa luokkaan $\mathcal{F}_t$. Silloin on olemassa sellainen validi kaava α, että $\nvdash \alpha$. Siis $\alpha \notin \mathbf{K}_t$.

Jos olisi $\neg\neg\alpha \in \mathbf{K}_t$, niin tautologian $\neg\neg\alpha \to \alpha$ mukaan olisi $\alpha \in \mathbf{K}_t$. Siis on oltava $\neg\neg\alpha \notin \mathbf{K}_t$ eli $\nvdash \neg\neg\alpha$. Täten kaava $\neg\alpha$ on $\mathbf{K}_t$-ristiriidaton, joten oletuksen mukaan $\neg\alpha$ on toteutuva. Tämä on mahdotonta, koska $\vDash \alpha$. Siis vastaoletus on hylättävä ja täydellisyys on voimassa (luotettavuus on voimassa edellisen lauseen mukaan). □

esimerkiksi sijotuksien $(p \to q)(p/q, q/p) = q \to p$ ja $((p \to q)(p/q))(q/p) = p \to p$ kaltaiselta sekaannukselta.

2.4 Täydellisyys

Systeemin $\mathbf{K}_t$ täydellisyyden osoittamiseksi tarvitaan useita aputuloksia ja valmistelevia tarkasteluja. Koko alaluku seurailee pääpiirteissään lähdettä [2], s. 98–103. (Vrt. myös [1], s. 224–228.)

Kaavajoukko G on *maksimaalinen*, jos $\alpha \in G$ tai $\neg\alpha \in G$, jokaisella kaavalla α.

Maksimaalisesti $\mathbf{L}$*-ristiriidaton* kaavajoukko on sekä $\mathbf{L}$-ristiriidaton että maksimaalinen. Merkitään kaikkien maksimaalisesti $\mathbf{K}_t$-ristiriidattominen joukkojen joukkoa symbolilla $\mathcal{G}$.

Seuraavia maksimaalisesti ristiriidattomia joukkoja koskevia aputuloksia 3 ja 4 vastaavat tulokset todistetaan esimerkiksi teoksessa [7], s. 232–234.

Aputulos 3 Olkoot $A \in \mathcal{G}$ ja α ja β kaavoja. Silloin

- joko $\alpha \in A$ tai $\neg\alpha \in A$
- $\alpha \wedge \beta \in A$ jos ja vain jos $\alpha \in A$ ja $\beta \in A$
- jos $\alpha \to \beta \in A$ ja $\alpha \in A$, niin $\beta \in A$
- $\mathbf{K}_t \subseteq A$.

Havainnollisesti maksimaalisesti ristiriidaton kaavajoukko on kaikkien niiden kaavojen joukko, jotka ovat tosia jonkin mallin yhdessä tilassa.

Aputulos 4 (Lindenbaumin lemma) Jos A on $\mathbf{K}_t$-ristiriidaton kaavajoukko, niin on olemassa sellainen $B \in \mathcal{G}$, että $A \subseteq B$.

Aputulos 5 Olkoot $A, B \in \mathcal{G}$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä

(a) $\forall\alpha : \alpha \in A \Rightarrow P\alpha \in B$

(b) $\forall\alpha : \alpha \in B \Rightarrow F\alpha \in A$

(c) $\forall\alpha : G\alpha \in A \Rightarrow \alpha \in B$

(d) $\forall\alpha : H\alpha \in B \Rightarrow \alpha \in A$.

Todistus. Oletetaan, että (a) ja $G\alpha \in A$. Siis $PG\alpha \in B$. Koska edellisen alaluvun mukaan $\vdash PGp \to p$ ja $\mathbf{K}_t \subseteq B$, niin säännön (US) mukaan $PG\alpha \to \alpha \in B$. Nyt aputuloksen 3 mukaan $\alpha \in B$. Täten (c) on voimassa.

Oletetaan, että (c) ja $\alpha \in B$. Koska $B \in \mathcal{G}$, niin $\neg\alpha \notin B$. Nyt oletuksen mukaan $G\neg\alpha \notin A$ eli $F\alpha \in A$. Näin (b) on voimassa.

Implikaatiot (b)$\Rightarrow$(d) ja (d) $\Rightarrow$(a) todistetaan vastaavasti. □

Olkoot $A, B \in \mathcal{G}$. Tällöin joukko B *seuraa* joukkoa A, merkitään $A \prec B$, jos aputuloksen 5 ehdot ovat voimassa näille joukoille.

Aputulos 6 Olkoon $C \in \mathcal{G}$, ja α kaava. Tällöin

(a) $F\alpha \in C \Rightarrow \exists B \in \mathcal{G} : C \prec B \wedge \alpha \in B$

(b) $P\alpha \in C \Rightarrow \exists A \in \mathcal{G} : A \prec C \wedge \alpha \in A$.

Todistus. Käsitellään (a)-kohta – toinen kohta on vastaavanlainen.

Olkoon $F\alpha \in C$, ja merkitään

$$B_0 = \{\beta \mid G\beta \in C\} \cup \{\alpha\}.$$

Näytetään, että B_0 on $\mathbf{K}_t$-ristiriidaton. Tällöin Lindenbaumin lemma antaa sellaisen joukon $B \in \mathcal{G}$, että $B_0 \subseteq B$, ja edelleen aputuloksen 5 (c)-kohdan mukaan $C \prec B$.

Tehdään vastaoletus, että B_0 on $\mathbf{K}_t$-ristiriitainen. Tällöin on olemassa sellaiset kaavat $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in B_0 \setminus \{\alpha\}$, että

$$\vdash \neg(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n \wedge \alpha).$$

Koska $\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ on tautologia, saadaan edellisestä

$$\vdash (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n) \rightarrow \neg\alpha.$$

Edelleen lauseen 14 mukaan saadaan

$$\vdash G(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n) \rightarrow G\neg\alpha.$$

Edellisestä ja alaluvussa 2.3 johdetusta teoreemasta $Gp \wedge Gq \rightarrow G(p \wedge q)$ seuraa induktiivisella päättelyllä, että

$$\vdash (G\beta_1 \wedge G\beta_2 \wedge \cdots \wedge G\beta_n) \rightarrow G\neg\alpha.$$

Koska $G\beta_1, G\beta_2, \ldots, G\beta_n \in C$, niin aputuloksen 3 mukaan

$$G\beta_1 \wedge G\beta_2 \wedge \cdots \wedge G\beta_n \in C.$$

Lisäksi $\mathbf{K}_t \subseteq C$, joten $(G\beta_1 \wedge G\beta_2 \wedge \cdots \wedge G\beta_n) \rightarrow G\neg\alpha \in C$. Täten $G\neg\alpha \in C$. Nyt operaattorin G määritelmän mukaan $\neg F\alpha \in C$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Täten B_0 on $\mathbf{K}_t$-ristiriidaton. $\square$

