TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Joona Hirvonen

Trooppista geometriaa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2013

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
HIRVONEN, JOONA: Trooppista geometriaa
Pro gradu -tutkielma, 51 s.
Matematiikka
Toukokuu 2013

Tiivistelmä

Tämä tutkielma rakentuu todistamaan Kapranovin lauseen, joka yhdistää trooppisen geometrian ja algebrallisen geometrian. Aluksi keskitytään esittelemään Kapranovin lausetta varten oleellisia määritelmiä ja tuloksia. Trooppinen puolirengas on joukko, joka koostuu reaalilukujen joukosta ja alkiosta ääretön, ja jossa yhteenlaskuna toimii minimin ottaminen ja kertolaskuna tavallinen yhteenlasku. Tähän liittyen määritellään trooppinen Laurent polynomi. Tämä on polynomi, jossa kerroinrenkaana on trooppinen puolirengas ja jossa sallitaan myös muuttujien negatiiviset potenssit. Lisäksi määritellään trooppisen Laurent polynomin määräämä hyperpinta. Kunnan valuaatio on kuvaus, joka kuvaa kunnan alkiot trooppisen puolirenkaan alkioiksi. Esimerkkinä kunnasta ja sen valuaatiosta toimii Puiseux sarjojen kunta. Valuaation avulla saadaan linkitettyä algebrallinen geometria kunnassa trooppiseen geometriaan trooppisessa puolirenkaassa. Tämä tapahtuu määrittelemällä polynomin tropikalisaatio, joka muuttaa polynomin laskutoimitukset ja kertoimet kunnasta trooppiselle puolirenkaalle. Tämän avulla saadaan edelleen määriteltyä polynomin alkumuoto, jonka kerroin renkaana toimii valuaation avulla muodostettu kunnan jäännöskunta. Lopuksi määritellään tavallinen hyperpinta ja todistetaan Kapranovin lause, joka näyttää yhteyden hyperpintojen ja trooppisten hyperpintojen välille algebrallisesti suljetun kunnan tapauksessa.

Lukijalle oletetaan tutuiksi renkaat ja kunnat sekä usean muuttujan polynomit. Lisäksi reaalilukujen standarditopologian perusosaaminen tarvitaan joidenkin todistuksien ymmärtämiseen. Tutkielmassa käsitellää myös Laurent polynomeja ja muodollisia potenssisarjoja, mutta nämä ovat ymmärrettävissä tarvittavissa määrin polynomien tuntemuksen pohjalta. Vaikka algebrallinen geometria liittyy vahvasti trooppiseen geometriaan, ei lukijalta vaadita tämän alueen tuntemusta. Tosin perehtyneisyys algebralliseen geometriaan antaa lukijalle enemmän näkökulmia tutkielman tulosten merkitykseen.

Sisältö

1 Johdanto

Tutkielman päätavoite on todistaa algebrallista geometriaa ja trooppista geometriaa yhdistävä Kapranovin lause. Luvut 2, 3, 4 ja 5 antavat esitietoja trooppisen geometrian ymmärtämiseen ja siihen, miten algebrallinen ja trooppinen geometria voidaan linkittää toisiinsa. Viimeinen luku puolestaan keskittyy todistamaan Kapranovin lauseen.

Aluksi esitellään trooppinen puolirengas. Tämä on $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$, missä yhteenlaskuna $\oplus$ toimii minimin ottaminen ja kertolaskuna $\odot$ tavanomainen yhteenlasku. Trooppisen puolirenkaan yli voidaan muodostaa Laurent polynomien rengas. Laurent polynomi on polynomi, jossa sallitaan negatiiviset eksponentit. Luvun lopussa esitellään myös trooppisen Laurent polynomin määräämä trooppinen hyperpinta. Näitä käistteitä havainnollistetaan esimerkkien ja kuvien avulla.

Luvussa 3 määritellään kunnan K valuaatio v, joka kuvaa kunnan K alkiot trooppisen puolirenkaan alkioiksi. Tämän jälkeen esitellään valuaatioon liittyvä arvoryhmä Γ_v, joka on trooppisen puolirenkaan osajoukko, ja kunnan K jäännöskunta $\Bbbk$. Esimerkkinä kunnasta ja sen valuaatiosta toimii Puiseux sarjojen kunta ja sen luonnollinen valuaatio.

Tutkielmassa käsitellään lähinnä Laurent polynomeja sekä trooppisen puolirenkaan että kunnan tapauksessa. Laurent polynomin määräämän funktion määrittelyjoukkoa täytyy kuitenkin tavalliseen polynomiin nähden rajata negatiivisten eksponenttien johdosta. Tätä varten luvussa 4 esitellään algebrallinen torus, joka toimii funktio lähtöjoukkona.

Luku 5 yhdistää luvut 2 ja 3. Aluksi esitellään Laurent polynomin tropikalisaatio. Tropikalisaatio muuttaa polynomin kerroin renkaan kunnasta K trooppiseksi puolirenkaaksi. Tämän avulla saadaan edelleen määriteltyä polynomin alkumuoto, joka on polynomi kerroinrenkaanaan kunnan K jäännöskunta.

Viimeisessä luvussa todistetaan Kapranovin lause. Laurent polynomin f määräämä hyperpinta voidaan kuvata valuaatiolla v. Jos kunta K on algebrallisesti suljettu, niin Kapranovin lause sanoo, että edellä olleen hyperpinnan kuvan sulkeuma on sama, kuin polynomin f tropikalisaation määräämä hyperpinta.

Renkaiden ja kuntien tuntemus tarvitaan tämän tutkielman ymmärtämiseen. Kuntien osalta tulee tuntea ideaalin ja tekijärenkaan käsitteet. Osa todistuksista vaatii lisäksi joidenkin topologian käsitteiden tuntemusta reaalilukujen standarditopologian tapauksessa. Lukijalta oletetaan tunnetuksi sulkeuma, tiheys ja jatkuvaan funktioon liittyviä tuloksia. Laurent polynomien ja potenssisarjojen käsittely tapahtuu siten, että tavallisten polynomien tuntemus riittää. Algebrallista geometriaa ei lukijalta vaadita, mutta sen tunteminen auttaa ymmärtämään tutkielman tulosten merkitystä.

2 Trooppista aritmetiikkaa

Trooppinen puolirengas

Määritelmä 2.1 (vrt. [3])**.** Olkoon S joukko ja olkoot $+$ ja $\cdot$ laskutoimituksia tässä joukossa. Tällöin $(S, +, \cdot)$ on *puolirengas*, jos

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(2) $\exists 0 \in S : 0 + a = a + 0 = a$,

(3) $a + b = b + a$,

(4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

(5) $\exists 1 \in S : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$,

(6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

(7) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,

(8) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

aina, kun $a, b, c \in S$. Jos lisäksi

(9) $a \cdot b = b \cdot a$

aina, kun $a, b \in S$, niin $(S, +, \cdot)$ on *kommutatiivinen puolirengas*.

Puolirengas eroaa renkaasta siten, että yhteenlaskun suhteen ei vaadita vasta-alkion olemassaoloa. Tämän seurauksena täytyy lisätä aksiooma (8). Renkaassa tämä seuraa vasta-alkion olemassaolosta.

Määritelmä 2.2 (vrt. [1, s. 10])**.** *Trooppinen puolirengas* on joukko $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ varustettuna laskutoimituksilla $\oplus$ ja $\odot$ siten, että

(1) $x \neq \infty \Rightarrow x < \infty$,

(2) $\infty + x = x + \infty = \infty$,

(3) $x \oplus y = \min\{x, y\}$,

(4) $x \odot y = x + y$.

aina, kun $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Huomautus. Yhteenlasku $\oplus$ on määritelty, sillä järjestysrelaatio $<$ joukossa $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ on lineaarijärjestys.

Lause 2.1. *Trooppinen puolirengas* $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ *on kommutatiivinen puolirengas.*

Todistus. Oletetaan, että $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Oletetaan aksioomaa (1) varten ensin, että $x \leq y \leq z$. Tällöin

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= \min\{\min\{x, y\}, z\} \\ &= \min\{x, z\} \\ &= x\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}x \oplus (y \oplus z) &= \min\{x, \min\{y, z\}\} \\ &= \min\{x, y\} \\ &= x,\end{aligned}$$

joten $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$. Vastaavasti voidaan todistaa tapaukset $x \leq z \leq y$, $y \leq x \leq z$, $y \leq z \leq x$, $z \leq x \leq y$ ja $z \leq y \leq x$, joten aksiooma (1) pätee. Koska

$$\infty \oplus x = \min\{\infty, x\} = x$$

ja

$$x \oplus \infty = \min\{x, \infty\} = x,$$

niin yhteenlaskun suhteen neutraalialkio on ∞. Näin ollen aksiooma (2) pätee. Aksiooma (3) on voimassa, koska

$$x \oplus y = \min\{x, y\} = \min\{y, x\} = y \oplus x.$$

Aksiooma (4) pätee, sillä

$$(x \odot y) \odot z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \odot (y \odot z).$$

Neutraali alkio kertolaskun suhteen on 0, koska

$$x \odot 0 = x + 0 = x$$

ja

$$0 \odot x = 0 + x = x.$$

Siis aksiooma (5) pätee. Koska

$$x \odot (y \oplus z) = x + \min\{y, z\} = \min\{x + y, x + z\} = x \odot y \oplus x \odot z,$$

niin aksiooma (6) on voimassa. Aksiooma (7) seuraa aksioomista (6) ja (9). Aksiooma (8) pätee, koska

$$x \odot \infty = x + \infty = \infty$$

ja

$$\infty \odot x = \infty + x = x.$$

Aksiooma (9) on voimassa, sillä

$$x \odot y = x + y = y + x = y \odot x.$$

Näin ollen kaikki yhdeksän aksioomaa ovat voimassa, joten $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ on kommutatiivinen puolirengas. $\square$

Esimerkki 2.1. Trooppisessa puolirenkaassa esimerkiksi

$$10 \oplus 3 = 3 \qquad \text{ja} \qquad 7 \odot 6 = 13.$$

Esimerkki 2.2 (vrt. [1, s. 10])**.** Huomataan, että kertolaskun neutraalialkiolle pätee

$$x \oplus 0 = 0, \quad \text{kun } x \geq 0,$$

ja

$$x \oplus 0 = x, \quad \text{kun } x < 0.$$

Esimerkki 2.3. Trooppisessa puolirenkaassa ei voida määritellä vähennyslaskua. Vähennyslasku vaatii vasta-alkioiden olemassaolon, mikä ominaisuus puolirenkailta puuttuu. Havainnollistetaan tätä yrittämällä laskea

$$x = 5 \ominus 2.$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$x \oplus 2 = 5.$$

Mutta $x \oplus 2 \leq 2 < 5$, joten $x \oplus 2 \neq 5$. Siis tätä erotusta ei voida laskea.

Potenssiin korotus trooppisessa puolirenkaassa on yksinkertaista. Huomataan, että

$$\begin{aligned} x^{\odot n} &= \overbrace{x \odot \ldots \odot x}^{n \text{ kpl}} \\ &= \overbrace{x + \ldots + x}^{n \text{ kpl}} \\ &= n \cdot x, \end{aligned}$$

missä $\cdot$ on tavallinen reaalilukujen kertolasku. Nyt binomin potenssille saadaan johdettua kaava

$$\begin{aligned} (x \oplus y)^{\odot n} &= n \cdot \min\{x, y\} \\ &= \min\{n \cdot x, n \cdot y\} \\ &= n \cdot x \oplus n \cdot y \\ &= x^{\odot n} \oplus y^{\odot n}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.4 (vrt. [1, s. 11]). Lasketaan binomin kolmas potenssi ilman yllä johdettua kaavaa. Saadaan

$$\begin{aligned}
&(x \oplus y)^{\odot 3} \\
&= (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \\
&= x \odot (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \oplus y \odot (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \\
&= x \odot (x \odot (x \oplus y) \oplus y \odot (x \oplus y)) \oplus y \odot (x \odot (x \oplus y) \oplus y \odot (x \oplus y)) \\
&= x^{\odot 2} \odot (x \oplus y) \oplus x \odot y \odot (x \oplus y) \oplus y \odot x \odot (x \oplus y) \oplus y^{\odot 2} \odot (x \oplus y) \\
&= x^{\odot 3} \oplus x^{\odot 2} \odot y \oplus x^{\odot 2} \odot y \oplus x \odot y^{\odot 2} \oplus x^{\odot 2} \odot y \oplus x \odot y^{\odot 2} \oplus x \odot y^{\odot 2} \oplus y^{\odot 3}.
\end{aligned}$$

Koska $z \oplus z = z$ kaikilla $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, niin edellinen lauseke supistuu muotoon

$$x^{\odot 3} \oplus x^{\odot 2} \odot y \oplus x \odot y^{\odot 2} \oplus y^{\odot 3}.$$

Aiemmin johdetussa binomin yleisen potenssin kaavassa ei kuitenkaan esiinny sekatermejä. Käyttämällä $\oplus$ ja $\odot$ määritelmiä saadaan edellinen lauseke muotoon

$$\min\{3x, 2x + y, x + 2y, 3y\}$$

ja binomin potenssin kaava tapauksessa $n = 3$ muotoon

$$\min\{3x, 3y\}.$$

Jos $x \leq y$, niin

$$3x \leq 2x + y \leq x + 2y \leq 3y,$$

joten

$$\min\{3x, 2x + y, x + 2y, 3y\} = 3x = \min\{3x, 3y\}.$$

Jos taas $x > y$, niin

$$3y \leq x + 2y \leq 2x + y \leq 3x,$$

joten

$$\min\{3x, 2x + y, x + 2y, 3y\} = 3y = \min\{3x, 3y\}.$$

Huomataan siis, että tapauksessa $n = 3$ sekatermit supistuvat pois binomin potenssista. Binomin yleisen potenssin kaavan nojalla tiedetään, että näin tapahtuu itse asiassa kaikilla potenssin n arvoilla.

Myös negatiiviset eksponentit ovat sallittuja trooppisessa puolirenkaassa. Jos $x \neq \infty$, niin

$$x \odot (-x) = x + (-x) = 0,$$

joten $x^{\odot -1} = -x$. Siis

$$x^{\odot -n} = (x^{\odot n})^{\odot -1} = (n \cdot x)^{\odot -1} = -n \cdot x.$$

Trooppiset polynomit

Kuten renkaassa, myös puolirenkaassa A voidaan määritellä polynomi ja polynomien väliset laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$. Tällöin kolmikko $(A[X_1, \ldots, X_n], +, \cdot)$ on myös puolirengas. Laurent polynomi on polynomi, jossa sallitaan muuttujien negatiiviset eksponentit. Kuten edellä saadaan määriteltyä Laurent polynomien puolirengas $(A[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}], +, \cdot)$. Laurent polynomin f tapauksessa puhutaan usein vain polynomista f, jos on selvää, että f on Laurent polynomi.

Esimerkki 2.5. Olkoon $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ trooppinen puolirengas. Tällöin n–muuttujan *trooppinen Laurent polynomi* on

$$f = \bigoplus_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} a_{\boldsymbol{u}} \odot \boldsymbol{X}^{\odot \boldsymbol{u}},$$

missä $a_{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ siten, että $a_{\boldsymbol{u}} \neq \infty$ vain äärellisen monella $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n$. Tässä

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} = X_1^{\odot u_1} \odot \cdots \odot X_n^{\odot u_n},$$

kun $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. Yksittäistä summan alkiota $a_{\boldsymbol{u}} \odot \boldsymbol{X}^{\odot \boldsymbol{u}}$ sanotaan *trooppiseksi termiksi*, joka on myös itsessään trooppinen polynomi.

