TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Tero Sirkka

Peliteoriaa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2013

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

Sirkka, Tero: Peliteoriaa

Pro gradu -tutkielma, 62 s.

Matematiikka

Toukokuu 2013

Tiivistelmä

Tämä tutkielma käsittelee soveltavan matematiikan osa-aluetta, peliteoriaa. Peliteoria tutkii ja analysoi päätöksentekijöiden, pelaajien, käyttäytymistä erilaisissa vuorovaikutteisissa päätöksenteko-ongelmissa eli peleissä. Peliteoria eroaa normaalista päätöksenteko-ongelmasta siten, että pelaajan on päätöksiä tehdessään otettava huomioon myös muiden pelaajien valinnat.

Tutkielmassa rajoitutaan tarkastelemaan erilaisia variaatioita strategiapeleistä sekä täydellisen informaation ekstensiivisistä peleistä. Strategiapeleissä pelaajat valitsevat strategiansa kerran ja yhtäaikaisesti. Ekstensiiviset pelit sen sijaan mallintavat peräkkäisiä strategisia päätöksenteko-ongelmia, missä pelaajat voivat uudelleen harkita strategiaansa aina, kun on heidän vuoronsa toimia. Tutkielmassa käydään läpi edellä mainittujen pelien erilaisia ratkaisukonseptejа, kuten Nashin tasapaino, sekä teoriaa havainnollistetaan esimerkkien avulla.

Päälähteenä on käytetty Martin J. Osbornen ja Ariel Rubinsteinin teosta *A Course in Game Theory*, josta lähes kaikki tutkielman tulokset ja esimerkit ovat peräisin.

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee soveltavan matematiikan osa-aluetta, peliteoriaa. Peliteoria tutkii ja mallintaa erilaisten päätöksentekoentiteettien, pelaajien, käyttäytymistä vuorovaikutteisissa päätöksenteko-ongelmissa eli peleissä. Pelit eroavatkin normaaleista päätöksenteko-ongelmista siten, että peleissä pelaajien on päätöksiä tehdessään otettava huomioon myös muiden pelaajien valinnat. Peliteorian perusoletuksiin kuuluu, että pelaajat ovat rationaalisia. Pelaajien oletetaan tuntevan pelin, johon ovat osallistumassa; pelaajien oletetaan tietävän omat vaihtoehtonsa tässä pelissä ja pelaajien oletetaan muodostavan rationaalisesti omat uskomuksensa peliin liittyvistä epävarmuustekijöistä sekä muiden pelaajien käyttäytymisestä. Lisäksi peliteoriassa oletetaan, että pelaajilla on selvät preferenssit pelin mahdollisten lopputulosten suhteen ja että peleissä pelaajat pyrkivät maksimoimaan ainoastaan omaa hyötyään.

Historiassa strategisia vuorovaikutustilanteita on tutkittu jo todennäköisyysteorian synnystä lähtien [13]. Matemaatikot Francis Waldegrave, Pierre-Remond de Montmort ja Nicolas Bernoulli kävivät ensimmäisen tunnetun peliteoriaan liittyvän kirjeenvaihdon vuonna 1713 [12]. Peliteorian kuitenkin katsotaan saaneen alkunsa omana alanaan vasta vuonna 1944, jolloin John von Neumann ja Oskar Morgenstern julkaisivat teoksen *Theory of Games and Economic Behavior* [8]. Kirjassaan von Neumann ja Morgenstern esittivät ratkaisun kahden pelaajan äärellisille nollasummapeleille. Peliteorian yhtenä keskeisimpänä tutkijana ja kehittäjänä voidaan myös pitää Nobel-palkittua John Nashiä. Nash kehitti 1950-luvun alussa menetelmiä tasapainotilojen etsimiseen erilaisissa usean pelaajan peleissä [12]. Aiemmin tällaisia tasapainotiloja ei oltu määritelty, joten ne nimettiin Nashin tasapainoiksi. Peliteorian sovelluksia käytetään monien eri tieteenalojen kehittämiseen ja tutkimiseen, erityisesti taloustieteiden. Peliteoriaa sovelletaan myös esimerkiksi biologiassa, evoluutioteoriassa, politiikassa ja etiikassa. Uusimpana tieteenalana tietotekniikka käyttää peliteoriaa apuna esimerkiksi tekoälyn kehityksessä.

Tässä tutkielmassa rajoitutaan tarkastelemaan keskeisimpiä peliteoreettisia malleja: strategiapelejä ja ekstensiivisiä pelejä. Aluksi (Luku 1.1) kuitenkin esitellään tutkielmassa käytettävät merkintätavat sekä tutkielmassa tarvittavia määritelmiä ja aputuloksia. Lukijan oletetaan tuntevan tavallisimmat matemaattiset merkintätavat sekä omaavan hieman perustietoja matemaattisesta analyysistä, joukko-opista, topologiasta sekä lineaarialgebrasta.

Luvussa 2 esiteltävissä strategiapeleissä pelaajat valitsevat siirtonsa kerran ja yhtäaikaisesti. Aliluvussa 2.1 esitellään peliteorian ehkä keskeisin käsite, Nashin tasapaino, joka seuraa läpi koko tutkielman erilaisten pelien ratkaisukonseptina. Pykälä 2.2 käsittelee sekastrategisia pelejä, joissa pelaajat satunnaistavat valintojaan. Aliluvussa 2.3 esitetään menetelmiä, joilla pelaajat voivat arvioida mahdollisten siirtojensa paremmuutta. Luku 3 käsittelee täydellisen informaation ekstensiivisiä pelejä, jotka mallintavat peräkkäisiä strategisia päätöksenteko-ongelmia. Strategiapeleistä poiketen ekstensiivisissä peleissä pelaajat voivat uudelleen harkita strategiaansa aina, kun on heidän vuoronsa toimia. Aliluvussa 3.1 esitellään ekstensiiviset pelit täydellisellä informaatiolla, jonka jälkeen käsitellään ekstensiivisiin peleihin liittyviä ratkaisukonsepteja, kuten ekstensiivisen pelin täydellinen tasapaino alipelien suhteen sekä Nashin tasapaino ekstensiivisissä peleissä. Tutkielman lopussa tarkastellaan vielä esimerkkien avulla tilanteita, joissa ratkaisukonseptien määrittelemät tasapainotilat voivat olla ristiriidassa intuition kanssa.

Tutkielman päälähteenä on käytetty elektronista versiota Martin J. Osbornen ja Ariel Rubinsteinin teoksesta *A Course in Game Theory* [9]. Kaikki tutkielmassa esitetyt tulokset, todistukset ja määritelmät ovat peräisin tästä teoksesta, ellei niiden lähteisiin ole erikseen viitattu. Tutkielman esimerkit ovat myös peräisin samasta lähteestä. Esimerkit käsittelevät suurimmaksi osaksi kahden tai kolmen pelaajan välisiä klassisia peliteorian esimerkkipelejä, eikä tutkielman tekijä nähnyt työn saavan lisäarvoa omista esimerkeistä, joissa vuorovaikutustilanteet olisivat samankaltaisia, mutta itse keksittyjä. Lisäksi itse keksittyihin pelaajien tuottoihin liittyvät laskutoimitukset voisivat saada kokonaisluvuista tai helposti esitettävistä rationaaliluvuista poikkeavia arvoja, mikä tarpeettomasti vaikeuttaisi esimerkkien esitystä. Tutkielmassa esiteltävien esimerkkien eri variaatiot myös toistuvat useissa eri luvuissa ja niitä tarkastellaankin toistuvasti useista näkökulmista erilaisten pelien yhteydessä. Lähteessä esitettyjä lauseiden todistuksia sekä esimerkkejä on täydennetty laskutoimituksilla ja muilla havainnoilla.

1.1 Valmistelevia tarkasteluja

1.1.1 Merkinnöistä

Tutkielman merkintätavat noudattelevat päälähteessä [9] käytettyjä merkintöjä. Tutkielman läpi kirjaimella N viitataan *pelaajien* joukkoon. Lisäksi jokaisessa pelissä oletetaan, että $|N| \geq 2$. *Profiililla* tarkoitetaan jonkin muuttujan arvojen jonoa, jossa on yksi muuttujan arvo jokaista pelaajaa kohti. Tällaiselle profiilille käytetään merkintää $(x_i)_{i\in N}$ tai lyhyemmin (x_i). Profiilissa muuttujan paikalla voi esimerkiksi olla pelaajan siirto, relaatio tai vaikkapa kuvaus. Esimerkiksi kuvauksien profiilille, missä f_i on pelaajaan $i \in N$ liittyvä kuvaus, voidaan käyttää merkintää $(f_i)_{i\in N}$ (tai lyhyemmin (f_i)). Jokaisella profiililla $x = (x_j)_{j\in N}$ ja jokaisella $i \in N$ merkinnällä $x_{-i} = (x_j)_{j\in N\setminus\{i\}}$ viitataan profiiliin x, josta on poistettu pelaajaan i liittyvä komponentti x_i. Merkintä (x_{-i}, x_i) tarkoittaa profiilia $(x_i)_{i\in N}$. Jos X_i on joukko jokaisella $i \in N$, niin $X_{-i} = \times_{j\in N\setminus\{i\}} X_j$.

Huomautus 1.1. Tästä lähtien profiilille $(x_i)_{i\in N}$ käytetään aina lyhyempää merkintätapaa (x_i) tai x, mikäli tarkenne "$i \in N$" on asiayhteydessä selvä.

1.1.2 Relaatioista

Kaksipaikkainen, joukossa A määritelty relaatio $\succsim$ on *vertailullinen*, jos $a \succsim b$ tai $b \succsim a$ jokaisella $a, b \in A$; *refleksiivinen*, jos $a \succsim a$ jokaisella $a \in A$; *transitiivinen*, jos $a \succsim c$ aina, kun $a \succsim b$ ja $b \succsim c$. Peliteoriassa pelaajien mieltymyksiä pelien eri lopputuloksista kuvataan *preferenssirelaatioiden* avulla. Pelaajan $i \in N$ preferenssirelaatiolle käytetään merkintää $\succsim_i$. Preferenssirelaatio on vertailullinen, refleksiivinen ja transitiivinen (kaksipaikkainen) relaatio.

Sanotaan, että joukossa $A \subset \mathbb{R}^n$ määritelty preferenssirelaatio $\succsim$ on *jatkuva* [9, s. 7], jos $a \succsim b$ aina, kun on olemassa a:ta kohti suppeneva jono (a^k) joukon A alkioita ja vastaavasti b:tä kohti suppeneva jono (b^k) A:n alkioita siten, että $a^k \succsim b^k$ jokaisella k. Edelleen joukossa $\mathbb{R}^n$ määritellyn preferenssirelaation $\succsim$ sanotaan olevan *kvasikonkaavi* [9, s. 7], jos jokaisella $b \in \mathbb{R}^n$ joukko $\{a \in \mathbb{R}^n : a \succsim b\}$ on konveksi (ks. Määritelmä 1.1).

1.1.3 Tarvittavien käsitteiden määritelmiä

Tässä luvussa on listattu luettelonomaisesti joitakin joukko-oppiin, topologiaan, lineaarialgebraan ja matemaattiseen analyysiin liittyviä määritelmiä ja aputuloksia.

Määritelmä 1.1. Joukko $S \subset \mathbb{R}^n$ on *konveksi* [7, s. 1], jos jokaisella $\lambda \in [0, 1]$ ja kaikilla $x, x' \in S$

$$\lambda x + (1 - \lambda)x' \in S.$$

Joukko on *konkaavi*, jos se ei ole konveksi.

Määritelmä 1.2. Sanotaan, että $x \in \mathbb{R}^n$ on vektorien $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ *konveksi kombinaatio* [3, s. 2], jos on olemassa $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ siten, että

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1 \quad \text{ja} \quad x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m.$$

Määritelmä 1.3. Olkoon V vektoriavaruus ja $v_1, \ldots, v_n \in V$. Sanotaan, että vektorit $v_1, \ldots, v_n$ ovat *lineaarisesti riippumattomia* [2], jos ja vain jos kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ yhtälön

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$$

ainoa ratkaisu on triviaaliratkaisu, missä $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Määritelmä 1.4. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *avoin* [5, s. 10], jos jokaista alkiota $x \in A$ kohti on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että x-keskinen, ϵ-säteinen avoin kuula $B_\epsilon(x)$ on joukon A osajoukko.

Määritelmä 1.5. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu* [5, s. 11], jos ja vain jos sen komplementti on avoin.

Määritelmä 1.6. Sanotaan, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *rajoitettu* [6, Määritelmä 6], jos on olemassa avoin kuula $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset B$.

Määritelmä 1.7. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset$ X. Sanotaan, että joukko A on *kompakti* [6, Määritelmä 8], jos jokaisella A:n avoimella peitteellä on olemassa äärellinen osapeite. (Toisin sanoen, jos tämän A:n avoimen peitteen jokin äärellinen osajoukko on myös A:n avoin peite.)

Lause 1.1 (Heine-Borel [11]). *Joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Katso [11]. $\square$

Luku 2

Strategiapelit

2.1 Nashin tasapaino

2.1.1 Strategiapelit

Määritelmä

Strategiapeli [9, Luku 2] mallintaa vuorovaikutteista päätöksenteko-ongelmaa, jossa päätöksentekijät valitsevat strategiansa ja siirtonsa kerran ja yhtäaikaisesti. Malli koostuu äärellisestä *pelaajien* joukosta, jokaisen pelaajan mahdollisten *siirtojen* joukosta sekä jokaisen pelaajan, siirtoprofiilien joukossa määritellystä *preferenssirelaatiosta*. Siirtoprofiilia $a = (a_j)_{j \in N}$ sanotaan myös pelin *lopputulokseksi*. Vaatimus siitä, että jokaisen pelaajan preferenssirelaatio on määritelty lopputulosten joukossa (pelaajan mahdollisten siirtojen joukon sijaan) erottaa strategiapelin tavallisesta päätöksentekoongelmasta; jokaisen pelaajan on siis huomioitava strategiassaan oman siirtonsa lisäksi myös muiden pelaajien tekemät siirrot.

Määritelmä 2.1. *Strategiapeli* koostuu

- äärellisestä *pelaajien* joukosta N
- jokaisen pelaajan $i \in N$ epätyhjästä mahdollisten *siirtojen* joukosta A_i
- jokaisen pelaajan $i \in N$ *preferenssirelaatiosta* $\succsim_i$, joka on määritelty joukossa $A = \times_{j \in N} A_j$.

Jos jokaisen pelaajan $i \in N$ siirtojen joukko A_i on äärellinen, niin strategiapeli on äärellinen. Strategiapeliä merkitään kolmikolla $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$.

Strategiapelin mallin abstraktisuus sallii sen soveltamisen monissa erilaisissa tilanteissa. Pelaaja voi olla ihminen tai mikä tahansa päätöksentekijä, kuten esimerkiksi hallitus, komitea, eläin tai jopa kasvi. Malli ei aseta rajoituksia mahdollisten siirtojen joukolle. Nämä joukot voivat sisältää vain muutaman alkion tai ne voivat olla valtavia ja hyvin monimutkaisia. Kuitenkin mallin soveltamista rajoittaa vaatimus jokaiseen pelaajaan liitettävästä preferenssirelaatiosta. Preferenssirelaatio heijastaa pelaajan mieltymyksiä pelin mahdollisista lopputuloksista tai organismin, joka ei ajattele tietoisesti, tapauksessa sen mahdollisuudesta lisääntyä.

Joissain tilanteissa pelaajien preferenssit on luonnollista esittää siirtoprofiilien sijaan niiden seurausten joukossa. Esimerkiksi mallinnettaessa oligopolia pelaajien joukko on yritysten joukko ja jokaisen yrityksen mahdollisten siirtojen joukko on hintojen joukko. Oligopolin tapauksessa voidaan olettaa, että jokainen yritys maksimoi vain omaa tuottoaan, eivätkä yritykset ole kiinnostuneita siitä, millä siirtoprofiililla tämä maksimituotto saavutetaan. Näitä tilanteita varten määritellään *seurausten* joukko C, kuvaus $g : A \to C$, joka liittää seurauksen jokaiseen siirtoprofiiliin sekä joukossa C määritelty preferenssirelaatioiden profiili $(\succsim_i^*)$. Strategiapelissä jokaisen pelaajan i preferenssirelaatio määritellään seuraavasti: $a \succsim_i b$, jos ja vain jos $g(a) \succsim_i^* g(b)$.

On myös olemassa tilanteita, joissa ulkoinen satunnaismuuttuja voi vaikuttaa valitun siirron seuraukseen. Tällainen ulkoinen tekijä on pelaajille tuntematon siirtoa tehdessä. Tällaisia tilanteita voidaan mallintaa kuvauksella $g : A \times \Omega \to C$, missä C on seurausten joukko, Ω on todennäköisyysavaruus ja $g(a, \omega)$ on seuraus, kun siirtoprofiili on $a \in A$ ja tuntemattoman satunnaismuuttujan realisaatio on $\omega \in \Omega$. Siirtoprofiili indusoi siis "arvonnan" joukossa C ja jokaisen pelaajan i preferenssirelaation $\succsim_i^*$ tuleekin olla määritelty kaikkien tällaisten "arvontojen" joukossa. Pelaajan i preferenssirelaatio tuntemattoman satunnaismuuttujan sisältävässä strategiapelissä määritellään seuraavasti: $a \succsim_i b$, jos ja vain jos siirtoprofiililla a saavutettavan tuoton odotusarvo ulkoisen satunnaismuuttujan sisältävässä strategiapelissä on vähintään yhtä suuri kuin siirtoprofiilin b tuoton odotusarvo (preferenssirelaation $\succsim_i^*$ mielessä).

Useissa tilanteissa pelaajan i preferenssirelaatio $\succsim_i$ on hyödyllistä esittää *tuottofunktion* $u_i : A \to \mathbb{R}$ avulla (sanotaan myös *hyötyfunktioksi*), missä $u_i(a) \geq u_i(b)$ aina, kun $a \succsim_i b$. Tuottofunktion arvoja sanotaan *tuotoiksi*. Strategiapeliä, jossa pelaajien preferenssit esitetään tuottofunktioiden avulla, merkitään kolmikolla $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ merkinnän $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ sijaan.

Kahden pelaajan äärellinen strategiapeli voidaan esittää helposti taulukon 2.1 tavalla. Taulukon rivit on nimetty ensimmäisen pelaajan siirtojen mukaan sekä sarakkeet toisen pelaajan siirtojen mukaan. Taulukossa rivin r ja sarakkeen s kohdalla olevan laatikon kaksi lukua kertovat pelaajien tuotot, kun rivipelaaja on valinnut rivin r osoittaman siirron ja sarakepelaaja siirron sarakkeesta s. Siis ensimmäinen luku kertoo rivipelaajan tuoton ja jälkimmäinen sarakepelaajan tuoton. Taulukon 2.1 pelissä rivipelaajan mahdollisten siirtojen joukko on $\{T, B\}$ ja sarakepelaajan siirtojen joukko on $\{L, R\}$. Esimerkiksi lopputuloksessa (B, R) rivipelaajan tuotto on z_1 ja sarakepelaajan tuotto on z_2. Jos pelaajien nimet pelissä ovat "1" ja "2", niin käytäntö on, että rivipelaaja on pelaaja 1 ja sarakepelaaja on pelaaja 2.

	L	R
T	w_1, w_2	x_1, x_2
B	y_1, y_2	z_1, z_2

Taulukko 2.1: Kahden pelaajan strategiapeli, jossa kummallakin pelaajalla on kaksi mahdollista siirtoa.

Kommentteja strategiapelin tulkinnasta

Yleinen strategiapelin tulkinta on [9, s. 13], että se on malli tapahtumasta, joka tapahtuu vain kerran. Strategiapelissä jokainen pelaaja tietää pelin ja siihen liittyvät yksityiskohdat, jokainen pelaaja olettaa toisten pelaajien käyttäytyvän rationaalisesti ja pelaajat valitsevat siirtonsa yhtäaikaisesti ja itsenäisesti. Tämän tulkinnan mukaan pelaajat ovat siirtojaan valitessa tietämättömiä toisten pelaajien valinnoista; ei siis ole olemassa informaatiota, josta pelaaja voisi ennustaa toisten pelaajien käyttäytymistä.

Toisen tulkinnan mukaan pelaajat voivat muodostaa oletuksia muiden pelaajien käyttäytymisestä samanlaisista (tai vastaavista) peleistä, jotka on pelattu aiemmin. Sarja saman pelin pelejä voidaan mallintaa strategiapeliksi ainoastaan, jos pelit eivät liity strategisesti toisiinsa. Tämä tarkoittaa sitä, että pelaaja, joka pelaa peliä useita kertoja, on kiinnostunut ainoastaan pelissä saamastaan välittömästä tuotosta. Pelaajan on siis jätettävä huomioitta nykyisen siirtonsa mahdolliset vaikutukset muiden pelaajien tulevaan käytökseen (seuraavissa peleissä).

Strategiapeleissä oletuksena on, että pelaajat tekevät siirtonsa "yhtäaikaisesti". Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että pelaajien tulee tehdä siirtonsa tiettynä ajan hetkenä. Esimerkiksi strategiapelissä, jossa pelaajien mahdolliset siirrot ja tuotot on määritelty julkisesti, pelaajat voivat olla eri paikoissa näyttöpäätteidensä edessä. Pelaajat valitsevat siirtonsa lähettämällä ne keskustietokoneelle ja pelaajia informoidaan heidän saamista tuotoista vasta, kun kaikkien pelaajien siirrot on vastaanotettu.

Jotta jotain tiettyä tilannetta voidaan mallintaa strategiapelinä, on tärkeää, että pelaajat tekevät päätöksensä itsenäisesti eikä yhdelläkään pelaajalla ole informaatiota muiden pelaajien tekemistä valinnoista.

2.1.2 Nashin tasapaino

Yleisin peliteoriassa käytetty ratkaisukonsepti on Nashin tasapaino [9, s. 14]. Pelissä, jossa pelaajilla on oikeat olettamukset pelistä ja jossa pelaajat käyttäytyvät rationaalisesti, Nashin tasapaino on *vakaa tila*, josta poikkeamalla yksikään pelaaja ei voi saavuttaa suurempaa tuottoa. Nashin tasapainon käsite ei ota kantaa prosessiin, jolla tähän vakaaseen tilaan on päädytty.

Määritelmä 2.2. Siirtoprofiili $a^* \in A$ on strategiapelin $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ *Nashin tasapaino*, jos jokaisella pelaajalla $i \in N$ pätee

$$(a^*_{-i}, a^*_i) \succsim_i (a^*_{-i}, a_i) \text{ jokaisella } a_i \in A_i.$$

Siis, jos a^* on Nashin tasapaino, niin yhdelläkään pelaajalla $i \in N$ ei ole olemassa sellaista siirtoa $a_i \in A_i$, joka antaisi hänelle suuremman tuoton kuin siirto a^*_i (kun muiden pelaajien siirtoprofiili on (a^*_{-i})).

Nashin tasapainon uudelleenmuotoilu voi olla joissain tapauksissa käyttökelpoinen. Olkoon $a_{-i} \in A_{-i}$, tällöin $B_i(a_{-i})$ on pelaajan i parhaiden siirtojen joukko, kun muiden pelaajien siirtoprofiili (a_{-i}) tiedetään. Toisin sanoen

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : (a_{-i}, a_i) \succsim_i (a_{-i}, a'_i) \text{ jokaisella } a'_i \in A_i\}.$$

Kuvausta B_i sanotaan pelaajan i *parassiirtofunktioksi*. Tällöin Nashin tasapaino on siirtoprofiili a^*, jolla

$$a^*_i \in B_i(a^*_{-i}) \text{ jokaisella } i \in N.$$

Tämä määritelmän vaihtoehtoinen muotoilu voi tarjota (ei välttämättä kovin tehokkaan) tavan löytää Nashin tasapaino.