Määritellään, että kehykseen $\langle W, R\rangle$ liittyvä *kronikka* on kuvaus $T : W \to \mathcal{G}$. Kronikka T on *koherentti*, jos

$$\forall x \forall y : xRy \Rightarrow T(x) \prec T(y),$$

ja koherentti kronikka on *täydellinen*, jos jokaisella kaavalla α ja jokaisella $x \in W$:

$$\left.\begin{array}{l} F\alpha \in T(x) \Rightarrow \exists y : xRy \ \wedge \ \alpha \in T(y) \\ P\alpha \in T(x) \Rightarrow \exists y : yRx \ \wedge \ \alpha \in T(y). \end{array}\right\} (*)$$

Kronikka-nimeä voisi havainnollisesti perustella siten, että T liittää jokaiseen ajanhetkeen $x \in W$ kaikki silloin tapahtuvat tapahtumat (koska $T(x)$ on maksimaalinen).

Jos V on kehyksen $\langle W, R\rangle$ valuaatiofunktio (eli kuvaus atomilauseiden joukolta joukkoon $\mathcal{P}(W)$), niin sen *indusoima kronikka* on

$$T_V(x) = \{\alpha \mid \langle W, R, V\rangle, x \vDash \alpha\}.$$

T_V on täydellinen. Jos puolestaan T on kehyksen $\langle W, R\rangle$ täydellinen kronikka, niin sen *indusoima valuaatio* on $V_T(p) = \{x \in W \mid p \in T(x)\}$.

Aputulos 7 Olkoon T kehyksen $\langle W, R\rangle$ täydellinen kronikka ja V sen indusoima valuaatio. Tällöin

$$V(\alpha) = \{x \in W \mid \alpha \in T(x)\}, \qquad (**)$$

jokaisella kaavalla α.[16] Lisäksi erityisesti jokainen joukon $T(x)$ kaava on toteutuva kehyksessä $\langle W, R\rangle$ aina, kun $x \in W$. (Eli lyhyesti jos $V = V_T$, niin $T = T_V$.)

Todistus. Osoitetaan induktiolla kaavan α rakenteen suhteen, että $(**)$ on voimassa. Kuvauksen V_T määritelmän mukaan asia on selvä, kun α on atomilause. Olkoon induktio-oletus, että $(**)$ on voimassa kaavoille β ja γ.

Koska

$$\begin{array}{l} w \in \{x \mid \neg\beta \in T(x)\} \Leftrightarrow \neg\beta \in T(w) \Leftrightarrow \beta \notin T(w) \Leftrightarrow \\ w \notin \{x \mid \beta \in T(x)\} \overset{I.O.}{\Leftrightarrow} w \notin V(\beta) \Leftrightarrow w \in V(\neg\beta) \qquad \text{ja} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} w \in \{x \mid \beta \wedge \gamma \in T(x)\} \Leftrightarrow \beta \wedge \gamma \in T(w) \Leftrightarrow \beta \in T(w) \text{ ja } \gamma \in T(w) \overset{I.O.}{\Leftrightarrow} \\ w \in V(\beta) \text{ ja } w \in V(\gamma) \Leftrightarrow w \in V(\beta \wedge \gamma), \end{array}$$

niin väite on tosi, kun α on lauselogiikan kaava.

[16] Merkintä $V(\alpha)$ tarkoittaa kaavan α totuusjoukkoa mallissa $\langle W, R, V\rangle$.

Osoitetaan vielä, että

$$V(F\beta) = \{x \mid F\beta \in T(x)\}.$$

("$\supseteq$") Oletetaan ensin, että $F\beta \in T(x)$. Nyt kronikan T täydellisyys sanoo, että

$$\exists y : xRy \ \wedge \ \beta \in T(y).$$

Siis induktio-oletuksen mukaan $y \in V(\beta)$. Täten $x \in V(F\beta)$.

("$\subseteq$") Oletetaan sitten, että $F\beta \notin T(x)$. Siis $\neg F\beta \in T(x)$ eli $G\neg\beta \in T(x)$. Olkoon $y \in W$ sellainen, että xRy. Koska T on koherentti, niin $T(x) \prec T(y)$. Edelleen aputuloksen 5(c) mukaan $\neg\beta \in T(y)$. Nyt induktio-oletuksen mukaan $y \in V(\neg\beta)$, joten $x \in V(G\neg\beta) = V(\neg F\beta)$. Näin siis $x \notin V(F\beta)$. Jos em. kaltaista tilaa y ei ole olemassa, niin triviaalisti $x \notin V(F\beta)$.

Tapaus $\alpha = P\beta$ on jälleen vastaava.

Lauseen loppuosa on voimassa, sillä $\langle W, R, V_T\rangle, x \vDash \alpha$ aina, kun $\alpha \in T(x)$. $\square$

Koska systeemi $\mathbf{K}_t$ on luotettava, niin lauseen 16 mukaan se on täydellinen, jos mikä tahansa ristiriidaton kaava α_0 on toteutuva. Edellinen aputulos kertoo, että tämän näyttämiseksi riittää konstruoida sellainen kehys $\langle W, R\rangle$ ja sen täydellinen kronikka T, että jollain $t \in W$ pätee $\alpha_0 \in T(t)$. Tätä varten sovitaan seuraavista määritelmistä:

Olkoon $\mathcal{W}$ numeroituvasti ääretön joukko. (Joukon $\mathcal{W}$ alkioita käytetään konstruoitavan kehyksen ajanhetkinä.) Olkoon

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = \{(W, R, T) \mid\ & \emptyset \neq W \subset \mathcal{W} \text{ äärellinen, } R \subseteq W^2 \text{ antisymmetrinen,} \\ & T \text{ kehykseen } \langle W, R\rangle \text{ liittyvä koherentti kronikka } \}.\end{aligned}$$

Kolmikko $m' = (W', R', T') \in \mathcal{M}$ on kolmikon $m = (W, R, T) \in \mathcal{M}$ *laajennus*, jos

$$W \subseteq W', \qquad R = R' \cap W^2 \qquad \text{ja} \qquad T \subseteq T'.$$

Muistutetaan vielä, että $m \in \mathcal{M}$ ei ole malli, sillä T on kuvaus $W \to \mathcal{G}$.