Olkoon A puolirengas ja $f = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{N}} a_u \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \in A[X_1, \ldots, X_n]$ polynomi. Polynomin f määräämä polynomifunktio on

$$f : A^n \to A, \boldsymbol{a} \mapsto \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{N}} a_u \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}}.$$

Tämä määritelmä vastaa täysin renkaiden tapausta. Olkoon $g = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}} b_u \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \in A[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ Laurent polynomi. Tällöin g määrää polynomifunktion samaan tapaan kuin f. Tämän funktion lähtöjoukoksi ei kuitenkaan voida ottaa koko joukkoa A^n. Negatiivisten eksponenttien johdosta polynomiin g voidaan sijoittaa vain kääntyviä alkioita. Siis täytyy rajoittua määrittelyjoukkoon $(A^*)^n$, jolloin

$$g : (A^*)^n \to A, \boldsymbol{a} \mapsto \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}} b_u \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}}.$$

Esimerkki 2.6. Olkoon

$$f = \bigoplus_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} a_{\boldsymbol{u}} \odot \boldsymbol{X}^{\odot \boldsymbol{u}} \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$$

trooppinen Laurent polynomi. Kuten aiemmin todettiin jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ löytyy käänteisalkio $x^{\odot -1}$. Täten f määrittelee kuvauksen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

siten, että

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \bigodot_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} a_{\boldsymbol{u}} \odot \boldsymbol{x}^{\odot \boldsymbol{u}} \\
&= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}\{a_{\boldsymbol{u}} + x_1u_1 + \cdots + x_nu_n\} \\
&= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}\{a_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}\},
\end{aligned}$$

kun $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. Tässä $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}$ tarkoittaa normaalia vektorien pistetuloa.

Huomautus. Kumpikin tulo $x \cdot y$ ja $x \odot y$ voidaan kirjoittaa lyhyemmin muodossa xy. Samoin $\odot$ voidaan jättää kirjoittamatta potenssiin korotuksessa. Pidempiä merkintöjä käytetään, mikäli asiayhteydestä ei ole selvää kumpaa kertolaskua tarkoitetaan.

Esimerkki 2.7. Olkoon

$$f = X^2 \oplus 2X \oplus 4 \in (\mathbb{R}\cup\{\infty\})[X^{\pm 1}]$$

trooppinen Laurent polynomi. Tutkitaan vastaavan polynomifunktion kuvaajaa. Tavanomaisen aritmetiikan avulla lausuttuna funktio on muotoa

$$f(x) = \min\{2x+1, x+2, 4\}.$$

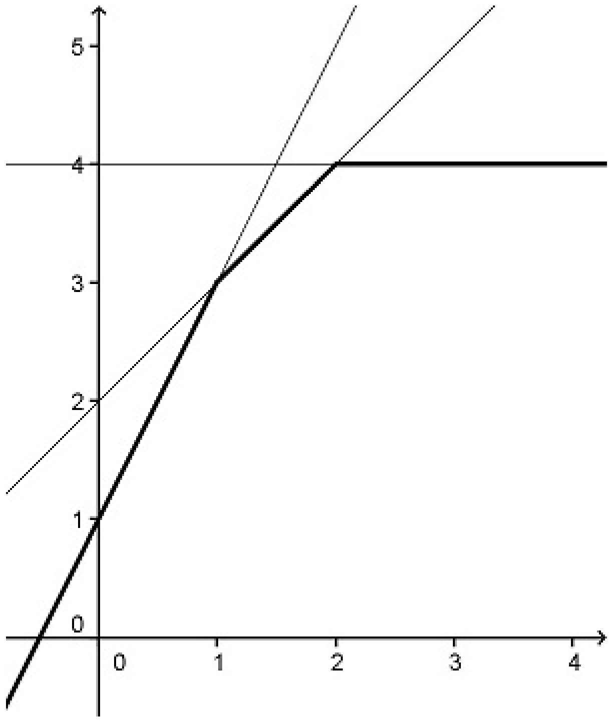
Funktion kuvaaja koostuu siis suorien $y = 2x+1$, $y = x+2$ ja $y = 4$ osista. Tutkitaan suorat pareittain. Nyt epäyhtälöistä

$$2x+1 \leq x+2, \quad 2x+1 \leq 4 \quad \text{ja} \quad x+2 \leq 4$$

saadaan ratkaisut

$$x \leq 1, \quad x \leq \frac{3}{2} \quad \text{ja} \quad x \leq 2.$$

Siis suora $y = 2x+1$ antaa funktion pienimmän arvon, kun $x \leq 1$ ja $x \leq \frac{3}{2}$, eli kun $x \leq 1$. Suora $y = x+2$ antaa funktion pienimmän arvon, kun $x \geq 1$ ja $x \leq 2$. Suora $y = 4$ antaa funktion pienimmän arvon, kun $x \geq \frac{3}{2}$ ja $x \geq 2$, eli kun $x \geq 2$. Siis kuvaaja on puolisuora $y = 2x+1$ välillä $]-\infty, 1]$, jana $y = x+2$ välillä $[1, 2]$ ja puolisuora $y = 4$ välillä $[2, \infty[$. Kuvassa 1 on havainnollistettu tehtävän tilannetta.



Kuva 1: Polynomifunktion $f(x) = x^2 \oplus 2x \oplus 4$ kuvaaja.

Esimerkki 2.8. Olkoon

$$f = 0X^2 \oplus 4 \oplus 3X^{-1} \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})[X^{\pm 1}]$$

trooppinen Laurent polynomi. Tutkitaan vastaavan polynomifunktion kuvaajaa. Tavanomaisen aritmetiikan avulla lausuttuna funktio on muotoa

$$f(x) = \min\{2x, 4, -x + 3\}.$$

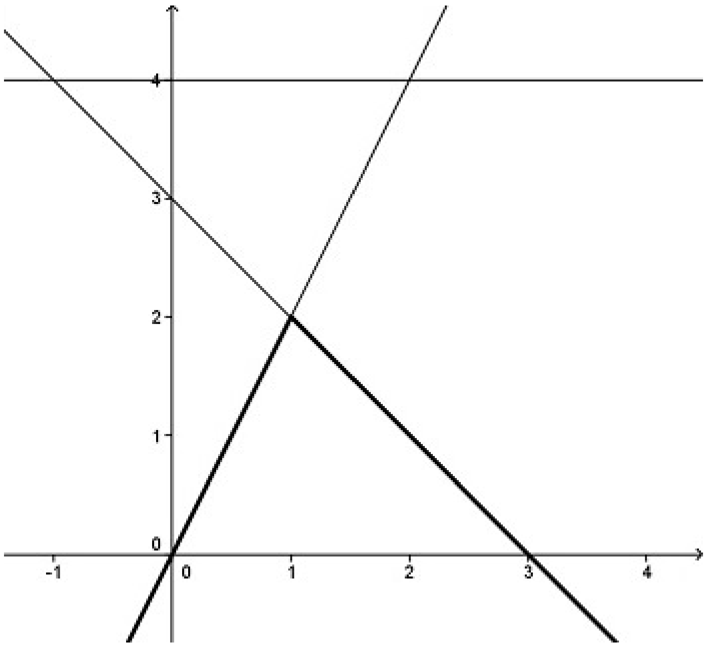
Funktion kuvaaja koostuu siis suorien $y = 2x$, $y = 4$ ja $y = -x + 3$ osista. Tutkitaan suorat pareittain. Nyt epäyhtälöistä

$$2x \leq 4, \quad 2x \leq -x + 3 \quad \text{ja} \quad 4 \leq -x + 3$$

saadaan ratkaisut

$$x \leq 2, \quad x \leq 1 \quad \text{ja} \quad x \leq -1.$$

Siis suora $y = 2x$ antaa funktion pienimmän arvon, kun $x \leq 2$ ja $x \leq 1$, eli kun $x \leq 1$. Suora $y = 4$ antaa funktion pienimmän arvon, kun $x \geq 1$ ja $x \leq -1$. Nämä eivät voi toteutua yhtä aikaa, joten tämä suora ei anna koskaan funktion pienintä arvoa. Suora $y = -x+3$ antaa funktion pienimmän arvon, kun $x \geq 1$ ja $x \geq -1$, eli kun $x \geq 1$. Siis kuvaaja on puolisuora $y = 2x$ välillä $]-\infty, 1]$ ja puolisuora $y = -x + 3$ välillä $[1, \infty[$. Kuvassa 2 on havainnollistettu tehtävän tilannetta.



Kuva 2: Polynomifunktion $f(x) = 0x^2 \oplus 4 \oplus 3x^{-1}$ kuvaaja.

Trooppisten polynomien nollakohdat eivät ole mielenkiintoisia, sillä trooppisen puolirenkaan nolla-alkio on ∞. Tämä arvo saavutetaan vain, jos kyseessä on joko nollapolynomi eli polynomi, jonka jokaisen termin kerroin on ∞, tai sijoittamalla muuttujiin arvoa ∞ niin, että jokaisessa termissä esiintyy ∞ vähintään kerran. Jälkimmäinen ei Laurent polynomien kohdalla ole mahdollista, koska polynomifunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$. Annetaan trooppisen Laurent polynomin juurelle toisenlainen määritelmä. Määritelmä on vastaava myös polynomien tapauksessa.

Määritelmä 2.3. Olkoon

$$f = \bigoplus_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} a_{\boldsymbol{u}} \odot \boldsymbol{X}^{\odot \boldsymbol{u}} \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$$

trooppinen Laurent polynomi. Sanotaan, että $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ on polynomin f *juuri*, jos on olemassa sellaiset $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathbb{Z}^n$, että $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}'$ ja

$$a_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = a_{\boldsymbol{u}'} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' = f(\boldsymbol{x}).$$

Huomautus. Trooppisen polynomin f juuret ovat ne kohdat, joissa $f(\boldsymbol{x})$ ei ole affiini. Yhden muuttuja tapauksessa tämä tarkoittaa niitä kohtia, joissa funktion kuvaajassa on kulma.

Esimerkki 2.9. Esimerkistä 2.7 nähdään, että polynomin $X^2 \oplus 2X \oplus 4$ juuret ovat $x = -1$ ja $x = -2$. Esimerkistä 2.8 nähdään, että polynomilla $4X^2 \oplus 3X \oplus 1$ on vain yksi juuri $x = 1$.

Määritelmä 2.4. Olkoon $f \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ trooppinen Laurent polynomi. Tällöin

$$\mathbb{V}(f) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \text{ on polynomin } f \text{ juuri}\}$$

on polynomin f määräämä *trooppinen hyperpinta.*

Esimerkki 2.10. Esimerkin 2.7 polynomin määräämä hyperpinta on

$$\mathbb{V}(f) = \{-1, -2\}.$$

Esimerkki 2.11. Määritetään polynomin

$$f = 3X^2 \oplus 2Y^2 \oplus (-XY) \oplus 5X \oplus (-4Y) \oplus 7 \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$$

määräämä hyperpinta. Tutkitaan ensin, missä kohdissa polynomin kaksi termiä saavat saman arvon:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 2y + 2 \\ y &= x + \tfrac{1}{2}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3 &= x + y - 1 \\ y &= x + 4, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3 &= x + 5 \\ x &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= y - 4 \\ y &= 2x + 7, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3 &= 7 \\ x &= 2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2y + 2 &= x + y - 1 \\ y &= x - 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y + 2 &= x + 5 \\ y &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2y + 2 &= y - 4 \\ y &= -6, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2y + 2 &= 7 \\ y &= \tfrac{5}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y - 1 &= x + 5 \\ y &= 6, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y - 1 &= y - 4 \\ x &= -3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y - 1 &= 7 \\ y &= -x + 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 5 &= y - 4 \\ y &= x + 9, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 5 &= 7 \\ x &= 2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y - 4 &= 7 \\ y &= 11. \end{aligned}$$

Sijoitetaan saadut suorat yksi kerrallaan funktioon

$$f(x, y) = \min\{2x + 3, 2y + 2, x + y - 1, x + 5, y - 4, 7\},$$

jolloin saadaan

$$f(x) = \min\{2x + 3, 2x + 3, 2x - \frac{1}{2}, x + 5, x - \frac{7}{2}, 7\} \quad (y = x + \frac{1}{2}), \tag{2.1}$$

$$f(x) = \min\{2x + 3, 2x + 10, 2x + 3, x + 5, x, 7\} \quad (y = x + 4), \tag{2.2}$$

$$f(y) = \min\{7, 2y + 2, y + 1, 7, y - 4, 7\} \quad (x = 2), \tag{2.3}$$

$$f(x) = \min\{2x + 3, 4x + 16, 3x + 6, x + 5, 2x + 3, 7\} \quad (y = 2x + 7), \tag{2.4}$$

$$f(x) = \min\{2x + 3, 2x - 4, 2x - 4, x + 5, x - 7, 7\} \quad (y = x - 3), \tag{2.5}$$

$$f(x) = \min\{2x + 3, x + 5, \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, x + 5, \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, 7\} \quad (y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}), \tag{2.6}$$

$$
\begin{aligned}
&(2.7) \quad f(x) = \min\{2x+3, -10, x-7, x+5, -10, 7\} \quad (y=-6),\\
&(2.8) \quad f(x) = \min\{2x+3, 7, x+\frac{3}{2}, x+5, -\frac{3}{2}, 7\} \quad (y=\frac{5}{2}),\\
&(2.9) \quad f(x) = \min\{2x+3, 14, x+5, x+5, 2, 7\} \quad (y=6),\\
&(2.10) \quad f(y) = \min\{-3, 2y+2, y-4, 2, y-4, 7\} \quad (x=-3),\\
&(2.11) \quad f(x) = \min\{2x+3, -2x+2, 7, x+5, -x+4, 7\} \quad (y=-x+8),\\
&(2.12) \quad f(x) = \min\{2x+3, 2x+20, 2x+8, x+5, x+5, 7\} \quad (y=x+9),\\
&(2.13) \quad f(x) = \min\{2x+3, 24, x+10, x+5, 7, 7\} \quad (y=11).
\end{aligned}
$$

Polynomille löytyy automaattisesti juuri, jos funktiossa vähintään kahteen kertaan esiintyjä termi antaa polynomin minimiarvon. Juuria voisi myös löytyä muidenkin kahden termin avulla, mutta nämä kohdat sisältyvät automaattisesti johonkin toiseen funktioon, jossa nämä kaksi termiä ovat samoja. Funktiosta 2.1 huomataan, että termi $2x+3$ ei koskaan anna minimiarvoa, sillä $2x+3 > 2x-\frac{1}{2}$. Samalla tavalla voidaan hylätä funktio 2.8. Funktiosta 2.2 saadaan

$$
\begin{array}{rr}
2x+3 \leq x & \qquad 2x+3 \leq 7 \\
x \leq -3, & \qquad x \leq 2,
\end{array}
$$

joten suora $y = x+4$ kuuluu hyperpintaan, kun $x \leq -3$. Kaksi termiä voitiin jättää suoraa tutkimatta, sillä $2x+3 < 2x+10$ ja $x < x+5$. Funktiosta 2.3 saadaan

$$
\begin{array}{ll}
7 \leq 2y+2 & \qquad 7 \leq y-4 \\
y \geq \frac{5}{2}, & \qquad y \geq 11,
\end{array}
$$

joten suora $x = 2$ kuuluu hyperpintaan, kun $y \geq 11$. Funktiosta 2.4 saadaan

$$
\begin{array}{rrrr}
2x+3 \leq 4x+16 & \qquad 2x+3 \leq 3x+6 & \qquad 2x+3 \leq x+5 & \qquad 2x+3 \leq 7 \\
x \geq -\frac{13}{2}, & \qquad x \geq -3, & \qquad x \leq 2, & \qquad x \leq 2,
\end{array}
$$

joten suora $y = 2x+7$ kuuluu hyperpintaan, kun $-3 \leq x \leq 2$. Funktiosta 2.5 saadaan

$$
\begin{array}{rr}
2x-4 \leq x-7 & \qquad 2x-4 \leq 7 \\
x \leq -3, & \qquad x \leq \frac{11}{2},
\end{array}
$$

joten suora $y = x-3$ kuuluu hyperpintaan, kun $x \leq -3$. Funktiosta 2.6 saadaan

$$
\begin{array}{rrrr}
x+5 \leq 2x+3 & \qquad x+5 \leq \frac{3}{2}x+\frac{1}{2} & \qquad x+5 \leq \frac{1}{2}x-\frac{5}{2} & \qquad x+5 \leq 7 \\
x \geq 2, & \qquad x \geq 9, & \qquad x \leq -15, & \qquad x \leq -2,
\end{array}
$$

joten suora $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ei kuulu hyperpintaan. Funktiosta 2.7 saadaan

$$
\begin{array}{rr}
-10 \leq 2x+3 & \qquad -10 \leq x-7 \\
x \geq -\frac{13}{2}, & \qquad x \geq -3,
\end{array}
$$

joten suora $y = -6$ kuuluu hyperpintaan, kun $x \geq -3$. Funktiosta 2.9 saadaan

$$
\begin{array}{rr}
x+5 \leq 2x+3 & \qquad x+5 \leq 2 \\
x \geq 2, & \qquad x \leq -3,
\end{array}
$$

joten suora $y = 6$ ei kuulu hyperpintaan. Funktiosta 2.10 saadaan

$$\begin{aligned} y - 4 &\leq 2y + 2 \qquad & y - 4 &\leq -3 \\ y &\geq -3, & y &\leq 1, \end{aligned}$$

joten suora $x = -3$ ei kuulu hyperpintaan. Funktiosta 2.11 saadaan

$$\begin{array}{llll} 7 \leq 2x + 3 \qquad & 7 \leq -2x + 2 \qquad & 7 \leq x + 5 \qquad & 7 \leq -x + 4 \\ x \geq 2, & x \leq -\frac{5}{2}, & x \geq 2, & x \leq -3, \end{array}$$