2.1.3 Esimerkkejä

Seuraavat pelit ovat klassisia esimerkkejä strategiapeleistä [9, s. 15]. Esimerkit ovat hyvin yksinkertaisia ja jokaisessa pelissä on ainoastaan kaksi pelaajaa, joilla on vain kaksi mahdollista siirtoa. Silti jokainen esimerkki sisältää perusoletuksen strategisesta vuorovaikutuksesta, joka toistuu usein myös monimutkaisemmissa peleissä.

Esimerkki 2.1 (Bach vai Stravinsky? (BvS))**.** Kaksi ihmistä haluaa mennä yhdessä Bachin tai Stravinskyn konserttiin. He haluaisivat mennä konserttiin nimenomaan yhdessä, mutta toinen haluaisi mennä Bachin ja toinen Stravinskyn konserttiin. Taulukossa 2.2 on esitetty molempien henkilöiden preferenssit tuottofunktioiden avulla.

BvS mallintaa tilannetta, jossa pelaajat haluavat sovittaa yhteen käyttäytymistään, mutta heidän mieltymyksensä ovat ristiriitaiset. Tällä pelillä on kaksi Nashin tasapainoa: (*Bach*,*Bach*) ja (*Stravinsky*,*Stravinsky*). Siis tässä pelissä on kaksi vakaata tilaa, joista ensimmäisessä kumpikin pelaaja valitsee *Bachin* ja toisessa kumpikin valitsee *Stravinskyn.*

Esimerkki 2.2. Kuten edellisessä esimerkissä, kaksi ihmistä haluaa lähteä yhdessä konserttiin, mutta tässä tapauksessa he ovat yhtä mieltä siitä kumpaan konserttiin he haluavat mennä. Tämä peli on esitetty pelaajien tuottofunktioiden avulla taulukossa 2.3.

	Bach	*Stravinsky*
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

Taulukko 2.2: Bach vai Stravinsky? (Esimerkki 2.1.)

Kuten esimerkissä BvS, tässäkin pelissä on kaksi Nashin tasapainoa: (*Mozart*,*Mozart*) ja (*Mahler*,*Mahler*). Kuitenkin, päinvastoin kuin pelissä BvS, pelaajilla on yhteinen intressi saavuttaa toinen näistä tasapainoista, nimittäin (*Mozart*,*Mozart*). Tästä esimerkistä huomataan, että Nashin tasapainon käsite ei ota kantaa tasapainotilojen paremmuuteen.

	Mozart	*Mahler*
Mozart	2,2	0,0
Mahler	0,0	1,1

Taulukko 2.3: Mozart vai Mahler? (Esimerkki 2.2.)

Esimerkki 2.3 (Vangin dilemma)**.** Kaksi rikoksesta epäiltyä on vangittu ja eristetty toisistaan. Jos he molemmat tunnustavat, heidät tuomitaan kolmeksi vuodeksi vankeuteen. Jos ainoastaan toinen tunnustaa, hänet vapautetaan ja häntä käytetään todistajana toista epäiltyä vastaan, joka saa neljän vuoden tuomion. Jos taas kumpikaan ei tunnusta, heidät tuomitaan vuodeksi vankeuteen. Peli on esitetty taulukossa 2.4 sopivien tuottofunktioiden avulla.

Tässä pelissä on hyötyä yhteistyöstä, sillä kummallekin epäilylle paras tulos olisi, jos kumpikaan ei tunnustaisi. Kuitenkin kummallakin pelaajalla on kannustin olla "vapaamatkustaja". Mitä tahansa toinen pelaaja valitseekaan, kannattaa toisen pelaajan tunnustaa, joten tässä pelissä on yksikäsitteinen Nashin tasapaino (*Tunnustaa*,*Tunnustaa*).

Esimerkki 2.4 (Haukka-Kyyhkynen)**.** Kaksi eläintä taistelee samasta saaliista. Kumpikin eläin voi käyttäytyä joko aggressiivisesti (*Haukka*) tai passiivisesti (*Kyyhkynen*). Paras lopputulos tässä pelissä olisi, että eläin käyttäytyisi kuin haukka, kun taas toinen käyttäytyisi kuin kyyhkynen. Huonoin lopputulos saavutetaan, jos kumpikin käyttäytyy kuin haukka. Siis kumpikin käyttäytyy mieluummin kuin haukka, jos toinen käyttäytyy kuin kyyhkynen ja kumpikin käyttäytyy mieluummin kuin kyyhkynen, jos toinen käyttäytyy

	Ei tunnusta	*Tunnustaa*
Ei tunnusta	3,3	0,4
Tunnustaa	4,0	1,1

Taulukko 2.4: Vangin dilemma. (Esimerkki 2.3.)

kuin haukka. Tämä peli on esitetty taulukossa 2.5. Tässä pelissä on kaksi Nashin tasapainoa: (*Kyyhkynen*,*Haukka*) ja (*Haukka*,*Kyyhkynen*). Nämä tasapainotilat ovat esimerkkejä tilanteista, joissa toinen pelaaja joustaa.

	Kyyhkynen	*Haukka*
Kyyhkynen	3,3	1,4
Haukka	4,1	0,0

Taulukko 2.5: Haukka-Kyyhkynen. (Esimerkki 2.4.)

Esimerkki 2.5 ("Kolikonheitto")**.** Taulukossa 2.6 on esitetty peli, jossa kumpikin pelaaja valitsee joko kruunan tai klaavan. Jos valinnat eroavat, pelaaja 1 maksaa pelaajalle 2 euron. Jos taas valinnat ovat samat, pelaaja 2 maksaa euron pelaajalle 1. Pelissä kumpikin pelaaja yrittää maksimoida ainoastaan omaa tuottoaan. Tällaista peliä, jossa pelaajien intressit ovat täysin vastakkaiset, sanotaan *nollasummapeliksi*. Tässä pelissä ei ole Nashin tasapainoa.

	Kruuna	*Klaava*
Kruuna	$1,-1$	$-1,1$
Klaava	$-1,1$	$1,-1$

Taulukko 2.6: "Kolikonheitto". (Esimerkki 2.5.)

2.1.4 Nashin tasapainon olemassaolo

Kuten Esimerkki 2.5 osoittaa, jokaisella strategiapelillä ei ole olemassa Nashin tasapainoa. Toisaalta, kuten Esimerkki 2.1 ja Esimerkki 2.4 osoittavat, Nashin tasapainoja voi olla useita. Nashin tasapainon olemassaoloon liittyviä ehtoja on tutkittu laajasti ja tässä luvussa esitetään ehkä yksinkertaisin tulos, joka takaa Nashin tasapainon olemassaolon [9, s. 19].

Nashin tasapainon olemassaolon todistamiseen riittää osoittaa, että on olemassa siirtoprofiili a^*, jolla $a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$ jokaisella $i \in N$, toisin sanoen $a^* \in B(a^*)$. Määritellään kuvaus $B : A \to A$ siten, että $B(a) = \times_{i \in N} B_i(a_{-i})$. Kakutanin (1941) kiintopistelauseen oletukset kuvaukselle B takaavat sellaisen siirtoprofiilin a^* olemassaolon, että $a^* \in B(a^*)$. Kakutanin kiintopistelause on yleistys Brouwerin kiintopistelauseesta [4] joukkoarvoisille kuvauksille.

Apulause 2.1 (Kakutanin kiintopistelause [1])**.** *Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$ suljettu, rajoitettu ja konveksi joukko sekä olkoon $F : X \to \mathcal{P}(X)$ sellainen joukkoarvoinen kuvaus, että jokaisella $x \in X$ $F(x)$ on epätyhjä ja konveksi X:n osajoukko. Oletetaan myös, että F:n kuva on suljettu joukossa $X \times X$. Tällöin on olemassa $x^* \in X$ siten, että*

$$x^* \in F(x^*).$$

Todistus. Sivuutetaan (ks. [1]). □

Määritelmä 2.3. Joukossa $A = \times_{i \in N} A_i$ määritellyn preferenssirelaation $\succsim_i$ sanotaan olevan *kvasikonkaavi joukossa* $A_i \subset \mathbb{R}^n$, jos jokaisella $a^* \in A$ joukko $\{a_i \in A_i : (a_{-i}^*, a_i) \succsim_i a^*\}$ on konveksi.

Lause 2.1. *Strategiapelillä $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ on Nashin tasapaino, jos jokaisella $i \in N$*

- *pelaajan i siirtojen joukko A_i on epätyhjä, kompakti ja konveksi Euklidisen avaruuden osajoukko*

ja preferenssirelaatio $\succsim_i$ on

- *jatkuva*
- *kvasikonkaavi joukossa A_i.*

Todistus. Määritellään kuvaus $B : A \to A$ siten, että $B(a) = \times_{i \in N} B_i(a_{-i})$, missä B_i on pelaajan i parassiirtofunktio. Joukko $B_i(a_{-i})$ on epätyhjä jokaisella $i \in N$, sillä preferenssirelaatio $\succsim_i$ on jatkuva ja joukko A_i on sekä epätyhjä että kompakti. Edelleen, koska $\succsim_i$ on kvasikonkaavi joukossa A_i, on joukko $B_i(a_{-i})$ konveksi. Kuvauksen B kuva on suljettu, sillä preferenssirelaatio $\succsim_i$ on jatkuva jokaisella $i \in N$. Täten Kakutanin kiintopistelauseen nojalla kuvauksella B on olemassa kiintopiste a^* siten, että $a^* \in B(a^*)$, joka on myös strategiapelin $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ Nashin tasapaino. □

Tämä tulos siis osoittaa, että tietyt ehdot täyttävällä strategiapelillä on olemassa *vähintään yksi* Nashin tasapaino.

2.1.5 Nollasummapelit

Mielivaltaisen strategiapelin Nashin tasapainojen joukosta voidaan hyvin harvoin sanoa mitään varmaa. Tämä on kuitenkin mahdollista kahden pelaajan strategiapelissä, missä pelaajien preferenssit ovat täysin vastakkaiset [9, s. 21]. Tämän luvun peleissä pelaajat on nimetty numeroin "1" ja "2". Toisin sanoen $N = \{1, 2\}$.

Määritelmä 2.4. Strategiapelin $\langle \{1, 2\}, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ sanotaan olevan *nollasummapeli*, jos jokaisella $a \in A$ ja $b \in A$: $a \succsim_1 b$, jos ja vain jos $b \succsim_2 a$.

Nimi nollasummapeli tulee siitä, että tällaisissa peleissä pelaajien preferenssit voidaan esittää sopivien tuottofunktioiden u_1 ja u_2 avulla siten, että $u_1 + u_2 = 0$.

Sanotaan, että pelaaja i *maximinimoi*, jos hän valitsee siirron, joka on parassiirto oletuksella, että pelaaja j yrittää vahingoittaa pelaajan i saamaa tuottoa mahdollisimman paljon. Toisin sanoen pelaaja i maksimoi minimituoton, jonka hän voi varmasti pelissä saavuttaa. Seuraavaksi osoitamme, että nollasummapelissä, jossa on olemassa Nashin tasapaino, siirtoprofiili $a^* \in A$ on Nashin tasapaino, jos ja vain jos jokaisella $i \in N$ siirto a_i^* on maksiminimoija pelaajalle i. Vahvistaaksemme tätä tulosta osoitamme myöhemmin, että nollasummapelissä, jossa on olemassa (vähintään yksi) Nashin tasapaino, nämä tasapainotilat antavat saman tuoton. Tämä ominaisuus ei yleisesti ole voimassa peleissä, jotka eivät ole nollasummapelejä.

Määritelmä 2.5. Olkoon $\langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ nollasummapeli. Siirto $x^* \in A_1$ on *maximinimoija pelaajalle 1*, jos

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \text{ jokaisella } x \in A_1.$$

Vastaavasti siirto $y^* \in A_2$ on *maximinimoija pelaajalle 2*, jos

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \text{ jokaisella } y \in A_2.$$

Siis maksiminimoija on pelaajan i siirto, joka maksimoi tuoton, jonka pelaaja voi varmasti pelissä saavuttaa. Maksiminimoija pelaajalle 1 ratkaisee siis ongelman

$$\max_x \min_y u_1(x, y).$$

Vastaavasti maksiminimoija pelaajalle 2 ratkaisee ongelman

$$\max_y \min_x u_2(x, y).$$

Apulause 2.2. *Olkoon $\langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ nollasummapeli. Tällöin*

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y).$$

Edelleen $y \in A_2$ on ongelman $\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y)$ ratkaisu, jos ja vain jos se on ongelman $\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$ ratkaisu.

Todistus. Tiedetään, että jokaisella kuvauksella f pätee: $\min_z(-f(z)) = -\max_z f(z)$. Edelleen jokaisella $y \in A_2$ on voimassa: $-\min_{x\in A_1} u_2(x,y) = \max_{x\in A_1}(-u_2(x,y)) = \max_{x\in A_1} u_1(x,y)$. Täten

$$\begin{aligned}
\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) &= -\min_{y\in A_2}[-\min_{x\in A_1} u_2(x,y)] \\
&= -\min_{y\in A_2}[-\min_{x\in A1}(-u_1(x,y))] \\
&= -\min_{y\in A_2}[-(-\max_{x\in A_1} u_1(x,y))] \\
&= -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y).
\end{aligned}$$

Siispä $y \in A_2$ on ongelman $\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y)$ ratkaisu, jos ja vain jos se on ongelman $\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y)$ ratkaisu. □

Seuraava tulos osoittaa yhteyden nollasummapelin Nashin tasapainojen ja maksiminimoijien joukon välillä. Lähteessä [9, s. 22] tämä tulos on esitetty hieman epätäsmällisesti, joten sitä on muokattu. Lähteessä esitettyä todistusta on myös täydennetty.

Lause 2.2. *Olkoon $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ nollasummapeli.*

1. *Jos (x^*,y^*) on G:n Nashin tasapaino, niin x^* on maximinimoija pelaajalle 1 ja y^* on maximinimoija pelaajalle 2.*
2. *Jos (x^*,y^*) on G:n Nashin tasapaino, niin*

   $$\max_x\min_y u_1(x,y) = \min_y\max_x u_1(x,y) = u_1(x^*,y^*)$$

   ja täten kaikki G:n Nashin tasapainot antavat saman tuoton.
3. *Jos $\max_x\min_y u_1(x,y) = \min_y\max_x u_1(x,y)$, x^* on maximinimoija pelaajalle 1 ja y^* on maksiminimoija pelaajalle 2, niin (x^*,y^*) on G:n Nashin tasapaino.*

Todistus. Osoitetaan ensin kohdat (1) ja (2). Oletetaan, että (x^*,y^*) on G:n Nashin tasapaino. Tällöin $u_2(x^*,y^*) \geq u_2(x^*,y)$ jokaisella $y \in A_2$. Edelleen, koska $u_2 = -u_1$, pätee $u_1(x^*,y^*) \leq u_1(x^*,y)$ jokaisella $y \in A_2$. Siispä $u_1(x^*,y^*) = \min_y u_1(x^*,y) \leq \max_x\min_y u_1(x,y)$. Vastaavasti $u_1(x^*,y^*) \geq u_1(x,y^*)$ jokaisella $x \in A_1$ ja tällöin $u_1(x^*,y^*) \geq \min_y u_1(x,y)$ jokaisella $x \in A_1$. Siis $u_1(x^*,y^*) \geq \max_x\min_y u_1(x,y)$. Täten

$$u_1(x^*,y^*) = \max_x\min_y u_1(x,y) \tag{2.1.1}$$

ja siispä x^* on maksiminimoija pelaajalle 1.

Vastaavalla päättelyllä nähdään, että $u_2(x^*,y^*) = \max_y\min_x u_2(x,y)$ ja täten y^* on maksiminimoija pelaajalle 2. Edelleen Apulauseen 2.2. nojalla

$u_1(x^*, y^*) = \min_y \max_x u_1(x, y)$. Siispä yhtälön (2.1.1) ja edellisen päättelyn nojalla

$$\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y) = u_1(x^*, y^*).$$

Osoitetaan vielä kohta (3). Olkoon

$$v^* = \max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y).$$

Apulauseen 2.2 mukaan $\max_y \min_x u_2(x, y) = -v^*$. Koska x^* on maksiminimoija pelaajalle 1, on oltava $u_1(x^*, y) \geq v^*$ jokaisella $y \in A_2$. Ja koska y^* on maksiminimoija pelaajalle 2, on oltava $u_2(x, y^*) \geq -v^*$ kaikilla $x \in A_1$. Asettamalla näihin kahteen epäyhtälöön $x = x^*$ ja $y = y^*$, saadaan $u_1(x^*, y^*) = v^*$ ja edelleen $u_2(x^*, y^*) = -v^*$, sillä $u_2 = -u_1$. Osoitetaan vielä, että (x^*, y^*) todella on G:n Nashin tasapaino. Jotta näin olisi, on oltava

$$\begin{aligned} u_1(x^*, y^*) &\geq u_1(x, y^*) \quad \text{jokaisella} \quad x \in A_1 \quad \text{ja} \\ u_2(x^*, y^*) &\geq u_2(x^*, y) \quad \text{jokaisella} \quad y \in A_2. \end{aligned}$$

Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Tällöin toinen (tai molemmat) edellä esitetyistä epäyhtälöistä ei ole voimassa. Voidaan olettaa, että ensimmäinen näistä epäyhtälöistä ei päde. Tällöin on olemassa $x \in A_1$ siten, että $x \neq x^*$ ja $u_1(x^*, y^*) < u_1(x, y^*)$. Koska $u_1 = -u_2$ ja y^* on oletuksen mukaan maksiminimoija pelaajalle 2, on oltava $u_1(x^*, y^*) < -u_2(x, y^*) \leq v^* = u_1(x^*, y^*)$. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä ja (x^*, y^*) on pelin G Nashin tasapaino. □

Kohdasta (3) seuraa, että pelaajien Nashin tasapainostrategioita voi löytää ratkaisemalla ongelmat $\max_x \min_y u_1(x, y)$ ja $\max_y \min_x u_2(x, y)$. Kuten esimerkistä 2.5 huomattiin, jokaisella nollasummapelillä ei ole Nashin tasapainoa, mutta menetelmä Nashin tasapainojen etsimiseen on käytännöllinen erityisesti sekastrategisissa peleissä (Luku 2.2), joissa pelaajat satunnaistavat siirtojaan. Kohdista (1) ja (3) seuraa myös, että nollasummapelin Nashin tasapainotiloilla on voimassa seuraava ominaisuus: jos (x, y) ja (x', y') ovat Nashin tasapainoja, niin tällöin myös (x, y') ja (x', y) ovat niitä. Kohta (2) osoittaa, että jokaisella nollasummapelillä, jolla on Nashin tasapaino,

$$\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y).$$

2.1.6 Bayesin pelit

Peliteoriassa esiintyy usein tilanteita, joissa jokin pelin osapuoli voi olla epävarma muiden pelaajien käyttäytymisestä. Strategiapeliin liittyvä *Bayesin peli* [9, s. 24] mallintaa tällaisia tilanteita.

Kuten strategiapelissä, myös Bayesin pelissä N on pelaajien joukko ja joukko A_i on pelaajan i mahdollisten siirtojen joukko. Pelaajien epävarmuutta mallinnetaan *luonnontilojen* (äärellisellä) joukolla Ω, jonka alkiot kuvaavat pelaajien käyttäytymistä eri luonnontiloilla. Jokaisella pelaajalla on *peliä* *edeltävä (luonnontilaa koskeva) uskomus* p_i, joka liittää todennäköisyyden jokaiseen mahdolliseen luonnontilaan $\omega \in \Omega$: p_i on siis joukon Ω todennäköisyysjakauma. Jokaisessa pelissä realisoituu jokin luonnontila $\omega \in \Omega$. Pelaajien informaatiota luonnontiloista mallinnetaan *signaalifunktioiden* profiililla (τ_i), missä $\tau_i(\omega)$ on signaali, jonka pelaaja i havaitsee ennen siirtonsa valitsemista, kun luonnontila on ω.

Olkoon T_i kuvauksen τ_i kaikkien mahdollisten arvojen joukko. Joukkoa T_i sanotaan pelaajan i *tyyppien* joukoksi (joukon T_i alkioita sanotaan myös *signaaleiksi*). Bayesin peleissä oletetaan, että jokainen pelaaja i liittää (ennen peliä) positiivisen todennäköisyyden jokaiseen joukon T_i alkioon. Toisin sanoen $p_i(\tau_i^{-1}(t_i)) > 0$ jokaisella $t_i \in T_i$. Jos pelaaja i vastaanottaa signaalin $t_i \in T_i$, hän tietää, että realisoitunut luonnontila on joukon $\tau_i^{-1}(t_i)$ alkio. Pelaajan signaalin vastaanottamisen *jälkeinen uskomus* realisoituneesta luonnontilasta liittää jokaiseen luonnontilaan $\omega \in \Omega$ todennäköisyyden $p_i(\omega)/p_i(\tau_i^{-1}(t_i))$, jos $\omega \in \tau_i^{-1}(t_i)$. Jos $\omega \notin \tau_i^{-1}(t_i)$, niin todennäköisyys on nolla.

Lisäyksenä strategiapeliin Bayesin pelissä pelaajan on siis otettava huomioon eri luonnontilat. Vaikka pelaaja tietäisi kaikkien muiden pelaajien valitsemat siirrot kaikissa mahdollisissa luonnontiloissa, voi pelaaja silti olla epävarma realisoituneesta luonnontilasta. Tämän takia Bayesin pelin määritelmään on sisällytettävä joukossa $A \times \Omega$ määriteltyjen preferenssirelaatioiden profiili $(\succsim_i)$.

Määritelmä 2.6. *Bayesin peli* koostuu

- äärellisestä pelaajien joukosta N
- äärellisestä *luonnontilojen* joukosta Ω

ja jokaisen pelaajan $i \in N$

- mahdollisten siirtojen joukosta A_i
- *signaalien* joukosta T_i sekä *signaalifunktiosta* $\tau_i : \Omega \to T_i$
- joukon Ω todennäköisyysjakaumasta p_i, jolla $p_i(\tau_i^{-1}(t_i)) > 0$ jokaisella $t_i \in T_i$
- preferenssirelaatiosta $\succsim_i$ joukossa $A \times \Omega$, missä $A = \times_{j \in N} A_j$.

Jokaisessa Bayesin pelissä pelaaja tietää oman tyyppinsä ja niinpä hänen ei tarvitse ottaa huomioon hypoteettisia tilanteita, joissa hän itse olisi jotain muuta tyyppiä. Kuitenkin, minkä tahansa luonnontilan vallitessa, pelaajan täytyy muodostaa olettamus muiden pelaajien mahdollisista siirroista myös muissa luonnontiloissa, sillä pelaaja voi olla epävarma tästä vallitsevasta luonnontilasta. Edelleen tämän olettamuksen muodostamiseen voi myös vaikuttaa pelaajan omat valinnat muissa mahdollisissa luonnontiloissa, sillä pelaajan tulee ottaa huomioon, että muutkin pelaajat voivat olla epävarmoja vallitsevasta luonnontilasta.

Bayesin pelin Nashin tasapainossa [9, s. 26] pelaaja valitsee parhaan mahdollisen siirron vastaanotettuaan signaalin, jonka perusteella hän on muodostanut uskomuksensa vallitsevasta luonnontilasta sekä muiden pelaajien siirroista.

2.2 Sekastrategian tasapaino ja korreloiva tasapaino

Tässä luvussa tarkastellaan tilanteita, joissa pelaajien valinnat eivät välttämättä ole deterministisiä [9, Luku 3]. Näitä tilanteita mallinnetaan sekastrategian Nashin tasapainolla sekä korreloivalla tasapainolla.