Aputulos 8 (Killing lemma) Jos vaatimusten $(*)$ kaltainen[17] ehto ei ole voimassa kolmikossa $m \in \mathcal{M}$, niin on olemassa tämän kolmikon sellainen laajennus $m' \in \mathcal{M}$, että kyseinen ehto on voimassa.

Todistus. Käsitellään ehdoista $(*)$ ensimmäistä. Olkoon $m = (W, R, T)$ sellainen, että ehto

$$F\alpha \in T(x) \Rightarrow \exists y : xRy \ \wedge \ \alpha \in T(y)$$

[17]Ehto on vaatimusten $(*)$ kaltainen, kun kaava α ja tila $x \in W$ ovat jotkut tietyt.

ei ole voimassa. Siis on olemassa sellaiset α ja $x \in W$, että $F\alpha \in T(x)$ ja ehdon jälkipuoli ei ole voimassa.

Nyt aputuloksen 6 (a) mukaan

$$\exists B \in \mathcal{G} : T(x) \prec B \ \wedge \ \alpha \in B.$$

Olkoon $y \in \mathcal{W} \setminus W$. Olkoon kolmikko $m' = (W', R', T')$ sellainen, että

$$W' = W \cup \{y\}, \quad R' = R \cup \{(x, y)\} \quad \text{ja} \quad T' = T \cup \{(y, B)\}.$$

Tällöin

$$\exists y \in W' : xR'y \ \wedge \ \alpha \in T'(y).$$

Koska lisäksi R' on antisymmetrinen ja T' koherentti, niin $m' \in \mathcal{M}$ ja täten se on etsitty kolmikon m laajennus.

Jälkimmäinen ehdoista $(*)$ käsitellään käyttäen hyväksi apulauseen 6 (b)-kohtaa. □

Lause 17 Systeemi $\mathbf{K}_t$ on täydellinen suhteessa luokkaan $\mathcal{F}_t$.

Todistus. Olkoon α_0 $\mathbf{K}_t$-ristiriidaton kaava. Näytetään, että α_0 on toteutuva konstruoimalla sellainen $\mathcal{F}_t$-kehys ja sen täydellinen kronikka T, että jollain $t_0 \in W$ pätee $\alpha_0 \in T(t_0)$.

Numeroidaan joukko $\mathcal{W} = \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ ja kaikki aikalogiikan kaavat $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$[18] Liitetään vaatimukseen

$$F\alpha_j \in T(t_i) \Rightarrow \exists y : t_i R y \ \wedge \ \alpha_j \in T(y)$$

koodi $2 \cdot 5^i \cdot 7^j$ ja vaatimukseen

$$P\alpha_j \in T(t_i) \Rightarrow \exists y : y R t_i \ \wedge \ \alpha_j \in T(y)$$

koodi $3 \cdot 5^i \cdot 7^j$ $(i, j \in \mathbb{N})$. Olkoon $C_0 \in \mathcal{G}$ Lindenbaumin lemman antama joukko, jolla $\alpha_0 \in C_0$.

Olkoon sitten $m_0 = (W_0, R_0, T_0)$, jossa $W_0 = \{t_0\}$, $R_0 = \emptyset$ ja $T_0 = \{(t_0, C_0)\}$. Selvästi T_0 on koherentti kronikka, joten $m_0 \in \mathcal{M}$. Määritellään kolmikot $m_1, m_2, m_3, \ldots$ rekursiivisesti: Jos

$$m_n = (W_n, R_n, T_n), \qquad n \geq 0,$$

on määritelty, niin jollain ehtojen $(*)$ kaltaisella vaatimuksella, joka ei ole voimassa kolmikossa m_n, on pienin koodinumero. Olkoon m_{n+1} kolmikon m_n

[18] Numerointi on mahdollista: voidaan esimerkiksi helposti muodostaa injektio {aikalogiikan kaavat} $\to \mathbb{N}$, joka osoittaa, että aikalogiikan kaavoja on numeroituva määrä.

Killing lemman mukainen laajennus, joka toteuttaa edellä mainitun ehdon. Jos ehdot $(*)$ ovat aina voimassa kolmikossa m_n, niin määritellään $m_{n+1} = m_n$.

Olkoon

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \quad R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \quad \text{ja} \quad T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n.$$

Alempana perustellaan, että kuvaus T on kehyksen $\langle W, R\rangle$ täydellinen kronikka. (Selvästi $\langle W, R\rangle \in \mathcal{F}_t$.) Silloin apulauseen 7 mukaan kaava α_0 on toteutuva mallissa $\langle W, R, V_T\rangle$, nimittäin $\langle W, R, V_T\rangle, t_0 \vDash \alpha_0$, eli täydellisyys on voimassa lauseen 16 mukaan.

Jos edellä olevan rekursiivisen prosessin askeleella $k+1$ ei löydy sellaista kaavaa α_j, että $F\alpha_j \in C_i$ tai $P\alpha_j \in C_i$ millään $i \leq k$, niin prosessi pysähtyy siten, että kolmikot eivät enää laajene eli $m_k = m_{k+1} = m_{k+2} = \cdots$ Tällöin kolmikko (W, R, T) muodostetaan yhdisteenä kaikista syntyneistä kolmikoista $(W_0, R_0, T_0), \ldots, (W_k, R_k, T_k)$. Esimerkiksi jos $\alpha_0 = p$ ja C_0 on sellainen, että

$$\{\neg F\alpha \mid \text{jokaisella kaavalla } \alpha\} \cup \{\neg P\alpha \mid \text{jokaisella kaavalla } \alpha\} \subset C_0,$$

niin $(W, R, T) = (W_0, R_0, T_0)$. Nyt p on toteutuva mallissa $\langle W, R, V_T\rangle$.

Perustellaan siis vielä, että T on täydellinen kronikka. Koska $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$ ja jokainen T_i on kronikka, niin näiden yhdiste T on kuvaus ja lisäksi kronikka. Tehdään sitten vastaoletus, että T ei ole täydellinen. Siis on olemassa vaatimusten $(*)$ kaltainen ehto, jota kronikka T ei toteuta; olkoon k tämän ehdon koodinumero. Koska $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$, niin on olemassa sellainen T_i, jossa ehto numero k ei toteudu. (Tämä ei kuitenkaan ole välttämättä pienin sellainen ehto.) Nyt kuitenkin ainakin kronikka T_{i+k} toteuttaa ehdon k. Siis vastaoletus on väärä, koska $T_{i+k} \subseteq T$. $\square$

Huomattavaa on, miksi luokan $\mathcal{M}$ määritelmässä käytettiin antisymmetrisiä relaatioita: täydellisyyslauseen todistuksessa relaatiosta R tulee aina antisymmetrinen. Näin selittyy miksi oli mukavaa määritellä aikalogiikan kehykset antisymmetrisiksi.