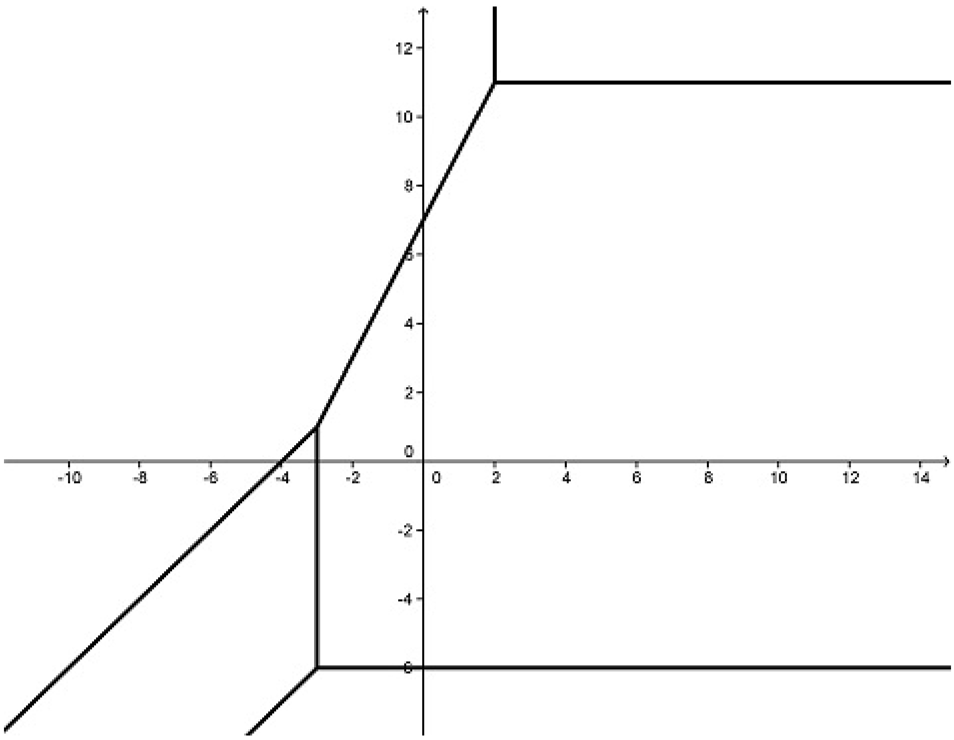
joten suora $y = -x + 8$ ei kuulu hyperpintaan. Funktiosta 2.12 saadaan

$$\begin{aligned} x + 5 &\leq 2x + 3 \qquad & x + 5 &\leq 7 \\ x &\geq 2, & x &\leq 2, \end{aligned}$$

joten suora $y = x + 9$ kuuluu hyperpintaan, kun $x = 2$. Funktiosta 2.13 saadaan

$$\begin{array}{ll} 7 \leq 2x + 3 \qquad & 7 \leq x + 5 \\ x \geq 2, & x \geq 2, \end{array}$$

joten suora $y = 11$ kuuluu hyperpintaan, kun $x \geq 2$. Kuvassa 3 on esitetty joukko $\mathbb{V}(f)$ tasossa $\mathbb{R}^2$.



Kuva 3: Esimerkin 2.11 hyperpinta $\mathbb{V}(f)$.

Lause 2.2. *Olkoon* $f \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ *trooppinen Laurent polynomi. Silloin trooppinen hyperpinta* $\mathbb{V}(f)$ *on suljettu joukko.*

Todistus. Merkitään, että T_f on polynomin f niiden termien joukko, joiden kerroin ei ole ∞. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(f) &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \text{ on polynomin } f \text{ juuri}\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in T_f : \exists t' \in T_f \setminus \{t\} : f(\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{x}) = t'(\boldsymbol{x})\} \\
&= \bigcup_{t \in T_f} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists t' \in T_f \setminus \{t\} : f(\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{x}) = t'(\boldsymbol{x})\} \\
&= \bigcup_{t \in T_f} \big(\bigcup_{t \in T_f \setminus \{t\}} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{x}) = t'(\boldsymbol{x})\}\big) \\
&= \bigcup_{t \in T_f} \big(\bigcup_{t \in T_f \setminus \{t\}} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall t'' \in T_f : t(\boldsymbol{x}) = t'(\boldsymbol{x}) \leq t''(\boldsymbol{x})\}\big) \\
&= \bigcup_{t \in T_f} \big(\bigcup_{t \in T_f \setminus \{t\}} \big(\bigcap_{t'' \in T_f} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid t(\boldsymbol{x}) = t'(\boldsymbol{x}) \leq t''(\boldsymbol{x})\}\big)\big) \\
&= \bigcup_{t \in T_f} \big(\bigcup_{t \in T_f \setminus \{t\}} \big(\bigcap_{t'' \in T_f} (\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid t(\boldsymbol{x}) = t'(\boldsymbol{x})\} \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid t(\boldsymbol{x}) \leq t''(\boldsymbol{x})\})\big)\big).
\end{aligned}$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid t(\boldsymbol{x}) = t'(\boldsymbol{x})\} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (t - t')(\boldsymbol{x}) = 0\} \\
&= (t - t')^{-1}(\{0\}),
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid t(\boldsymbol{x}) \leq t''(\boldsymbol{x})\} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (t - t'')(\boldsymbol{x}) \leq 0\} \\
&= (t - t'')^{-1}([0, \infty[\,).
\end{aligned}$$

Merkitään

$$t(\boldsymbol{x}) = a_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}}, \quad t'(\boldsymbol{x}) = a_{\boldsymbol{u}'} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}'} \quad \text{ja} \quad t''(\boldsymbol{x}) = a_{\boldsymbol{u}''} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}''},$$

jolloin

$$(t - t')(\boldsymbol{x}) = (a_{\boldsymbol{u}} - a_{\boldsymbol{u}'}) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'} \quad \text{ja} \quad (t - t'')(\boldsymbol{x}) = (a_{\boldsymbol{u}} - a_{\boldsymbol{u}''}) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}''}.$$

Analyysin nojalla nämä ovat jatkuvia funktioita ja joukot $\{0\}$ ja $[0, \infty[$ ovat suljettuja joukkoja, joten alkukuvat $(t - t')^{-1}(\{0\})$ ja $(t - t'')^{-1}([0, \infty[\,)$ ovat suljettuja. Koska T_f on äärellinen, niin $\mathbb{V}(f)$ on suljettu suljettujen joukkojen äärellisinä yhdisteinä ja leikkauksina. $\square$

3 Valuaatio ja Puiseux sarjat

Määritelmä 3.1. [vrt. [1, s. 57]] Olkoon K kunta ja $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ trooppinen puolirengas. Kunnan K *valuaatio* on funktio $v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, jolle pätee

(1) $v(a) = \infty$, jos ja vain jos $a = 0$,

(2) $v(ab) = v(a) + v(b)$ kaikilla $a, b \in K$,

(3) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ kaikilla $a, b \in K$.

Merkitään lisäksi, että

$$\Gamma_v = \operatorname{ran}(v) \setminus \{\infty\}.$$

Lause 3.1. *Olkoon K kunta ja v sen valuaatio. Tällöin*

(i) $v(1) = 0$,

(ii) $v(-a) = v(a)$ *kaikilla* $a \in K$,

(iii) $v(a^{-1}) = -v(a)$ *kaikilla* $a \in K^*$,

(iv) $v(a^n) = nv(a)$ *kaikilla* $a \in K$ *ja* $n \in \mathbb{N}$.

Todistus (vrt. [1, s. 57-58]). Koska

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1),$$

niin

$$v(1) = 0.$$

Siis kohta (i) on todistettu. Oletetaan, että $a \in K$. Kohdan (i) avulla saadaan, että

$$2v(-1) = v(-1) + v(-1) = v((-1)(-1)) = v(1) = 0,$$

joten $v(-1) = 0$. Tästä seuraa, että

$$v(-b) = v((-1)b) = v(-1) + v(b) = 0 + v(b) = v(b).$$

Näin ollen kohta (ii) pätee. Oletetaan sitten, että $a \in K^*$. Siis a^{-1} on olemassa. Nyt saadaan, että

$$v(aa^{-1}) = v(a) + v(a^{-1}).$$

Toisaalta kohdan (i) avulla saadaan, että

$$v(aa^{-1}) = v(1) = 0,$$

joten $v(a^{-1}) = -v(a)$. Näin ollen kohta (iii) on voimassa. Oletetaan lopuksi, että $a \in K$ ja $n \in \mathbb{N}$. Jos $n = 0$, niin

$$v(a^n) = v(1) = 0 = 0a.$$

Jos $n > 0$, niin kohta (iv) seuraa käyttämällä määritelmän 3.1 kohtaa (ii) n kertaa. $\square$

Lause 3.2. *Olkoon $a, b \in K$. Jos $v(a) \neq v(b)$, niin*

$$v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}.$$

Todistus (vrt. [1, s. 57-58]). Oletetaan ensin, että $v(a) < v(b)$. Lauseen 3.1 nojalla $v(-b) = v(b)$. Siis saadaan, että

$$\begin{aligned} v(a) &= v((a+b) + (-b)) \\ &\geq \min\{v(a+b), v(-b)\} \\ &= \min\{v(a+b), v(b)\}, \end{aligned}$$

joten $v(a) \geq v(a+b)$. Toisaalta

$$v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\} = v(a).$$

Siis $v(a+b) = v(a)$, joten

$$v(a+b) = v(a) = \min\{v(a), v(b)\}.$$

Tapaus $v(b) < v(a)$ todistetaan vastaavasti. □

Lause 3.3 (vrt. [1, s. 57]). *Olkoon K kunta ja v sen valuaatio. Silloin pari $(\Gamma_v, +)$ eli Γ_v varustettuna reaalilukujen yhteenlaskulla on ryhmän $(\mathbb{R}, +)$ aliryhmä.*

Todistus. Lauseen 3.1 nojalla $v(1) = 0$, joten $0 \in \Gamma_v$, jolloin $\Gamma_v \neq \emptyset$. Oletetaan sitten, että $x, y \in \Gamma_v$. Tällöin on olemassa sellaiset $a, b \in K$, että $v(a) = x$ ja $v(b) = y$. Koska $v(b) \neq \infty$, niin $b \neq 0$, joten b^{-1} on olemassa. Nyt $ab^{-1} \in K$, joten lauseen 3.1 avulla saadaan

$$v(a) + (-v(b)) = v(a) + v(b^{-1}) = v(ab^{-1}) \in \Gamma_v.$$

Siis $(\Gamma_v, +)$ on ryhmän $(\mathbb{R}, +)$ aliryhmä. □

Olkoon v on epätriviaali valuaatio eli valuaatio, jolle on olemassa sellainen $a \in K^*$, että $v(a) \neq 0$. Sovitaan tällöin, että $1 \in \Gamma_v$. Näin voidaan tehdä isomorfian nojalla. Koska $v(a) \neq 0$, niin $v(a) > 0$ tai $v(a^{-1}) > 0$. Olkoon $x = \max\{v(a), v(a^{-1})\}$ ja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b \mapsto \frac{1}{x} b.$$

On helppo todeta, että tämä kuvaus on ryhmäisomorfismi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $f(v(a)) = 1$ tai $f(v(a^{-1})) = 1$. Lisäksi

$$\frac{1}{x} \min\{b, c\} = \min\{\frac{1}{x} b, \frac{1}{x} c\},$$

joten valitsemalla vielä $f(\infty) = \infty$ saadaan isomorfismi $\mathbb{R} \cup \infty \to \mathbb{R} \cup \infty$ trooppisten puolirenkaiden välille. Siis korvataan valuaatio v uudella valuaatiolla $f \circ v$, jolloin $1 \in \Gamma_{f \circ v}$.

Huomautus. Jatkossa oletetaan aina, että valuaatio v on epätriviaali.

Määritelmä 3.2 (vrt. [1, s. 58])**.** Olkoon K kunta ja v sen valuaatio. Joukko R_K on niiden kunnan K alkioiden joukko, joiden valuaatio on ei-negatiivinen, eli

$$R_K = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}.$$

Lause 3.4. *Olkoon K kunta ja v sen valuaatio. Silloin R_K varustettuna kunnan K laskutoimituksilla on kommutatiivinen rengas.*

Todistus. Kertolaskun $\cdot$ kommutatiivisuus on selvä. Todistetaan loput väitteestä osoittamalla, että R_K on kunnan K alirengas. Koska $v(0) = \infty \geq 0$, niin $0 \in R_K$, joten $R_K \neq \emptyset$. Oletetaan sitten, että $a, b \in R_K$. Tällöin $v(a), v(b) \geq 0$, joten käyttäen lausetta 3.1 saadaan, että

$$\begin{aligned} v(a + (-b)) &\geq \min\{v(a), v(-b)\} \\ &= \min\{v(a), v(b)\} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Siis $a + (-b) \in R_K$. Lisäksi

$$v(ab) = v(a) + v(b) \geq 0 + 0 = 0,$$

joten $ab \in R_K$. Siis R_K on kunnan K alirengas. □

Määritelmä 3.3 (vrt. [4, s. 4])**.** Kommutatiivinen rengas R on *lokaali rengas*, jos sillä on täsmälleen yksi maksimaalinen ideaali.

Lause 3.5 (vrt. [1, s. 58])**.** *Olkoon K kunta ja v sen valuaatio. Silloin R_K on lokaali rengas ja joukko*

$$M_K = \{a \in K \mid v(a) > 0\}$$

on sen ainoa maksimaalinen ideaali.

Todistus. Riittää osoittaa, että M_K on ainoa maksimaalinen renkaan R_K ideaali. Koska $v(0) = \infty > 0$, niin $0 \in M_K$, joten $M_K \neq \emptyset$. Oletetaan, että $a, b \in M_K$ ja $c \in R_K$. Tällöin $v(a) > 0$, $v(b) > 0$ ja $v(c) \geq 0$, joten

$$\begin{aligned} v(a + (-b)) &\geq \min\{v(a), v(-b)\} \\ &= \min\{v(a), v(b)\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

ja

$$v(ac) = v(a) + v(c) > 0 + v(c) = v(c) \geq 0.$$

Siis $a + (-b), ac \in M_K$, joten M_K on renkaan R_K ideaali.

Olkoon I on renkaan R_K ideaali ja $a \in I$. Oletetaan ensin, että $v(a) = 0$. Koska $v(a) \neq \infty$, niin $a \neq 0$, jolloin $a \in K^*$. Tällöin lauseen 3.1 nojalla $v(a^{-1}) = -v(a)$. Siis $v(a^{-1}) = 0$, joten $a^{-1} \in R_K$. Tällöin ideaalin määritelmän nojalla $a^{-1}a \in I$ eli $1 \in I$. Siis $I = \langle 1 \rangle = R_K$. Oletetaan sitten, että $v(a) > 0$. Tällöin $a \in M_K$. Siis joko $I = R_K$ tai $I \subseteq M_K$, joten M_K on maksimaalinen ideaali, joka sisältää kaikki aidot renkaan R_K ideaalit. Siis M_K on ainoa maksimaalinen ideaali. □

Olkoon R kommutatiivinen rengas ja I sen ideaali. Tällöin Rotmanin kirjan Proposition 7.7 [5, s. 519] sanoo, että I on maksimaalinen, jos ja vain jos R/I on kunta. Tästä seuraa suoraan seuraava lause.