2.2.1 Sekastrategian Nashin tasapaino

Määritelmiä

Sekastrategian Nashin tasapaino [9, s. 31] on suunniteltu mallintamaan pelin vakaata tilaa, jossa pelaajien valinnat eivät ole deterministisiä, mutta ovat määritelty tarkasti tiettyjen todennäköisyyksien mukaan.

Luvussa 2.1.1 strategiapelin määriteltiin olevan kolmikko $\langle N, (A_i), (\succsim_i)\rangle$, missä preferenssirelaatio $\succsim_i$ määriteltiin joukossa $A = \times_{i\in N} A_i$. Tässä luvussa pelaajien valinnat voivat siis olla epädeterministisiä ja tämän vuoksi mallia täytyy täydentää jokaisen pelaajan preferenssirelaatiolla, joka määritellään joukon A arvontojen joukossa. Sekastrategisissa peleissä pelaajien preferenssirelaatiot esitetään tuottofunktioiden $u_i : A \to \mathbb{R}$ avulla ja täten määritelmä pelille tässä luvussa onkin $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ (joka siis eroaa aiemmasta strategiapelin määritelmästä siten, että tuottofunktion odotusarvo ilmaisee pelaajan preferenssit A:n arvontojen joukossa). Kuitenkin tässäkin luvussa malliin viitataan nimellä *strategiapeli*.

Olkoon $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ tällainen strategiapeli. Joukon A_i todennäköisyysjakaumien joukolle käytetään merkintää $\Delta(A_i)$ ja joukon $\Delta(A_i)$ alkion sanotaan olevan pelaajan i *sekastrategia* (joukon A_i alkioita sanotaan pelaajan i *puhtaiksi strategioiksi*). Jokaisella äärellisellä joukolla X ja $\delta \in \Delta(X)$, merkinnällä $\delta(x)$ tarkoitetaan todennäköisyyttä, jonka δ liittää alkioon $x \in X$. Sanotaan, että alkio $x \in X$ kuuluu δ:n *tukijoukkoon*, jos $\delta(x) > 0$. Sekastrategioiden profiili $(\alpha_j)_{j\in N}$ indusoi todennäköisyysjakauman joukolle A. Jos esimerkiksi jokainen joukko A_j on äärellinen, niin siirtoprofiilin $a = (a_j)_{j\in N}$ todennäköisyys on $\prod_{j\in N} \alpha_j(a_j)$ ja edelleen pelaajan i odotettu tuotto eli tuoton odotusarvo sekastrategiaprofiililla $(\alpha_j)_{j\in N}$ on $\sum_{a\in A}(\prod_{j\in N} \alpha_j(a_j))u_i(a)$.

Johdetaan sitten pelistä $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ uusi strategiapeli, jota sanotaan pelin G *sekalaajennukseksi*. Tässä pelin G sekalaajennuksessa pelaajan

i mahdollisten siirtojen joukko on $\Delta(A_i)$, joka siis on pelaajan i sekastrategioiden joukko pelissä G.

Määritelmä 2.7. Strategiapelin $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ *sekalaajennus* on strategiapeli $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i)\rangle$, missä $\Delta(A_i)$ on joukon A_i todennäköisyysjakaumien joukko ja $U_i : \times_{j\in N}\Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ liittää jokaiseen sekastrategiaprofiiliin $\alpha \in \times_{j\in N}\Delta(A_j)$ tuoton odotusarvon (tuottofunktio u_i:n mielessä). Siis

$$U_i(\alpha) = \sum_{a\in A} \Big(\prod_{j\in N} \alpha_j(a_j)\Big)u_i(a), \tag{2.2.1}$$

jos A on äärellinen.

Kuvaus U_i on *multilineaarinen*. Toisin sanoen, jos α on sekastrategiaprofiili ja $\lambda \in [0,1]$, niin kaikilla pelaajan i sekastrategioilla β_i ja γ_i

$$U_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda)U_i(\alpha_{-i}, \gamma_i).$$

Edelleen, jos A_i on äärellinen jokaisella $i \in N$, niin

$$U_i(\alpha) = \sum_{a_i\in A_i} \alpha_i(a_i)U_i(\alpha_{-i}, e(a_i))$$

jokaisella sekastrategiaprofiililla α, missä $e(a_i)$ on pelaajan i sekastrategia, joka liittää siirtoon $a_i \in A_i$ todennäköisyyden yksi.

Seuraavaksi määritellään tämän luvun keskeisin tasapainon käsite.

Määritelmä 2.8. Strategiapelin sekastrategian Nashin tasapaino on strategiapeliä vastaavan sekalaajennuksen Nashin tasapaino.

Oletetaan, että $\alpha^* \in \times_{j\in N}\Delta(A_j)$ on strategiapelin $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ sekastrategian Nashin tasapaino, missä jokaisen pelaajan i sekastrategia α_i^* on sellainen, että se liittää yhteen siirtoon, esimerkiksi siirtoon $a_i^* \in A_i$, todennäköisyyden yksi. Toisin sanoen

$$\alpha_i^*(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{jos } \ a_i = a_i^* \\ 0, & \text{jos } \ a_i \neq a_i^*. \end{cases}$$

Tällöin A_i voidaan samaistaa joukon $\Delta(A_i)$ osajoukoksi, joten siirtoprofiili a^* on pelin G Nashin tasapaino. Oletetaan sitten kääntäen, että a^* on pelin G Nashin tasapaino. Koska U_i on lineaarinen sekastrategioiden todennäköisyyksien joukossa, niin ei ole olemassa sellaista joukon A_i todennäköisyysjakaumaa, jossa pelaaja i saisi suuremman tuoton kuin sekastrategian $e(a_i^*)$ antama tuotto. Täten profiili $(e(a_i^*))$ on pelin G sekastrategian Nashin tasapaino.

Edellisessä kappaleessa siis väitettiin, että strategiapelin Nashin tasapainojen joukko on sen sekastrategioiden Nashin tasapainojen osajoukko. Edellisessä luvussa nähtiin, että on olemassa strategiapelejä, joiden Nashin tasapainojen joukko on tyhjä. On olemassa myös pelejä, joiden sekastrategioiden

Nashin tasapainojoukko on tyhjä. Kuitenkin, jos jokaisen pelaajan mahdollisten siirtojen joukko on äärellinen, on pelillä olemassa ainakin yksi sekastrategian Nashin tasapaino, kuten seuraava lause osoittaa. Lähteessä esitettyyn todistukseen [9, s. 33] on täydennetty perustelut sille, että joukko P_i on epätyhjä, konveksi ja kompakti jokaisella $i \in N$.

Lause 2.3. *Jokaisella äärellisellä strategiapelillä on olemassa sekastrategian Nashin tasapaino.*

Todistus. Olkoon $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ äärellinen strategiapeli ja merkitään $m_i = |A_i|$ jokaisella i. Tällöin pelaajan i sekastrategioiden joukko $\Delta(A_i)$ voidaan kirjoittaa vektorien $(p_1, \ldots, p_{m_i})$ joukkona, missä $p_k \geq 0$ jokaisella k ja $\sum_{k=1}^{m_i} p_k = 1$ (p_k on siis todennäköisyys, jolla pelaaja i käyttää k:nnetta puhdasta strategiaansa). Käytetään tälle joukolle merkintää P_i (jokaisella $i \in N$). Tämä joukko on epätyhjä, koska joukko A_i on epätyhjä jokaisella $i \in N$. P_i on konveksi, sillä jos $x = (p_{x_1}, \ldots, p_{x_{m_i}}), y = (p_{y_1}, \ldots, p_{y_{m_i}}) \in P_i$ ja $\lambda \in [0, 1]$, niin

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(p_{x_1}, \ldots, p_{x_{m_i}}) + (1-\lambda)(p_{y_1}, \ldots, p_{y_{m_i}}) \\ &= (\lambda p_{x_1} + (1-\lambda)p_{y_i}, \ldots, \lambda p_{x_{m_i}} + (1-\lambda)p_{y_{m_i}}). \end{aligned}$$

Nyt $\lambda p_{x_i} + (1-\lambda)p_{y_i} \geq 0$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, m_i\}$, sillä oletuksen mukaan $p_{x_i}, p_{y_i} \geq 0$ jokaisella i ja $\lambda \in [0, 1]$. Edelleen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_i} \lambda p_{x_i} + (1-\lambda)p_{y_i} &= \lambda \sum_{i=1}^{m_i} p_{x_i} + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m_i} p_{y_i} \\ &= \lambda + (1-\lambda) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Siispä $\lambda x + (1-\lambda)y \in P_i$. Joukko P_i on myös kompakti, sillä se on rajoitettu (P_i sisältyy origokeskiseen avoimeen kuulaan, jonka säde on suurempi kuin yksi) ja suljettu (joukon P_i kärkipisteiden $((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, 1))$ väliin jäävä $(p_{m_i} - 1)$-ulotteinen hypertaso sisältää reunapisteensä).

Jokaisen pelaajan odotettu tuotto (yhtälö (2.2.1)) on lineaarinen sekastrategioiden todennäköisyyksien joukossa, joten jokaisen pelaajan tuottofunktio on kvasikonkaavi (pelaajan omien strategioiden joukossa) sekä jatkuva. Täten pelin G sekalaajennus täyttää Lauseen 2.1 vaatimukset, joten väite seuraa tästä. □

Seuraava aputulos voi olla käytännöllinen laskettaessa sekastrategian Nashin tasapainoja.

Apulause 2.3. *Olkoon $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ äärellinen strategiapeli. Tällöin $\alpha^* \in \times_{i \in N} \Delta(A_i)$ on G:n sekastrategian Nashin tasapaino, jos ja vain jos jokaisen pelaajan $i \in N$ jokainen puhdas strategia, joka kuuluu α_i^*:n tukijoukkoon on parassiirto sekastrategiaprofiiliin α_{-i}^*.*

Todistus. "$\Rightarrow$"(Kontrapositiolla.) Oletetaan, että on olemassa siirto a_i α_i^*:n tukijoukossa (toisin sanoen $\alpha_i^*(a_i) > 0$), mikä ei ole parassiirto sekastrategiaprofiiliin α_{-i}^*. Tällöin U_i:n lineaarisuudesta seuraa, että pelaaja i voi lisätä tuottoaan lisäämällä siirron a_i todennäköisyyden jonkin sellaisen siirron todennäköisyyteen, mikä on parassiirto profiiliin α_{-i}^*. Täten α_i^* ei ole parassiirto vastauksena sekastrategiaprofiiliin α_{-i}^*, eikä tällöin α^* ole G:n sekastrategian Nashin tasapaino.

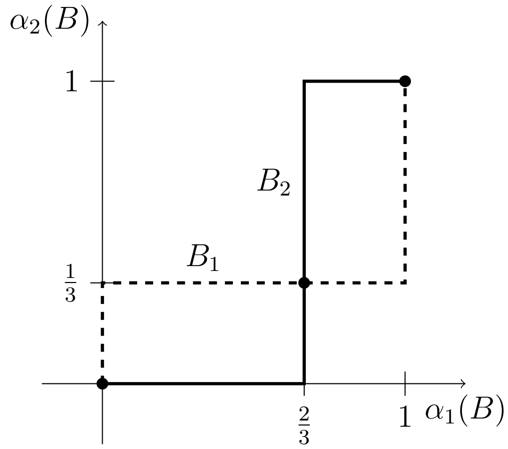
"$\Leftarrow$"(Kontrapositiolla.) Oletetaan sitten, että on olemassa sekastrategia α_i', jonka odotettu tuotto on suurempi kuin α_i^*:n vastauksena sekastrategiaprofiiliin α_{-i}^*. Tällöinkin U_i:n lineaarisuudesta seuraa, että on olemassa vähintään yksi siirto α_i':n tukijoukossa, mikä antaa suuremman tuoton kuin jokin siirto α_i^*:n tukijoukossa, joten kaikki siirrot α_i^*:n tukijoukossa eivät voi olla parassiirtoja profiiliin α_{-i}^*. $\square$

Apulauseesta seuraa, että jokainen siirto, joka kuuluu pelaajan tasapainosekastrategian tukijoukkoon, antaa saman tuoton. Huomaa, että tämä tulos pätee ainoastaan äärelliselle strategiapelille ja että sekastrategioiden tasapainoja etsittäessä on oleellista, että pelaajien preferenssit voidaan esittää tuottofunktioiden avulla. Edellä esitetyt tulokset eivät välttämättä päde muihin päätöksenteko-ongelmateorioihin.

Seuraava esimerkki havainnollistaa kuinka äärellisen pelin sekastrategian Nashin tasapainon voi löytää.

Esimerkki 2.6. Tarkastellaan peliä BvS (vrt. Esimerkki 2.1). Kuten aiemmin osoitettiin, pelissä BvS on kaksi puhdasta Nashin tasapainoa: (B, B) ja (S, S), missä B=*Bach* ja S=*Stravinsky*. Oletetaan, että (α_1, α_2) on tämän pelin sekastrategian Nashin tasapaino. Jos $\alpha_1(B)$ on nolla tai yksi, saadaan nämä kaksi edellä mainittua puhdasta Nashin tasapainoa. Jos $0 < \alpha_1(B) < 1$, niin Apulauseesta 2.3 seuraa, että pelaajan 1 siirrot B ja S antavat saman tuoton, joten on oltava $2\alpha_2(B) = \alpha_2(S)$ ja edelleen $\alpha_2(B) = \frac{1}{3}$. Samasta tuloksesta seuraa, että jos $0 < \alpha_2(B) < 1$, niin pelaajan 2 siirrot B ja S antavat välttämättä saman tuoton, joten on oltava $\alpha_1(B) = 2\alpha_1(S)$, josta $\alpha_1(B) = \frac{2}{3}$. Siispä pelin ainoa sekastrategian Nashin tasapaino on $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$. Tällä sekastrategiaprofiililla pelaajien odotettu tuottoprofiili on $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, sillä yhtälön (2.2.1) nojalla pelaajan 1 odotettu tuotto on

$$
\begin{aligned}
\sum_{a \in A} \Big(\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j) \Big) \cdot u_1(a) = \quad & \alpha_1(B) \cdot \alpha_2(B) \cdot u_1(B, B) \\
& + \alpha_1(B) \cdot \alpha_2(S) \cdot u_1(B, S) \\
& + \alpha_1(S) \cdot \alpha_2(S) \cdot u_1(S, S) \\
& + \alpha_1(S) \cdot \alpha_2(B) \cdot u_1(S, B) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$



Kuva 2.1: Pelaajien parassiirtofunktiot strategiapelin BvS sekalaajennuksessa. Pelaajan 1 parassiirtofunktio on piirretty katkoviivalla ja pelaajan 2 yhtenäisellä viivalla. Pisteet kuviossa ilmaisevat kahta puhtaan strategian Nashin tasapainoa sekä yhtä sekastrategian Nashin tasapainoa.

Vastaavasti myös pelaajan 2 odotettu tuotto on $\frac{2}{3}$.

Tämä esimerkki havainnollistaa pelaajien parassiirtofunktioiden konstruoimista pelien sekalaajennuksissa. Jos $0 \leq \alpha_2(B) < \frac{1}{3}$, niin pelaajan 1 yksikäsitteisellä parassiirrolla sekastrategiassa α_1, $\alpha_1(B) = 0$. Vastaavasti, jos $\frac{1}{3} < \alpha_2(B) \leq 1$, niin pelaajan 1 yksikäsitteisellä parassiirrolla $\alpha_1(B) = 1$. Jos $\alpha_2(B) = \frac{1}{3}$, niin kuten näimme, kaikki pelaajan 1 sekastrategiat ovat parassiirtoja. Vastaavilla laskuilla pelaajalle 2 saadaan kuvassa 2.1 esitetyn kuvion mukaiset parassiirtofunktiot.

	Bach	*Stravinsky*
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

Taulukko 2.7: Strategiapeli BvS. (Esimerkki 2.6.)

Kommentteja sekastrategian Nashin tasapainosta

Käyttäessään sekastrategiaa pelaaja siis harkitusti satunnaistaa käyttäytymistään. Valitessaan sekastrategian pelaaja sitoutuu tilanteeseen, jossa hänen mahdollisten siirtojensa joukosta valitaan, tiettyjen todennäköisyyksien mukaan, satunnaisesti hänen siirtonsa [9, s. 37]. Kun kaikki pelaajat ovat valinneet sekastrategiansa, pelin lopullinen siirtoprofiili realisoituu. Siis sekastrategisissa peleissä pelaaja i valitsee alkion joukosta $\Delta(A_i)$ samaan tapaan kuin hän valitsee alkion joukosta A_i strategiapeleissä, jotka esiteltiin aiemmin.

Peliteoriassa esiintyy usein tilanteita, joissa pelaaja haluaa satunnaistaa käyttäytymistään. Esimerkiksi pokerissa pelaajat satunnaisesti bluffaavat, verottaja voi tehdä verotarkastuksen satunnaiselle henkilölle ja kaupat voivat tarjota satunnaisesti alennuksia. Peliteoriassa kuitenkin kiistellään siitä, pitäisikö sekastrategian tasapainon käsite ottaa kantaa siihen, miksi pelaajat satunnaistavat käyttäytymistään. Yleensä pelaajat yrittävät vaikuttaa muiden pelaajien käyttäytymiseen satunnaistamalla omaa käyttäytymistään. Esimerkiksi "kolikonheitto" -pelissä (Esimerkki 2.5) pelaaja valitsee siirtonsa sen perusteella, minkä siirron hän arvelee toisen pelaajan valitsevan. Arvaaminen taas on psykologinen toiminto, joka on kaikkea muuta kuin satunnaista.

Strategiapelin Nashin tasapainossa oletettiin, että pelaajat jättävät huomiotta strategiset yhteydet, joita pelien välillä voi esiintyä. Sekastrategian Nashin tasapainon voi tulkita vastaavasti satunnaisena vakaana tilana. Pelaajat voivat olla tietoisia frekvensseistä, joilla muut pelaajat ovat valinneet siirtojaan aiemmin vastaavissa tilanteissa ja käyttää näitä tietoja oman strategian laatimiseen. Tasapainotilanteessa nämä frekvenssit pysyvät vakiona ja sekastrategian tasapaino määräytyykin frekvensseistä, joilla pelaajat ovat valinneet siirtojaan pitkällä aikavälillä.

2.2.2 Korreloiva tasapaino

Bayesin peleissä (s. 17) pelaajien "luonnosta" vastaanottamat signaalit olivat henkilökohtaisia ja riippumattomia. Mutta mitä tapahtuisi, jos näin ei olisikaan? Tarkastellaan peliä BvS, jossa kumpikin pelaaja havaitsee satunnaismuuttujan, joka saa arvokseen joko x tai y, kummankin todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Tällöin pelissä on olemassa uusi tasapainotila, jossa kumpikin pelaaja valitsee *Bachin*, jos satunnaismuuttujan realisaatio on x ja *Stravinskyn*, jos realisaatio on y. Kun kummankin pelaajan havaitsema informaatio tiedetään, voi pelaaja valita siirtonsa optimaalisesti: jos satunnaismuuttujan realisaatio on x, pelaaja tietää, että toinen pelaaja valitsee *Bachin*, joten hänen optimaalinen valintansa on myös *Bach*. Vastaavasti optimivalinta on *Stravinsky*, jos realisaatio on y.

Edellisessä esimerkissä pelaajat havaitsivat saman satunnaismuuttujan realisaation. Yleisesti pelaajien informaatiot satunnaismuuttujasta voivat olla epätäydellisesti korreloivia [9, s. 44]. Tarkastellaan esimerkkiä, jossa satunnaismuuttuja saa arvon x, y tai z. Pelaaja 1 tietää, että satunnaismuuttujan realisaatio on joko x tai että se kuuluu joukkoon $\{y, z\}$, kun taas pelaaja 2 tietää, että se joko kuuluu joukkoon $\{x, y\}$ tai on z. Tällöin sanotaan, että pelaajan 1 *informaatio-ositus* on $\{\{x\}, \{y, z\}\}$ ja vastaavasti pelaajan 2 informaatio-ositus on $\{\{x, y\}, \{z\}\}$. Näiden oletusten vallitessa pelaajan 1 strategia koostuu kahdesta siirrosta: siirrosta, jonka han valitsee kun satunnaismuuttujan realisaatio on x ja siirrosta, jonka hän valitsee kun realisaatio on joukon $\{y, z\}$ alkio. Vastaavasti pelaajan 2 strategia määrittää kaksi siirtoa: siirron, joka vastaa joukkoa $\{x, y\}$ ja siirron, joka vastaa realisaatiota z.

Kun toisen pelaajan strategia tiedetään, pelaajan strategia on optimaalinen, jos millään hänen informaatio-osituksen realisaatiolla pelaaja ei pysty saavuttamaan suurempaa tuottoa kuin noudattamalla kyseistä strategiaa. Tätä informaation käyttöä optimaalisen siirron valinnassa voi havainnollistaa esimerkillä, jossa satunnaismuuttujan realisaatioiden y ja z todennäköisyydet ovat p ja q ja pelaajan 2 strategia on valita siirto a_2, jos hän tietää, että realisaatio kuuluu joukkoon $\{x, y\}$ ja b_2, jos hän tietää, että realisaatio on z. Tällöin, jos pelaaja 1 tietää, että joko y tai z on realisoitunut, hän valitsee siirron, joka on optimaalinen ottaen huomioon, että pelaaja 2 valitsee siirron a_2 todennäköisyydellä $\frac{p}{(p+q)}$ ja siirron b_2 todennäköisyydellä $\frac{q}{(p+q)}$.

Nämä esimerkit johtavat korreloivan tasapainon täsmälliseen määritelmään.

Määritelmä 2.9. Strategiapelin $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ *korreloiva tasapaino* koostuu

- äärellisestä todennäköisyysavaruudesta (Ω, π), missä Ω on luonnontilojen joukko ja π on Ω:n todennäköisyysjakauma
- jokaisen pelaajan $i \in N$ Ω:n *informaatio-osituksesta* $\mathcal{P}_i$
- jokaisen pelaajan $i \in N$ *strategiafunktiosta* $\sigma_i : \Omega \to A_i$, jolla $\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega')$, jos $\omega, \omega' \in P$ jollakin $P \in \mathcal{P}_i$.

Lisäksi jokaisella kuvauksella $\tau_i : \Omega \to A_i$ $(i \in N)$, jolla $\tau_i(\omega) = \tau_i(\omega')$ aina, kun $\omega, \omega' \in P$ jollakin $P \in \mathcal{P}_i$, pätee

$$\sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega)u_i(\sigma_{-i}(\omega), \sigma_i(\omega)) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega)u_i(\sigma_{-i}(\omega), \tau_i(\omega)). \tag{2.2.2}$$

Strategiapelin korreloivalle tasapainolle käytetään merkintää $\langle(\Omega, \pi), (\mathcal{P}_i), (\sigma_i)\rangle$. Huomaa, että epäyhtälö (2.2.2) on ekvivalentti vaatimuksen kanssa, jossa jokaisella luonnontilalla ω, joka tapahtuu positiivisella todennäköisyydellä, siirto $\sigma_i(\omega)$ on optimaalinen, kun tiedetään muiden pelaajien strategiat sekä pelaajan i uskomus luonnontilasta ω.

Seuraava tulos osoittaa, että korreloivien tasapainojen joukko sisältää sekastrategioiden Nashin tasapainojen joukon.