Kuten sanottua, systeemin $\mathbf{K}_t$ täydellisyys voidaan todistaa myös suhteessa kaikkien kehysten luokkaan. (Ks. esimerkiksi [1], s. 206.)

Jos systeemiä $\mathbf{K}_t$ laajennetaan lisäämällä siihen aksioomia, niin saadun systeemin täydellisyys suhteessa johonkin kehysluokkaan voidaan usein osoittaa samalla periaatteella kuin edellä (mikäli kyseinen systeemi on täydellinen). Tarkastellaan seuraavaksi tarvittavia muutoksia erään laajennuksen tapauksessa.

Olkoon $\mathbf{K}^*$ se systeemi, joka saadaan systeemistä $\mathbf{K}_t$, kun siihen lisätään aksioomaksi kaava

$$Gp \to GGp.$$

Olkoon luokka $\mathcal{F}^*$ antisymmetristen ja transitiivisten kehysten luokka. Huomioidaan jatkossa se, että nyt käsitellään maksimaalisesti $\mathbf{K}^*$-ristiriidattomia joukkoja.

Aputulos 9 Relaatio $\prec$ on transitiivinen.

Todistus. Olkoon $A \prec B$ ja $B \prec C$. Oletetaan, että $G\alpha \in A$, ja näytetään, että $\alpha \in C$, jolloin $A \prec C$ (Aputulos 5c). Koska $\mathbf{K}^* \subseteq A$, niin uuden aksiooman mukaan $GG\alpha \in A$. Nyt koska $A \prec B$, niin $G\alpha \in B$. Samoin koska $B \prec C$, niin $\alpha \in C$. □

Nyt systeemin $\mathbf{K}^*$ täydellisyys suhteessa luokkaan $\mathcal{F}^*$ voidaan osoittaa tekemällä seuraavat muutokset edellä olevaan: Määritellään ensin luokka

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^* = \{(W, R, T) \mid\ & \emptyset \neq W \subset \mathcal{W} \text{ äärellinen, } R \subseteq W^2 \text{ antisymmetrinen ja} \\ & \text{transitiivinen, } T \text{ kehykseen } \langle W, R\rangle \text{ liityvä koherentti kronikka } \}.\end{aligned}$$

Seuraavaksi Killing lemmaa vastaavan tuloksen todistuksessa pitää korjata relaation R' määritelmä, jotta transitiivisuus säilyisi. Nyt pitää olla

$$R' = R \cup \{(x, y)\} \cup \{(v, y) \mid vRx\}.$$

Lisäksi pitää näyttää, että tehty muutos ei vaikuta kuvauksen T' sopivuuteen (ks. Killing lemman todistusta). Siis tarkistetaan onko T' koherentti:

jos $vR'y$, niin pitää olla $T'(v) \prec B$ $[= T'(y)]$.

Koska vRx ja T on koherentti, niin $T(v) \prec T(x)$. Täten $T'(v) \prec T'(x)$, sillä $T \subset T'$. Nyt relaation $\prec$ transitiivisuuden ja sen, että $T'(x) \prec B$ takia asia on selvä. Näin Killing lemma on voimassa systeemissä $\mathbf{K}^*$ ja haluttu tulos seuraa lauseesta 17.

Samantapaisella menettelyllä kuin yllä voidaan siis todistaa muitakin täydellisyystuloksia. Mutta vastaako jokaista normaalin aikalogiikan $\mathbf{K}_t$ (järkevää) laajennusta jokin kehysluokka? Vastaus on kielteinen – voidaan nimittäin osoittaa, että on olemassa sellainen ristiriidaton systeemin $\mathbf{K}_t$ laajennus, joka ei ole täydellinen suhteessa mihinkään kehysluokkaan, ei edes tyhjään. Tällöin sanotaan, että kyseinen systeemi on *epätäydellinen.* (Ks. lisää [1], s. 212–214.)

Aikalogiikan semantiikan kannalta on kiinnostavaa tarkastella irrefleksiivisiä logiikoita, mutta lauseen 13 mukaan tätä ominaisuutta vastaavaa aikalogiikan kaavaa ei ole – edellähän esimerkiksi transitiivinen kehysluokka saatiin aksiomatisoitua ottamalla aksioomaksi kaava $Gp \to GGp$, joka samalla määrittelee transitiivisuuden. Irrefleksiivinen aikalogiikka voidaan kuitenkin aksiomatisoida, kun irrefleksisyys luonnehditaan päättelysäännön avulla.

Jos F^* on irrefleksiivinen kehys, niin on voimassa tulos:

> jos kaava α on toteutuva kehyksessä F^* ja atomilause p ei esiinny kaavassa α, niin myös kaava $\neg Pp \ \wedge \ p \ \wedge \ \neg Fp \ \wedge \ \alpha$ on F^*-toteutuva.

Tämän osoittamiseksi oletetaan $\langle F^*, V\rangle, w \vDash \alpha$. Olkoon sitten kuvaus V^* muuten sama kuin V paitsi että $V^*(p) = \{w\}$. Koska p ei esiinny kaavassa α, niin $\langle F^*, V^*\rangle, w \vDash \alpha$. Lisäksi irrefleksisyyden takia

$$\langle F^*, V^*\rangle, w \vDash \neg Pp \ \wedge p \ \wedge \ \neg Fp.$$

Nyt ottamalla käyttöön edellistä havaintoa vastaava päättelysääntö (IRR)

> jos $\vdash (\neg Pp \wedge p \wedge \neg Fp \ \to \ \alpha)$ ja atomilause p ei esiinny kaavassa α, niin $\vdash \alpha$

saadaan aksiomatisoitua irrefleksiivisiä systeemejä. Voidaan esimerkiksi todistaa, että systeemi $\mathbf{K_T}$[19], johon on lisätty päättelysääntö (IRR), on täydellinen suhteessa niihin luokan $\mathcal{F}_T$ kehyksin, jotka ovat irrefleksiivisiä. Selitetään tässä tämän menettelyn pari pääpiirrettä; tarkemmin aiheeseen voi perehtyä teoksen [1], s. 230–237, avulla.

Yllä oleva mallitarkastelu osoittaa (kontrapositio-muodossa), että sääntö (IRR) säilyttää validisuuden. Siis luotettavuus on voimassa.