Lause 3.6 (ks. [1, s. 58]). *Olkoon K kunta. Tällöin tekijärengas R_K/M_K on kunta.*

Edellisen lauseen tulos voidaan myös hahmotella yksinkertaisesti. Lauseen 3.1 kohdan (*iii*) nojalla renkaan R_K alkiosta kääntyviä ovat täsmälleen ne alkiot a, joilla $v(a) = 0$. Näin ollen ideaali M_K sisältää kaikki ei kääntyvät alkiot. Tekijärengas R_K/M_K puolestaan voidaan ajatella renkaaksi R_K, jossa koko ideaali M_K on luhistettu alkioksi 0. Siis kaikki renkaan R_K ei-kääntyvät alkiot on luhistettu ainoaksi ei-kääntyväksi alkioksi, joka kunnassa on. Muitakin alkiota samaistuu keskenään, mutta ne ovat kaikki kääntyviä, jolloin niiden muodostama alkio tekijärenkaassa on myös kääntyvä. Näin ollen R_K/M_K on kunta.

Merkitään $\Bbbk = R_K/M_K$, ja sanotaan, että $\Bbbk$ on parin (K, v) *jäännöskunta*. Renkaan R_K alkiota a vastaavaa alkiota kunnassa $\Bbbk$ merkitään $\overline{a}$.

Lause 3.7 (vrt. [2, s. 29]). *Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta. Tällöin jäännöskunta $\Bbbk$ on algebrallisesti suljettu.*

Todistus. Olkoon $\overline{f} \in \Bbbk[X]$ polynomi. Jos $\overline{f} = \overline{0}$, niin $\overline{0} \in \Bbbk$ on sen juuri. Oletetaan, että $\overline{f} \neq \overline{0}$. Merkitään

$$\overline{f} = \sum_{i=0}^{n} \overline{c_i} X^i,$$

missä $c_i = 0$, kun $\overline{c_i} = \overline{0}$. Olkoon

$$f = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i.$$

Tällöin $v(c_i) = 0$ jokaisella $c_i \neq 0$. Koska K on algebrallisesti suljettu, niin on olemassa sellainen $a \in K$, että $f(a) = 0$. Jos $a = 0$, niin $c_0 = 0$. Tällöin $\overline{c_0} = \overline{0}$, josta seuraa, että $\overline{f}(\overline{0}) = \overline{0}$. Oletetaan, että $a \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ v(f(a)) &= v(0) \\ v\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i a^i\Big) &= \infty. \end{aligned}$$

Koska $a \neq 0$ ja $c_i \neq 0$ jollakin $i \in \{1, \dots, n\}$, niin $v(c_i a^i) = v(c_i) + iv(a) < \infty$. Tällöin lause 3.2 sanoo, että on oltava olemassa j ja j' siten, että $j \neq j'$ ja $v(c_j a^j) = v(c_{j'} a^{j'}) = \min_{i=0}^{n}(v(c_i a^i)) < \infty$. Tällöin $c_j \neq 0$ ja $c_{j'} \neq 0$, joten $v(c_j) = 0$ ja $v(c_{j'}) = 0$. Nyt

$$\begin{aligned} v(c_j a^j) &= v(c_{j'} a^{j'}) \\ v(c_j) + jv(a) &= v(c_{j'}) + j'v(a) \\ jv(a) &= j'v(a) \\ (j - j')v(a) &= 0 \\ v(a) &= 0, \end{aligned}$$

joten $a \in R_K$, ja edelleen $\overline{a} \in R_K/M_K$. Siis

$$\overline{f}(\overline{a}) = \overline{f(a)} = \overline{0}.$$

$\square$

Esimerkki 3.1 (vrt. [1, s. 58]). Puiseux sarja kompleksisilla kertoimilla on muodollinen potenssisarja

$$c(t) = c_1 t^{a_1} + c_2 t^{a_2} + c_3 t^{a_3} + \dots,$$

missä $c_i \in \mathbb{C}$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi potensseille a_i pätee, että

(1) $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{Q}$,

(2) $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$,

(3) on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, että jokainen $a_i = \frac{m_i}{n}$ jollakin $m_i \in \mathbb{Z}$.

Kolmas ehto tarkoittaa siis, että potensseilla a_i on yhteinen nimittäjä n. Esimerkiksi

$$c(t) = t^{-2} + 2t^{-\frac{3}{2}} + 3t^{-1} + 4t^{-\frac{1}{2}} + 5 + 6t^{\frac{1}{2}} + \dots$$

on Puiseux sarja, sillä $-2 = -\frac{4}{2}$, $-1 = -\frac{2}{2}$, $0 = \frac{0}{2}$ ja niin edelleen. Sen sijaan

$$c(t) = t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{3}{4}} + t^{\frac{4}{5}} + \dots$$

ei ole Puiseux sarja, sillä jokainen alkuluku p esiintyy luvussa $\frac{p-1}{p}$ siten, ettei sitä voi supistaa. Näin ollen yhteisen nimittäjän pitäisi sisältää jokainen alkuluku, joten yhteistä nimittäjää ei ole. Huomataan, että myös sarja

$$c(t) = 0$$

toteuttaa kaikki annetut ehdot. Oletetaan jatkossa, että $c_1 \neq 0$, kun $c(t) \neq 0$. Siis aloitetaan sarjan termien luetteleminen ensimmäisestä nollasta eroavasta termistä.

Määritellään Puiseux sarjojen summa ja tulo. Olkoot

$$c(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} c_i t^{a_i}$$

ja

$$c'(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} c'_i t^{a'_i}$$

Puiseux sarjoja. Olkoot n sarjan $c(t)$ ja n' sarjan $c'(t)$ potenssien yhteiset nimittäjät. Silloin

$$a_i = \frac{m_i}{n}$$

ja

$$a'_i = \frac{m'_i}{n'},$$

missä $m_i, m'_i \in \mathbb{Z}$, jokaisella $i \in \mathbb{Z}_+$. Sarjojen $c(t)$ ja $c'(t)$ summa

$$c(t) + c'(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} d_i t^{b_i},$$

missä $\{b_1, b_2, \dots\} = \{a_1, a_2, \dots\} \cup \{a'_1, a'_2, \dots\}$ ja

- $d_i = c_i + c'_i$, jos $b_i \in \{a_1, a_2, \dots\}$ ja $b_i \in \{a'_1, a'_2, \dots\}$,
- $d_i = c_i$, jos $b_i \in \{a_1, a_2, \dots\}$ ja $b_i \notin \{a'_1, a'_2, \dots\}$,
- $d_i = c'_i$, jos $b_i \notin \{a_1, a_2, \dots\}$ ja $b_i \in \{a'_1, a'_2, \dots\}$

kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$. Koska

$$a_i = \frac{m_i}{n} = \frac{m_i n'}{nn'}$$

ja

$$a'_i = \frac{m'_i}{n'} = \frac{m'_i n}{nn'},$$

niin potensseilla b_i on yhteinen nimittäjä nn'. Joukko

$$\{m_1 n', m_2 n', \dots\} \cup \{m'_1 n, m'_2 n, \dots\}$$

on alhaalta rajoitettu, sillä sen pienin alkio on $m_1 n'$ tai $m'_1 n$. Lisäksi se on kokonaislukujen osajoukko, joten sen järjestys indusoi halutun järjestyksen joukkoon $\{b_1, b_2, \dots\}$. Siis $c(t) + c'(t)$ on Puiseux sarja. Sarjojen $c(t)$ ja $c'(t)$ tulo

$$c(t)c'(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} d_i t^{b_i},$$

missä

$$\{b_1, b_2, \dots\} = \{a_j + a'_{j'} \mid a_j \in \{a_1, a_2, \dots\} \text{ ja } a'_{j'} \in \{a'_1, a'_2, \dots\}\}$$

ja

$$d_i = \sum_{\substack{j,j' \in \mathbb{Z} \\ a_j + a'_{j'} = b_i}} c_j c'_{j'}$$

kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$. Tulon jokaiselle potenssille pätee

$$b_i = a_j + a'_{j'} = \frac{m_j}{n} + \frac{m'_{j'}}{n'} = \frac{m_j n' + m'_{j'} n}{nn'},$$

joten potensseilla b_i on yhteinen nimittäjä nn'. Joukko

$$\left\{ m_j n' + m'_{j'} n \;\middle|\; \frac{m_j}{n} \in \{a_1, a_2, \dots\} \text{ ja } \frac{m'_{j'}}{n'} \in \{a'_1, a'_2, \dots\} \right\}$$

on alhaalta rajoitettu, sillä sen pienin alkio on $m_1 n' + m'_1 n$. Lisäksi se on kokonaislukujen osajoukko, joten sen järjestys indusoi halutun järjestyksen joukkoon $\{b_1, b_2, \dots\}$. Tutkitaan, onko kerroin d_i aina määritelty. Olkoon b_i jokin tulossa esiintyvä potenssi. Siis

$$b_i = \frac{m_j n' + m'_{j'} n}{nn'}$$

joillakin $j, j' \in \mathbb{Z}_+$. Koska $m_j \geq m_1$, niin

$$\begin{aligned} \frac{m_1 n' + m'_{j'} n}{nn'} &\leq b_i \\ m_1 n' + m'_{j'} n &\leq b_i nn' \\ m'_{j'} n &\leq b_i nn' - m_1 n' \\ m'_{j'} &\leq \frac{b_i nn' - m_1 n'}{n}. \end{aligned}$$

Lisäksi $m'_{j'} \geq m'_1$, joten

$$m'_1 \leq m'_{j'} \leq \frac{b_i nn' - m_1 n'}{n}.$$

Vastaavasti saadaan, että

$$m_1 \leq m_j \leq \frac{b_i nn' - m'_1 n}{n'}.$$

Näille väleille mahtuu vain äärellisen monta kokonaislukua m_j ja $m'_{j'}$. Näin ollen b_i voidaan muodostaa vain äärellisen monella tavalla, joten kertoimen d_i määritelmän summassa on vain äärellisen monta summattavaa. Siis d_i on aina määritelty. Näin ollen myös Puiseux sarjojen tulo on Puiseux sarja.

Kommutatiivisen renkaan aksioomien toteutuminen on helppo todistaa. Käänteisalkio saadaan konstruoitua kuten muodolliselle potenssisarjalle yleensä (ks. [6]). Näin ollen on saatu Puiseux sarjojen kunta $\mathbb{C}\{\{t\}\}$.

Esimerkki 3.2. Kunnalle $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ on olemassa luonnollinen valuaatio v, missä sarja $c(t) \neq 0$ kuvautuu sen pienimmälle eksponentille, jonka kerroin on erisuuri kuin 0. Tapauksessa $c(t) = 0$ asettaa, että $v(c(t)) = \infty$. Siis

$$v : \mathbb{C}\{\{t\}\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, c(t) \mapsto \begin{cases} a_1, & \text{kun } c(t) \neq 0 \\ \infty, & \text{kun } c(t) = 0 \end{cases}.$$

Valuaation aksiooma (1) seuraa suoraa kuvauksen v määritelmästä ja aksiooma (2) potenssin laskusäännöistä. Olkoot $c(t)$ ja $c'(t)$ Puiseux sarjoja. Jos $c(t) = 0$, niin $c(t) + c'(t) = c'(t)$, jolloin aksiooma (3) on selvä. Tapaus $c'(t) = 0$ menee vastaavasti. Oletetaan, että $c(t), c'(t) \neq 0$. Tällöin $\min\{v(c(t)), v(c'(t))\} < \infty$. Tehdään vastaoletus, että

$$v(c(t) + c'(t)) < \min\{v(c(t)), v(c'(t))\}.$$

Tällöin $v(c(t)+c'(t)) < \infty$, joten $c(t)+c'(t) \neq 0$. Siis $b_1 < \min\{a_1, a'_1\}$, missä b_1 on pienin sarjassa $c(t) + c'(t)$ esiintyvä eksponentti. Tällöin tätä vastaava kerroin $d_1 \neq 0$. Puiseux sarjojen summan määritelmän nojalla $d_1 = c_i$, $d_1 = c'_{i'}$ tai $d_1 = c_i + c'_{i'}$ joillain $i, i' \in \mathbb{Z}_+$. Mutta tällöin

$$b_1 = a_i \geq a_1 \geq \min\{a_1, a'_1\}$$

tai

$$b_1 = a'_{i'} \geq a'_1 \geq \min\{a_1, a'_1\}$$

mikä on ristiriita. Siis

$$v(c(t) + c'(t)) \geq \min\{v(c(t)), v(c'(t))\},$$

joten aksiooma (3) pätee.

Huomautus. Ellei toisin mainita, käytetään Puiseux sarjoille jatkossa aina esimerkissä 3.2 määriteltyä luonnollista valuaatiota.

Esimerkki 3.3. Rengas $R_{\mathbb{C}\{\{t\}\}}$ koostuu niistä Puiseux sarjoista, joissa ei esiinny lainkaan negatiivisia eksponentteja. Tutkitaan, milloin kaksi kunnan $R_{\mathbb{C}\{\{t\}\}}/M_{\mathbb{C}\{\{t\}\}}$ alkiota $\overline{c(t)}$ ja $\overline{c'(t)}$ ovat samat. Jos $v(c(t)) > 0$, niin $\overline{0} = \overline{c(t)} = \overline{c'(t)}$. Tällöin $v(c'(t)) > 0$. Vastaavasti $v(c(t)) > 0$, jos $v(c'(t)) > 0$. Oletetaan, että $v(c(t)) = v(c'(t)) = 0$. Siis sarjojen pienimmän asteen termit ovat vakiotermit c_1 ja c'_1. Koska $\overline{c(t)} = \overline{c'(t)}$, niin $c(t) - c'(t) \in M_{\mathbb{C}\{\{t\}\}}$. Siis $v(c(t) - c'(t)) > 0$. Tämä tapahtuu, jos ja vain jos $c_1 - c'_1 = 0$ eli $c_1 = c'_1$. On siis saatu, että sarjan $c(t)$ sivuluokka jäännöskunnassa $R_{\mathbb{C}\{\{t\}\}}/M_{\mathbb{C}\{\{t\}\}}$ määräytyy täysin sarjan vakiotermin mukaan. Siis $R_{\mathbb{C}\{\{t\}\}}/M_{\mathbb{C}\{\{t\}\}} = \Bbbk \cong \mathbb{C}$.

Huomautus. Olkoot G ryhmä, $g \in G$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$ng = \overbrace{g + \cdots + g}^{n \text{ kpl}}$$

ja

$$(-n)g = -(ng).$$

Lause 3.8. *Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta ja v sen valuaatio. Silloin Γ_v on*

(i) ryhmän $\mathbb{R}$ jakautuva aliryhmä,

(ii) tiheä joukossa $\mathbb{R}$.

Todistus (vrt. [1, s. 62]). Oletetaan, että $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $x \in \Gamma_v$. Tällöin on olemassa sellainen $a \in K$, että $v(a) = x$. Koska K on algebrallisesti suljettu kunta, niin $a^{\frac{1}{n}} \in K$. Nyt

$$x = v(a) = v(a^{\frac{n}{n}}) = v((a^{\frac{1}{n}})^n) = nv(a^{\frac{1}{n}}),$$

joten Γ_v on jakautuva.

Aiemmin todettiin, että voimme isomorfian nojalla olettaa, että $1 \in \Gamma_v$. Kohdasta (i) seuraa tällöin, että $\mathbb{Q} \subseteq \Gamma_v$. Koska $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ on tiheä, niin myös $\Gamma_v \subseteq \mathbb{R}$ on tiheä. □

Huomautus. Lauseen 3.8 kohdan (i) avulla voidaan määritellä rationaaliluvulla kertominen. Olkoon $x \in \Gamma_v$ ja $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$\frac{n}{m}x = n(\frac{1}{m}x),$$

missä $\frac{1}{m}x$ on alkio, jolle pätee

$$m(\frac{1}{m}x) = x.$$

Tässä määritelmässä ajatellaan rationaaliluvulla kertomisen olevan vastaava kuin ylempänä kokonaisluvulla kertomisen. Se, että $\mathbb{Q} \subseteq \Gamma_v$, ei ole tässä oleellista.