Lause 2.4. *Olkoon $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ äärellinen strategiapeli ja α sen sekastrategian Nashin tasapaino. Tällöin on olemassa korreloiva tasapaino $\langle(\Omega, \pi), (\mathcal{P}_i), (\sigma_i)\rangle$, jossa jokaisen pelaajan $i \in N$ σ_i:n indusoima joukon A_i jakauma on α_i.*

Todistus. Olkoon $\Omega = A = \times_{j \in N} A_j$ ja määritellään $\pi(a) = \prod_{j \in N} \alpha_j(a_j)$. Olkoon lisäksi jokaisella $i \in N$ ja $b_i \in A_i$: $P_i(b_i) = \{a \in A : a_i = b_i\}$ ja koostukoon pelaajan i informaatio-ositus $\mathcal{P}_i$ joukoista $P_i(b_i)$ (joita $|A_i|$ kappaletta). Määritellään vielä σ asettamalla $\sigma_i(a) = a_i$ jokaisella $a \in A$. Tällöin $\langle(\Omega, \pi), (\mathcal{P}_i), (\sigma_i)\rangle$ on korreloiva tasapaino, sillä epäyhtälö (2.2.2) on voimassa jokaisella strategiafunktiolla τ_i: epäyhtälön vasen puoli on pelaajan i tuotto sekastrategian Nashin tasapainoprofiililla α ja oikea puoli on pelaajan i tuotto kun hän käyttää sekastrategiaa, jossa hän valitsee siirron $\tau_i(a)$ todennäköisyydellä $\alpha_i(a_i)$ ja muut pelaajat $j \in N$ noudattavat sekastrategiaa α_j. Edelleen σ_i:n indusoima joukon A_i jakauma on α_i. $\square$

Seuraava esimerkki on täsmällisempi esitys esimerkistä, jolla tämä luku aloitettiin.

Esimerkki 2.7. Pelin BvS kolme sekastrategian Nashin tasapainon tuottoprofiilia ovat $(2, 1)$, $(1, 2)$ ja $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Olkoot $\Omega = \{x, y\}$, $\pi(x) = \pi(y) = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \{\{x\}, \{y\}\}$, $\sigma_i(x)$=*Bach* ja $\sigma_i(y)$=*Stravinsky*, kun $i = 1, 2$. Tällöin yksi tämän pelin korreloiva tasapaino johtaa tuottoprofiiliin $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, sillä epäyhtälön (2.2.2) nojalla pelaajan 1 odotettu tuotto on

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \cdot u_1(\sigma_2(\omega), \sigma_1(\omega)) &= \pi(x) \cdot u_1(\sigma_2(x), \sigma_1(x)) \\
&+ \pi(y) \cdot u_1(\sigma_2(y), \sigma_1(y)) \\
&= \pi(x) \cdot u_1(Bach, Bach) \\
&+ \pi(y) \cdot u_1(Stravinsky, Stravinsky) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Vastaavalla laskulla havaitaan, että myös pelaajan 2 odotettu tuotto tässä pelissä on $\frac{3}{2}$. Tämän tasapainotilan voi tulkita kolikonheittona, jossa kumpikin pelaaja havaitsee kolikonheiton tuloksen ja määrittää sen perusteella kumman puhtaan Nashin tasapainostrategian hän valitsee.

Lause 2.5. *Olkoon $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ strategiapeli. Tällöin jokainen konveksi kombinaatio G:n korreloivien tasapainojen tuottoprofiileista on G:n korreloivan tasapainon tuottoprofiili.*

Todistus. Olkoot $u^1, \ldots, u^K$ korreloivan tasapainon tuottoprofiileja ja olkoon $(\lambda^1, \ldots, \lambda^K) \in \mathbb{R}^K$ siten, että $\lambda^k \geq 0$ jokaisella k ja $\sum_{k=1}^K \lambda^k = 1$. Olkoon sitten jokaisella k:n arvolla $\langle(\Omega^k, \pi^k), (\mathcal{P}_i^k), (\sigma_i^k)\rangle$ korreloiva tasapaino, joka johtaa tuottoprofiiliin u^k. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että joukot Ω^k ovat erillisiä. Määritellään $\Omega = \bigcup_k \Omega^k$ ja että jokaisella $\omega \in \Omega$: $\pi(\omega) = \lambda^k \pi^k(\omega)$, missä k on sellainen, että $\omega \in \Omega^k$. Olkoon vielä $\mathcal{P}_i = \bigcup_k \mathcal{P}_i^k$ jokaisella $i \in N$ ja määritellään, että $\sigma_i(\omega) = \sigma_i^k(\omega)$, missä k on sellainen,

	L	R
T	6,6	2,7
B	7,2	0,0

	L	R
T	y	z
B	x	-

Taulukko 2.8: Esimerkki korreloivasta tasapainosta. (Esimerkki 2.8.)

että $\omega \in \Omega^k$. Tällöin $\sum_{k=1}^{K} \lambda^k u^k$ on konveksi kombinaatio G:n korreloivien tasapainojen tuottoprofiileista ja $\langle(\Omega, \pi), (\mathcal{P}_i), (\sigma_i)\rangle$ on korreloiva tasapaino, jonka tuottoprofiili on $\sum_{k=1}^{K} \lambda^k u^k$. $\square$

Esimerkki 2.8. Tarkastellaan peliä, joka on esitetty taulukossa 2.8. Tämän pelin Nashin tasapainojen tuottoprofiilit ovat $(2, 7)$ ja $(7, 2)$ (puhtailla strategioilla) ja $(4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3})$ (sekastrategialla). (Apulauseesta 2.3 seuraa, että pelin ainoa sekastrategian Nashin tasapaino on $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$ ja edelleen yhtälöstä (2.2.1) seuraa, että tämän tasapainon tuottoprofiili on $(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0, \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0) = (4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3})$.) Näiden tuottoprofiilien rajaama alue tasossa on konveksi. Seuraava korreloivan tasapainon tuottoprofiili rajaa yhdessä kolmen edellisen tuottoprofiilin kanssa tasoalueen, joka ei ole konveksi. Olkoon $\Omega = \{x, y, z\}$ ja $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = \frac{1}{3}$. Olkoon pelaajan 1 informaatio-ositus $\{\{x\}, \{y, z\}\}$ ja pelaajan 2 $\{\{x, y\}, \{z\}\}$. Määritellään pelaajien strategiat seuraavasti: $\sigma_1(x) = B$ ja $\sigma_1(y) = \sigma_1(z) = T$; $\sigma_2(x) = \sigma_2(y) = L$ ja $\sigma_2(z) = R$ (luonnontilojen ja valintojen välistä yhteyttä on havainnollistettu oikean puoleisessa taulukossa). Tällöin pelaajan 1 käyttäytyminen on optimaalista, kun pelaajan 2 informaatio-ositus tunnetaan: luonnontilassa x pelaaja 1 tietää, että pelaaja 2 valitsee siirron L ja täten hänen on optimaalista valita siirto B, luonnontiloissa y ja z pelaaja 1 olettaa, että pelaaja 2 liittää yhtä suuret todennäköisyydet siirtoihin L ja R, joten hänen on optimaalista valita siirto T. Vastaavasti pelaajan 2 käyttäytyminen on optimaalista, kun pelaajan 1 informaatio-ositus tiedetään. Siispä edellinen konstruktio tuottaa korreloivan tasapainon, jonka tuottoprofiili on $(5, 5)$.

2.3 Rationaalisuus ja dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio

Tässä luvussa tarkastellaan pelejä, joissa vaaditaan pelaajien olettavan siirtoa tehdessään, että muut pelaajat käyttäytyvät rationaalisesti [9, Luku 4]. Pelaajat siis valitsevat optimaalisen siirron sillä oletuksella, että muut pelaajat toimivat samoin. Edelleen jokainen pelaaja olettaa, että muut pelaajat ovat rationaalisia; jokainen pelaaja olettaa, että muut pelaajat olettavat muiden pelaajien olevan rationaalisia, ja niin edelleen.

2.3.1 Rationaalisuus

Edellisissä luvuissa tarkasteltiin strategiapelejä, joissa oletettiin pelaajien valintojen olevan optimaalisia, missä nämä valinnat perustuivat pelaajien uskomuksiin muiden pelaajien käyttäytymisestä. Toisin sanoen edellisten lukujen peleissä oletettiin pelaajien tuntevan muiden pelaajien käyttäytymisen tasapainotilassa. Jos pelaajat osallistuvat toistuvasti samankaltaisiin tilanteisiin, voivat he muodostaa havainnoistaan tarvittavan informaation muiden pelaajien käyttäytymisestä vakaassa tasapainotilassa. Kuitenkin peleissä, jotka tapahtuvat ainoastaan kerran ja joissa pelaajat valitsevat siirtonsa yhtäaikaisesti, voi olla epäselvää miten pelaajat olettavat muiden pelaajien käyttäytyvän tasapainotilassa. Tätä varten peliteoreetikot ovat kehittäneet ratkaisukonseptin, joka ei sisällä oletusta, että pelaajat tietävät toisten pelaajien käyttäytymismallit tasapainotilassa.

Tässä luvussa tarkastellaan ratkaisukonseptia, jossa pelaajien uskomukset muiden pelaajien siirroista voivat olla vääriä, mutta silti nämä uskomukset on muodostettu rationaalisesti. Jokainen pelaaja olettaa, että muiden pelaajien valitsemat siirrot ovat parassiirtoja jonkin uskomuksen mukaan. Edelleen jokainen pelaaja olettaa, että kaikki muut pelaajat olettavat samoin ja täten jokainen pelaaja olettaa, että kaikki muut pelaajat olettavat, että jokaisen muun pelaajan siirto on parassiirto jonkin uskomuksen mukaan, ja niin edelleen [9, s. 53].

Tämä ratkaisukonsepti on heikompi kuin Nashin tasapaino. Itse asiassa useissa peleissä tämä ratkaisukonsepti ei poista yhtään siirtoa muiden pelaajien mahdollisista siirroista. Kuitenkin tämä lähestymistapa on mielenkiintoinen, sillä siinä tutkitaan loogisia seurauksia pelaajien informaatioiden oletuksista.

Olkoon $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ strategiapeli, missä tuottofunktio u_i ilmaisee pelaajan i preferenssit pelin lopputulosten joukossa $A = \times_{j\in N} A_j$. Tämän luvun peleissä ei ole oleellista olettaa, että pelaajien mahdollisten siirtojen joukot A_i $(i \in N)$ olisivat äärellisiä. Yksinkertaisuuden vuoksi näin kuitenkin tehdään osassa tämän luvun peleistä. Pelaajan i *uskomus* muiden pelaajien siirroista on joukon $A_{-i} = \times_{j\in N\setminus\{i\}} A_j$ todennäköisyysjakauma. Huomaa, että tämä uskomuksen määritelmä sallii pelaajan olettavan, että toisten pelaajien valinnat ovat riippuvia: uskomus ei siis välttämättä ole tulo riippumattomista todennäköisyysjakaumista joukoissa A_j, missä $j \in N\setminus\{i\}$. Kuten aiemminkin, pelaajan i siirto $a_i \in A_i$ on *parassiirto* jollakin uskomuksella, jos ei ole olemassa siirtoa, joka antaisi pelaajalle suuremman tuoton tällä samalla uskomuksella. Tässä luvussa usein toistuvalla fraasilla "pelaaja i olettaa, että pelaaja j on rationaalinen" tarkoitetaan, että pelaaja i olettaa, että minkä tahansa siirron pelaaja j valitseekin, on se siirto parassiirto jollakin pelaajan j uskomuksella.

Jos pelaaja i olettaa, että muut pelaajat ovat rationaalisia, niin tällöin hän pystyy rationalisoimaan hänen uskomuksensa μ_i muiden pelaajien siirroista seuraavasti: jokainen, minkä tahansa pelaajan j valitsema siirto, johon pelaajan i uskomus μ_i liittää positiivisen todennäköisyyden, on oltava parassiirto jollakin pelaajan j uskomuksella. Edelleen, jos pelaaja i olettaa, että jokainen pelaaja $j \neq i$ olettaa, että jokainen pelaaja $h \neq j$ (mukaan lukien i) on rationaalinen, niin tällöin pelaajalla i on olemassa näkemys pelaajan j, pelaajan h uskomukseen liittyvästä näkemyksestä. Jos pelaajan i päättelykyky on rajaton, johtaa se seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 2.10. Siirto $a_i \in A_i$ on *rationaalinen* strategiapelissä $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$, mikäli on olemassa

- kokoelma $((X_j^t)_{j\in N})_{t=1}^{\infty}$ joukkoja, joilla $X_j^t \subseteq A_j$ jokaisella j ja jokaisella luvulla t
- pelaajan i uskomus μ_i^1, jonka tukijoukko on joukon X_{-i}^1 osajoukko
- jokaisella $j \in N$, $t \geq 1$ ja $a_j \in X_j^t$ pelaajan j uskomus $\mu_j^{t+1}(a_j)$, jonka tukijoukko on joukon X_{-j}^{t+1} osajoukko

siten, että

1. pelaajan i siirto a_i on parassiirto uskomuksella μ_i^1
2. $X_i^1 = \emptyset$ ja jokaisella $j \in N\backslash\{i\}$ joukko X_j^1 koostuu kaikista siirroista $a_j' \in A_j$, joilla on olemassa uskomuksen μ_i^1 tukijoukkoon kuuluva sellainen siirtoprofiili a_{-i}, että $a_j = a_j'$
3. jokaisella pelaajalla $j \in N$ ja jokaisella $t \geq 1$ jokainen pelaajan j siirto $a_j \in X_j^t$ on parassiirto uskomuksella $\mu_j^{t+1}(a_j)$
4. jokaisella $t \geq 2$ ja $j \in N$ joukko X_j^t koostuu kaikista sellaisista siirroista $a_j' \in A_j$, joilla on olemassa pelaaja $k \in N\backslash\{j\}$, siirto $a_k \in X_k^{t-1}$ ja jokin uskomuksen $\mu_k^t(a_k)$ tukijoukkoon kuuluva sellainen siirtoprofiili a_{-k}, että $a_j' = a_j$.

Huomaa, että määritelmässä ainoastaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi joukko X_i^1 sisällytettiin kokoelmaan $((X_j^t)_{j\in N})_{t=1}^{\infty}$, vaikka se on tyhjä joukko. Jos $|N| \geq 3$, niin määritelmässä joukko X_i^1 on ainoa tarpeeton joukko, kun taas jos $|N| = 2$, on tarpeettomia joukkoja useita (X_i^t jokaisella parittomalla t ja X_j^t $(j \neq i)$ jokaisella parillisella t).

Määritelmässä joukko X_j^1 $(j \in N\backslash\{i\})$ on siis pelaajan j sellaisten siirtojen joukko, mihin pelaajan i (muiden pelaajien $j \neq i$ siirtoja koskeva) uskomus μ_i^1 liittää positiivisen todennäköisyyden. Jokaisella $j \in N$ joukko X_j^2 on pelaajan j sellaisten siirtojen a_j joukko, että on olemassa (jollakin pelaajalla $k \neq j$) vähintään yksi siirto $a_k \in X_k^1$, joka on parassiirto uskomuksella $\mu_k^2(a_k)$, joka liittää positiivisen todennäköisyyden siirtoon a_j.

Määritelmää voi havainnollistaa esimerkillä, jossa on kolme pelaajaa, joilla kaikilla on kaksi mahdollista siirtoa: A ja B. Oletetaan, että siirto A on rationaalinen pelaajalle 1 ja pelaajan 1 rationalisointiin käyttämä uskomus μ_1^1 liittää positiiviset todennäköisyydet pelaajien 2 ja 3 siirtopareihin (A, A) ja (B, B). Tällöin $X_2^1 = X_3^1 = \{A, B\}$. Pelaajan 2 uskomukset $\mu_2^2(A)$ ja $\mu_2^2(B)$, jotka oikeuttavat hänen valintansa A ja B, koskevat pelaajien 1 ja 3 siirtoja. Vastaavasti pelaajan 3 uskomukset $\mu_3^2(A)$ ja $\mu_3^2(B)$ koskevat pelaajien 1 ja 2 siirtoja. Näiden neljän uskomuksen ei tarvitse indusoida samaa uskomusta pelaajan 1 siirrosta, eikä näiden uskomuksien tarvitse liittää positiivista todennäköisyyttä siirtoon A. Joukko X_1^2 koostuu kaikista pelaajan 1 siirroista, joihin $\mu_2^2(A)$, $\mu_3^2(A)$, $\mu_2^2(B)$ tai $\mu_3^2(B)$ liittää positiivisen todennäköisyyden.

Rationaalisuuden määritelmä (Määritelmä 2.10) on ekvivalentti seuraavan määritelmän kanssa.

Määritelmä 2.11. Strategiapelissä $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ siirto $a_i \in A_i$ on *rationaalinen*, jos jokaisella $j \in N$ on olemassa sellainen joukko $Z_j \subseteq A_j$, että

- $a_i \in Z_i$
- jokainen siirto $a_j \in Z_j$ on pelaajan j parassiirto uskomuksella $\mu_j(a_j)$, jonka tukijoukko on joukon Z_{-j} osajoukko.

Huomaa, että jos $(Z_j)_{j\in N}$ ja $(Z'_j)_{j\in N}$ täyttävät määritelmän ehdot, niin myös joukko $(Z_j \cup Z'_j)_{j\in N}$ täyttää ne, joten rationaalisien siirtojen profiili on suurin sellainen joukko $\times_{j\in N} Z_j$, että $(Z_j)_{j\in N}$ toteuttaa määritelmän ehdot.

Apulause 2.4. *Määritelmät 2.10 ja 2.11 ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Jos siirto $a_i \in A_i$ on rationaalinen Määritelmän 2.10 mielessä, niin määritellään $Z_i = \{a_i\} \cup (\cup_{t=1}^{\infty} X_i^t)$ ja $Z_j = (\cup_{t=1}^{\infty} X_j^t)$ jokaisella $j \in N \backslash \{i\}$. Tällöin siirto $a_i \in A_i$ on rationaalinen myös Määritelmän 2.11 mielessä. Jos taas siirto $a_i \in A_i$ on rationaalinen Määritelmän 2.11 mielessä, niin määritellään $\mu_i^1 = \mu_i(a_i)$ ja $\mu_j^t(a_j) = \mu_j(a_j)$ jokaisella $j \in N$ ja $t \geq 2$. Tällöin Määritelmän 2.10 kohdissa (2) ja (4) määritellyt joukot X_j^t ovat (Määritelmän 2.11 mukaisen) joukon Z_j osajoukkoja ja ne toteuttavat myös Määritelmän 2.10 kohdat (1) ja (3). □

Määritelmästä 2.11 seuraa selvästi, että äärellisessä pelissä jokainen siirto, jota pelaaja käyttää positiivisella todennäköisyydellä jossakin sekastrategian Nashin tasapainossa, on rationaalinen (valitaan joukoksi Z_j pelaajan j Nashin tasapainosekastrategian tukijoukko). Seuraava tulos osoittaa, että tämä pätee myös siirroilla, joita pelaaja käyttää positiivisella todennäköisyydellä jossain korreloivassa tasapainossa.

Apulause 2.5. *Jokainen siirto, jota jokin pelaaja käyttää positiivisella todennäköisyydellä jossain äärellisen strategiapelin korreloivassa tasapainossa, on rationaalinen.*

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	$0,7$	$2,5$	$7,0$	$0,1$
a_2	$5,2$	$3,3$	$5,2$	$0,1$
a_3	$7,0$	$2,5$	$0,7$	$0,1$
a_4	$0,0$	$0,-2$	$0,0$	$10,-1$

Taulukko 2.9: Esimerkin 2.9 strategiapeli.

Todistus. Olkoon $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ strategiapeli ja olkoon jokaisella pelaajalla $i \in N$ Z_i niiden siirtojen joukko, joita pelaaja i käyttää positiivisella todennäköisyydellä jossain strategiapelin korreloivassa tasapainossa. Tällöin jokainen siirto $a_i \in Z_i$ on parassiirto joukon A_{-i} jakaumalla, jonka muodostaa muiden pelaajien $j \neq i$ strategiat, kun pelaaja i valitsee siirron a_i. Tällöin tämä joukon A_{-i} jakauman tukijoukko on joukon Z_{-i} osajoukko ja täten Määritelmästä 2.11 seuraa, että siirto $a_i \in A_i$ on rationaalinen. □

Vangin dilemmassa (Esimerkki 2.3) Nashin tasapainosiirto *tunnustaa* on rationaalinen. Kaikissa muissa luvun 2.1.3 esimerkeissä kummankin pelaajan kummatkin siirrot ovat rationaalisia, sillä jokaisessa tapauksessa kumpaakin siirtoa käytetään positiivisella todennäköisyydellä jossakin Nashin sekastrategian tasapainossa. Täten rationaalisuus ei aseta rajoituksia näiden pelien mahdollisille lopputuloksille. Kuitenkin joissain peleissä rationaalisuus voi asettaa rajoituksia pelin lopputulosten joukolle, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 2.9. Tarkastellaan taulukon 2.9 peliä. Tässä pelissä pelaajan 1 rationaaliset siirrot ovat a_1, a_2 ja a_3 sekä pelaajan 2 rationaaliset siirrot ovat b_1, b_2 ja b_3 [10, s. 11]. Tämän pelin Nashin tasapaino on (a_2, b_2), joten selvästi siirrot a_2 ja b_2 ovat rationaalisia. Edelleen siirrot a_1, a_3, b_1 ja b_3 ovat rationaalisia, sillä siirto a_1 on parassiirto vastauksena siirtoon b_3, b_3 on parassiirto siirtoon a_3, a_3 on parassiirto siirtoon b_1 ja b_1 on parassiirto siirtoon a_1. Toisaalta siirto b_4 ei ole rationaalinen, sillä jos pelaajan 2 uskomus liittää siirtoon a_4 todennäköisyyden, joka on suurempi kuin $\frac{1}{2}$, niin siirto b_3 antaa pelaajalle 2 suuremman tuoton kuin siirto b_4. Jos taas pelaajan 2 uskomus liittää siirtoon a_4 todennäköisyyden, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin $\frac{1}{2}$, niin pelaaja 2 saavuttaa siirrolla b_2 suuremman tuoton kuin siirrolla b_4. Siirto a_4 ei myöskään ole rationaalinen, sillä siirto b_4 ei kuulu pelaajan 1 uskomuksen tukijoukkoon ja tällöin siirto a_4 on siirron a_2 dominoima.

Määritelmissä 2.10 ja 2.11 oletettiin, että pelaajan i uskomus muiden

	L	R		L	R		L	R		L	R
U	8	0	U	4	0	U	0	0	U	3	3
D	0	0	D	0	4	D	0	8	D	3	3
	M_1			M_2			M_3			M_4	

Taulukko 2.10: Kolmen pelaajan strategiapeli.

pelaajien siirroista on joukon A_{-i} todennäköisyysjakauma, joka sallii pelaajien olettavan, että heidän vastustajien siirrot voivat olla riippuvia. Usein kuitenkin kirjallisuudessa oletetaan, että jokaisen pelaajan uskomus on tulo riippumattomista todennäköisyysjakaumista, yksi jokaista vastustajaa kohden. Tämä rajoitus on tietenkin merkityksetön peleissä, joissa on vain kaksi pelaajaa. Oletus siitä, että uskomukset ovat tuloja riippumattomista todennäköisyysjakaumista on olennaista tarkasteltaessa sekastrategisia pelejä (ks. Luku 2.2). Rationaalisuuden määritelmä vaatii, että kaikilla rationalisoinnin tasoilla pelaajat ovat rationaalisia. Rationaalisuuden vaihtoehtoinen määritelmä vaatii lisäksi, että jokaisella rationalisoinnin tasolla uskomukset säilyttävät oletuksen riippumattomuudesta.