Jos $t \vDash \neg Pp \wedge p \wedge \neg Fp$, jollain tarkasteltavan kehysluokan kehyksen tilalla t, niin t on ainoa hetki, jolloin tämä kaava on tosi (koska luokan $\mathcal{F}_T$ kehys on vertailullinen ja transitiivinen). Siis kaava $\neg Pp \ \wedge p \ \wedge \ \neg Fp$ ikäänkuin nimeää hetken t. Täydellisyyslauseen todistuksessa konstruoitava malli saadaan irrefleksiiviseksi, kun käytetään sellaisia maksimaalisesti ristiriidattomia joukkoja, jotka aina sisältävät kaavan muotoa $\neg Pp \ \wedge p \ \wedge \ \neg Fp$. Näin ollen tehtäväksi jää tarvittavien aputulosten (mm. Lindenbaumin lemmaa vastaavan tuloksen) todistaminen näille ns. nimetyille maksimaalisesti ristiriidattomille kaavajoukoille.

[19]Systeemin $\mathbf{K}_t$ eräs laajennus on $\mathbf{K_T}$, joka on täydellinen suhteessa kehysluokkaan $\mathcal{F}_T$. Katso näiden määritelmät luvun 3 sivuilta 42–43.

3 Modaliteeteista aikalogiikassa

Kaavaan vaikuttava *modaliteetti* on äärellinen jono peräkkäisiä negaatiomerkkejä ja modaalioperaattoreita kyseisen kaavan edessä. Määritellään siis:

- Tyhjä merkkijono on modaliteetti.
- Jos m on modaliteetti, niin jonot $\neg m$, Fm ja Pm ovat modaliteetteja.

Merkitään $\alpha \equiv \beta$, jos $\models_{\mathcal{F}_t} \alpha \leftrightarrow \beta$. Tällöin sanotaan, että kaavat α ja β ovat *$\mathcal{F}_t$-ekvivalentteja.* (Vrt. Johdanto-luvun määritelmään, jossa oli puhe eri kielten kaavoista.) Koska

$$Gp \equiv \neg F \neg p,\ Fp \equiv \neg G \neg p,\ Hp \equiv \neg P \neg p,\ Pp \equiv \neg H \neg p \quad \text{ja} \quad \neg\neg p \equiv p,$$

niin tiettyyn kaavaan vaikuttava modaliteetti voidaan aina kirjoittaa siten, että mahdollisia negaatiomerkkejä on tässä modaliteetissa korkeintaan yksi ja että tämä negaatiomerkki on välittömästi kaavan edessä. (Esimerkki: $\neg\neg P \neg PG\alpha \equiv PFH\neg\alpha$.) Pidetään tällöin negaatiota tutkittavan kaavan osana, jolloin modaliteetteja ovat mitkä tahansa äärelliset jonot symboleita F, G, P ja H. Näin ollen modaliteetteja on siis ainakin syntaktisesti ääretön määrä, mutta onko näin myös kaavojen tulkinnan kannalta? Tämä riippuu tarkasteltavasta systeemistä. Esimerkiksi systeemissä $\mathbf{K}_t$ modaliteettien H ja HH merkitykset ovat erilaiset – voidaan nimittäin helposti muodostaa $\mathcal{F}_t$-malli, jossa on sellainen tila, että kaava Hp on tosi ja HHp on epätosi. Näin ollen systeemissä $\mathbf{K}_t$ on äärettömästi modaliteetteja. Toisaalta sitä vastaavan kehysluokan $\mathcal{F}_t$ mielivaltainen kehys ei vastaa intuitiivista käsitystä ajasta.

Seuraavassa tutkitaan modaliteetteja eräässä laajemmassa systeemissä. Määritellään systeemi $\mathbf{K_T}$ seuraavasti: systeemi $\mathbf{K_T}$ saadaan systeemistä $\mathbf{K}_t$ lisäämällä sen aksioomien joukkoon kaavat

$$\begin{array}{ll}
(T) & Gp \to GGp \\
(V_1) & Fp \wedge Fq \to F(p \wedge Fq) \vee F(p \wedge q) \vee F(Fp \wedge q) \\
(V_2) & Pp \wedge Pq \to P(p \wedge Pq) \vee P(p \wedge q) \vee P(Pp \wedge q) \\
(D) & Fp \to FFp \\
(M_1) & Gp \to Fp \\
(M_2) & Hp \to Pp
\end{array}$$

Kaava (T) määrittelee kehyksen transitiivisuuden. Nyt on oletettava, että tarkasteltava relaatio on *yhtenäinen*, joka tarkoittaa, että jokaisen kahden tilan välillä on "reitti" eli

$$\forall x, y \in W : \exists z_1, z_2, \ldots, z_n \in W : xRz_1Rz_2R \ldots Rz_nRy,$$

jollain $n \in \mathbb{N}$. Siis sivun 20 esimerkin kaltainen tilanne pitää kieltää. Kaavat (V_1) ja (V_2) määrittelevät vertailullisuuden transitiivisten kehysten luokassa, kun relaatio on yhtenäinen. Yleisesti: jos transitiivisuus on voimassa, niin kaavat (V_1) ja (V_2) määrittelevät vertailullisuuden mielivaltaisen tilan seuraajien ja edeltäjien joukossa, joka siis yhtenäisellä relaatiolla on W. Kaava (D) määrittelee tiheyden[20], kaava (M_1) sen, että kehyksessä jokaisella tilalla on seuraaja ja kaava (M_2) sen, että jokaisella tilalla on edeltäjä. Nämä vastaavuudet voidaan osoittaa samaan tapaan kuin toimittiin aputuloksen 1 todistuksessa.

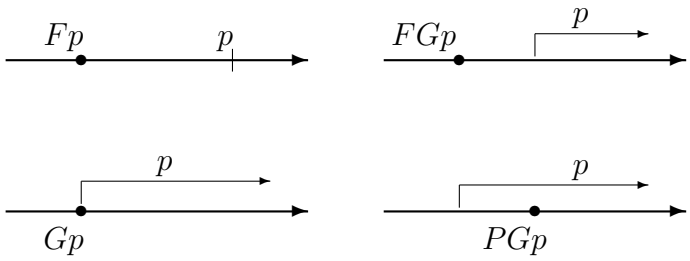
Olkoon $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_t$ kaikkien sellaisten aikalogiikan kehysten luokka, jotka ovat transitiivisia, vertailullisia, tiheitä ja joissa jokaisella tilalla on edeltäjä ja seuraaja. Voidaan osoittaa, että systeemi $\mathbf{K_T}$ on täydellinen suhteessa luokkaan $\mathcal{F}_T$. ([2], s. 106. Ks. vastaavaa tulosta todistuksineen [1], s. 209.)