Lause 3.9. *Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta ja v sen valuaatio. Silloin on olemassa sellainen ryhmähomomorfismi $\psi : (\Gamma_v, +) \to (K^*, \cdot)$, että $v(\psi(x)) = x$ kaikilla $x \in \Gamma_v$.*

Todistus. Ks. [1, s. 62-63] □

Merkintä. Olkoon $x \in \Gamma_v$. Merkitään

$$\psi(x) = t^x.$$

Tällöin

$$v(t^x) = x.$$

Merkintä on mielekäs, sillä potenssien laskusäännöt sopivat yhteen homomorfismin ψ kanssa. Erityisesti merkintä sopii hyvin yhteen esimerkkinä käytettyjen Puiseux sarjojen kanssa, kun homomorfismi ψ on luonnollinen homomorfismi

$$\psi(x) = t^x,$$

missä t on sarjassa esiintyvä muuttuja.

4 Algebrallinen torus

Määritelmä 4.1 (vrt. [1, s. 66])**.** Olkoon K kunta. Silloin n–ulotteinen *algebrallinen torus* on

$$\mathbb{T}_K^n = (K^*)^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in K^*\}.$$

Huomautus. Usein puhutaan algebrallisen toruksen sijaan vain toruksesta. Lisäksi käytetään merkintää $\mathbb{T}^n$, mikäli on selvää, minkä kunnan yli torus on muodostettu.

Merkintä. Olkoon $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ ja $\boldsymbol{a}' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$. Tällöin merkitään

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', a_n).$$

Lause 4.1. *Olkoon K ääretön kunta ja $0 \neq f \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ Laurent polynomi. Silloin on olemassa äärettömän monta sellaista $\boldsymbol{a} \in \mathbb{T}^n$, että $f(\boldsymbol{a}) \neq 0$.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Oletetaan ensin, että $n = 1$. Siis $f \in K[X^{\pm 1}]$. Olkoon

$$g = X^{-m} f,$$

missä m on pienin polynomissa f esiintyvä muuttujan X potenssi. Tällöin $g \in K[X]$ ja $g \neq 0$, joten $g(a) = 0$ vain äärellisen monella $a \in K$. Koska K on ääretön, niin $g(a) \neq 0$ äärettömän monella $a \in K$. Tällöin $g(a) \neq 0$ äärettömän monella $a \in \mathbb{T}$. Olkoon $a \in \mathbb{T}$ sellainen, että $g(a) \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} a^{-m} f(a) &\neq 0 \\ f(a) &\neq 0. \end{aligned}$$

Siis $f(a) \neq 0$ äärettömän monella $a \in \mathbb{T}$. Oletetaan sitten, että väite pätee arvolla $n - 1$. Olkoon

$$g = X_n^{-m} f,$$

missä m on pienin polynomissa f esiintyvä muuttujan X_n potenssi. Tällöin $g \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}][X_n]$, joten

$$g = \sum_{i=0}^{p} g_i X_n^i,$$

missä $g_0, \ldots, g_p \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}]$. Koska $g \neq 0$, niin $g_0 \neq 0$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla on olemassa äärettömän monta sellaista $\boldsymbol{a}' \in \mathbb{T}^{n-1}$, että $g_0(\boldsymbol{a}') \neq 0$. Siis $g(\boldsymbol{a}', X_n) \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{a}', X_n) &\neq 0 \\ X_n^{-m} f(\boldsymbol{a}', X_n) &\neq 0 \\ f(\boldsymbol{a}', X_n) &\neq 0. \end{aligned}$$

Tapaus $n = 1$ sanoo nyt, että on olemassa äärettömän monta sellaista $a_n \in \mathbb{T}$, että $f(\boldsymbol{a}', a_n) = f(\boldsymbol{a}', X_n)(a_n) \neq 0$. Väite seuraa, kun merkitään $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', a_n)$. $\square$

5 Tropikalisaatio ja polynomin alkumuoto

Kuten aiemmin oletetaan aina, että kunnan K valuaatio on epätriviaali. Oletetaan tästä eteenpäin lisäksi lauseen 3.8 kohdan (ii) ja lauseen 3.9 tulosten voimassaolo. Siis $\Gamma_v \subseteq \mathbb{R}$ on tiheä ja homomorfismi ψ on olemassa. Ei kuitenkaan oleteta, että kunta K olisi välttämättä algebrallisesti suljettu, josta aiemmat tulokset kyllä seuraisivat.

Määritelmä 5.1 (vrt. [1, s. 76])**.** Olkoon K kunta, v sen valuaatio ja $f \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ Laurent polynomi. Merkitään

$$f = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}.$$

Tällöin polynomin f *tropikalisaatio* on trooppinen Laurent polynomi

$$\mathrm{trop}(f) = \bigoplus_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} v(c_{\boldsymbol{u}}) \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}].$$

Trooppinen polynomi on siis saatu polynomista f korvaamalla kaikki siellä esiintyvät laskutoimitukset vastaavilla trooppisilla laskutoimituksilla ja muuttamalla monomien kertoimet $c_{\boldsymbol{u}}$ trooppisen puolirenkaan alkioiksi valuaation v avulla.

Esimerkki 5.1. Olkoon

$$f = 3tX^2Y + t^3XY^2 + (3t^3 + 2t^2 + t)X + t^{-1}Y^2 + (2 + t^2)X^{-1}$$

Laurent polynomien renkaan $\mathbb{C}\{\{t\}\}[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$ alkio. Silloin polynomin f tropikalisaatio on

$$\mathrm{trop}(f) = 1X^2Y \oplus 3XY^2 \oplus 1X \oplus (-1)Y^2 \oplus 0X^{-1}$$

ja tätä vastaava polynomifunktio on

$$\mathrm{trop}(f)(x, y) = \min\{1 + 2x + y, 3 + x + 2y, 1 + x, -1 + 2y, -x\}.$$

Määritelmä 5.2 (vrt. [1, s. 76])**.** Olkoon K kunta, v kunnan K valuaatio, $f \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ Laurent polynomi ja $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$f = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}$$

ja

$$W = \mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} (v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}).$$

Silloin polynomin f *alkumuoto* vektorin $\boldsymbol{x}$ suhteen on

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \in \Bbbk[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}],$$

kun $f \neq 0$. Jos $f = 0$, niin

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \overline{0} \in \Bbbk[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}].$$

Määritelmän 5.2 mielekkyys riippuu siitä, onko $\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}}$ aina määritelty. Arvon W määritelmän nojalla voidaan tehdä arvio

$$\begin{aligned} v(c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}) &= v(c_{\boldsymbol{u}}) + v(t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}) \\ &= v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W \\ &\geq W - W \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siis $\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}}$ on aina määritelty. Erityisesti huomataan, että alkumuodossa esiintyvät vain ne eksponentit $\boldsymbol{u}$, joita vastaavissa termeissä polynomin f tropikalisaatio arvolla $\boldsymbol{x}$ saavuttaa minimin W. Tämä johtuu siitä, että kaikilla muilla eksponenteilla

$$v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} > W.$$

Tällöin

$$v(c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}) > 0,$$

josta seuraa

$$\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}} = \overline{0}.$$

Esimerkki 5.2. Olkoon f esimerkin 5.1 polynomi

$$f = 3tX^2Y + t^3XY^2 + (3t^3 + 2t^2 + t)X + t^{-1}Y^2 + (2 + t^2)X^{-1}.$$

Valitaan $\boldsymbol{x} = (1, 2)$. Tällöin

$$W = \min\{5, 8, 2, 3, -1\} = -1,$$

joten

$$\begin{aligned} \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) &= \overline{(2 + t^2) t^{(1,2) \cdot (-1,0) - (-1)}} X^{-1} \\ &= \overline{(2 + t^2) t^0} X^{-1} \\ &= \overline{2 + t^2} X^{-1} \\ &= \overline{2} X^{-1}. \end{aligned}$$

Valitaan $\boldsymbol{x} = (-4, -6)$. Tällöin

$$W = \min\{-13, -13, -3, -13, 3\} = -13,$$

joten

$$\begin{aligned}\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) &= \overline{3tt^{(-4,-6)\cdot(2,1)-(-13)}}X^2Y + \overline{t^3t^{(-4,-6)\cdot(1,2)-(-13)}}XY^2 + \\ &\quad \overline{t^{-1}t^{(-4,-6)\cdot(0,2)-(-13)}}Y^2 \\ &= \overline{3tt^{-1}}X^2Y + \overline{t^3t^{-3}}XY^2 + \overline{t^{-1}t^1}Y^2 \\ &= \overline{3}X^2Y + \overline{1}XY^2 + \overline{1}Y^2 \\ &= \overline{3}X^2Y + XY^2 + Y^2.\end{aligned}$$

Esimerkki 5.3. Olkoon $f \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ ja $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Silloin $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \overline{0}$, jos ja vain jos $f = 0$.

Todistus. Implikaatio

$$f = 0 \Rightarrow \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \overline{0}$$

seuraa suoraan määritelmästä. Oletetaan, että $f \neq 0$. Merkitään

$$f = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}$$

ja $W = \mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x})$. Tällöin on olemassa sellainen $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n$, että $v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = W$. Nyt

$$v(c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}) = 0,$$

joten

$$\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}} \neq \overline{0}.$$

Siis

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \neq \overline{0}.$$

□

Alkumuodon määritelmä voidaan luonnollisella tavalla laajentaa myös polynomirenkaan $\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ polynomeille. Olkoon K' kunta, joka sisältää jäännöskunnan $\Bbbk$. Kunnaksi K' voidaan valita esimerkiksi sellaiset muodolliset potenssisarjat, joiden potenssit kuuluvat joukkoon Γ_v, ja valuaatioksi v' luonnollinen valuaatio kuten Puiseux sarjoille. Joukon Γ_v ominaisuuksista johtuen tällöin K' todellakin on kunta. Valuaatio v' sopii yhteen valuaation v kanssa, sillä $v'(\overline{a}) = v(a) = 0$ kaikilla $\overline{0} \neq \overline{a} \in \Bbbk$. Nolla-alkion tapauksessa saadaan myös $v'(\overline{0}) = v(0) = \infty$, mutta tämä pätee vain alkiolle $0 \in \overline{0}$. Tällöin kunnan K' vakiotermit muodostavat kunnan $\Bbbk$. (Vrt. [1, s. 77]) Kuten esimerkissä 3.3 voidaan todeta, että $\Bbbk \cong R_{K'}/M_{K'} = \Bbbk'$. Merkitään jatkossa, että $\Bbbk = \Bbbk'$.

Lause 5.1. *Olkoon K kunta, v sen valuaatio, $f \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ ja olkoot $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$. Silloin on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että*

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)) = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x} + \epsilon' \boldsymbol{x}'}(f)$$

jokaisella $0 < \epsilon' < \epsilon$.

Todistus (vrt. [1, s. 78]). Jos $f = 0$, niin

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)) = \overline{0} = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}+\epsilon'\boldsymbol{x}'}(f).$$

Oletetaan, että $f \neq 0$. Merkitään

$$f = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}.$$

Olkoon $W = \mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x})$, jolloin

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}.$$

Olkoon edelleen

$$W' = \mathrm{trop}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f))(\boldsymbol{x}') = \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}(v'(\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}) + \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}),$$

jolloin

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)) = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}(t')^{\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}-W'}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}},$$

missä $(t')^{\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}-W'} = \psi'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} - W')$ ja ψ' on valuaatiota v' vastaava lauseen 3.9 homomorfismi. Jos $v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} > W$, niin $v'(\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}) = v'(\overline{0}) = \infty$. Jos taas $v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} = W$, niin $\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} \neq 0$, jolloin $v'(\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}) = 0$. Siis

$$W' = \min_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n \\ v(c_{\boldsymbol{u}})+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=W}} (\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}),$$

joten

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)) = \sum_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n \\ v(c_{\boldsymbol{u}})+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=W}} \overline{\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}(t')^{\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}-W'}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}.$$

Lisäksi, jos $\overline{\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} t^{\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}-W'}} \neq 0$, niin $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} - W' = -v'(c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}) = 0$. Näin ollen

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)) = \sum_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n \\ v(c_{\boldsymbol{u}})+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=W \\ \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}=W'}} \overline{\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} = \sum_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n \\ v(c_{\boldsymbol{u}})+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}=W \\ \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}=W'}} \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}.$$

Polynomin f tropikalisaatio arvolla $\boldsymbol{x} + \epsilon'\boldsymbol{x}'$ on

$$\begin{aligned}\mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x}+\epsilon'\boldsymbol{x}') &= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}(v(c_{\boldsymbol{u}}) + (\boldsymbol{x}+\epsilon'\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{u}) \\ &= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}(v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} + \epsilon'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u})).\end{aligned}$$

Osoitetaan, että ϵ voidaan valita siten, että $\mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x}+\epsilon'\boldsymbol{x}') = W + \epsilon'W'$ kaikilla $0 < \epsilon' < \epsilon$. Tutkitaan yksittäisen tropikalisaation termin osalta, milloin se on aidosti suurempi kuin $W + \epsilon'W'$. Nyt

$$\begin{aligned}W + \epsilon'W' &< v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} + \epsilon'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}) \\ \epsilon'W' - \epsilon'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}) &< v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - W \\ \epsilon'(W' - \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}) &< v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - W.\end{aligned}$$

Tiedetään, että $v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - W \geq 0$. Oletetaan ensin, että $W' - \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} < 0$. Tällöin epäyhtälö on tosi kaikilla $\epsilon' > 0$. Oletetaan sitten, että $W' - \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} > 0$ eli $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} < W'$. Nyt

$$\begin{aligned} v'(\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}) + \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} &\geq W' \\ v'(\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}) + W' &> W' \\ v'(\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}) &> 0. \end{aligned}$$

Valuaation v' määritelmän nojalla ainoa vaihtoehto tällöin on, että

$$v'(\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}) = \infty.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} &= \overline{0} \\ v(c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}) &> 0 \\ v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - W &> 0. \end{aligned}$$

Siis

$$\epsilon' < \frac{v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - W}{W' - \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}}.$$

Oletetaan lopuksi, että $W' - \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} = 0$. Tällöin $0 < v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - W$ jokaisella $\epsilon' > 0$. Valitaan

$$\epsilon = \min_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n \\ W' - \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} > 0}} \left(\frac{v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - W}{W' - \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}} \right),$$

jolloin $\epsilon > 0$. Olkoon ϵ' sellainen, että $0 < \epsilon' < \epsilon$. Tällöin aiemman tarkastelun nojalla epäyhtälö

$$W + \epsilon' W' < v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} + \epsilon'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u})$$

pätee vain sellaisilla vektoreilla $\boldsymbol{u}$, joilla $v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} \neq W$ tai $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} \neq W'$. Nämä ovat ne vektorit, joita vastaavat termit eivät esiinny alkumuodossa $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f))$. Tutkitaan sitten tapausta, että $W' - \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} = 0$ ja $v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - W = 0$. Tällöin

$$v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} + \epsilon'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}) = W + \epsilon' W'$$

ja vektoria $\boldsymbol{u}$ vastaava termi esiintyy alkumuodossa $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f))$. Näin ollen

$$\mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x} + \epsilon'\boldsymbol{x}') = W + \epsilon' W'$$

ja minimi saavutetaan täsmälleen niitä termejä vastaavissa termeissä, jotka esiintyvä alkumuodossa $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f))$. Täten alkumuodossa $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}+\epsilon'\boldsymbol{x}'}(f)$ esiintyy täsmälleen niitä termejä vastaavat termit, jotka esiintyvät alkumuodossa

$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f))$. Lisäksi, jos $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n$ on sellainen, että sitä vastaava termi esiintyy alkumuodoissa, niin

$$\overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}+\epsilon'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u})-W-\epsilon' W'}} = \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{-v(c_{\boldsymbol{u}})}} = \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}}.$$

Siis termien kertoimet ovat samat, joten

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)) = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}+\epsilon'\boldsymbol{x}'}(f).$$

□

Lause 5.2. *Olkoon K kunta, v sen valuaatio, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ja olkoot $f, g \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$. Silloin*

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(fg) = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g).$$

Todistus (vrt. [1, s. 88]). Merkitään

$$f = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \quad \text{ja} \quad g = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} d_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}},$$

jolloin

$$fg = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} e_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}},$$

missä $e_{\boldsymbol{u}} = \sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} c_{\boldsymbol{u}'} d_{\boldsymbol{u}''}$. Merkitään lisäksi, että

$$\mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x}) = W_1, \quad \mathrm{trop}(g)(\boldsymbol{x}) = W_2, \quad \mathrm{trop}(fg)(\boldsymbol{x}) = W.$$

Määritellään joukolle $\mathbb{Z}^n$ järjestys siten, että $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) < (v_1, \ldots, v_n) = \boldsymbol{v}$, jos on olemassa sellainen $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, että $u_i = v_i$ kaikilla $i < k_0$ ja $u_{k_0} < v_{k_0}$. Olkoot nyt $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^n$. Jos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, niin $u_i = v_i$ kaikilla $0 < i \leq n$, joten lukua k_0 ei löydy. Siis $\boldsymbol{u} \not< \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{v} \not< \boldsymbol{u}$. Oletetaan, että $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$. Siis on olemassa sellainen k, että $u_k \neq v_k$. Olkoon k_0 pienin sellainen k, jolla $u_k \neq v_k$. Siis $u_i = v_i$ kaikilla $i < k_0$. Nyt, jos $u_k < v_k$, niin $\boldsymbol{u} < \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{v} \not< \boldsymbol{u}$. Toisaalta, jos $v_k < u_k$, niin $\boldsymbol{v} < \boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{u} \not< \boldsymbol{v}$. Siis täsmälleen yksi tapauksista $\boldsymbol{u} < \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{v} < \boldsymbol{u}$ on kerrallaan voimassa, joten $<$ on joukon $\mathbb{Z}^n$ lineaarijärjestys.