Sillä, että sallitaanko oletus muiden pelaajien siirtojen riippuvuudesta vai ei, voi olla hyvin erilaiset seuraukset kuten taulukon 2.10 peli osoittaa. Tässä pelissä on kolme pelaajaa; pelaaja 1 valitsee yhden kahdesta rivistä, pelaaja 2 valitsee yhden kahdesta sarakkeesta ja pelaaja 3 valitsee yhden neljästä taulukosta. Kaikki kolme pelaajaa saavat saman tuoton, jonka taulukoiden luvut osoittavat. Osoitetaan, että pelaajan 3 siirto M_2 on rationaalinen Määritelmien 2.10 ja 2.11 mukaan, missä pelaaja voi olettaa, että hänen vastustajien siirrot ovat korreloivia, mutta siirto ei ole rationaalinen, jos pelaajien uskomukset rajoitetaan olevan tuloja riippumattomista todennäköisyysjakaumista.

Tässä pelissä pelaajan 1 siirto U on parassiirto uskomuksella, joka liittää todennäköisyyden yksi siirtopariin (L, M_2) ja siirto D on parassiirto uskomuksella, joka liittää todennäköisyyden yksi siirtopariin (R, M_2). Vastaavasti molemmat pelaajan 2 siirrot ovat parassiirtoja uskomuksilla, jotka liittävät positiivisen todennäköisyyden ainoastaan siirtoihin U ja D sekä siirtoon M_2. Edelleen pelaajan 3 siirto M_2 on parassiirto uskomuksella, jonka mukaan pelaajat 1 ja 2 pelaavat yhtä suurella todennäköisyydellä siirtoparit (U, L) ja (D, R). Täten pelaajan 3 siirto M_2 on rationaalinen (Määritelmässä 2.11 valitaan $Z_1 = \{U, D\}$, $Z_2 = \{L, R\}$ ja $Z_3 = \{M_2\}$). Kuitenkaan siirto M_2 ei ole parassiirto vastauksena mihinkään pelaajien 1 ja 2 (riippumattomiin) sekastrategiohin ja täten se ei ole rationaalinen muokatun määritelmän mukaan, missä pelaajien uskomuksien rajoitettiin olevan tuloja riippumattomista todennäköisyysjakaumista. (Jotta M_2 olisi parassiirto, tulisi olla $4pq+4(1-p)(1-q) \geq \max\{8pq, 8(1-p)(1-q), 3\}$, missä $(p, 1-p)$ ja $(q, 1-q)$ ovat pelaajien 1 ja 2 sekastrategiat, mutta tämä epäyhtälö ei ole voimassa millään p:n ja q:n arvoilla.)

2.3.2 Vahvasti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä

Kuten rationaalisuudessa, tässäkin luvussa esiteltävässä ratkaisukonseptissa [9, s. 58] tarkastellaan pelejä yksittäisen pelaajan näkökulmasta. Jokainen pelaaja valitsee siirtonsa laskelmiensa pohjalta, jotka eivät välttämättä sisällä informaatiota muiden pelaajien valitsemista siirroista. Tämän ratkaisukonseptin määrittely aloitetaan eliminoimalla siirrot, joita pelaajan ei tulisi missään tapauksessa valita. Erityisesti monimutkaisissa peleissä on helppo olettaa, että pelaajat haluaisivat yksinkertaistaa kohtaamiansa päätöksentekoongelmia ja tähän keinon tarjoaa dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä.

Oletetaan, että pelaajat eivät edes harkitse valitsevansa siirtoja, jotka eivät ole parassiirtoja missään tapauksessa. Pelaaja, joka tietää, että muut pelaajat ovat rationaalisia, voi olettaa että muut pelaajat eivät myöskään harkitse valitsevansa siirtoja, jotka eivät ole parassiirtoja missään tapauksessa. Tarkastellaan peliä G', joka saadaan alkuperäisestä pelistä G eliminoimalla edellä mainitut siirrot. Siis pelaajan, joka tietää muiden pelaajien olevan rationaalisia, ei tulisi valita siirtoa, joka ei missään tapauksessa ole parassiirto pelissä G'. Edelleen pelaaja, joka tietää muiden pelaajien tietävän, että hän on rationaalinen, voi olettaa, että muut pelaajat eivät myöskään valitse siirtoa, joka ei missään tapauksessa ole parassiirto pelissä G'. Samalla tavoin jatkamalla voidaan siis väittää, että pelin G lopputuloksen on selvitettävä rajoittamattomasta määrästä tällaisia eliminaatiokierroksia. Seuraavaksi esitellään tämä idea formaalisti ja osoitetaan, että se on ekvivalentti rationaalisuuden käsitteen kanssa.

Ei koskaan -parassiirto

Määritelmä 2.12. Strategiapelissä pelaajan $i \in N$ siirto $a_i \in A_i$ on *ei koskaan -parassiirto* (EKP), jos se ei ole parassiirto millään pelaajan i uskomuksella.

Selvästi siirto, joka on EKP, ei ole rationaalinen (Määritelmien 2.10 ja 2.11 mielessä). Jos pelaajan i siirto a_i on EKP, niin tällöin jokaisella pelaajan i uskomuksella on olemassa *jokin* siirto, joka on parempi pelaajalle i kuin siirto a_i. Vahvasti dominoitujen siirtojen määrittelyn jälkeen osoitetaan, että jos siirto a_i on EKP äärellisessä strategiapelissä, niin tällöin on olemassa sekastrategia, joka on pelaajalle i parempi vaihtoehto kuin siirto a_i riippumatta pelaajan i uskomuksesta.

Määritelmä 2.13. Olkoon $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ strategiapeli. Pelaajan i siirto $a_i \in A_i$ on *vahvasti dominoitu* pelissä G, jos on olemassa pelaajan i sekastrategia α_i, jolla $U_i(a_{-i}, \alpha_i) > u_i(a_{-i}, a_i)$ jokaisella $a_{-i} \in A_{-i}$, missä $U_i(a_{-i}, \alpha_i)$ on pelaajan i odotettu tuotto, kun hän käyttää sekastrategiaa α_i ja muiden pelaajien $(j \neq i)$ siirtoprofiili on a_{-i}.

Itse asiassa äärellisessä strategiapelissä siirto on EKP, jos ja vain jos se on vahvasti dominoitu.

Apulause 2.6. *Äärellisessä strategiapelissä G siirto on EKP, jos ja vain jos se on vahvasti dominoitu.*

Todistus. Olkoon $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ äärellinen strategiapeli ja olkoon $a_i^* \in A_i$. Johdetaan lisäksi pelistä G nollasummapeli G' (ks. Määritelmä 2.4), missä pelaajan 1 mahdollisten siirtojen joukko on $A_i \backslash \{a_i^*\}$ ja pelaajan 2 siirtojen joukko on $A_{-i} = \times_{j \in N \backslash \{i\}} A_j$. Määritellään pelaajan 1 preferenssit (pelissä G') tuottofunktion v_1 avulla siten, että $v_1(a_i, a_{-i}) = u_i(a_{-i}, a_i) - u_i(a_{-i}, a_i^*)$. Huomaa, että tässä merkinnällä (a_i, a_{-i}) viitataan siirtopariin pelissä G', kun taas merkinnöillä (a_{-i}, a_i) ja (a_{-i}, a_i^*) viitataan pelin G siirtoprofiileihin. Lisäksi merkitään, että $v_1(m_1, m_2)$ on pelaajan 1 odotettu tuotto jokaisella pelin G' sekastrategiaprofiililla (m_1, m_2).

Siirto a_i^* on EKP pelissä G, jos ja vain jos jokaista pelaajan 2 sekastrategiaa (pelissä G') kohti on olemassa pelaajan 1 siirto, jolla pelaajan 1 tuotto on positiivinen. Toisin sanoen, jos ja vain jos $\min_{m_2} \max_{a_i} v_1(a_i, m_2) > 0$. Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että $\min_{m_2} \max_{m_1} v_1(m_1, m_2) > 0$ (sillä odotettu tuotto v_1 on lineaarinen sekastrategioiden määrittämien todennäköisyyksien joukossa).

Lauseesta 2.3 seuraa, että pelillä G' on olemassa sekastrategian Nashin tasapaino (G oletuksen mukaan äärellinen, joten myös G' äärellinen). Edelleen Lauseen 2.2 kohdasta (2) (sovellettuna pelin G' sekalaajennukseen) seuraa, että $\min_{m_2} \max_{m_1} v_1(m_1, m_2) > 0$, jos ja vain jos $\max_{m_1} \min_{m_2} v_1(m_1, m_2) > 0$. Tämän kanssa yhtäpitävää on, että pelaajalla 1 on olemassa sekastrategia m_1^* pelissä G', jolla $v_1(m_1^*, m_2) > 0$ jokaisella m_2 (toisin sanoen jokaisella uskomuksella joukosta A_{-i}). Koska sekastrategia m_1^* on joukon $A_i \backslash \{a_i^*\}$ todennäköisyysjakauma, on se myös pelaajan i sekastrategia pelissä G (missä $m_1^*(a_i^*) = 0$). Ehto $v_1(m_1^*, m_2) > 0$ jokaisella m_2 on (v_1:n määritelmän perusteella) yhtäpitävää sen kanssa, että $U_i(a_{-i}, m_1^*) - U_i(a_{-i}, a_i^*) > 0$ jokaisella $a_{-i} \in A_{-i}$, joka on edelleen (Määritelmän 2.13 mukaan) yhtäpitävää sen kanssa, että siirto a_i^* on vahvasti dominoitu pelissä G.

□

	L	R
T	3,0	0,1
M	0,0	3,1
B	1,1	1,0

Taulukko 2.11: Kahden pelaajan strategiapeli. Ainoa pelaajan 1 rationaalinen siirto on M ja ainoa pelaajan 2 rationaalinen siirto on R. (Esimerkki 2.10.)

Vahvasti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä

Seuraavaksi esitetään formaalisti vahvasti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä [9, s. 60], jota jo edellä kuvailtiin.

Määritelmä 2.14. Äärellisen strategiapelin $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ lopputulosten joukko $X \subseteq A$ *jää jäljelle vahvasti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta*, jos $X = \times_{j\in N} X_j$ ja jokaisella $j \in N$ on olemassa kokoelma $((X_j^t)_{j\in N})_{t=0}^T$ joukkoja, jotka täyttävät seuraavat ehdot.

- $X_j^0 = A_j$ ja $X_j^T = X_j$.
- $X_j^{t+1} \subseteq X_j^t$ jokaisella $t = 0, \ldots, T-1$.
- Jokaisella $t = 0, \ldots, T-1$ jokainen pelaajan j siirto $a_j \in X_j^t \setminus X_j^{t+1}$ on vahvasti dominoitu pelissä $\langle N, (X_i^t), (u_i^t)\rangle$, missä u_i^t $(i \in N)$ on tuottofunktion u_i rajoittuma joukkoon $\times_{j\in N} X_j^t$.
- Mikään siirto $a_j \in X_j^T$ ei ole vahvasti dominoitu pelissä $\langle N, (X_i^T), (u_i^T)\rangle$.

Strategiapeleissä jokaisen pelaajan i mahdollisten siirtojen joukko A_i on epätyhjä, joten selvästi äärellisessä strategiapelissä tällainen lopputulosten joukko $X \subseteq A$, joka jää jäljelle vahvasti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta, on olemassa ja se on epätyhjä.

Esimerkki 2.10. Taulukon 2.11 pelissä pelaajan 1 siirtoa B dominoi sekastrategia, jossa käytetään kumpaakin siirtoa T ja M todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Siirron B eliminaation jälkeen pelaajan 2 siirto R dominoi siirtoa L. L:n eliminaation jälkeen pelaajan 1 siirto M dominoi siirtoa T. Siispä (M, R) on ainoa lopputulos, joka jää jäljelle vahvasti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta. Seuraava tulos osoittaa, että siirtoprofiili (M, R) on tämän pelin ainoa rationaalisten siirtojen profiili.

Seuraavaksi osoitetaan, että tällainen lopputulosten joukko, joka jää jäljelle vahvasti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta, on profiili rationaalisia siirtoja.

Lause 2.6. *Jos joukko $X = \times_{j \in N} X_j$ jää jäljelle vahvasti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta äärellisessä strategiapelissä $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$, niin X_j on pelaajan j rationaalisien siirtojen joukko jokaisella $j \in N$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että jokaisen pelaajan $i \in N$, jokainen rationaalinen siirto on joukon X_i alkio. Oletetaan, että siirto $a_i \in A_i$ on rationaalinen ja olkoon $(Z_j)_{j \in N}$ Määritelmän 2.11 mukainen joukkojen profiili, jonka mukaan siis siirto a_i on rationaalinen. Nyt $Z_j \subseteq X_j^t$ jokaisella t:n arvolla, sillä jokainen siirto joukossa Z_j on parassiirto jonkin joukossa Z_{-j} määritellyn uskomuksen mukaan ja täten Apulauseen 2.6 mukaan mikään siirto joukossa Z_j ei ole vahvasti dominoitu pelissä $\langle N, (X_i^t), (u_i^t)\rangle$. Siispä $a_i \in X_i$.

Osoitetaan sitten, että jokainen joukon X_j alkio on rationaalinen jokaisella $j \in N$. Määritelmän 2.14 mukaan mikään siirto joukossa X_j ei ole vahvasti dominoitu pelissä $\langle N, (X_i), (u_i)\rangle$, joten Apulauseen 2.6 nojalla jokainen siirto joukossa X_j on parassiirto jonkin joukossa X_{-j} määritellyn uskomuksen mukaan. Täytyy siis osoittaa, että joukon X_j jokainen alkio on parassiirto kaikkien mahdollisten siirtojen A_j joukossa jollakin joukossa X_{-j} määritellyllä uskomuksella. Jos $a_j \in X_j$ ei ole parassiirto joukon A_j alkioista, niin tällöin on olemassa t:n arvo, jolla a_j on parassiirto joukon X_j^t alkioiden joukosta uskomuksella μ_j, mutta jolla a_j ei ole parassiirto joukon X_j^{t-1} alkioista. Täten on olemassa siirto $b_j \in X_j^{t-1} \backslash X_j^t$, joka on parassiirto joukon X_j^{t-1} alkioista uskomuksella μ_j. Kuitenkin siirto b_j tulee eliminoiduksi proseduurin vaiheessa t, joten se ei voi olla parassiirto uskomuksella μ_j, joka on muodostettu vahvasti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta jäljelle jäävien siirtojen joukosta X_{-j}. Siispä siirto $a_j \in X_j$ on parassiirto myös kaikkien mahdollisten siirtojen joukon A_j alkioista. □

Huomaa, että Määritelmän 2.14 menetelmä ei vaadi, että jokainen vahvasti dominoitu siirto eliminoidaan jossakin tietyssä vaiheessa t. Täten eliminointien järjestyksellä eikä nopeudella ole vaikutusta lopputulosten joukkoon, joka jää jäljelle vahvasti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta.

Apulause 2.6 ei ole voimassa, mikäli rationaalisuuden määritelmässä vaaditaan, että pelaajat olettavat vastustajiensa siirtojen olevan riippumattomia. Myöskään käsitteiden rationaalisuus ja vahvasti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio ekvivalenttius ei tällöin päde. Tarkastellaan taulukon 2.10 peliä (s. 32). Pelaajan 3 siirto M_2 on parassiirto uskomuksella, jonka mukaan pelaajat 1 ja 2 pelaavat siirtoparit (U, L) ja (D, R) yhtä suurella todennäköisyydellä, joten siirto M_2 ei ole vahvasti dominoitu. Kuten aiemminkin nähtiin, siirto M_2 ei kuitenkaan ole parassiirto mihinkään riippumattomaan sekastrategioiden pariin, joten se ei ole rationaalinen (määritelmän

	L	R
T	1,1	0,0
M	1,1	2,1
B	0,0	2,1

Taulukko 2.12: Kahden pelaajan strategiapeli, jossa lopputulosten joukko, joka jää jäljelle heikosti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta, riippuu eliminointien järjestyksestä.

mukaan, jossa pelaajien uskomukset rajoitetaan olevan tuloja riippumattomista todennäköisyysjakaumista).

2.3.3 Heikosti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä

Sanotaan, että pelaajan $i \in N$ siirto $a_i \in A_i$ on *heikosti dominoitu* [9, s. 62], jos pelaajalla i on olemassa siirto $b_i \in A_i$, joka on vähintään yhtä hyvä kuin siirto a_i riippumatta muiden pelaajien siirroista ja parempi kuin siirto a_i vähintään yhdellä muiden pelaajien siirtoprofiililla $a_{-i} \in A_{-i}$.

Määritelmä 2.15. Olkoon $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ strategiapeli. Pelaajan $i \in N$ siirto $a_i \in A_i$ on *heikosti dominoitu* pelissä G, jos on olemassa pelaajan i sekastrategia α_i, jolla $U_i(a_{-i}, \alpha_i) \geq u_i(a_{-i}, a_i)$ jokaisella $a_{-i} \in A_{-i}$ ja $U_i(a_{-i}, \alpha_i) > u_i(a_{-i}, a_i)$ jollakin $a_{-i} \in A_{-i}$, missä $U_i(a_{-i}, \alpha_i)$ on pelaajan i odotettu tuotto, kun hän käyttää sekastrategiaa α_i ja muiden pelaajien $(j \neq i)$ siirtoprofiili on a_{-i}.

Apulauseesta 2.6 seuraa, että jos siirto on heikosti dominoitu, mutta ei vahvasti dominoitu, niin se on parassiirto jollakin uskomuksella. Täten heikosti dominoidut siirrot ovat pelaajille kannattavampia kuin vahvasti dominoidut siirrot. Heikosti dominoiduilla siirroilla ei kuitenkaan voi saavuttaa etua missään pelissä, joten on luonnollista eliminoida myös heikosti dominoidut siirrot monimutkaisista peleistä.

Heikosti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä on analoginen edellä esitetyn vahvasti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmän kanssa. Heikosti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä on näistä menetelmistä kuitenkin vähemmän hyödyllinen, sillä pelin lopputulosten joukko, joka jää jäljelle heikosti dominoitujen siirtojen toistetusta eliminaatiosta, riippuu järjestyksestä, jolla siirrot eliminoidaan, kuten taulukon 2.12 peli osoittaa. Tässä pelissä eliminaatioiden sarja, jossa ensin eliminoidaan pelaajan 1 siirto T (M dominoi heikosti siirtoa T)

ja seuraavaksi eliminoidaan pelaajan 2 siirto L (jota dominoi heikosti siirto R), johtaa lopputulokseen, jossa pelaaja 2 valitsee siirron R ja tällöin tuottoprofiili on $(2, 1)$. Toisaalta eliminaatioiden sarja, jossa ensin eliminoidaan pelaajan 1 siirto B (M dominoi heikosti siirtoa B) ja sitten eliminoidaan pelaajan 2 siirto R (L dominoi heikosti siirtoa R), johtaa lopputulokseen, jossa pelaaja 2 valitsee siirron L ja tuottoprofiili on tällöin $(1, 1)$. Heikosti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmään palataan vielä seuraavassa luvussa.

Luku 3

Ekstensiiviset pelit

Strategiapeleissä pelaajat muodostavat strategiansa pelin alussa. He siis tekevät päätöksensä kerran ja yhtäaikaisesti, eivätkä he voi muuttaa strategiaansa kesken pelin. Sen sijaan ekstensiiviset pelit mallintavat peräkkäisiä strategisia päätöksenteko-ongelmia, joissa pelaaja voi uudelleen harkita strategiaansa aina, kun on hänen vuoronsa toimia [9, Luku 6].

Yleinen ekstensiivisen pelin malli mahdollistaa tilanteen, jossa pelaajat voivat olla epätäydellisesti informoituja siitä, mitä pelissä on aiemmin tapahtunut (ks. [9, s. 199]). Tässä tutkielmassa kuitenkin rajoitutaan tarkastelemaan yksinkertaisempia tilanteita, joissa pelaajilla on täydellinen informaatio muiden pelaajien aiemmista siirroista.

3.1 Ekstensiiviset pelit täydellisellä informaatiolla

Tässä luvussa käsitellään täydellisen informaation ekstensiivisiä pelejä [9, s. 89]. Ensiksi määritellään täsmällisesti ekstensiiviset pelit, jonka jälkeen tarkastellaan Nashin tasapaino -käsitteen soveltuvuutta niihin. Tämän jälkeen määritellään alipeli ja ekstensiivisen pelin täydellinen tasapaino alipelien suhteen. Lopuksi tätä ekstensiivisen pelin täydellistä tasapainoa alipelien suhteen verrataan edellisessä luvussa esitettyyn heikosti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmään.

Määritelmä

Ekstensiivinen peli siis mallintaa tilannetta, jossa pelaaja kohtaa peräkkäisiä strategisia päätöksenteko-ongelmia. Tällaisessa pelissä pelaajalla on täydellinen informaatio, jos hän päätöstä tehdessään tietää kaikki tapahtumat, jotka pelissä on aiemmin tapahtunut. Yksinkertaisuuden vuoksi aluksi rajoitutaan tarkastelemaan tilanteita, joissa pelaajat tekevät päätöksensä vuorottain (eivät siis yhtäaikaisesti) ja kaikki päätökset ovat pelaajien itsensä tekemiä (siis satunnaisuutta ei pelaajien päätöksissä esiinny) [9, s. 89].

Määritelmä 3.1. *Ekstensiivinen peli täydellisellä informaatiolla* sisältää seuraavat komponentit.

- Pelaajien joukko N.
- Jonojen (äärellisten tai äärettömien) joukko H, jolla on seuraavat ominaisuudet.
  - Tyhjä jono $\emptyset$ kuuluu joukkoon H.
  - Jos $(a^k)_{k=1}^K \in H$ (K voi olla ∞) ja $L < K$, niin $(a^k)_{k=1}^L \in H$.
  - Jos äärettömän jonon $(a^k)_{k=1}^\infty$ osajono $(a^k)_{k=1}^L \in H$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla L, niin $(a^k)_{k=1}^\infty \in H$.

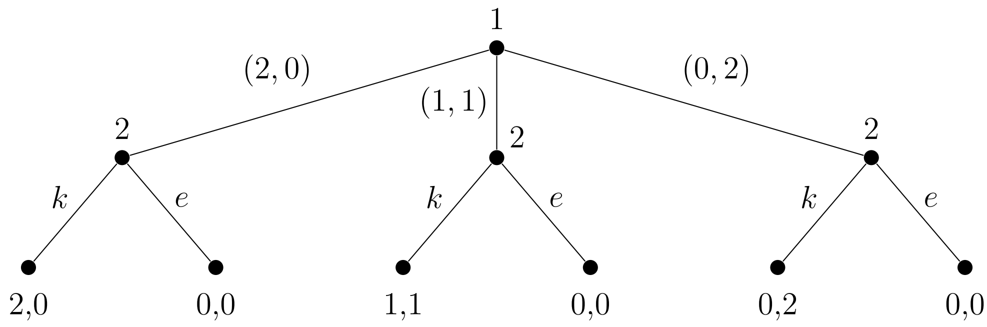
  Joukon H alkioita sanotaan *historioiksi*. Historian komponentit ovat pelaajien siirtoja. Historian $(a^k)_{k=1}^K \in H$ sanotaan olevan *lopullinen*, jos se on ääretön tai jos ei ole olemassa siirtoa a^{K+1} siten, että $(a^k)_{k=1}^{K+1} \in H$. Lopullisten historioiden joukkoa merkitään kirjaimella Z.
- Kuvaus P, joka liittää jokaiseen ei-lopulliseen historiaan ($\in H \setminus Z$) N:n alkion. Siis P on *pelaajafunktio* ja $P(h)$ on pelaaja, jonka vuoro on toimia historian h jälkeen.
- Jokaisen pelaajan $i \in N$, joukossa Z määritelty preferenssirelaatio $\succsim_i$.

Monikolla $\langle N, H, P, (\succsim_i) \rangle$ merkitään täydellisen informaation ekstensiivistä peliä. Jos historioiden joukko H on äärellinen, niin tällöin peli $\langle N, H, P, (\succsim_i) \rangle$ on äärellinen. Jos ekstensiivisen pelin pisin historia on äärellinen, niin tällöin sanotaan, että pelillä on *äärellinen horisontti*. Olkoon h historia, joka on k:n pituinen. Tällöin merkinnällä (h, a) viitataan $k + 1$:n pituiseen historiaan, jossa historian h jälkeen pelaaja $P(h)$ valitsee siirron a.