Nyt luokan $\mathcal{F}_T$ kehyksiä voidaan pitää intuitiivisen ajan kaltaisina: Ensiksikin aikaa voidaan pitää antisymmetrisenä, transitiivisena ja vertailullisena. (Tosin joskus on syytä mallintaa erityisesti tulevaisuuden tapahtumia ei-lineaarisilla ns. puumalleilla.) Toisaalta aika voidaan käsittää eräänlaisena jatkumona eli tiheänä. Tällöin on huomattava, että joukon W alkioina ei voida pitää *pelkästään* esimerkiksi vuosia. Lisäksi voidaan ajatella – seemiläisestä perinteestä ja alkuräjähdysteoriasta huolimatta – että ajalle ei näy alkua eikä loppua eli seuraava ja edellinen ajanhetki löytyy aina. Ajatellaan lisäksi, että luonnollisen kielen modaliteetti on ilmaus, joka suhteuttaa jonkin asiaintilan vallitsemisajan (tapahtuman sattumisajan) nykyhetkeen (lausumishetkeen). Siis se kertoo *milloin* modaliteetin sitoma kaava toteutuu.

Tutkitaan eräiden systeemin $\mathbf{K_T}$ modalitteettien merkityksiä havainnollisesti kuvien avulla. Alla luokan $\mathcal{F}_T$ kehys on kuvattu aikasuorana, joka on rationaalilukuakseli.[21] Kuvissa musta pallo on tarkasteluhetki, eli se ajankohta jolloin modaliteetti on "voimassa".

[20] Tässä on siis käytössä tiheyden "löyhempi" määritelmä (ks. s. 19 alaviite): R on tiheä, jos $\forall x, y : xRy \Rightarrow \exists z : xRzRy$.

[21] Itseasiassa luokan $\mathcal{F}_T$ jokainen numeroituva kehys on isomorfinen rationaalilukujen ja niiden tavanomaisen järjestyksen $<$ muodostaman struktuurin kanssa. ([2], s. 106)



Kuvien kaavojen pelikuvat ovat (vastaavassa järjestyksessä) Pp, PHp, Hp ja FHp. Näitä havainnollistavat kuvat olisivat kirjaimellisesti edellisten kuvien peilikuvia. Vastaavanlaisten kuvien avulla voidaan havaita, että kaava FPp (tai PFp) merkitsee, että "joskus p" – ottamatta mitenkään kantaa onko puhe menneisyydestä, nykyisyydestä vai tulevaisuudesta. Toisaalta kaava GHp (tai HGp) merkitsee, että "aina p" – siis sekä menneisyydessä, nykyisyydessä että tulevaisuudessa. Erityisesti tyhjä modaliteetti viittaa "nykyhetkeen", joka tarkoittaa po. modaliteetin "voimassa olo hetkeä".

Modaliteetit GF ja GP peilikuvineen eivät ole kuvien tai aikatulkinnan kannalta selkeitä.

Seuraava lause osoittaa, että systeemissä $\mathbf{K_T}$ on täsmälleen 15 merkitykseltään erilaista modaliteettia; ne ovat juuri yllä mainitut modaliteetit! (Vrt. [2], s. 106.)

Lause 18 Systeemissä $\mathbf{K_T}$ jokainen modaliteetti (liitettynä atomilauseeseen p) on $\mathcal{F}_T$-ekvivalentti jonkun seuraavan kanssa

(tyhjä), F, P, G, H, GH, PG, FG, GF, HF, FP, GP, HP, PH tai FH.

Todistus.[22] Osoitetaan aluksi, että tarkasteltavat viisitoista modaliteettia ovat todellakin eri modaliteetteja eli että mitkään niistä eivät ole $\mathcal{F}_T$-ekvivalentteja keskenään. Tämä tehdään tarkastelemalla modaliteetteja pareittain ja konstruoimalla sellainen $\mathcal{F}_T$-malli, että po. modaliteetit eivät ole ekvivalentteja tässä mallissa. Alla annetaan kolme $\mathcal{F}_T$-mallia, jotta kaikki kombinaatiot tulee käytyä läpi.

Olkoon $W = \{x \in \mathbb{Q} |\ 0 < x < 1\}$, $\quad R\ =\ <$ ja

$$V_1(p) = \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left\{x \in W | x > \frac{2}{3}\right\}, \quad V_2(p) = \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup \left\{x \in W | x < \frac{1}{3}\right\}$$

sekä

$$V_3(p) = \left\{\frac{n}{m} \in W |\ \text{syt}(n, m) = 1 \text{ ja } m \text{ on parillinen}\right\}.$$

[22]Todistuksessa merkintä $\vDash \alpha$ tarkoittaa $\vDash_{\mathcal{F}_T} \alpha$.

Alla olevasta taulukosta nähdään missä mallissa ja missä tämän mallin tilassa taulukon vaaka- ja pystyriveiltä löytyvät modaliteetit eivät ole ekvivalentit. Taulukkoa luetaan siten, että pelkkä luku x tarkoittaa mallin $\langle W, R, V_1 \rangle$ tilaa, luku [x] mallin $\langle W, R, V_2 \rangle$ tilaa ja luku (x) mallin $\langle W, R, V_3 \rangle$ tilaa.

	F	P	G	H	GH	PG	FG	GF	HF	FP	GP	HP	PH	FH
( )	1/4	1/2	2/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/3	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3
F		1/4	1/2	1/2	1/2	1/2	[1/2]	[1/2]	[2/3]	[2/3]	[2/3]	[2/3]	[2/3]	[1/2]
P			1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2
G				2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	2/3	2/3	2/3
H					[1/3]	[1/3]	[1/3]	[1/3]	[1/2]	[1/2]	[1/2]	[1/2]	[1/2]	[1/3]
GH						3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	[1/2]	[1/2]	[1/4]
PG							1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	[1/2]	[1/2]	[1/4]
FG								(1/2)	(1/2)	(1/2)	(1/2)	(1/2)	[1/2]	[1/4]
GF									[2/3]	[1/2]	[1/2]	[1/2]	1/2	[1/4]
HF										[3/4]	[3/4]	[3/4]	[3/4]	[1/4]
FP											1/4	1/4	1/4	1/4
GP												1/3	1/3	1/3
HP													(1/2)	[1/2]
PH														[1/2]

Nyt taulukon mukaan esimerkiksi $\langle W, R, V_1 \rangle, \frac{1}{3} \nvDash Pp \leftrightarrow GPp$, mikä tarkoittaa, että P ja GF ovat eri modaliteetteja systeemissä $\mathbf{K_T}$. Vastaavat päätelmät tehdään esimerkiksi tiedoista $\langle W, R, V_2 \rangle, \frac{1}{2} \nvDash GHp \leftrightarrow PHp$ ja $\langle W, R, V_3 \rangle, \frac{1}{2} \nvDash FGp \leftrightarrow GFp$. Jälkimmäisessä tapauksessa on huomattava, että kuvauksen V_3 määritelmästä johtuu, että mielivaltaista tilaa seuraa aina tiloja, joista eräissä on voimassa p ja toisissa $\neg p$. [23] Tämä takaa, että tutkittava ekvivalenssi ei ole voimassa, sillä nyt $\frac{1}{2} \nvDash FGp$ ja $\frac{1}{2} \vDash GFp$.