Olkoon $\boldsymbol{u}_0' \in \mathbb{Z}^n$ pienin sellainen $\boldsymbol{u}$, jolla

$$v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} = W_1,$$

ja olkoon $\boldsymbol{u}_0'' \in \mathbb{Z}^n$ pienin sellainen $\boldsymbol{u}$, jolla

$$v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} = W_2.$$

Merkitään $\boldsymbol{u}_0' + \boldsymbol{u}_0'' = \boldsymbol{u}_0$. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{u}_0$. Oletetaan myös ensin, että $\boldsymbol{u}' < \boldsymbol{u}_0'$. Tällöin

$$\begin{aligned} v(c_{\boldsymbol{u}'}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}' &> W_1 \\ v(c_{\boldsymbol{u}'}) &> W_1 - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}'. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} v(d_{\boldsymbol{u}''}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}'' &\geq W_2 \\ v(d_{\boldsymbol{u}''})' &\geq W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}''. \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} v(c_{\boldsymbol{u}'} d_{\boldsymbol{u}''}) &= v(c_{\boldsymbol{u}'}) + v(d_{\boldsymbol{u}''}) \\ &> W_1 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' \\ &= W_1 + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_0. \end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{u}'' < \boldsymbol{u}_0''$. Tällöin

$$\begin{aligned} v(c_{\boldsymbol{u}''}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}'' &> W_2 \\ v(c_{\boldsymbol{u}''}) &> W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}''. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} v(d_{\boldsymbol{u}'}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' &\geq W_1 \\ v(d_{\boldsymbol{u}'})' &\geq W_1 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}'. \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} v(c_{\boldsymbol{u}'} d_{\boldsymbol{u}''}) &= v(c_{\boldsymbol{u}'}) + v(d_{\boldsymbol{u}''}) \\ &> W_1 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' \\ &= W_1 + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_0. \end{aligned}$$

Oletetaan lopuksi, että $\boldsymbol{u}' \geq \boldsymbol{u}_0'$ ja $\boldsymbol{u}'' \geq \boldsymbol{u}_0''$. Ei ole mahdollista, että $\boldsymbol{u}' > \boldsymbol{u}_0'$, sillä tällöin olisi

$$\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' > \boldsymbol{u}_0' + \boldsymbol{u}_0'' = \boldsymbol{u}_0.$$

Vastaavasti $\boldsymbol{u}'' > \boldsymbol{u}_0''$ ei ole mahdollinen. Ainoaksi vaihtoehdoksi jää siis, että $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}_0'$ ja $\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{u}_0''$. Tällöin

$$\begin{aligned} v(c_{\boldsymbol{u}'}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' &= W_1 \\ v(c_{\boldsymbol{u}'}) &= W_1 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} v(d_{\boldsymbol{u}''}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' &= W_2 \\ v(d_{\boldsymbol{u}''}) &= W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}'', \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} v(c_{\boldsymbol{u}'} d_{\boldsymbol{u}''}) &= v(c_{\boldsymbol{u}'}) + v(d_{\boldsymbol{u}''}) \\ &= W_1 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' \\ &= W_1 + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_0. \end{aligned}$$

Siis

$$v(c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''}) = W_1 + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_0$$

vain, kun $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}'_0$ ja $\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{u}''_0$, ja

$$v(c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''}) > W_1 + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_0$$

muulloin. Siis lauseen 3.2 nojalla

$$\begin{aligned} v(e_{\boldsymbol{u}_0}) &= v(\sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''}) \\ &= \min_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} (v(c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''})) \\ &= W_1 + W_2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_0. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$W \leq v(e_{\boldsymbol{u}_0}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_0 = W_1 + W_2.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{trop}(fg)(\boldsymbol{x}) \\ &= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} (v(e_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} (v(\sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}) \\ &\geq \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} (\min_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} (v(c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''})) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} (\min_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} (v(c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u})) \\ &= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} (\min_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} (v(c_{\boldsymbol{u}'}) + v(d_{\boldsymbol{u}''}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u})) \\ &= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} (\min_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} (v(c_{\boldsymbol{u}'}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' + v(d_{\boldsymbol{u}''}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}'')) \\ &= \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} (v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}) + \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} (v(d_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= \operatorname{trop}(f)(\boldsymbol{x}) + \operatorname{trop}(g)(\boldsymbol{x}) \\ &= W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Siis on saatu osoitettua, että $W = W_1 + W_2$. Tämän tuloksen avulla voidaan todistaa itse väite. Nyt

$$\begin{aligned} \operatorname{in}_{\boldsymbol{x}}(fg) &= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{e_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{(\sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''}) t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{\sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{\sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} c_{\boldsymbol{u}'}d_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}''-(W_1+W_2)}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \\ &= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{\sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} c_{\boldsymbol{u}'} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}'-W_1} d_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}''-W_2}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}. \end{aligned}$$

Koska $v(c_{\boldsymbol{u}'}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' \geq W_1$, niin $v(c_{\boldsymbol{u}'} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}'-W_1}) \geq 0$. Näin ollen $c_{\boldsymbol{u}'} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}'-W_1} \in R_K$. Vastaavasti $d_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}''-W_2} \in R_K$. Siis voidaan jatkaa edellistä yhtälöketjua

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(fg) &= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{\sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} c_{\boldsymbol{u}'} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}'-W_1} d_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}''-W_2}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \Big(\sum_{\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}} \overline{c_{\boldsymbol{u}'} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}'-W_1}}\ \overline{d_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}''-W_2}} \Big) \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \\
&= \Big(\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W_1}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \Big) \Big(\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} \overline{d_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W_2}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} \Big) \\
&= \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g).
\end{aligned}$$

□

6 Kapranovin lause

Tässä luvussa todistetaan Kapranovin lause, joka yhdistää hyperpinnat ja trooppiset hyperpinnat. Algebrallista geometriaa ei tässä tutkielmassa juuri käsitellä, mutta esitellään kuitenkin hyperpinnan eli yhden polynomin määräämän algebrallisen joukon määritelmä, koska se on olennainen osa Kapranovin lausetta.

Määritelmä 6.1. Olkoon K kunta ja $f \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ Laurent polynomi. Silloin polynomin f määräämä *hyperpinta* on

$$\mathbb{V}(f) = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{T}^n \mid f(\boldsymbol{a}) = 0\}.$$

Huomautus. Hyperpinta koostuu siis niistä pisteistä $\boldsymbol{a}$, jotka ovat polynomin f juuria toruksessa $\mathbb{T}^n$. Huomataan, että tällä tavalla ilmaistuna hyperpinnan määritelmä on samanlainen kuin trooppisen hyperpinnan määritelmä. Erona on, että kunnan polynomin ja trooppisen puolirenkaan polynomin juuret määritellään eri tavalla.

Huomautus. Sanotaan, että polynomi $f \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ on termi, jos täsmälleen yksi sen termien kertoimista eroaa nollasta. Lisäksi sanotaan, että polynomi f on termi muuttujan X_k suhteen, jos

$$f = gX_k^i,$$

missä $0 \neq g \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{k-1}^{\pm 1}, X_{k+1}^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ ja $i \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki 6.1. Olkoon

$$f = X^3Y^2 + X^2Y^2 \in K[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}].$$

Tällöin polynomin f kerroin $c_{(3,2)} = 1$ ja $c_{(2,2)} = 1$, joten f ei ole termi. Toisaalta voidaan kirjoittaa

$$f = (X^3 + X^2)Y^2 \in K[X^{\pm 1}][Y^{\pm 1}],$$

joten f on termi muuttujan Y suhteen.

Lause 6.1. *Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta, v sen valuaatio ja $0 \neq f \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ Laurent polynomi, joka ei ole termi. Jos f ei ole termi muuttujan X_k suhteen, niin on olemassa sellainen $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{T}^n$, että $f(\boldsymbol{a}) = 0$ ja*

$$f(a_1, \ldots, a_{k-1}, X_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Jos $n > 1$, niin tällaisia $\boldsymbol{a}$ on äärettömän monta.

Todistus. Koska f ei ole termi, niin f ei ole termi jonkin muuttujan X_k suhteen. Järjestämällä muuttujat uudestaan voidaan olettaa, että $k = n$. Siis, kun $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', a_n)$, niin yhtälö

$$f(a_1, \ldots, a_{k-1}, X_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \neq 0$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\boldsymbol{a}', X_n) \neq 0.$$

Merkitään

$$f = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}.$$

Tarkastellaan ensin tapausta $n = 1$. Siis $f \in K[X_1^{\pm 1}]$. Merkitään

$$g = X_1^{-m} f,$$

missä m on pienin polynomissa f esiintyvä muuttujan X_1 potenssi. Tällöin $g \in K[X_1]$. Kunta K on algebrallisesti suljettu, joten g voidaan kirjoittaa muotoon

$$g = a \prod_{j=1}^{s} (X_1 - b_j),$$

missä $s \in \mathbb{N}$. Koska f ei ole termi, niin $X_1^{-m} f = g$ ei ole termi. Täten on olemassa sellainen j', että $X_1 - b_{j'}$ ei ole termi. Tällöin $b_{j'} \neq 0$ ja $g(b_{j'}) = 0$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} b_{j'}^{-m} f(b_{j'}) &= g(b_{j'}) \\ b_{j'}^{-m} f(b_{j'}) &= 0 \\ f(b_{j'}) &= 0. \end{aligned}$$

Siis $\boldsymbol{a} = (b_j) = b_j$. Tällöin $\boldsymbol{a}'$ on tyhjä jono, joten

$$f(\boldsymbol{a}', X_1) = f(X_1) = f \neq 0.$$

Oletetaan sitten, että $n > 1$. Merkitään

$$g = X_n^{-m} f,$$

missä m on pienin polynomissa f esiintyvä muuttujan X_n potenssi. Tällöin $g \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}][X_n]$, joten se voidaan kirjoittaa muotoon

$$g = \sum_{i=0}^{p} f_i X_n^i,$$

missä $f_0, \dots, f_p \in K[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}]$ ja $f_0, f_p \neq 0$. Koska f ei ole termi muuttujan X_n suhteen ja $f \neq 0$, niin g ei ole termi muuttujan X_n suhteen ja $g \neq 0$, joten $p > 0$. Koska $f_p f_0 \neq 0$, niin lauseen 4.1 nojalla on olemassa sellainen $\boldsymbol{a}' \in \mathbb{T}^{n-1}$, että $(f_p f_0)(\boldsymbol{a}') \neq 0$. Siis $f_p(\boldsymbol{a}') f_0(\boldsymbol{a}') \neq 0$, josta seuraa $f_p(\boldsymbol{a}') \neq 0$ ja $f_0(\boldsymbol{a}') \neq 0$. Edelleen tämä tarkoittaa, että

$$g(\boldsymbol{a}', X_n) = \sum_{i=0}^{p} f_i(\boldsymbol{a}') X_n^i,$$

missä $f_0(\boldsymbol{a}'), \dots, f_p(\boldsymbol{a}') \in K$ ja $f_0(\boldsymbol{a}'), f_p(\boldsymbol{a}') \neq 0$. Koska $p > 0$, niin $g(\boldsymbol{a}', X_n)$ ei ole termi. Tällöin tapaus $n = 1$ sanoo, että on olemassa sellainen $a_n \in \mathbb{T}$, että

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{a}', X_n)(a_n) &= 0 \\ g(\boldsymbol{a}', a_n) &= 0 \\ g(\boldsymbol{a}) &= 0. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} a_n^{-m} f(\boldsymbol{a}) &= g(\boldsymbol{a}) \\ a_n^{-m} f(\boldsymbol{a}) &= 0 \\ f(\boldsymbol{a}) &= 0. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{a}', X_n) &\neq 0 \\ X^{-m} f(\boldsymbol{a}', X_n) &\neq 0 \\ f(\boldsymbol{a}', X_n) &\neq 0. \end{aligned}$$

Lause 4.1 sanoo, että $\boldsymbol{a}'$ voidaan valita äärettömän monella tavalla, joten näin saadaan myös äärettömän monta vektoria $\boldsymbol{a}$. $\square$

Merkintä. Olkoon $\boldsymbol{a} \in \mathbb{T}^n$. Merkitään

$$v(\boldsymbol{a}) = v(a_1, \dots, a_n) = (v(a_1), \dots, v(a_n)).$$

Lause 6.2 (Kapranovin lause)**.** *Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta, v sen valuaatio ja $f \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ Laurent polynomi. Tällöin seuraavat joukot ovat samat:*

(1) $\mathbb{V}(\mathrm{trop}(f))$,

(2) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)$ *ei ole termi* $\}$,

(3) joukon $\{v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f)\}$ *sulkeuma.*

Lisäksi, jos $n > 1$, $\boldsymbol{x} \in \Gamma_v^n$ ja $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)$ ei ole termi, niin joukko

$$U_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f) \mid v(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x}\}$$

on ääretön.