Tästä eteenpäin tässä luvussa ekstensiivisellä pelillä viitataan aina täydellisen informaation ekstensiiviseen peliin. Tällaisten pelien tulkinta on seuraavanlainen. Jokaisen ei-lopullisen historian h jälkeen pelaaja $P(h)$ valitsee siirron joukosta

$$A(h) = \{a : (h, a) \in H\}.$$

Tyhjä historia $\emptyset$ on pelin aloituspiste. Aloituspisteessä pelaaja $P(\emptyset)$ valitsee siirron joukosta $A(\emptyset)$. Jokaisella mahdollisella siirrolla $a^0 \in A(\emptyset)$, seuraavana vuorossa oleva pelaaja $P(a^0)$ valitsee siirtonsa joukosta $A(a^0)$, joka taas määrittää seuraavana vuorossa olevan pelaajan, ja niin edelleen. Historia on lopullinen, jos sen jälkeen kukaan pelaaja ei voi enää tehdä yhtään siirtoa. Huomaa, että historia voi olla ääretön siirtojen jono. Koska historiat määriteltiin jonoiksi, seuraa tästä määritelmästä epäsuorasti oletus siitä, että äärettömän historian jälkeen mitään siirtoa ei voi valita, joten tällaisen



Kuva 3.1: Kahden pelaajan välinen ekstensiivinen peli, joka mallintaa objektien jakamista. (Esimerkki 3.1.)

historian on oltava lopullinen. Kuten strategiapelien tapauksessa, myös ekstensiivisissä peleissä pelaajien preferenssit (lopullisten historioiden joukossa) voidaan esittää sopivien tuottofunktioiden avulla.

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan peliä, jossa kaksi pelaajaa jakaa, kummankin pelaajan haluamat, kaksi objektia. Pelissä on siis mahdollista, että kumpikin pelaaja saa yhden objektin, toinen pelaajista saa molemmat objektit (ja toinen ei mitään) tai kumpikaan ei saa mitään. Pelissä pelaaja 1 ehdottaa pelaajalle 2 jonkinlaista jakoa, jonka pelaaja 2 sitten joko hyväksyy (siirto k) tai hylkää (siirto e). Jos pelaaja 2 hylkää ehdotuksen, niin kumpikaan pelaajista ei saa mitään. Pelissä kumpikin pelaaja on kiinnostunut ainoastaan saamiensa objektien määrästä.

Tätä esimerkkiä voi mallintaa ekstensiivisellä pelillä $\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$, missä

- $N = \{1, 2\}$
- $H = \{\emptyset, (2,0), (1,1), (0,2), ((2,0), k), ((2,0), e), ((1,1), k), ((1,1), e), ((0,2), k), ((0,2), e)\}$
- $P(\emptyset) = 1$ ja $P(h) = 2$ jokaisella ei-lopullisella historialla $h \neq \emptyset$
- $((2,0), k) \succ_1 ((1,1), k) \succ_1 ((0,2), k) \sim_1 ((2,0), e) \sim_1 ((1,1), e) \sim_1 ((0,2), e)$ ja $((0,2), k) \succ_2 ((1,1), k) \succ_2 ((2,0), k) \sim_2 ((0,2), e) \sim_2 ((1,1), e) \sim_2 ((2,0), e)$.

Esimerkin peli on esitetty kuvassa 3.1. Kuvan graafin ylin solmu on pelin aloituspiste (= tyhjä historia $\emptyset$). Aloituspisteen päällä oleva luku 1 tarkoittaa, että $P(\emptyset) = 1$ (siis pelaaja 1 on ensimmäisenä vuorossa). Kolme särmää, jotka lähtevät aloituspisteestä, vastaavat joukon $A(\emptyset)$ alkioita (pelaajan 1 mahdolliset siirrot). Merkinnät näissä särmissä kertovat siirtojen nimet: siirrolla $(m, 2-m)$, missä $m \in \{0, 1, 2\}$, pelaaja 1 ehdottaa pelaajalle 2 jakoa, missä pelaaja 1 saa m objektia ja pelaaja 2 jäljelle jäävät $2 - m$ objektia.

Jokainen näistä särmistä johtaa solmuun, jonka yläpuolella on luku 2, tarkoittaen että jokaisen historian, jonka pituus on yksi, jälkeen on pelaajan 2 vuoro valita siirtonsa. Näistä solmuista lähtevät kuusi särmää on nimetty pelaajan 2 siirroilla, missä k tarkoittaa hyväksyntää ja e tarkoittaa hylkäystä. Luvut lopullisten historioiden (graafin alimmat solmut) alapuolella ovat pelaajien tuotot, jotka heijastavat pelaajien preferenssejä (ensimmäinen luku on pelaajan 1 tuotto ja jälkimmäinen luku on pelaajan 2 tuotto).

Kuten edellisessä esimerkissä huomattiin, ekstensiivisiä pelejä on havainnollista esittää yhtenäisten (syklittömien) graafien, eli *puiden* avulla. Puussa jokainen solmu vastaa historiaa ja jokainen solmujen välissä oleva särmä vastaa siirtoa.

Strategiat

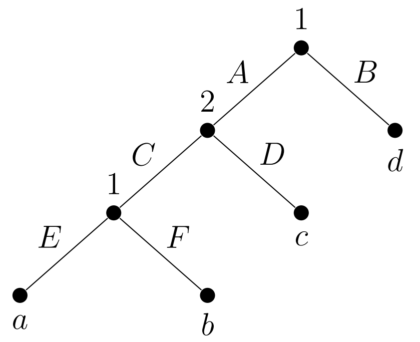
Pelaajan strategia ekstensiivisessä pelissä on kuvaus [9, s. 92], joka määrittää pelaajan siirron jokaisella sellaisella historialla, jonka jälkeen on pelaajan vuoro toimia.

Määritelmä 3.2. Pelaajan $i \in N$ *strategia* täydellisen informaation ekstensiivisessä pelissä $\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ on kuvaus, joka liittää siirron $a \in A(h)$ jokaiseen ei-lopulliseen historiaan $h \in H \backslash Z$, jolla $P(h) = i$.

Esimerkin 3.1 pelin avulla voi havainnollistaa strategian käsitettä. Tässä esimerkissä pelaaja 1 valitsee siirtonsa ainoastaan tyhjän historian $\emptyset$ jälkeen. Pelaajalla 1 on siis kolme mahdollista siirtoa: $(2, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 2)$. Pelaaja 2 valitsee siirtonsa historioiden $(2, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 2)$ jälkeen ja jokaisessa näistä kolmesta tapauksesta hänellä on kaksi mahdollista siirtoa. Täten pelaajan 2 strategia voidaan identifioida kolmikoksi $a_2b_2c_2$, missä a_2, b_2 ja c_2 vastaavat pelaajan 2 siirtoja historioiden $(2, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 2)$ jälkeen. Siis pelaajan 2 strategian $a_2b_2c_2$ tulkinta on seuraava: jos pelaaja 1 valitsee siirron $(2, 0)$, niin pelaaja 2 valitsee siirron a_2; jos pelaaja 1 valitsee siirron $(1, 1)$, niin pelaaja 2 valitsee siirron b_2; ja jos pelaaja 1 valitsee siirron $(0, 2)$, niin pelaaja 2 valitsee siirron c_2.

Kuvan 3.2 peli havainnollistaa strategian määritelmään sisältyvää "tarpeetonta" informaatiota: strategia määrittää pelaajan siirron *jokaisella* historialla, jonka jälkeen on pelaajan vuoro valita siirtonsa. Strategia siis määrittää pelaajan siirron sellaisellakin historialla, jota (strategiaa noudattamalla) ei voi saavuttaa. Tässä pelissä pelaajalla 1 on neljä strategiaa: AE, AF, BE ja BF. Siis pelaajan 1 strategia määrittää hänelle siirron historialla (A, C), vaikka hän valitsisi pelin alussa siirron B.

Ekstensiivisissä peleissä jokaista strategiaprofiilia $s = (s_i)_{i \in N}$ kohti määritellään *lopputulos* $O(s)$, joka on lopullinen historia johon päädytään, kun jokainen pelaaja $i \in N$ noudattaa strategiaa s_i. Siis $O(s)$ on (mahdollisesti ääretön) historia $(a^1, \dots, a^K) \in Z$, jossa $s_{P(a^1,\dots,a^k)}(a^1, \dots, a^k) = a^{k+1}$, kun $0 \le k < K$.



Kuva 3.2: Kahden pelaajan välinen ekstensiivinen peli, jossa pelaaja 1 toimii sekä ennen että jälkeen pelaajan 2.

Strategiapeleissä sekastrategian määriteltiin olevan todennäköisyysjakauma puhtaiden strategioiden joukossa. Vastaava määritelmä toimii myös täydellisen informaation ekstensiivisten pelien strategioiden yhteydessä. Mielenkiintoisempaa onkin tarkastella sekastrategioita epätäydellisen informaation ekstensiivisissä peleissä [9, s. 199], mutta niihin ei tässä tutkielmassa puututa.

Nashin tasapaino ekstensiivisissä peleissä

Ensimmäisenä käsiteltävä ekstensiivisten pelien ratkaisukonsepti jättää huomiotta ekstensiivisten pelien perusrakenteen, eli valintojen teon peräkkäisyyden [9, s. 93]. Sen sijaan se kohtelee strategioita valintoina, jotka on tehty ennen pelin alkua kerran ja yhtäaikaisesti.

Määritelmä 3.3. Täydellisen informaation ekstensiivisen pelin $\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ Nashin tasapaino on strategiaprofiili s^*, jolla jokaisella pelaajalla $i \in N$ ja jokaisella pelaajan i strategialla s_i

$$O(s^*_{-i}, s^*_i) \succsim_i O(s^*_{-i}, s_i).$$

Vaihtoehtoisesti Nashin tasapaino voidaan määritellä ekstensiiviselle pelille Γ (apuna käyttäen pelistä Γ johdettua uutta peliä) samaan tapaan kuten Nashin tasapaino määriteltiin strategiapeleille.

Määritelmä 3.4. Täydellisen informaation ekstensiivisen pelin $\Gamma = \langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ *strateginen muoto* on strategiapeli $\langle N, (S_i), (\succsim'_i)\rangle$, missä jokaisella $i \in N$

- S_i on pelaajan i strategioiden joukko pelissä Γ
- preferenssirelaatio $\succsim'_i$ määritellään siten, että $s \succsim'_i s'$, jos ja vain jos $O(s) \succsim_i O(s')$ jokaisella $s, s' \in \times_{i\in N} S_i$.

Jos Nashin tasapaino olisi ainoa tarkastelun kohteena oleva ratkaisukonsepti, voitaisiin strategioiden määritelmää rajoittaa tiukemmin kuin Määritelmässä 3.2 tehtiin (Määritelmän 3.2 mukaista strategian määritelmää tarvitaan myöhemmin esimerkiksi ekstensiivisen pelin täydellisen tasapainon yhteydessä). Oltaisiin voitu rajoittaa strategian määritelmää siten, että pelaajan strategia määrittää pelaajan siirron ainoastaan sellaisilla historioilla, jotka ovat johdonmukaisia tämän strategian aiemmin pelissä määrittämien siirtojen kanssa. Tämä siksi, että strategiaprofiilin s lopputulos $O(s)$ ei riipu siirroista, jotka pelaajan i strategia s_i määrittää jollakin saavuttamattomalla historialla, joka ei ole johdonmukainen pelaajan i strategian s_i kanssa.

Täsmällisemmin sanoen pelaajan $i \in N$ *supistettu strategia* voidaan määritellä olevan kuvaus f_i, jonka määrittelyjoukko on joukon $\{h \in H : P(h) = i\}$ osajoukko ja jolla on seuraavat ominaisuudet:

- f_i liittää jokaiseen määrittelyjoukkonsa historiaan h siirron, joka on joukon $A(h)$ alkio
- historia h, jolla $P(h) = i$, on kuvauksen f_i määrittelyjoukossa, jos ja vain jos jokainen pelaajan i siirto historiassa h on kuvauksen f_i määrittämä. (Toisin sanoen, jos $h = (a^k)_{k=1}^K$ ja $h' = (a^k)_{k=1}^L$ $(L < K)$ on h:n sellainen osajono, että $P(h') = i$, niin $f_i(h') = a^{L+1}$.)

Jokainen pelaajan i supistettu strategia vastaa pelaajan i sellaisten strategioiden joukkoa, missä jokaisella muiden pelaajien ($\neq i$) strategioiden profiililla jokainen strategia tässä joukossa tuottaa saman lopputuloksen (siis strategiat tässä joukossa ovat *lopputulos-ekvivalentteja*). Ekstensiivisen pelin Nashin tasapainojen joukko vastaa sen strategiapelin Nashin tasapainojoukkoa, missä pelaajien mahdollisten siirtojen joukko on heidän supistettujen strategioiden joukko kyseisessä ekstensiivisessä pelissä.

Esimerkiksi edellisen sivun kuvan 3.2 ekstensiivisessä pelissä pelaajalla 1 on kolme supistettua strategiaa: ensimmäisellä supistetulla strategialla $f_1(\emptyset) = B$ (missä määrittelyjoukko on $\{\emptyset\}$), toisella supistetulla strategialla $f_1(\emptyset) = A$ ja $f_1(A, C) = E$ (missä määrittelyjoukko on $\{\emptyset, (A, C)\}$) ja kolmannella supistetulla strategialla $f_1(\emptyset) = A$ ja $f_1(A, C) = F$ (missä määrittelyjoukko on $\{\emptyset, (A, C)\}$).

Joissakin peleissä pelaajilla voi olla supistettuja strategioita, jotka muiden pelaajien strategioista riippumatta antavat saman tuoton (mutta ei välttämättä samaa lopputulosta) jokaiselle pelaajalle. Täten joissakin peleissä strategian määritelmä sisältää (pelaajien tuoton mielessä) tarpeetonta informaatiota. Esimerkiksi, jos $a = b$ kuvan 3.2 ekstensiivisessä pelissä, niin pelaajan 1 supistetut strategiat, joissa hän ensin valitsee siirron A, ovat tuotto-ekvivalentteja. Tämä tarpeeton informaatio johtaa ekstensiivisen pelin strategisen muodon muunneltuun määritelmään.

Määritelmä 3.5. Olkoon $\Gamma = \langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ täydellisen informaation ekstensiivinen peli ja olkoon $\langle N, (S_i), (\succsim_i')\rangle$ sen strateginen muoto. Sanotaan,

	C	D
AE	a	c
AF	b	c
BE	d	d
BF	d	d

	C	D
AE	a	c
AF	b	c
B	d	d

Taulukko 3.1: Kuvan 3.2 pelin strateginen muoto (vasemmalla) ja supistettu strateginen muoto (oikealla).

että pelaajan $i \in N$ strategiat $s_i, s'_i \in S_i$ ovat *ekvivalentteja*, jos jokaisella $s_{-i} \in S_{-i}$ ja jokaisella $j \in N$

$$(s_{-i}, s_i) \sim'_j (s_{-i}, s'_i).$$

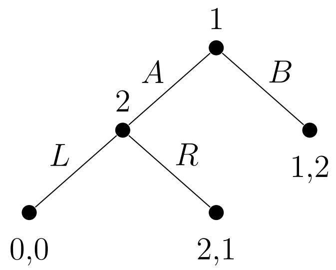
Γ:n *supistettu strateginen muoto* on strategiapeli $\langle N, (S'_i), (\succsim''_i) \rangle$, missä jokaisella $i \in N$ jokainen joukko S'_i sisältää yhden strategian jokaisesta ekvivalenssiluokasta joukossa S_i ja $\succsim''_i$ on $\succsim'_i$:n indusoima preferenssirelaatio joukossa $\times_{j \in N} S'_j$.

Kuvan 3.2 ekstensiivisen pelin strateginen muoto ja supistettu strateginen muoto on esitetty taulukossa 3.1. Jos $a = b$, niin pelaajan 1 strategiat AE ja AF ovat ekvivalentteja, joten pelaajalla 1 on vain kaksi siirtoa kyseisen pelin supistetussa strategisessa muodossa.

Seuraava esimerkki havainnollistaa Nashin tasapainon käsitettä ekstensiivisissä peleissä ja osoittaa, että Nashin tasapainolla voi myös olla epäintuitiivisia piirteitä.

Esimerkki 3.2. Kuvan 3.3 ekstensiivisessä pelissä on kaksi Nashin tasapainoa: (A, R) ja (B, L), joiden tuottoprofiilit ovat $(2, 1)$ ja $(1, 2)$. Strategiaprofiili (B, L) todellakin on Nashin tasapaino, sillä jos tiedetään, että pelaaja 2 valitsee siirron L historialla A, niin pelaajalle 1 on optimaalista valita siirto B pelin alussa ja jos pelaaja 2 tietää, että pelaaja 1 valitsee siirron B, on hänelle optimaalista valita siirto L (koska sillä ei ole vaikutusta pelin lopputulokseen).

Edellisessä esimerkissä tulkinta, jonka mukaan ei-lopullinen historia on pelin vaihe, jossa pelaaja voi uudelleen harkita siirtojaan, voi johtaa argumenttiin, että tämän pelin Nashin tasapaino (B, L) on mahdoton. Tämä siksi, että historialla A näyttäisi siltä, että pelaajan 2 kannattaa valita siirto R siirron L sijaan, sillä lopputuloksella (A, R) hän ansaitsisi suuremman tuoton. Tasapainotila (B, L) on kuitenkin vakaa, sillä se ottaa huomioon myös



Kuva 3.3: Kahden pelaajan välinen ekstensiivinen peli. (Esimerkki 3.2.)

tilanteen, jossa pelaaja 2 valitsee siirron L historialla A. Tämä tilanne pitäisi kuitenkin olla mahdoton, sillä pelaajalla 2 ei ole mitään syytä valita siirtoa L. Täten pelaaja 1 voi olla luottavainen siihen, että pelaaja 2 valitsee siirron R historialla A. Tästä syystä pelaajalla 1 voi olla kannustin poiketa Nashin tasapainosta (B, L) ja valita siirto A. Seuraavassa luvussa määritellään tasapainon käsite, joka ottaa huomioon tällaiset tilanteet.

Esimerkki 3.3. Kuvan 3.1 ekstensiivisen pelin Nashin tasapainot ovat: $((2,0), kkk)$, $((2,0), kke)$, $((2,0), kek)$, $((2,0), kee)$, $((1,1), ekk)$, $((1,1), eke)$, $((0,2), eek)$, $((2,0), eek)$ ja $((2,0), eee)$. Neljä ensimmäistä tasapainoa seuraa jaosta $(2,0)$, seuraavat kaksi jaosta $(1,1)$, seuraava tasapaino jaosta $(0,2)$ ja viimeiset kaksi jaosta $(0,0)$. Kaikki tasapainotilat paitsi $((2,0), kkk)$ ja $((1,1), ekk)$ sisältävät pelaajan 2 siirron, joka on "mahdoton" jollakin historialla (hän siis hylkää ehdotuksen, jossa hän saisi ainakin yhden objektin). Voidaan siis väittää, että nämä seitsemän tasapainotilaa ovat "mahdottomia" samaan tapaan kuin tasapainotila (B, L) edellisessä esimerkissä.

3.1.1 Ekstensiivisen pelin täydellinen tasapaino alipelien suhteen

Edellisen luvun lopun tasapainotiloja koskevat ristiriitaisuudet johtavat ekstensiivisen pelin täydellisen tasapainon määritelmään [9, s. 97]. Ensin kuitenkin määritellään alipeli.

Määritelmä 3.6. Täydellisen informaation ekstensiivisen pelin $\Gamma = \langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ *alipeli, joka seuraa historiaa h*, on ekstensiivinen peli $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (\succsim_i|_h)\rangle$, missä $H|_h$ on siirtojonojen h' joukko, joilla $(h, h') \in H$, $P|_h(h') = P(h, h')$ jokaisella $h' \in H|_h$ ja $\succsim_i|_h$ on määritelty siten, että $h' \succsim_i|_h h''$, jos ja vain jos $(h, h') \succsim_i (h, h'')$.

Seuraavassa tasapainon käsitteessä oletetaan, että jokaisen pelaajan strategioiden määrittämät siirrot ovat optimaalisia, kun muiden pelaajien strategiat tunnetaan *jokaisella* historialla. Kun tiedetään pelaajan $i \in N$ strategia s_i ja historia h ekstensiivisessä pelissä Γ, niin merkinnällä $s_i|_h$ tarkoitetaan strategiaa, jonka s_i indusoi alipelissä $\Gamma(h)$ (toisin sanoen $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$ jokaisella $h' \in H|_h$). Merkinnällä O_h viitataan alipelin $\Gamma(h)$ lopputulokseen.

Määritelmä 3.7. Täydellisen informaation ekstensiivisen pelin $\Gamma = \langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ *täydellinen tasapaino alipelien suhteen* on strategiaprofiili s^*, jolla jokaisella $i \in N$ ja jokaisella ei-lopullisella historialla $h \in H \backslash Z$, jolla $P(h) = i$, pätee

$$O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h) \succsim_i|_h O_h(s^*_{-i}|_h, s_i)$$

jokaisella pelaajan i strategialla s_i alipelissä $\Gamma(h)$.

Täydellisen informaation ekstensiivisen pelin täydelliseen tasapainoon alipelien suhteen viitataan jatkossa lyhyesti täydellisellä tasapainolla. Edellisen määritelmän kanssa yhtäpitävästi täydellinen tasapaino voidaan määritellä olevan pelin Γ strategiaprofiili s^*, jolla jokaisella historialla h strategiaprofiili $s^*|_h$ on alipelin $\Gamma(h)$ Nashin tasapaino.

Täydellinen tasapaino eliminoi edellisen luvun lopun esimerkeistä tilanteet, joissa Nashin tasapaino ei ollut "uskottava". Esimerkiksi kuvan 3.3 pelin ainoa täydellinen tasapaino on (A, R) ja kuvan 3.1 pelin ainoat täydelliset tasapainot ovat $((2, 0), kkk)$ ja $((1, 1), ekk)$.

Varmistaakseen, että strategiaprofiili s^* on täydellinen tasapaino, on siis (Määritelmän 3.7 mukaan) tarkistettava, että ei ole olemassa sellaista alipeliä ja pelaajaa i, missä pelaajalla i on olemassa strategia, joka johtaa hänen kannaltaan parempaan lopputulokseen. Seuraava tulos osoittaa, että äärellisen horisontin pelissä voidaan jokaisella alipelillä ja jokaisella pelaajalla i rajoittua tarkastelemaan strategioita, jotka eroavat strategiasta s^*_i ainoastaan siten, että ne määrittävät ainoan strategiasta s^*_i poikkeavan siirron alipelin tyhjällä historialla. Erityisesti strategiaprofiili on täydellinen tasapaino, jos ja vain jos jokaisella alipelillä pelaaja, joka on ensimmäisenä vuorossa, ei voi saavuttaa suurempaa tuottoa vaihtamalla ainoastaan hänen alkuperäistä siirtoaan. Ekstensiivisessä pelissä Γ merkinnällä $l(\Gamma)$ viitataan Γ:n pisimpään historiaan ja sanotaan, että $l(\Gamma)$ on pelin Γ *pituus*.