Kokonaisuudessaan taulukko osoittaa, että mitkään tarkasteltavista modaliteeteista eivät ole samoja.

[23] Perustellaan huomio: Olkoon $\frac{n}{m} \in \{x \in \mathbb{Q} |\ 0 < x < 1\}$ ja $\mathrm{syt}(n, m) = 1$. Nyt

$$\frac{n}{m} < \frac{1 + n/m}{2} = \frac{n+m}{2m} < 1,$$

mutta aina ei ole $\mathrm{syt}(n+m, 2m) = 1$. Alla hyödynnetäänkin sellaista havaintoa, että jos osoittaja on pariton ja nimittäjä on parillinen (tai päinvastoin), niin nimittäjä säilyy parillisena (tai parittomana) vaikka supistaittaisiinkin. Siis jos $n+m$ on pariton, niin $\langle W, R, V_3 \rangle, \frac{n+m}{2m} \vDash p$. Jos $n+m$ on parillinen, niin $n < m-1$ (koska $n < m$). Täten

$$\frac{n}{m} < \frac{n+m+1}{2m} < 1,$$

joten myös nyt $\langle W, R, V_3 \rangle, \frac{n+m+1}{2m} \vDash p$. Toisaalta jos $n < m-1$, niin

$$\frac{n}{m} < \frac{n+m}{2m-1} < 1$$

eli $\langle W, R, V_3 \rangle, \frac{n+m}{2m-1} \vDash \neg p$. (Paritonta nimittäjää ei voi supistaa parilliseksi.) Jos taas $n = m-1$, niin

$$\frac{n}{m} < \frac{n+m}{2m} = \frac{2m-1}{2m} < \frac{4m-4}{4m-1} < 1$$

eli tällöinkin $\langle W, R, V_3 \rangle, \frac{4m-4}{4m-1} \vDash \neg p$. Näin ollen tekstissä mainitut tilat on löydetty.

Kahden operaattorin erilaisia kombinaatioita on kaikkiaan $4 \cdot 4$. Osoitetaan seuraavaksi, että kaksi samaa aikaoperaattoria "kutistuu" aina yhdeksi, ja kaksi muuta kahden eri operaattorin ekvivalenssia, jolloin saadaan oikea määrä, 10, kahden operaattorin modaliteetteja.

Koska $\mathcal{F}_T$-kehys on tiheä, on helppoa näyttää, että $F \vDash GGp \to Gp$, kun $F \in \mathcal{F}_T$. Koska $Gp \to GGp$ on aksiooma, niin systeemin $\mathbf{K_T}$ luotettavuuden mukaan $\vDash Gp \to GGp$. Täten

$$\vDash GGp \leftrightarrow Gp.$$

Jos R on transitiivinen, niin R^{-1} on transitiivinen. Koska lisäksi $Gp \to GGp$ määrittelee transitiivisuuden, niin lauseen 7 mukaan $\vDash Hp \to HHp$. Lisäksi mallitarkastelun avulla saadaan tulos $\vDash HHp \to Hp$, joten

$$\vDash HHp \leftrightarrow Hp.$$

Jälleen mielivaltaisen $\mathcal{F}_T$-mallin avulla huomataan, että $\vDash FFp \to Fp$. Koska $Fp \to FFp$ on aksiooma, niin systeemin $\mathbf{K_T}$ luotettavuuden mukaan saadaan $\vDash Fp \to FFp$. Näin ollen

$$\vDash Fp \leftrightarrow FFp.$$

Jos R tiheä, niin R^{-1} on tiheä. Koska lisäksi $Fp \to FFp$ määrittelee tiheyden, niin taas lauseen 7 mukaan $\vDash Pp \to PPp$. Vastaavin perustein kuin edellä saadaan

$$\vDash Pp \leftrightarrow PPp.$$

Nyt havaitaan, että koska aksioomien (T) ja (D) peilikuvat $Hp \to HHp$ ja $Pp \to PPp$ ovat valideja ja siten systeemin $\mathbf{K_T}$ täydellisyyden takia myös teoreemoja, niin lause 14(c) on voimassa systeemissä $\mathbf{K_T}$. Täten seuraavaksi teoreemoiksi todistettavien kaavojen peilikuvat ovat teoreemoja automaattisesti. (Ja siten myös valideja.)

Olkoon $F \in \mathcal{F}_T$, $M = \langle F, V \rangle$ ja $M, w \vDash FPp$. Tällöin määritelmien mukaan

$$\exists v : wRv \wedge \exists v' : v'Rv \wedge M, v' \vDash p.$$

Nyt relaation vertailullisuuden takia on kaksi vaihtoehtoa:
(i) wRv' tai $w = v'$. Koska ei ole olemassa minimiä relaation R suhteen, niin

$$\exists w' : w'Rw.$$

Siis $M, w' \vDash Fp$. Täten $M, w \vDash PFp$.
(ii) $v'Rw$. On jälleen olemassa sellainen w', että $w'Rv'$. Nyt $M, w' \vDash Fp$, joten $M, w \vDash PFp$.

Näin ollen on voimassa $\vDash FPp \to PFp$, joten täydellisyyden ja yo. peilikuvaa koskevan huomautuksen mukaan

$$\vdash FPp \leftrightarrow PFp. \qquad (*)$$

Nyt rivin $(*)$ ja lauseen 14(b) mukaan

$$\vdash \neg\neg F\neg\neg P\neg p \to \neg\neg P\neg\neg F\neg p \quad \text{eli} \quad \vdash \neg GHp \to \neg HGp.$$

Siis $\vdash HGp \to GHp$, josta päätellään lauseen 14(c) mukaan

$$\vdash HGp \leftrightarrow GHp. \qquad (**)$$

Lauseen varsinainen todistusstrategia on induktio modaliteetin rakenteen suhteen (jota ei tässä eksplisiittisesti tehdä). Lauseen todistamiseksi täytyy vielä näyttää, että kolmen aikaoperaattorin jono "kutistuu" kahdeksi operaattoriksi. Tästä seuraa induktiivisella ajattelulla lauseen totuus. Koska kolmen operaattorin kombinaatioita on paljon, niin tyydytään luettelemaan kaikki tarvittavat ekvivalenssit ja todistamaan niistä muutama malliksi. Tällaisia kombinaatiota on siis kaikkiaan $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, mutta näistä voidaan yllä osoitettujen ekvivalenssien takia jättää huomiotta useita:

1) Kahteen samaan operaattoriin päättyvät modaliteetit on käsitelty yllä todistettejen ekvivalenssien ja lauseen 14(b) takia. Näitä on yhteensä $4 \cdot 4$.