Todistus. Merkitään

$$f = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}}.$$

Jos $f = 0$, niin (1) = (2) = (3) = $\mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $f \neq 0$. Osoitetaan ensin, että (1) $\subseteq$ (2). Oletetaan, että

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}(\mathrm{trop}(f)).$$

Siis on olemassa sellaiset $\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}'' \in \mathbb{Z}^n$, että $\boldsymbol{u}' \neq \boldsymbol{u}''$ ja

$$W = \mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x}) = v(c_{\boldsymbol{u}'}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' = v(c_{\boldsymbol{u}''}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}''.$$

Tehdään vastaoletus, että $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)$ on termi. Koska $\mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x})$ saavuttaa minimin vektoria $\boldsymbol{u}'$ vastaavassa termissä ja alkumuoto koostuu vain yhdestä termistä, niin

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \overline{c_{\boldsymbol{u}'} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' - W}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}'}.$$

Toisaalta vastaavasti

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \overline{c_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}'' - W}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}''}.$$

Kuitenkin $\boldsymbol{u}' \neq \boldsymbol{u}''$, joten $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}'} \neq \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}''}$, ja

$$\overline{c_{\boldsymbol{u}'} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' - W}} \neq \overline{0} \neq \overline{c_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}'' - W}},$$

koska $f \neq 0$. Tällöin

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \overline{c_{\boldsymbol{u}'} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}' - W}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}'} \neq \overline{c_{\boldsymbol{u}''} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}'' - W}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{u}''} = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f).$$

Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä eli $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)$ ei ole termi. Siis

$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ ei ole termi }\},$$

joten

$$\mathbb{V}(\mathrm{trop}(f)) \subseteq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ ei ole termi }\}.$$

Osoitetaan sitten, että (2) $\subseteq$ (1). Oletetaan, että

$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ ei ole termi }\}.$$

Koska $f \neq 0$, niin $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \neq \overline{0}$. Täten, koska $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)$ ei ole termi, niin on olemassa sellaiset $\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{u''} \in \mathbb{Z}^n$, että $\boldsymbol{u'} \neq \boldsymbol{u''}$ ja

$$\overline{c_{\boldsymbol{u'}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u'}-W}} \neq \overline{0} \neq \overline{c_{\boldsymbol{u''}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u''}-W}},$$

missä $W = \mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x})$. Nyt

$$\begin{aligned} v(c_{\boldsymbol{u'}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u'}-W}) &= 0 \\ v(c_{\boldsymbol{u'}}) + v(t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u'}-W}) &= 0 \\ v(c_{\boldsymbol{u'}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u'} - W &= 0 \\ v(c_{\boldsymbol{u'}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u'} &= W. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$v(c_{\boldsymbol{u''}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u''} = W.$$

Siis $\boldsymbol{x}$ on trooppisen polynomin $\mathrm{trop}(f)$ juuri, joten

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}(\mathrm{trop}(f)).$$

Näin ollen

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ ei ole termi }\} \subseteq \mathbb{V}(\mathrm{trop}(f)).$$

Osoitetaan sitten, että (3) $\subseteq$ (1). Lauseen 2.2 nojalla joukko (1) on suljettu, joten riittää osoittaa, että

$$\{v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f)\} \subseteq \mathbb{V}(\mathrm{trop}(f)).$$

Oletetaan, että

$$\boldsymbol{x} \in \{v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f)\}.$$

Tällöin $\boldsymbol{x} = v(\boldsymbol{a})$ jollakin sellaisella $\boldsymbol{a} \in \mathbb{T}^n$, että $f(\boldsymbol{a}) = 0$. Siis

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}} = 0,$$

jolloin

$$v(\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}}) = v(0) = \infty.$$

Tehdään vastaoletus, että on olemassa täsmälleen yksi sellainen $\boldsymbol{u}_0$, että

$$v(c_{\boldsymbol{u}_0} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}_0}) = \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} v(c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}}).$$

Tällöin lause 3.2 sanoo, että

$$v(\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}}) = \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}(v(c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}}))$$

eli $v(c_{\boldsymbol{u}_0}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}_0}) = \infty$. Mutta tällöin $v(c_{\boldsymbol{u}_0}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}_0}) = v(c_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}})$ kaikilla $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n$, mikä on ristiriita, sillä vektorin $\boldsymbol{u}_0$ oletettiin olevan ainoa, jolla minimi saavutetaan. Siis on olemassa ainakin kaksi sellaista vektoria $\boldsymbol{u}'$ ja $\boldsymbol{u}''$, että

$$v(c_{\boldsymbol{u}'}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}'}) = v(c_{\boldsymbol{u}''}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}''}) = \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}(v(c_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}})).$$

Toisaalta

$$\min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}(v(c_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}})) = \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}(v(c_{\boldsymbol{u}}) + v(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}) = \mathrm{trop}(f)(v(\boldsymbol{a}))$$

ja

$$v(c_{\boldsymbol{u}'}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}'}) = v(c_{\boldsymbol{u}'}) + v(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}', \quad v(c_{\boldsymbol{u}''}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}''}) = v(c_{\boldsymbol{u}''}) + v(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}''.$$

Näin ollen

$$v(c_{\boldsymbol{u}'}) + v(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}' = v(c_{\boldsymbol{u}''}) + v(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}'' = \mathrm{trop}(f)(v(\boldsymbol{a})),$$

joten $\boldsymbol{x} = v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{V}(\mathrm{trop}(f))$. Siis

$$\{v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f)\} \subseteq \mathbb{V}(\mathrm{trop}(f)),$$

josta väite seuraa. □

Osoitetaan vielä, että (2) $\subseteq$ (3). Joukon (3) kaikkia vektoreita ei kuitenkaan tunneta, joten pitää löytää sellainen joukko S', joka sisältyy joukon (3) tunnettuun osaan eli joukkoon

$$\{v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f)\}$$

ja jonka sulkeuma on joukko (2). Lauseesta 6.4 saadaan ehdokas joukoksi S'. Tätä lausetta varten on kuitenkin todistettava ensin seuraava lause.

Lause 6.3. *Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta, v sen valuaatio ja*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

lineaarinen yhtälöryhmä, missä $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ ja $b_i \in \Gamma_v$ kaikilla i, j. Jos yhtälöryhmä on ratkeava, niin sen ratkaisut muodostavat joukon

$$\{\boldsymbol{x} + s_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l\boldsymbol{v}_l \mid s_1, \ldots, s_l \in \mathbb{R}\},$$

missä $\boldsymbol{x} \in \Gamma_v^n$ ja $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l \in \mathbb{Q}^n$.

Todistus. Vastaava homogeeninen yhtälöryhmä on kokonaislukukertoiminen, joten sen ratkaisut muodostavat joukon

$$\{s_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l\boldsymbol{v}_l \mid s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}\},$$

missä $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_l \in \mathbb{Q}^n$. Pitää siis enää löytää yksittäisratkaisu alkuperäiselle yhtälöryhmälle joukosta Γ_v^n. Valitaan sellainen $j_1 \in \{1, \dots, m\}$, että j_1. yhtälössä esiintyy muuttuja, jonka kerroin ei ole 0. Nimeämällä muuttujat uudestaan voidaan olettaa, että tämä on muuttuja x_1. Siis yhtälö saadaan muotoon

$$x_1 = \frac{1}{a_{j_1 1}}(b_{j_1} - a_{j_1 2}x_2 - \cdots - a_{j_1 n}x_n).$$

Sijoitetaan x_1 muihin yhtälöihin ja valitaan sellainen $j_2 \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j_1\}$, että j_2. yhtälössä esiintyy muuttuja, jonka kerroin ei ole 0. Nimeämällä muuttujat uudestaan voidaan olettaa, että tämä on muuttuja x_2. Nyt j_2. yhtälö on

$$a_{j_2 1}\frac{1}{a_{j_1 1}}(b_{j_1} - a_{j_1 2}x_2 - \cdots - a_{j_1 n}x_n) + a_{j_2 2}x_2 + \cdots + a_{j_2 n}x_n = b_{j_2},$$

josta saadaan

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{1}{a_{j_2 2} - \frac{a_{j_2 1}a_{j_1 2}}{a_{j_1 1}}} \Bigg(b_{j_2} - \frac{a_{j_2 1}}{a_{j_1 1}}b_{j_1} &- (a_{j_2 3} - \frac{a_{j_2 1}a_{j_1 3}}{a_{j_1 1}})x_3 \\ &- \dots \\ &- (a_{j_2 n} - \frac{a_{j_2 1}a_{j_1 n}}{a_{j_1 1}})x_n \Bigg). \end{aligned}$$

Merkitään yhtälö uudelleen muodossa

$$x_2 = \frac{1}{a_{j_2 2}^{(2)}}\left(b_{j_2}^{(2)} - a_{j_2 3}^{(2)}x_3 - \cdots - a_{j_2 n}^{(2)}x_n\right).$$

Tällöin $a_{j_2 2}^{(2)}, \dots, a_{j_2 n}^{(2)} \in \mathbb{Q}$. Lauseen 3.8 huomautus sanoo, että kertominen rationaaliluvulla joukossa Γ_v on sallittu, joten $\frac{a_{j_2 1}}{a_{j_1 1}}b_{j_1} \in \Gamma_v$, ja edelleen $b_{j_2}^{(2)} \in \Gamma_v$. Toistetaan tätä p kertaa kunnes jokaisessa valitsemattomassa yhtälössä jokaisen muuttujan kerroin on 0. Tämä tapahtuu viimeistään n. valinnan jälkeen. On siis saatu

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{j_1 1}}(b_{j_1} - a_{j_1 2}x_2 - \cdots - a_{j_1 n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{j_2 2}^{(2)}}(b_{j_2}^{(2)} - a_{j_2 3}^{(2)}x_3 - \cdots - a_{j_2 n}^{(2)}x_n) \\ \quad\vdots \\ x_p = \frac{1}{a_{j_p p}^{(p)}}(b_{j_p}^{(p)} - a_{j_p (p+1)}^{(p)}x_{p+1} - \cdots - a_{j_p n}^{(p)}x_n), \end{cases}$$

missä jokainen $a_{j_ik}^{(i)} \in \mathbb{Q}$ ja $b_{j_i}^{(i)} \in \Gamma_v$. Valitaan jotkin $x_{p+1}, \ldots, x_n \in \Gamma_v$. Kuten edellä rationaaliluvulla kertominen on sallittua, joten myös $x_1, \ldots, x_p \in \Gamma_v$. Siis on löydetty yksittäisratkaisu $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_v^n$. $\square$

Lause 6.4. *Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta, v sen valuaatio ja $f \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ Laurent polynomi. Silloin joukon*

$$S' = \{\boldsymbol{x} \in \Gamma_v^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \textit{ ei ole termi } \}$$

sulkeuma on

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \textit{ ei ole termi } \}.$$

Lisäksi jokaista $\boldsymbol{x} \in S$ kohti on olemassa sellainen $\boldsymbol{x}' \in S'$, että

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(f).$$

Todistus. Kapranovin lauseen alkuosan nojalla tiedetään, että $S = \mathbb{V}(\mathrm{trop}(f))$. Lause 2.2 sanoo tällöin, että S on suljettu. Toisin sanoen

$$S = \overline{S},$$

missä $\overline{S}$ tarkoittaa joukon S sulkeumaa. Lauseen 3.8 nojalla $\Gamma_v^n \subseteq \mathbb{R}^n$ on tiheä, joten

$$\begin{aligned} S &= \overline{S} \\ &= \overline{S} \cap \mathbb{R}^n \\ &= \overline{S} \cap \overline{\Gamma_v^n} \\ &\supseteq \overline{S \cap \Gamma_v^n} \\ &= \overline{S'}. \end{aligned}$$

Jos $f = 0$, niin $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = 0$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $S' = \Gamma_v^n$ ja $S = \mathbb{R}^n$, joten $\overline{S'} = S$. Oletetaan, että $f \neq 0$. Olkoon $\boldsymbol{x} \in S$ ja $B(\boldsymbol{x}, r)$ pisteen $\boldsymbol{x}$ ympäristö. Merkitään

$$f = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}$$

ja

$$W = \mathrm{trop}(f)(\boldsymbol{x}).$$

Olkoon

$$\begin{aligned} U_{\boldsymbol{x}} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n \mid \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}} \neq 0\} \\ &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n \mid v(c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}) = 0\} \\ &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n \mid v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = W\} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V_{\boldsymbol{x}} &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n \mid \overline{c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}} = 0\} \\ &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n \mid v(c_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}-W}) > 0\} \\ &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n \mid v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} > W\}. \end{aligned}$$

Tavoitteena on löytää sellainen $\boldsymbol{x}' \in \Gamma_v^n$, että $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{x}, r)$ ja $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(f)$. Huomataan, että $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(f)$ täsmälleen silloin, kun $U_{\boldsymbol{x}} = U_{\boldsymbol{x}'}$ ja $V_{\boldsymbol{x}} = V_{\boldsymbol{x}'}$. Joukko $U_{\boldsymbol{x}}$ on äärellinen, sillä $c_{\boldsymbol{u}} \neq 0$ vain äärellisen monella $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n$ ja yhtälö $v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} = W$ on mahdollinen vain, jos $c_{\boldsymbol{u}} \neq 0$. Voidaan siis merkitä

$$U_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\},$$

jolloin saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} v(c_{\boldsymbol{u}_1}) + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_1 = W \\ \qquad\vdots \\ v(c_{\boldsymbol{u}_k}) + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_k = W, \end{cases}$$

jonka yksi ratkaisu on $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Joukko $V_{\boldsymbol{x}}$ on kyllä ääretön, mutta jos $c_{\boldsymbol{u}} = 0$, niin välttämättä

$$v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} > W \quad \text{ja} \quad v(c_{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u} > W.$$

Siis riittää tutkia tapaukset, joissa $c_{\boldsymbol{u}} \neq 0$, joita on vain äärellisen monta. Voidaan siis merkitä

$$V_{\boldsymbol{x}} \cap \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n \mid c_{\boldsymbol{u}} \neq 0\} = \{\boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_m\},$$

jolloin saadaan lineaarinen epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} v(c_{\boldsymbol{u}_{k+1}}) + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_{k+1} > W \\ \qquad\vdots \\ v(c_{\boldsymbol{u}_m}) + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_m \quad > W, \end{cases}$$

jonka yksi ratkaisu on $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Lauseen 6.3 nojalla yhtälöryhmän ratkaisut muodostavat joukon

$$\{\boldsymbol{y}' + s_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l\boldsymbol{v}_l \mid s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}\},$$

missä $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_l \in \mathbb{Q}^n$ ja $\boldsymbol{y}' \in \Gamma_v^n$. Vektori $\boldsymbol{x}$ on yhtälöryhmän ratkaisu, joten on olemassa sellaiset $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}$, että

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}' + s_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l\boldsymbol{v}_l.$$

Toisaalta

$$t_i(\boldsymbol{y}) = v(c_{\boldsymbol{u}_i}) + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_i$$

on funktioina jatkuva kaikilla $i \in \{k+1, \ldots, m\}$. Tästä seuraa, että jokaista $i \in \{k+1, \ldots, m\}$ kohti on olemassa sellainen $\epsilon_i > 0$, että $v(c_{\boldsymbol{u}_i}) + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}_i > W$ kaikilla $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \epsilon_i)$. Olkoon

$$\epsilon = \min(r, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_m).$$

Valitaan jokaiselle $i \in \{1, \ldots, k\}$ sellainen $s_i' \in \left]s_i - \frac{\epsilon}{l\|\boldsymbol{v}_i\|}, s_i + \frac{\epsilon}{l\|\boldsymbol{v}_i\|}\right[$, että $s_1' \in \mathbb{Q}$. Tämä voidaan tehdä, sillä s_i' kuuluu avoimelle välille. Olkoon

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}' + s_1'\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l'\boldsymbol{v}_l.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| &= \|(\boldsymbol{y}' + s_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l\boldsymbol{v}_l) - (\boldsymbol{y}' + s_1'\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l'\boldsymbol{v}_l)\| \\
&= \|(s_1 - s_1')\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (s_l - s_l')\boldsymbol{v}_l\| \\
&\leq |s_1 - s_1'|\,\|\boldsymbol{v}_1\| + \cdots + |s_l - s_l'|\,\|\boldsymbol{v}_l\| \\
&< \frac{\epsilon}{l\,\|\boldsymbol{v}_1\|}\,\|\boldsymbol{v}_1\| + \cdots + \frac{\epsilon}{l\,\|\boldsymbol{v}_l\|}\,\|\boldsymbol{v}_l\| \\
&= \frac{\epsilon}{l} + \cdots + \frac{\epsilon}{l} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

joten $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{x}, \epsilon)$. Koska $B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subseteq B(\boldsymbol{x}, \epsilon_i)$ kaikilla $i \in \{k+1, \ldots, m\}$, niin $v(c_{\boldsymbol{u}_i}) + \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{u}_i < W$ kaikilla $i \in \{k+1, \ldots, m\}$. Näin ollen $\boldsymbol{x}'$ on epäyhtälöryhmän ratkaisu eli $V_{\boldsymbol{x}} = V_{\boldsymbol{x}'}$. Toisaalta

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}' + s_1'\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l'\boldsymbol{v}_l,$$

mikä on nimenomaan yksi yhtälöryhmän ratkaisujoukon alkio. Siis $U_{\boldsymbol{x}} = U_{\boldsymbol{x}'}$. Täten

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(f) = \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f),$$

joten $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}'}(f)$ ei ole termi. Koska $\mathbb{Q}^n \subseteq \Gamma_v^n$ ja kertominen rationaaliluvulla on sallittua joukossa Γ_v, niin

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}' + s_1'\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_l'\boldsymbol{v}_l \in \Gamma_v^n.$$

Täten $\boldsymbol{x}' \in S'$. Lopuksi todetaan vielä, että $B(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subseteq B(\boldsymbol{x}, r)$, joten $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{x}, r) \cap S'$. Siis mielivaltainen $\boldsymbol{x}$–keskinen avoin kuulaa leikkaa joukkoa S', joten $\boldsymbol{x} \in \overline{S'}$. Näin ollen $S \subseteq \overline{S'}$. □

Nyt voidaan jatkaa Kapranovin lauseen todistus loppuun.