Apulause 3.1. *Olkoon $\Gamma = \langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ ekstensiivinen, äärellisen horisontin peli täydellisellä informaatiolla. Strategiaprofiili s^* on Γ:n täydellinen tasapaino alipelien suhteen, jos ja vain jos jokaisella pelaajalla $i \in N$ ja jokaisella historialla $h \in H$, jolla $P(h) = i$,*

$$O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h) \succsim_i|_h O_h(s^*_{-i}|_h, s_i)$$

jokaisella pelaajan i, alipelin $\Gamma(h)$ strategialla s_i, joka eroaa strategiasta $s^*_i|_h$ ainoastaan siirrolla, joka määräytyy alipelin $\Gamma(h)$ tyhjän historian jälkeen.

Todistus. "$\Rightarrow$"Jos s^* on Γ:n täydellinen tasapaino, niin tällöin Määritelmästä 3.7 seuraa, että lauseen ehto on voimassa.

"$\Leftarrow$"(Kontrapositiolla) Oletetaan sitten, että strategiaprofiili $s^* = (s^*_i)_{i \in N}$ ei ole täydellinen tasapaino alipelien suhteen. Tällöin on olemassa alipeli

$\Gamma(h')$, jossa pelaaja i voi hyötyä poikkeamalla strategiasta s_i^*. On siis olemassa pelaajaa i hyödyttävä (strategiasta s_i^* poikkeava) strategia s_i alipelissä $\Gamma(h')$, millä $s_i(h) \neq (s_i^*|_{h'})(h)$ ainakin yhdellä historialla h. Tällaisten historioiden (joilla strategia s_i määrittää strategiasta s_i^* poikkeavan siirron alipelissä $\Gamma(h')$) määrä on pienempi tai yhtäsuuri kuin $l(\Gamma(h'))$, joka on äärellinen, sillä pelillä Γ on oletuksen nojalla äärellinen horisontti. Valitaan kaikkien, alipelissä $\Gamma(h')$, pelaajaa i hyödyttävien (strategiasta s_i^* poikkeavien) strategioiden joukosta s_i, jolla historioiden h, joilla $s_i(h) \neq (s_i^*|_{h'})(h)$ määrä on pienin. Olkoon h^* pisin sellainen historia h pelissä $\Gamma(h')$, jolla $s_i(h) \neq (s_i^*|_{h'})(h)$. Tällöin pelissä $\Gamma(h^*)$ tyhjä historia on ainoa historia, jolla strategian s_i määrittämä siirto eroaa strategian $s_i^*|_{h'}$ määrittämästä siirrosta. Edelleen $s_i|_{h^*}$ on hyödyllinen poikkeama pelissä $\Gamma(h^*)$, sillä muuten olisi olemassa hyödyllinen poikkeava strategia pelissä $\Gamma(h')$, mikä eroaisi strategiasta $s_i^*|_{h'}$ aiemmin kuin s_i. Toisin sanoen pelissä $\Gamma(h')$ olisi olemassa pitempi historia kuin h^*, millä $s_i(h) \neq (s_i^*|_{h'})(h)$ (missä tällaisten historioiden h lukumäärä pienin mahdollinen). Tämä olisi ristiriita, joten $s_i|_{h^*}$ on hyödyttävä poikkeama pelissä $\Gamma(h^*)$, mikä eroaa strategiasta $s_i^*|_{h^*}$ ainoastaan siirrolla, joka määräytyy pelin $\Gamma(h^*)$ tyhjän historian jälkeen. Siispä lauseen ehto ei ole voimassa. □

Seuraavaksi osoitetaan, että jokaisella äärellisellä täydellisen informaation ekstensiivisellä pelillä on olemassa täydellinen tasapaino. Lauseen todistuksessa jokaista pelin pisintä ei-lopullista historiaa kohti valitaan optimaalinen siirto pelaajalle, jonka vuoro olisi toimia tällä historialla ja korvataan nämä historiat lopullisilla historioilla, joiden tuottoprofiili on se, jossa tämä optimaalinen siirto on valittu. Tätä proseduuria toistetaan, kunnes on saavuttu pelin aloituspisteeseen.

Lause 3.1 (Kuhnin lause)**.** *Jokaisella äärellisellä täydellisen informaation ekstensiivisellä pelillä on olemassa täydellinen tasapaino alipelien suhteen.*

Todistus. Olkoon $\Gamma = \langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ äärellinen täydellisen informaation ekstensiivinen peli. Osoitetaan induktiolla alipelin pituuden $l(\Gamma(h))$ suhteen, että pelillä Γ on olemassa täydellinen tasapaino. Määritellään kuvaus R siten, että se liittää lopullisen historian jokaiseen historiaan $h \in H$ ja osoitetaan, että tällä historialla pelin lopputulos on alipelin $\Gamma(h)$ täydellinen tasapaino.

Jos $l(\Gamma(h)) = 0$ (toisin sanoen, jos h on pelin Γ lopullinen historia), niin määritellään $R(h) = h$. Oletetaan sitten, että $R(h)$ on määritelty jokaisella $h \in H$, jolla $l(\Gamma(h)) \leq k$ jollakin $k \geq 0$. Olkoon h^* historia, jolla $l(\Gamma(h^*)) = k + 1$ ja olkoon $P(h^*) = i$. Tällöin, koska $l(\Gamma(h^*)) = k + 1$, on oltava $l(\Gamma(h^*, a)) \leq k$ jokaisella $a \in A(h^*)$. Määritellään $s_i(h^*)$ siten, että se määrittää sellaisen pelaajan i siirron $a \in A(h^*)$, jolla pelaajan i tuotto on maksimaalinen (preferenssirelaation $\succsim_i$ mielessä) historialla $R(h^*, a)$ ja olkoon $R(h^*) = R(h^*, s_i(h^*))$. Nyt induktioperiaatteen mukaan on määritelty pelin Γ strategiaprofiili s, joka Apulauseen 3.1 nojalla on Γ:n täydellinen tasapaino alipelien suhteen. $\square$

Edellistä todistustapaa sanotaan usein *induktioksi taaksepäin*. Lauseen todistuksessa käytetty proseduuri on myös algoritmi, jolla voi laskea kaikki äärellisen pelin täydelliset tasapainot. Proseduuri on erityisen sovelias, sillä tämä algoritmi on luonnollinen tapa pelaajille analysoida tällaisia suhteellisen lyhyen horisontin omaavia pelejä.

Huomaa, että Kuhnin lause ei ota kantaa täydellisen tasapainon yksikäsitteisyyteen. Esimerkiksi kuvan 3.1 pelissä on kaksi täydellistä tasapainoa, $((2,0), kkk)$ ja $((1,1), ekk)$, jotka eivät ole ekvivalentteja kummankaan pelaajan preferenssien mielessä. Kuitenkin äärellisessä pelissä, jossa mitkään kaksi lopputulosta eivät ole samanarvoisia minkään pelaajan mielestä, on olemassa yksikäsitteinen täydellinen tasapaino alipelien suhteen.

3.1.2 Ekstensiiviset pelit yhtäaikaisilla siirroilla

Täydellisen informaation ekstensiivisen pelin määritelmä (Määritelmä 3.1) voidaan modifioida käsittämään pelaajien yhtäaikaiset siirrot tietyillä historioilla [9, s. 102]. Historioilla, joilla pelaajat suorittavat siirtonsa yhtäaikaisesti, pelaajilla on täydellinen informaatio pelin aiemmista tapahtumista.

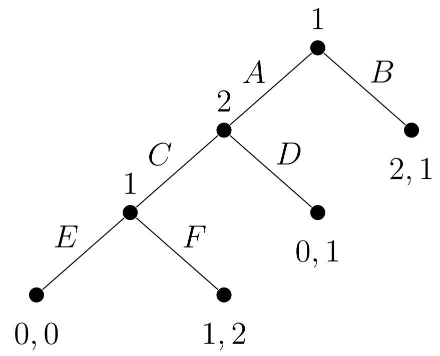
Määritelmä 3.8. Ekstensiivinen peli täydellisellä informaatiolla ja *yhtäaikaisilla siirroilla* on monikko $\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$, missä N, H ja $\succsim_i$ $(i \in N)$ määritellään kuten Määritelmässä 3.1. P on kuvaus, joka liittää jokaiseen ei-lopulliseen historiaan *joukon pelaajia* sekä H ja P yhdessä toteuttavat ehdon: jokaista ei-lopullista historiaa h kohti on olemassa kokoelma $\{A_i(h)\}_{i\in P(h)}$ joukkoja, joilla

$$A(h) = \{a : (h,a) \in H\} = \times_{i\in P(h)} A_i(h).$$

Tällaisten pelien historiat ovat vektorijonoja, missä vektoreiden a^k komponentit ovat sellaisten pelaajien siirtoja, joiden vuoro on toimia historian $(a^l)_{l=1}^{k-1}$ jälkeen. Pelaajan $i \in P(h)$ mahdollisten siirtojen joukolle (historialla h) käytetään merkintää $A_i(h)$. Pelaajat joukossa $P(h)$ valitsevat siis siirtonsa yhtäaikaisesti.

Pelaajan $i \in N$ strategia edellä kuvatussa pelissä on kuvaus, joka liittää siirron $a \in A_i(h)$ jokaiseen ei-lopulliseen historiaan h, jolla $i \in P(h)$. Täydellinen tasapaino alipelien suhteen määritellään muuten samoin kuin Määritelmässä 3.7, mutta merkintä "$P(h) = i$" korvataan merkinnällä "$i \in P(h)$".

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan kahden pelaajan välistä peliä, missä pelaajalla 1 on vuoro valita siirtonsa ensimmäisenä [10, s. 18]. Hänellä on kaksi mahdollista siirtoa: hän voi joko lopettaa pelin heti alkuunsa (siirto S), jolloin pelin tuottoprofiili on $(1,1)$ tai hän voi jatkaa peliä (siirto J). Jos pelaaja 1 valitsee siirron J, niin tällöin kumpikin pelaaja valitsee yhtäaikaisesti



Kuva 3.4: Kahden pelaajan välinen ekstensiivinen peli, jossa pelaaja 1 toimii sekä ennen että jälkeen pelaajan 2.

positiivisen kokonaisluvun ja kummankin pelaajan tuotto tässä pelissä on näiden lukujen tulo. Tätä peliä voi havainnollistaa täydellisen informaation ja yhtäaikaisten siirtojen ekstensiivisellä pelillä, missä

- $N = \{1, 2\}$
- $H = \{\emptyset\} \cup \{S, J\} \cup \{(J, (z_1, z_2)) : (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+\}$
- $P(\emptyset) = \{1\}$ ja $P(J) = \{1, 2\}$
- pelaajien preferenssit määräytyvät siten, että jos pelaaja 1 valitsee siirron J, niin kaikilla $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$: $(x_1, x_2) \succsim_i (y_1, y_2)$, jos ja vain jos $x_1x_2 \geq y_1y_2$ $(i \in \{1, 2\})$.

Alipelissä, joka seuraa historiaa J, on olemassa yksikäsitteinen täydellinen tasapaino, missä kumpikin pelaaja valitsee kokonaisluvun 0. Täten tässä pelissä on olemassa yksikäsitteinen täydellinen tasapaino alipelien suhteen, missä pelaaja 1 valitsee pelin alussa siirron S ja historialla J kumpikin pelaaja valitsee siirron 0.

Huomaa, että jos pelaajan $i \in \{1, 2\}$ mahdollisten siirtojen joukko historialla J rajoitettaisiin olevan joukko $A_i = \{a \in \mathbb{Z}_+ : a \leq M$ jollakin $M \in \mathbb{Z}_+\}$, niin pelissä olisi lisäksi täydellinen tasapaino, missä pelaaja 1 valitsee siirron J, jonka jälkeen kumpikin pelaaja valitsee siirron M. Tuottoprofiili tällä tasapainolla olisi (M^2, M^2).

3.1.3 Strategioiden tulkinta

Kuten aiemmin huomattiin, strategian määritelmä (Määritelmä 3.2) ei vastaa johdonmukaista siirtojen suunnitelmaa, sillä se vaatii pelaajan määrittämään siirtonsa historioilla, jotka strategiaa noudattamalla eivät voi edes toteutua. Esimerkiksi kuvan 3.4 pelissä pelaajan 1 strategia määrittää hänen siirtonsa pelin alussa, mutta myös historialla (A, C), vaikka hän valitsisikin pelin alussa siirron B.

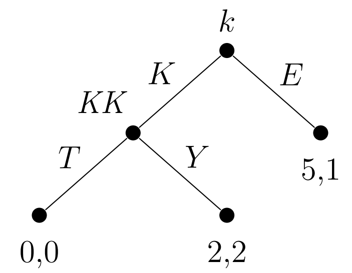
Yksi tulkinta strategian komponenteista, jotka vastaavat mahdottomia historioita onkin, että ne ovat muiden pelaajien uskomuksia pelaajan siirroista, jotka hän valitsee silloin, kun hän ei noudata strategiaansa [9, s. 103]. Toisin sanoen strategian komponentit vastaavat sellaisia siirtoja, joita muut pelaajat olettavat pelaajan valitsevan historioilla, joihin ei strategiaa noudattamalla päädytä. Tämä tulkinta tosin heikentää hieman täydellisen tasapainon käsitteen mielekkyyttä. Tarkastellaan jälleen kuvan 3.4 peliä. Tämän pelin rakenteen havaittuaan pelaajalla 2 ei pitäisi olla mitään syytä olettaa, että pelaaja 1 valitsee siirron A. Täten, jos pelaaja 2 kuitenkin havaitsee, että pelaaja 1 on valinnut siirron A, on pelaajan 2 luovuttava jostain peliteorian perusoletuksista: hän joko ajattelee, että pelaaja 1 ei ole rationaalinen, pelaaja 1 havaitsee eri pelin kuin kuvassa 3.4 tai että pelaaja 1 on valinnut siirron A "vahingossa" (vaikka tällaiset "vahingot" eivät sisälly pelin määritelmään). Silti peliteorian perusoletukset vaativat, että minkä tahansa historian pelaaja 2 havaitseekin, on hänen jatkettava peliä alkuperäisillä oletuksilla pelaajasta 1. Pelaajan 2 on siis edelleen oletettava, että pelaaja 1 on rationaalinen, tietää pelin eikä valitse siirtojaan "vahingossa".

3.1.4 Huomionarvoisia esimerkkejä

Tässä luvussa esitellään kahden esimerkin avulla täydellisen tasapainon määritelmään liittyviä heikkouksia ja vahvuuksia [9, s. 105]. Kummassakin esimerkkipelissä esitystapaa helpottaa diskreetti *aikamuuttuja*, joka alkaa ajanhetkestä 1. Tämä muuttuja ei ole lisäys ekstensiivisen pelin formaaliin määritelmään, vaan se ainoastaan helpottaa pelien esittämistä ja korostaa niiden rakennetta.

Kauppaketju

Kauppaketjulla (pelaaja KK) on liike K:ssa eri kaupungissa, lueteltuna $1, \ldots, K$. Jokaisessa kaupungissa k on olemassa yksittäinen potentiaalinen kilpailija (pelaaja k). Jokaisella ajanhetkellä yksi potentiaalinen kilpailija päättää joko kilpailla (siirto K) tai jättää kilpailematta (siirto E) pelaajan KK kanssa. Ajanhetkellä k on pelaajan k vuoro tehdä valintansa. Jos pelaaja k päättää kilpailla, voi kauppaketju joko taistella (siirto T) tai tehdä yhteistyötä (siirto Y). Kauppaketju vastaa kilpailijan k siirtoon ennen kuin on pelaajan $k+1$ vuoro tehdä siirtonsa. Täten ajanhetkellä k mahdollisten lopputulosten joukko on $Q = \{E, (K, Y), (K, T)\}$. Jos kauppaketju haastetaan kilpailuun, niin kauppaketju pitää parempana yhteistyötä kuin taistelua, mutta kauppaketju saavuttaa korkeimman tuoton, jos kilpailija jättää kilpailematta. Jokaisen potentiaalisen kilpailijan on parempi jättää kilpailematta kuin kilpailla ja tulla taistelluksi, mutta kilpailija saavuttaa suurim-



Kuva 3.5: Kauppaketjupelin struktuuri k:nnessa kaupungissa. Jokaisen lukuparin ensimmäinen luku kertoo kauppaketjun tuoton ja jälkimmäinen kilpailijan k tuoton.

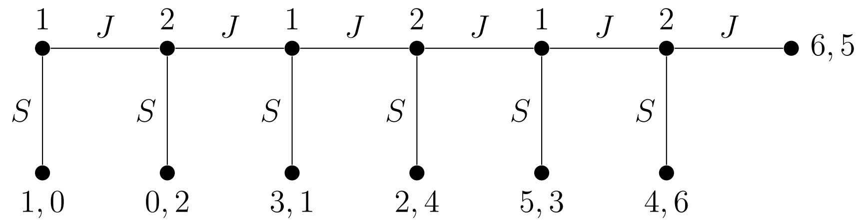
man tuoton, kun se päättää kilpailla ja kauppaketju päättää tehdä yhteistyötä. Pelin rakennetta yksittäisellä ajanhetkellä esittää kuvan 3.5 peli.

On olemassa kaksi tärkeää oletusta, jotka täydentävät tämän pelin määritelmän. Ensinnäkin jokaisella ajanhetkellä pelissä jokainen pelaaja tietää kaikki pelin aiemmat tapahtumat. Tämä mahdollistaa pelin määrittelemisen täydellisen informaation ekstensiivisenä pelinä, missä historioiden joukko on $(\cup_{k=0}^{K} Q^k) \cup (\cup_{k=0}^{K-1}(Q^k \times \{K\}))$, missä $Q^0 = \emptyset$ (tyhjä historia), Q^k on kaikkien Q:n alkioiden k-jonojen joukko ja pelaajafunktio määritellään seuraavasti: $P(h) = k+1$, jos $h \in Q^k$ ja $P(h) =KK$, jos $h \in Q^k \times \{K\}$ jokaisella $k = 0, \ldots, K-1$. Lisäksi kauppaketjun tuotto pelissä on kauppaketjun tuottojen summa K:ssa eri kaupungissa.

Tällä pelillä on useita Nashin tasapainoja: jokainen lopullinen historia, jossa lopputulos on millä ajanhetkellä tahansa E tai (K, Y), on Nashin tasapaino. (Jokaisessa tasapainotilassa, jossa pelaaja k jättää kilpailematta, kauppaketjun strategia määrittää, että se taistelee, jos k päättää kilpailla. Siis (E, T) on Nashin tasapaino.)

Toisaalta tällä pelillä on yksikäsitteinen täydellinen tasapaino alipelien suhteen, missä jokainen potentiaalinen kilpailija päättää kilpailla ja kauppaketju tekee aina yhteistyötä. (On selvää, että historiasta riippumatta kauppaketjun on tehtävä yhteistyötä K:nnessa kaupungissa. Kauppaketjun on toimittava samoin myös kaupungissa $K-1$, sillä taistelemisella kaupungissa $K-1$ ei ole pelotevaikutusta kaupungin K kilpailijalle, joka tietää kauppaketjun tekevän yhteistyötä sen kanssa. Näin jatkamalla nähdään, että kauppaketjun on aina tehtävä yhteistyötä.)

Pienillä K:n arvoilla Nashin tasapainot, jotka eivät ole täydellisiä tasapainoja, ovat vähemmän houkuttelevia kuin ne, jotka ovat. Suurilla K:n arvoilla kuitenkin täydellinen tasapaino menettää arvoaan. Tasapainossa kauppaketjun strategia siis määrää sen tekemään yhteistyötä jokaisen kilpailijan kanssa riippumatta sen aiemmasta käytöksestä. Strategian tulkinnalla (ks. s. 50) tämä tarkoittaa, että vaikka potentiaalinen kilpailija olisi havainnut, että kauppaketju on taistellut aggressiivisesti monia kilpailijoita vastaan, on



Kuva 3.6: Tuhatjalkainen (nimi tulee pelipuun muodosta), jossa $T = 6$.

sen silti oletettava, että kauppaketju tulee tekemään sen kanssa yhteistyötä. Vaikka kauppaketjun yksikäsitteinen tasapainostrategia määrääkin sen tekemään yhteistyötä jokaisen kilpailijan kanssa, näyttää potentiaalisen kilpailijan kannalta järkevältä olettaa, että jos se on havainnut kauppaketjun taistelevan aggressiivisesti useita kilpailijoita vastaan, niin se tulee luultavasti taistelemaan myös sitä vastaan. Erityisesti silloin, jos useita kiistanalaisia kaupunkeja on vielä edessä. Jos kilpailija päättää kilpailla, on kauppaketjun kannalta ajateltuna lyhytnäköistä tehdä yhteistyötä. Pitkällä aikavälillä intuitiivisesti ajateltuna kauppaketju hyötyisi aggressiivisesta maineesta, mikä voisi vähentää tulevien kilpailijoiden määrää.

Tuhatjalkainen

Kaksi pelaajaa osallistuu prosessiin, jossa heillä kummallakin on vuorotellen mahdollisuus pysäyttää (siirto S) tämä prosessi. Kumpikin pelaaja pitää parempana lopputulosta, jossa hän itse pysäyttää prosessin millä tahansa ajanhetkellä t kuin lopputulosta, jossa toinen pelaaja pysäyttää prosessin ajanhetkellä $t + 1$. Kuitenkin pelin lopputulos hyödyttäisi kumpaakin pelaajaa enemmän, jos prosessia ei pysäytettäisi kummallakaan näistä ajanhetkistä. Prosessi päättyy viimeistään pelaajan 2 tekemään siirtoon ajanhetkellä T, missä T on parillinen. Tämä peli, jossa $T = 6$, on esitetty kuvassa 3.6.

Täsmällisemmin sanoen tämän pelin historiat koostuvat kaikista t:n pituisista jonoista $J(t) = (J, \ldots, J)$, missä $0 \leq t \leq T$, ja kaikista jonoista $S(t) = (J, \ldots, J, S)$, jotka koostuvat $t - 1$:stä J:stä, joita seuraa yksittäinen S, jokaisella $1 \leq t \leq T$. Pelaajafunktio määritellään seuraavasti: $P(J(t)) = 1$, jos t on parillinen ja $t \leq T - 2$ sekä $P(J(t)) = 2$, jos t on pariton. Pelaajien preferenssit määräytyvät seuraavasti: $S(t{+}3) \succsim_{P(J(t))} S(t{+}1) \succsim_{P(J(t))} S(t{+}2)$ jokaisella $t \leq T - 3$, $J(T) \succsim_1 S(T - 1) \succsim_1 S(T)$ ja $S(T) \succsim_2 J(T)$.

Tällä pelillä on yksikäsitteinen täydellinen tasapaino alipelien suhteen, missä kumpikin pelaaja valitsee siirron S jokaisella ajanhetkellä t. Tämä lopputulos on myös tämän pelin Nashin tasapaino. Nimittäin lopputulos $J(T)$ ei voi olla vakaa, sillä $S(T) \succsim_2 J(T)$. Oletetaan sitten, että on olemassa Nashin tasapaino, missä pelaaja i valitsee siirron S ajanhetkellä t (toisin sanoen historialla $J(t - 1)$). Tällöin, jos $t \geq 2$, voi pelaaja j lisätä tuottoaan valitsemalla siirron S ajanhetkellä $t - 1$. Täten jokaisessa tasapainotilassa pelaaja

1 valitsee siirron S ensimmäisellä periodilla. Jotta tämä olisi optimaalista pelaajalle 1, on pelaajan 2 valittava siirto S periodilla 2. Nashin tasapainon käsite ei aseta rajoituksia pelaajien valinnoille myöhemmillä periodeilla: jokainen strategioiden pari, missä pelaaja 1 valitsee siirron S periodilla 1 ja pelaaja 2 valitsee siirron S periodilla 2 on Nashin tasapaino. (Huomaa kuitenkin, että tämän pelin supistetulla strategisella muodolla on olemassa yksikäsitteinen Nashin tasapaino.)