2) Kahdella samalla operaattorilla alkavat modaliteetit on käsitelty säännön (US) takia. Siis esimerkisi tulos $\vdash GGHp \leftrightarrow GHp$ saadaan suoraan sijoittamalla edellä todistetusta teoreemasta $GGp \leftrightarrow Gp$. Tällaisia modalitetteja on myös $4 \cdot 4$ (joista 4 on samoja kuin 1-kohdassa).

3) Lisäksi ekvivalenssien $(*)$ ja $(**)$ takia $4 \cdot 2$ tarkasteltavaa modaliteettia palautuu kohtiin 1 ja 2. Siis esimerkiksi $FPFp \overset{(*)}{\equiv} PFFp \overset{1)}{\equiv} PFp$.

Siis kohtien 1-3 mukaan jäljellä on $64 - 16 - (16 - 4) - 8 = 28$ kolmen peräkkäisen aikaoperaattorin kombinaatiota, joista edellä olleen peilikuvahuomautuksen perusteella riittää tarkastella puolia. Todistettavaksi jäävät

$GFHp \leftrightarrow GHp$	$FGHp \leftrightarrow GHp$
$GPGp \leftrightarrow Gp$	$FPGp \leftrightarrow FGp$
$GPHp \leftrightarrow PHp$	$FPHp \leftrightarrow PHp$
$GFGp \leftrightarrow FGp$	$FGFp \leftrightarrow GFp$
$GHPp \leftrightarrow HPp$	$FHPp \leftrightarrow HPp$
$GHFp \leftrightarrow GFp$	$FHFp \leftrightarrow Fp$
$GFPp \leftrightarrow FPp$	$FGPp \leftrightarrow FPp$

Osoitetaan näistä kaksi malliksi.

Alaluvussa 2.3 johdetun teoreeman $PGp \to p$ ja lauseen 14(a) mukaan on $\vdash GPGp \to Gp$. Koska lisäksi kaava $Gp \to GPGp$ on aksiooma (A), niin

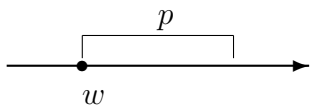
$$\vdash GPGp \leftrightarrow Gp.$$

Aksioomasta (M_1) $GFGp \to FFGp$ saadaan lauseen 14(b) ja aiemman huomion $\vdash FFp \leftrightarrow Fp$ mukaan $\vdash GFGp \to FGp$. Oletetaan, että $M \vDash FGp$, kun M on luokkaan $\mathcal{F}_T$ liittyvä malli. Tällöin myös $M \vDash GFGp$, joten $\vDash FGp \to GFGp$. Täten täydellisyyden mukaan $\vdash FGp \to GFGp$. Siis

$$\vdash GFGp \leftrightarrow FGp.$$

$\square$

Jos luonnollista kieltä pidettäisiin systeemin $\mathbf{K_T}$ kaltaisena ja aikaa jonkin luokan $\mathcal{F}_T$ kehyksen kaltaisena, niin tällöin lauseen 18 mukaan on olemassa 15 merkitykseltään erilaista ajan ilmaisua. Tietenkin edellinen rinnastus on riittämätön yksinkertaistus. Seuraava havaintokin ilmentää sen: mikään systeemin $\mathbf{K_T}$ modaliteetti ei ilmaise tilannetta "tästä jonkin aikaa p" eli että p tulee tapahtumaan johonkin hetkeen asti:



Huomataan, että yllä olevan kuvan mukainen tilanne voidaan ilmaista kaavalla $U(\top, p)$. Operaattorin U totuusmääritelmän mukaan nimittäin pätee

$$w \vDash U(\top, p) \Leftrightarrow \exists w' : (wRw' \ \wedge \ \forall v : (wRvRw' \Rightarrow v \vDash p)),$$

sillä ehto $w' \vDash \top$ voidaan merkityksettömänä jättää pois. Voidaan myös osoittaa, että tällaistä "vajaata" US-logiikan kaavaa ei voi ilmaista millään aikalogiikan kaavalla. Tämän voi helposti tehdä aikalogiikan bisimulaation avulla, kuten alaluvussa 1.4.

Näin ollen on otettava avuksi ainakin US-logiikka, jotta luonnollisen ajan ilmauksia voitaisiin luonnehtia paremmin aikalogiikan kaavoilla.

Viitteet

[1] Blackburn, Patrick & de Rijke, Maarten & Venema, Yde. *Modal Logic.* Cambridge University Press 2001.

[2] Burgess, John P. *Basic Tense Logic.* Teoksessa *Handbook of Philosophical Logic, Vol. II.* (Toim. Gabbay, D. & Guenthner, F.) D. Reidel Publishing Company. 1984. s. 89–133.

[3] Franceschet, Massimo & Montanari, Angelo. *Branching within Time: an Expressively Complete and Elementarily Decideble Temporal Logic for Time Granulity.* `http://staff.science.uva.nl/~francesc/pubs/rcl03.pdf` (luettu 12.4.2005)

[4] Goldblatt, Robert. *Logics of Time And Computation.* 2nd ed. CSLI 1992.

[5] Hodkinson, Ian. *ESSLLI 95 Advanced Course in Temporal Logic.* (Julkaisematon (?), 7th European Summer School in Logic, Language and Information -tapahtuman esitelmä. 1995.)

[6] Kurtonina, Natasha & de Rijke, Maarten. *Bisimulations for Temporal Logic.* Journal of Logic, Language and Information. Vol. 6 Nro 4: 403–425. 1997. (`http://kluweronline.com/article.asp?PIPS=133340`)

[7] Rantala, Veikko & Virtanen, Ari. *Johdatus modaalilogiikkaan.* Gaudeamus. Helsinki. 2004.

[8] Tulenheimo, Tero. *Aikalogiikan alkeita, US-bisimulaatio.* (Julkaisemattomia käsikirjoituksia. 2004.)