Todistus (Kapranovin lause). Osoitetaan, että (2) $\subseteq$ (3). Riittää osoittaa, että

$$\{\boldsymbol{x} \in \Gamma_v^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ ei ole termi }\} \subseteq \{v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f)\},$$

sillä tällöin vastaava pätee näiden joukkojen sulkeumille. Lauseen 6.4 nojalla tämä tarkoittaa, että (2) $\subseteq$ (3). Oletetaan, että

$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \Gamma_v^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ ei ole termi }\}.$$

Alkumuoto $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)$ ei ole termi, joten $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)$ ei ole termi jonkin muuttujan x_k suhteen. Järjestämällä muuttujat uudestaan, voidaan olettaa, että $k = n$. Lauseen 3.7 nojalla $\Bbbk$ on algebrallisesti suljettu, joten lause 6.1 sanoo, että on olemassa sellainen $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}', \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{T}_{\Bbbk}^n$, että $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ ja $\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)(\boldsymbol{\alpha}', X_n) \neq 0$. Merkitään $\boldsymbol{b}' = (a_1 t^{x_1}, \ldots, a_{n-1} t^{x_{n-1}})$, missä $\overline{a_i} = \alpha_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pitää löytää sellainen $b_n \in \mathbb{T}_K$, että $v(b_n) = x_n$ ja $f(\boldsymbol{b}', b_n) = 0$. Olkoon

$$g = X_n^{-m} f,$$

missä m on pienin polynomissa f esiintyvä muuttujan X_n potenssi. Merkitään

$$g = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} d_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}$$

ja $W = \mathrm{trop}(g)(\boldsymbol{x})$, jolloin

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g) = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} \overline{d_{\boldsymbol{u}} t^{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} - W}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}} = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n} \beta_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{u}}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g)(\boldsymbol{\alpha}', X_n) &= \sum_{(\boldsymbol{u}', u_n) \in \mathbb{Z}^n} \beta_{(\boldsymbol{u}', u_n)} (\boldsymbol{\alpha}')^{\boldsymbol{u}'} X_n^{u_n} \\
&= \sum_{u_n \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \beta_{(\boldsymbol{u}', u_n)} (\boldsymbol{\alpha}')^{\boldsymbol{u}'} \Big) X_n^{u_n}.
\end{aligned}$$

Lauseen 5.2 avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g) &= \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(X_n^{-m} f) \\
&= \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(X_n^{-m}) \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \\
&= X_n^{-m} \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f),
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g)(\boldsymbol{\alpha}', X_n) &= (X_n^{-m} \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f))(\boldsymbol{\alpha}', X_n) \\
&= X_n^{-m} \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)(\boldsymbol{\alpha}', X_n) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Siis on olemassa sellainen $u_n^* \in \mathbb{Z}$, että kerroin

$$\sum_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \beta_{(\boldsymbol{u}', u_n^*)} (\boldsymbol{\alpha}')^{\boldsymbol{u}'} \neq 0.$$

Olkoon

$$h = g(b_1, \ldots, b_{n-1}, X_n) = g(\boldsymbol{b}', X_n) \in K[X_n^{\pm 1}].$$

Tällöin

$$\begin{aligned} h &= \sum_{(\boldsymbol{u}', u_n) \in \mathbb{Z}^n} d_{(\boldsymbol{u}', u_n)} (\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'} X_n^{u_n} \\ &= \sum_{u_n \in \mathbb{Z}} (\sum_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{Z}^{n-1}} d_{(\boldsymbol{u}', u_n)} (\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}) X_n^{u_n} \\ &= \sum_{u_n \in \mathbb{Z}} e_{u_n} X^{u_n}. \end{aligned}$$

Pyritään osoittamaan, että $\mathrm{in}_{x_n}(h)(\alpha_n) = 0$. Tätä varten on ensin näytettävä, että

$$\mathrm{trop}(h)(x_n) = W.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \mathrm{trop}(h)(x_n) &= \min_{u_n \in \mathbb{Z}} (v(e_{u_n}) + x_n u_n) \\ &= \min_{u_n \in \mathbb{Z}} (v(\sum_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{Z}^{n-1}} d_{(\boldsymbol{u}', u_n)} (\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}) + x_n u_n) \\ &\geq \min_{u_n \in \mathbb{Z}} (\min_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{Z}^{n-1}} (v(d_{(\boldsymbol{u}', u_n)} (\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'})) + x_n u_n) \\ &= \min_{u_n \in \mathbb{Z}} (\min_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{Z}^{n-1}} (v(d_{(\boldsymbol{u}', u_n)} (\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}) + x_n u_n)) \\ &= \min_{u_n \in \mathbb{Z}} (\min_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{Z}^{n-1}} (v(d_{(\boldsymbol{u}', u_n)}) + v(\boldsymbol{b}') \cdot \boldsymbol{u}' + x_n u_n)). \end{aligned}$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned} v(\boldsymbol{b}') &= (v(a_1 t^{x_1}), \ldots, v(a_{n-1} t^{x_{n-1}}) \\ &= (v(a_1) + v(t^{x_1}), \ldots, v(a_{n-1}) + v(t^{x_{n-1}}) \\ &= (0 + x_1, \ldots, 0 + x_{n-1}) \\ &= (x_1, \ldots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Merkitsemällä $\boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ saadaan jatkettua aiempaa yhtälöketjua.

Siis

$$\begin{aligned}
&\min_{u_n\in\mathbb{Z}}(\min_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}(v(d_{(\boldsymbol{u}',u_n)})+v(\boldsymbol{b}')\cdot\boldsymbol{u}'+x_nu_n))\\
&=\min_{u_n\in\mathbb{Z}}(\min_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}(v(d_{(\boldsymbol{u}',u_n)})+\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'+x_nu_n))\\
&=\min_{u_n\in\mathbb{Z}}(\min_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}(v(d_{(\boldsymbol{u}',u_n)})+(\boldsymbol{x}',x_n)\cdot(\boldsymbol{u}',u_n)))\\
&=\min_{(\boldsymbol{u}',u_n)\in\mathbb{Z}^n}(v(d_{(\boldsymbol{u}',u_n)})+(\boldsymbol{x}',x_n)\cdot(\boldsymbol{u}',u_n))\\
&=\min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n}(v(d_{\boldsymbol{u}})+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u})\\
&=\operatorname{trop}(f)(\boldsymbol{x})\\
&=W.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\operatorname{trop}(h)(x_n)\geq W$. Täten kaikilla $u_n\in\mathbb{Z}$ pätee

$$v(e_{u_n})+x_nu_n\geq\operatorname{trop}(h)(x_n)\geq W,$$

joten $v(e_{u_n})\geq W-x_nu_n$. Siis

$$\begin{aligned}
v(e_{u_n}t^{x_nu_n-W})&=v(e_{u_n})+v(t^{x_nu_n-W})\\
&\geq W-x_nu_n+x_nu_n-W\\
&=0.
\end{aligned}$$

Täten voidaan tutkia kunnan $\Bbbk$ alkiota

$$\begin{aligned}
\overline{e_{u_n}t^{x_nu_n-W}}&=\overline{(\sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'})t^{x_nu_n-W}}\\
&=\overline{\sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{x_nu_n-W}}\\
&=\overline{\sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{x_nu_n-W}}\\
&=\overline{\sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{x_nu_n-W+\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'}}\\
&=\overline{\sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{(\boldsymbol{x}',x_n)\cdot(\boldsymbol{u}',u_n)-W-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'}}\\
&=\overline{\sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}}d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}t^{\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{u}',u_n)-W}(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'}}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}&=(a_1t^{x_1})^{u_1}\cdots(a_{n-1}t^{x_{n-1}})^{u_{n-1}}\\
&=a_1^{u_1}t^{x_1u_1}\cdots a_{n-1}^{u_{n-1}}t^{x_{n-1}u_{n-1}}
\end{aligned}$$

ja

$$t^{-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'}=t^{-x_1u_1}\cdots t^{-x_{n-1}u_{n-1}},$$

joten

$$\begin{aligned}\overline{(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'}} &= \overline{a_1^{u_1}t^{x_1u_1}t^{-x_1u_1}\cdots a_{n-1}^{u_{n-1}}t^{x_{n-1}u_{n-1}}t^{-x_{n-1}u_{n-1}}}\\ &= \overline{a_1^{u_1}\cdots a_{n-1}^{u_{n-1}}}\\ &= \alpha_1^{u_1}\cdots\alpha_{n-1}^{u_{n-1}}\\ &= (\boldsymbol{\alpha}')^{\boldsymbol{u}'}.\end{aligned}$$

Siis $(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'}\in R_K$. Lisäksi

$$\overline{d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}t^{\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{u}',u_n)-W}} = \beta_{(\boldsymbol{u}',u_n)},$$

joten $d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}t^{\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{u}',u_n)-W}\in R_K$. Näin ollen aiemmasta yhtälöketjusta saadaan

$$\begin{aligned}\overline{e_{u_n}t^{x_nu_n-W}} &= \overline{\sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}t^{\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{u}',u_n)-W}(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'}}\\ &= \sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}} \overline{d_{(\boldsymbol{u}',u_n)}t^{\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{u}',u_n)-W}}\;\overline{(\boldsymbol{b}')^{\boldsymbol{u}'}t^{-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{u}'}}\\ &= \sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}} \beta_{(\boldsymbol{u}',u_n)}(\boldsymbol{\alpha}')^{\boldsymbol{u}'}.\end{aligned}$$

On siis saatu yhtälö

$$\overline{e_{u_n}t^{x_nu_n-W}} = \sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}} \beta_{(\boldsymbol{u}',u_n)}(\boldsymbol{\alpha}')^{\boldsymbol{u}'}. \tag{6.1}$$

Erityisesti voidaan valita $u_n = u_n^*$, jolloin yhtälöstä (6.1) saadaan

$$\overline{e_{u_n^*}t^{x_nu_n^*-W}} = \sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}} \beta_{(\boldsymbol{u}',u_n^*)}(\boldsymbol{\alpha}')^{\boldsymbol{u}'} \neq 0.$$

Tämä tarkoittaa, että

$$\begin{aligned}v(e_{u_n^*}t^{x_nu_n^*-W}) &= 0\\ v(e_{u_n^*}) + v(t^{x_nu_n^*-W}) &= 0\\ v(e_{u_n^*}) + x_nu_n^* - W &= 0\\ v(e_{u_n^*}) + x_nu_n^* &= W,\end{aligned}$$

joten $\mathrm{trop}(h)(x_n) \leq v(e_{u_n^*}) + x_nu_n^* = W$. On siis saatu $\mathrm{trop}(h)(x_n) = W$. Näin ollen alkumuodon määritelmän ja yhtälön (6.1) nojalla

$$\begin{aligned}\mathrm{in}_{x_n}(h) &= \sum_{u_n\in\mathbb{Z}} \overline{e_{u_n}t^{x_nu_n-W}}X_n^{u_n}\\ &= \sum_{u_n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\boldsymbol{u}'\in\mathbb{Z}^{n-1}} \beta_{(\boldsymbol{u}',u_n)}(\boldsymbol{\alpha}')^{\boldsymbol{u}'}\Big)X_n^{u_n}\\ &= \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g)(\boldsymbol{\alpha}', X_n).\end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}_{x_n}(h)(\alpha_n) &= \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g)(\boldsymbol{\alpha}', X_n)(\alpha_n) \\
&= \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g)(\boldsymbol{\alpha}', \alpha_n) \\
&= \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(g)(\boldsymbol{\alpha}) \\
&= (X_n^{-m}\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f))(\boldsymbol{\alpha}) \\
&= \alpha_n^{-m}\mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f)(\boldsymbol{\alpha}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi polynomia h ja sen alkumuotoa $\mathrm{in}_{x_n}(h)$ tulomuodossa. Polynomin g määritelmän nojalla voidaan merkitä, että

$$g \in K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{n-1}^{\pm 1}][X_n].$$

Tällöin $h \in K[X_n]$. Koska K on algebrallisesti suljettu, niin voidaan kirjoittaa

$$h = \lambda \prod_{j=1}^{s}(X_n - \mu_j).$$

Tällöin lause 5.2 sanoo, että

$$\mathrm{in}_{x_n}(h) = \mathrm{in}_{x_n}(\lambda)\prod_{j=1}^{s}\mathrm{in}_{x_n}(X_n - \mu_j).$$

Yhdistämällä tämä yhtälö ja aiempi tulos $\mathrm{in}_{x_n}(h)(\alpha_n) = 0$ saadaan, että on olemassa sellainen $j \in \{1, \ldots, s\}$, että $\mathrm{in}_{x_n}(X_n - \mu_j)(\alpha_n) = 0$. Merkitään $W' = \mathrm{trop}(X_n - \mu_j)(x_n)$, jolloin

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}_{x_n}(X_n - \mu_j) &= \overline{1t^{x_n \cdot 1 - W'}}X_n + \overline{-\mu_j t^{x_n \cdot 0 - W'}} \\
&= \overline{t^{x_n - W'}}X_n - \overline{\mu_j t^{-W'}}.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}_{x_n}(X_n - \mu_j)(\alpha_n) &= 0 \\
\overline{t^{x_n - W'}}\alpha_n - \overline{\mu_j t^{-W'}} &= 0 \\
\overline{t^{x_n - W'}}\alpha_n &= \overline{\mu_j t^{-W'}}.
\end{aligned}$$

Polynomi $X_n - \mu_j \neq 0$, joten esimerkin 5.3 nojalla $\mathrm{in}_{x_n}(X_n - \mu_j) \neq 0$. Toisaalta, jos $\overline{t^{x_n - W'}} = 0$ tai $\overline{\mu_j t^{-W'}} = 0$, niin välttämättä myös toinen on 0, sillä $\alpha_n \neq 0$. Tällöin olisi $\mathrm{in}_{x_n}(X_n - \mu_j) = 0$. Siis $\overline{t^{x_n - W'}} \neq 0$ ja $\overline{\mu_j t^{-W'}} \neq 0$, joten

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \overline{\mu_j t^{-W'}}\ \overline{t^{x_n - W'}}^{-1} \\
&= \overline{\mu_j t^{-W'} t^{-x_n + W'}} \\
&= \overline{\mu_j t^{-x_n}}.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} v(\mu_j t^{-x_n}) &= 0 \\ v(\mu_j) + (t^{-x_n}) &= 0 \\ v(\mu_j) &= -v(t^{-x_n}) \\ v(\mu_j) &= v(t^{x_n}) \\ v(\mu_j) &= x_n. \end{aligned}$$

Olkoon $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}', \mu_j)$. Tällöin

$$v(\boldsymbol{b}) = (v(\boldsymbol{b}'), v(\mu_j)) = (\boldsymbol{x}', x_n) = \boldsymbol{x}$$

ja

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{b}) &= (X_n^m g)(\boldsymbol{b}', \mu_j) \\ &= \mu_j^m g(\boldsymbol{b}', \mu_j) \\ &= \mu_j^m h(\mu_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

koska μ_j oli nimenomaan valittu polynomin h juurten joukosta. Siis

$$\boldsymbol{x} \in \{v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f)\},$$

joten

$$\{\boldsymbol{x} \in \Gamma_v^n \mid \mathrm{in}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ ei ole termi }\} \subseteq \{v(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}(f)\}.$$

Kuten aiemmin todettiin tästä seuraa, että (2) $\subseteq$ (3).

Lisäksi, jos $n > 1$, niin kuten lauseen 6.1 todistuksen lopussa huomataan, että $\boldsymbol{\alpha}'$ voidaan valita äärettömän monella eri tavalla. Nyt

$$\begin{aligned} \alpha_i &\neq \alpha_i' \\ a_i &\neq a_i' \\ a_i t^{x_i} &\neq a_i' t^{x_i} \\ b_i &\neq b_i', \end{aligned}$$

joten $\boldsymbol{b}'$ voidaan valita äärettömän monella eri tavalla, jolloin myös $\boldsymbol{b}$ voidaan valita äärettömän monella eri tavalla. Koska

$$\boldsymbol{b} \in U_{\boldsymbol{x}},$$

niin $U_{\boldsymbol{x}}$ on ääretön. □

Viitteet

[1] Maclagan, D. *Introduction to Tropical Geometry.* Osoitteesta `http://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/TropicalBook.pdf` (7.8.2012).

[2] Maclagan, D. *AARMS Tropical Geometry.* Osoitteesta `http://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/AARMS/AARMSTropical.pdf` (4.10.2012).

[3] Wikipedia *Puolirengas.* Osoitteesta `http://fi.wikipedia.org/wiki/Puolirengas` (7.8.2012).

[4] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1969.

[5] J. J. Rotman *A First Course In Abstarct Algebra.* Prentice Hall, 2005.

[6] Wikipedia *Formal power series.* Osoitteesta `http://en.wikipedia.org/wiki/Formal_power_series` (28.8.2012).