Tämän pelin yksikäsitteisessä täydellisessä tasapainossa alipelien suhteen kumpikin pelaaja olettaa, että toinen pelaaja tulee pysäyttämään prosessin seuraavalla vuorollaan. Pelaajien täytyy säilyttää tämä oletus jopa sellaisilla historioilla, joilla toinen pelaaja on päättänyt jatkaa prosessia useita kertoja aiemmin. Kuten kauppaketjuesimerkissä huomasimme, tämä oletus ei intuitiivisesti ole kovin houkutteleva; jos T ei ole hyvin pieni, tuntuu epätodennäköiseltä, että pelaaja 1 valitsisi siirron S heti pelin alussa. Tässä pelissä intuitio hieman eroaa kauppaketjupelistä, sillä tässä pelissä pitkällä historialla *kumpikin* pelaaja on toistuvasti rikkonut alipelin täydellisen tasapainon määritelmän rationaalisuusehtoa. Tämän vuoksi historialla, jossa kumpikin pelaaja on toistuvasti päättänyt jatkaa, on hyvin epäselvää miten pelaajat muodostavat uskomuksensa toisen pelaajan tulevista siirroista.

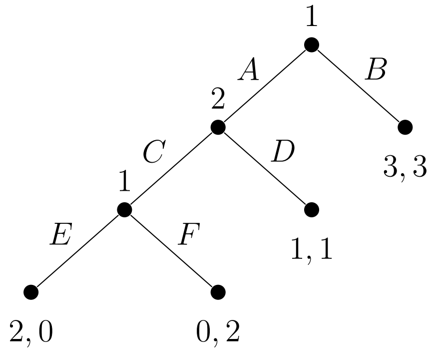
3.1.5 Heikosti dominoitujen strategioiden toistettu eliminaatio -menetelmä

Yhteys täydelliseen tasapainoon alipelien suhteen

Luvussa 2.3.3 määriteltiin heikosti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä strategiapeleille ja väitettiin, että vaikka se on vähemmän houkutteleva kuin vahvasti dominoitujen siirtojen toistettu eliminaatio -menetelmä, on se silti luonnollinen tapa pelaajalle yksinkertaistaa peliä. Kuhnin lauseen (Lause 3.1) todistuksessa määriteltiin induktio taaksepäin täydellisen informaation äärellisille ekstensiivisille peleille ja osoitettiin, että se johtaa pelin täydellisten tasapainojen joukkoon.

Näillä kahdella proseduurilla on yhteys [9, s. 108]. Olkoon Γ äärellinen täydellisen informaation ekstensiivinen peli, missä kukaan pelaaja ei ole indifferentti kahden lopullisen historian välillä (toisin sanoen ei ole olemassa pelaajaa, jonka mielestä pelin kaksi eri lopputulosta olisivat yhtä hyviä). Tällöin pelillä Γ on olemassa yksikäsitteinen täydellinen tasapaino alipelien suhteen. Määritellään sitten pelin Γ strategiselle muodolle G heikosti dominoitujen siirtojen eliminaatiosarja (heikosti dominoidut strategiat pelissä Γ), josta jäljelle jäävät siirtoprofiilit johtavat Γ:n yksikäsitteiseen täydellisen tasapainon lopputulokseen.

Olkoon h pelin Γ historia, jolla $P(h) = i$ ja $l(\Gamma(h)) = 1$, ja olkoon $a_i^* \in A(h)$ yksikäsitteinen siirto, joka valikoituu induktiolla taaksepäin historialla h. Induktio taaksepäin eliminoi jokaisen pelaajan i strategian, jo-



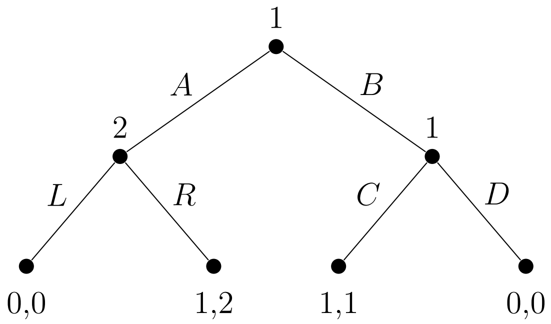
	C	D
AE	$2, 0$	$1, 1$
AF	$0, 2$	$1, 1$
BE	$3, 3$	$3, 3$
BF	$3, 3$	$3, 3$

Kuva 3.7: Ekstensiivinen peli (vasen) ja sen strateginen muoto (oikea). Pelin strategisessa muodossa on olemassa heikosti dominoitujen strategioiden eliminointijärjestys, joka eliminoi ekstensiivisen pelin yksikäsitteisen täydellisen tasapainon alipelien suhteen.

ka määrittää historialla h, siirrosta a_i^* eroavan siirron. Näiden strategioiden joukosta ne, jotka ovat johdonmukaisia historian h kanssa (toisin sanoen ne strategiat, jotka valitsevat historian h komponentin sellaisilla h:n alihistorioilla h', joilla $P(h') = i$) ovat heikosti dominoituja siirtoja pelissä G. Tässä vaiheessa tätä eliminaatioiden sarjaa kaikki nämä pelissä G heikosti dominoidut siirrot tulevat eliminoiduksi. Kun nämä eliminaatiot on suoritettu jokaisella historialla h, jolla $l(\Gamma(h)) = 1$, siirrytään historioihin h', joilla $l(\Gamma(h')) = 2$ ja suoritetaan analogiset eliminaatiot. Tätä jatketaan samalla tavalla aina pelin alkuun saakka. Jokainen pelaajan i strategia, joka on jäljellä tämän proseduurin lopussa, määrittää induktio taaksepäin -menetelmän valitseman siirron jokaisella historialla, joka on johdonmukainen pelaajan i täydellisen tasapainostrategian kanssa. Täten erityisesti pelin täydellinen tasapaino alipelien suhteen selviää tästä proseduurista ja jokainen jäljelle jäävä strategiaprofiili tuottaa yksikäsitteisen täydellisen tasapainon lopputuloksen.

Huomaa kuitenkin, että jokin eliminaatiojärjestys voi poistaa kaikki täydelliset tasapainot. Esimerkiksi kuvan 3.7 pelissä yksikäsitteinen täydellinen tasapaino on (BE, D). Mutta jos strategisen muodon pelissä heikosti dominoitu strategia AE eliminoidaan, niin tällöin jäljelle jäävässä pelissä siirto D on heikosti dominoitu. Edelleen, jos D:n jälkeen eliminoidaan strategia AF, niin jäljelle jäävistä strategiaprofiileista (BE, C) ja (BF, C) kumpikaan ei ole ekstensiivisen pelin täydellinen tasapaino alipelien suhteen (mutta kumpikin näistä strategiaprofiileista johtaa samaan tuottoprofiiliin kuin täydellinen tasapainoprofiili (BE, D)).

Huomaa myös, että jos jokin pelaaja on indifferentti kahden lopullisen historian välillä, niin tällöin (i) voi olla olemassa eliminaatioiden järjestys, joka eliminoi täydellisen tasapainon lopputuloksen ja (ii) voi olla, että ei ole



	L	R
AC	$0,0$	$1,2$
AD	$0,0$	$1,2$
BC	$1,1$	$1,1$
BD	$0,0$	$0,0$

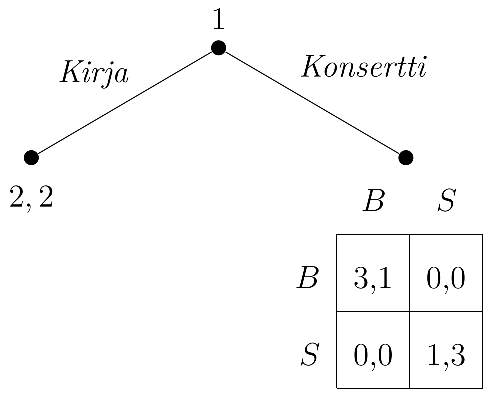
Kuva 3.8: Ekstensiivinen peli (vasen) ja sen strateginen muoto (oikea). Pelin strategisessa muodossa on olemassa heikosti dominoitujen strategioiden eliminointijärjestys, joka eliminoi ekstensiivisen pelin yksikäsitteisen täydellisen tasapainon alipelien suhteen.

olemassa eliminaatioiden järjestystä, jolla kaikki siitä selviävät strategiaprofiilit tuottavat saman lopputuloksen kuin pelin täydellinen tasapaino. Kuvan 3.8 peli havainnollistaa tilannetta (i): pelaajan 1 strategiat AC, AD ja BD ovat strategian BC heikosti dominoimia. Kun nämä strategiat on eliminoitu, mikään jäljellä olevista siirtojen parista ei tuota täydellisen tasapainon (A, R) lopputulosta $(1, 2)$. Jos tuottoprofiili $(1, 2)$ korvataan profiililla $(2, 0)$, niin peli havainnollistaa tilannetta (ii): lopputulos (A, L), joka ei ole edes Nashin tasapaino, jää jäljelle mistä tahansa eliminaatioiden järjestyksestä.

Esimerkkejä

Lopuksi esitellään vielä kaksi esimerkkiä [9, s. 110], jotka osoittavat, että heikosti dominoitujen strategioiden toistettu eliminaatio -menetelmä sisältää mielenkiintoisia piirteitä pelaajien päättelytavoista ekstensiivisissä peleissä. Esimerkit myös osoittavat, että pelit, jotka sisältävät irrelevanteilta tuntuvia elementtejä, voivat johtaa eri lopputuloksiin kuin pelit, joissa näitä elementtejä ei ole.

Esimerkki 3.5 (BvS ulkoisella optiolla)**.** Tarkastellaan kuvan 3.9 täydellisen informaation ja yhtäaikaisten siirtojen ekstensiivistä peliä. Pelissä pelaaja 1 päättää ensin pysyykö hän kotona ja lukee kirjaa vai lähteekö hän konserttiin. Jos hän päättää lukea kirjaa, niin peli päättyy. Jos hän päättää lähteä konserttiin, niin tällöin hän osallistuu peliin BvS (vrt. Esimerkki 2.1) pelaajan 2 kanssa. Historian *Konsertti* jälkeen pelaajat valitsevat siirtonsa yhtäaikaisesti. Kumpikin pelaaja pitää parhaana vaihtoehtona suosikkisäveltäjänsä konserttia toisen pelaajan seurassa, mutta mieluummin jää kotiin lukemaan kirjaa kuin lähtisi konserttiin yksin tai lähtisi konserttiin kuuntelemaan hänen vähemmän suosimaa säveltäjää.



	B	S
Kirja	$2,2$	$2,2$
B	$3,1$	$0,0$
S	$0,0$	$1,3$

Kuva 3.9: BvS ulkoisella optiolla. Vasemmalla ekstensiivinen peli täydellisellä informaatiolla ja yhtäaikaisilla siirroilla sekä oikealla sen supistettu strateginen muoto.

Pelin supistetussa strategisessa muodossa pelaajan 1 siirto S on siirron *Kirja* vahvasti dominoima. Jos pelaajan 1 siirto S on eliminoitu, niin tällöin pelaajan 2 siirto S on siirron B heikosti dominoima. Tämän eliminaation jälkeen pelaajan 1 siirto *Kirja* on siirron B vahvasti dominoima. Siis lopputulos, joka jää jäljelle on (B, B).

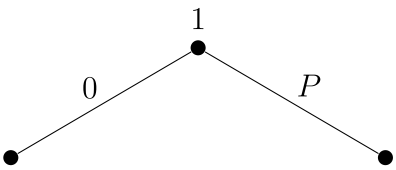
Tällaiselle eliminaatioiden sarjalle käytetään kirjallisuudessa termiä *induktio eteenpäin*. Kyseinen eliminaatioiden sarja vastaa seuraavaa päättelyketjua. Jos pelaajan 2 on osallistuttava peliin BvS, niin hän tietää, että pelaaja 1 ei ole valinnut siirtoa *Kirja*. Tämä valinta on järkevä ainoastaan, jos pelaaja 1 aikoo valita seuraavaksi siirron B (sillä pelaaja 1 voi saavuttaa valintaa *Kirja* suuremman tuoton ainoastaan lopputuloksella (B, B)). Täten pelaajan 2 tulisi myös valita siirto B.

Seuraava esimerkki heikosti dominoitujen strategioiden toistetusta eliminaatiosta johtaa vielä vahvempaan päätelmään.

Esimerkki 3.6 (Rahan polttaminen)**.** Tarkastellaan kuvan 3.10 yläosan peliä. Tässä pelissä kaksi henkilöä pelaavat BvS pelin, jossa tuotot ovat rahallisia. Ennen BvS peliä pelaaja 1 voi poistaa tuotoistaan euron (valitsemalla siirron P) tai jättää poistamatta (valitsemalla siirron 0). Pelaaja 2 havaitsee pelaajan 1 tekemän siirron. Pelissä oletetaan, että kumpikin pelaaja on riskineutraali. (Huomaa, että pelaajan 1 ensimmäistä siirtoa seuraavat pelit ovat strategisesti identtiset.)

Pelin supistettu strateginen muoto on esitetty kuvan 3.10 alaosassa. Tämän pelin heikosti dominoidut strategiat voidaan eliminoida seuraavassa järjestyksessä.

1. Pelaajan 1 strategia PS on strategian $0B$ heikosti dominoima.



	B	S
B	$3,1$	$0,0$
S	$0,0$	$1,3$

	B	S
B	$2,1$	$-1,0$
S	$-1,0$	$0,3$

	BB	BS	SB	SS
$0B$	$3,1$	$3,1$	$0,0$	$0,0$
$0S$	$0,0$	$0,0$	$1,3$	$1,3$
PB	$2,1$	$-1,0$	$2,1$	$-1,0$
PS	$-1,0$	$0,3$	$-1,0$	$0,3$

Kuva 3.10: Ekstensiivinen peli (ylhäällä) täydellisellä informaatiolla ja yhtäaikaisilla siirroilla, missä pelaaja 1 voi poistaa tuotoistaan euron ennen BvS peliä. Pelin supistettu strateginen muoto on esitetty alhaalla olevassa taulukossa.

2. Pelaajan 2 strategia SS on strategian SB heikosti dominoima.
3. Pelaajan 2 strategia BS on strategian BB heikosti dominoima.
4. Pelaajan 1 strategia $0S$ on strategian PB vahvasti dominoima.
5. Pelaajan 2 strategia SB on strategian BB heikosti dominoima.
6. Pelaajan 1 strategia PB on strategian $0B$ vahvasti dominoima.

Ainoa jäljelle jäävä strategioiden pari on $(0B, BB)$. Intuitiivinen perustelu tälle eliminaatioiden sarjalle on seuraava. Pelaaja 1 tietää, että jos hän valitsee siirron 0, niin hänen odotettu tuottonsa on vähintään $\frac{3}{4}$ (siirtoa 0 seuraavassa pelissä pelaajan 1 odotettu tuotto sekastrategian Nashin tasapainolla $((\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$ on yhtälön (2.2.1) nojalla $\frac{3}{4}$), sillä jokaista pelaajan 2 käyttäytymistä koskevaa uskomusta kohden hänellä on olemassa siirto, joka antaa hänelle vähintään tämän tuoton. Täten, jos pelaaja 2 havaitsee, että pelaaja 1 on valinnut siirron P, täytyy pelaajan 2 päätellä, että pelaaja 1 tulee valitsemaan siirron B (koska siirrolla S pelaaja 1 ei voi saavuttaa tuottoa, joka olisi suurempi kuin $\frac{3}{4}$). Jos tämä tiedetään, pelaajan 2 tulisi siis valita siirto B, kun pelaaja 1 on valinnut siirron P. Edelleen pelaaja 1 tietää tämän, joten hän voi olettaa saavansa tuoton 2, jos hän valitsee siirron P (ja sitä seuraavassa pelissä siirron B). Toisaalta, jos pelaaja 2 havaitsee, että pelaaja 1 on valinnut siirron 0, täytyy hänen olettaa, että pelaaja 1 tulee valitsemaan tässäkin tapauksessa siirron B (koska siirrolla S pelaaja 1 saavuttaa korkeintaan tuoton 1, mikä on vähemmän kuin tuotto, jonka pelaaja 1 olettaa saavuttavansa strategialla PB). Siis havaittuaan siirron 0 kannattaa pelaajan 2 valita siirto B. Täten siirto 0 on paras mahdollinen siirto pelaajalle 1 pelin ensimmäisessä vaiheessa.

Kommentteja ekstensiivisiin peleihin liittyvistä ristiriidoista

Peliteoriassa on olemassa kaksi ristiriitaista tulkintaa strategisten ja ekstensiivisten pelien ratkaisukonsepteille [9, s. 5]. "*Vakaan tilan*" tulkinta käsittelee peliä mallina, joka on suunniteltu selittämään säännöllisyyksiä, joita havaitaan suuressa joukossa samankaltaisia tilanteita. "*Deduktiivinen*" tulkinta taas käsittelee peliä eristettynä tapahtumana, joka tapahtuu ainoastaan kerran. Deduktiivinen tulkinta pyrkii määrittämään rajoituksia, joita rationaalisuus asettaa pelin lopputulokselle. Siinä oletetaan, että jokainen pelaaja päättelee rationaalisuuden periaatteiden avulla kuinka muut pelaajat käyttäytyvät.

Tarkastellaan lopuksi kahta viimeisintä esimerkkiä ja niiden eroja vakaan tilan tulkinnan ja deduktiivisen tulkinnan mielessä. Vakaan tilan tulkinnan mielessä kumpikin esimerkki jakaa saman argumentin: pelaajan 2 uskomukset tasapainoissa, jossa lopputulos on *Kirja* (ensimmäinen esimerkki) tai $(0,(S,S))$ (toinen esimerkki), ovat kummassakin järjenvastaisia, sillä jos pelaaja 1 poikkeaa näistä strategioista (valitsemalla *Konsertti* tai P), niin ainoa järkevä pelaajan 2 päätelmä tästä on se, että pelaaja 1 aikoo valita seuraavaksi siirron B. Täten myös pelaajan 2 kannattaisi valita siirto B, mikä taas tekisi pelaajan 1 tasapainostrategiasta poikkeamisesta kannattavaa. Deduktiivisen tulkinnan mielessä nämä esimerkit kuitenkin eroavat. Ensimmäisessä esimerkissä pelaajan 1 täytyy päätellä kuinka pelaaja 2 tulkitsee siirron *Konsertti*, jonka hän siis valitsee. Toisessa esimerkissä pelaajan 1 päättely pelaajan 2 tulkinnasta tilanteessa, jossa hän valitsee siirron 0, sisältää hänen uskomuksensa pelaajan 2 käyttäytymisestä tilanteessa, jossa hän valitsisi siirron P (jota hän ei tule tekemään).

Ensimmäinen esimerkki kuvaa siis tilannetta, jossa pelaaja 1 voi ensimmäisellä siirrolla antaa vihjeen pelaajalle 2 hänen tulevasta valinnasta. Jälkimmäisen esimerkin voidaan taas helposti väittää sisältävän irrationaalisia elementtejä. Tämä esimerkki nostaakin esiin kysymyksen, kuinka esittää peli, joka kuvaa tällaista tilannetta. Argumentit perustuvat oletukseen, että kuvan 3.10 peli kuvaa tilannetta siten, miten pelaajat sen havaitsevat.

Erityisesti näissä väitteissä oletetaan myös, että pelaajat havaitsevat euron hävittämisen mahdollisuuden liittyvän relevantisti tulevaan BvS-peliin. Helposti voidaan kuitenkin väittää tämän oletuksen olevan mahdoton, sillä kenenkään järkevän ihmisen ei voi kuvitella ajattelevan, että euron hävittämisen mahdollisuus vaikuttaisi siihen, minkä konsertin hän tulee valitsemaan. Täten voidaankin väittää, että rahan polttamisen mahdollisuus tulisi irrelevanttina elementtinä poistaa kokonaan tästä mallista. Rahan polttamisen mahdollisuuden poistamisen perusteleminen täsmällisesti on kaikkea muuta kuin helppoa, mutta seuraavassa joitain syitä, jotka tukevat sitä. (i) Euron poistaminen ei muuta peliä strategisesti. (ii) Jos rahan polttamista pidetään informaationa pelaajan 1 rationaalisuudesta, niin ainoa järkevä johtopäätös pelaajasta, joka polttaa rahaa on, että hän on irrationaalinen. (iii) Pelin kahden osan erilaisuuden vuoksi on epätodennäköistä, että pelaaja 2 yrittäisi päätellä pelaajan 1 käyttäytymistä pelin toisessa vaiheessa siitä, miten pelaaja 1 on käyttäytynyt pelin ensimmäisessä vaiheessa.

Yksi tämän luvun argumenttien tulkinta onkin se, että pelaajat yrittävät säestää siirtojansa vihjeillä, jotka selittävät heidän tulevia aikeita. Kuitenkin, jos pelien haluttaisiin sisältävän pelaajien välistä kommunikaatiota, vaatisi se ekstensiivisen pelin määritelmän modifioimista.

Lähteet

[1] T. Angell, *Kakutani's Fixed Point Theorem* [Verkkodokumentti], University of Delaware, USA, 2007 [Viitattu 26.11.2012].
URL www.math.udel.edu/~angell/ktheorem.pdf.

[2] E. Chatav, *Linear Independence* [Verkkodokumentti], Stony Brook University, New York, USA, 2009 [Viitattu 7.1.2013].
URL www.math.sunysb.edu/~eitan/la5.pdf.

[3] M. Dean, *Convex Analysis* [Verkkodokumentti], Brown University, Rhode Island, USA, 2010 [Viitattu 20.1.2013].
URL http://www.econ.brown.edu/fac/Mark_Dean/Maths_CA1_10.pdf.

[4] R. Howard, *The Milnor-Rogers Proof of The Brouwer Fixed Point Theorem* [Verkkodokumentti], University of South Carolina, Columbia, USA, 2004 [Viitattu 26.11.2012].
URL http://www.math.sc.edu/~howard/Notes/brouwer.pdf.

[5] M. Jerrum, *MTH6126: Metric Spaces, 4 Open Sets and Closed Sets* [Verkkodokumentti], Queen Mary, University of London, London, United Kingdom, 2010 [Viitattu 9.1.2013].
URL http://www.maths.qmul.ac.uk/~mj/MTH6126/note4.pdf.

[6] K. Kubota, *Lecture 2: Compact Sets and Continuous Functions* [Verkkodokumentti], University of Kentucky, Kentucky, USA, 1999 [Viitattu 7.1.2013].
URL http://www.msc.uky.edu/ken/ma570/lectures/lecture2/html/compact.htm.

[7] N. Lazzati, *Mathematics for Economics (Part I), Note 5: Convex Sets and Concave Functions* [Verkkodokumentti], University of Michigan, USA, 2010 [Viitattu 7.1.2013].
URL http://www-personal.umich.edu/~nlazzati/Courses/Math519/Notes/Note%205.pdf.

[8] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Ecomonic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[9] M. J. Osborne, A. Rubinstein, *A Course in Game Theory* [Verkkodokumentti], Version: 2006-9-24, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts; London, England, 1994 [Viitattu 26.5.2010].
URL http://books.osborne.economics.utoronto.ca/.

[10] M. J. Osborne, A. Rubinstein, *Solution Manual for* A Course in Game Theory *by Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein, with the assistance of Wulong Gu* [Verkkodokumentti], Version1.2, 2005-1-17, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts; London, England, 1994 [Viitattu 11.6.2012].
URL http://books.osborne.economics.utoronto.ca/.

[11] T. Vogel, *Heine-Borel Theorem (9.2)* [Verkkodokumentti], Texas A&M University, Texas, USA, 2012 [Viitattu 7.1.2013].
URL http://www.math.tamu.edu/~tvogel/410/sect92a.pdf ja http://www.math.tamu.edu/~tvogel/410/sect92b.pdf.

[12] P. Walker, *A Chronology of Game Theory* [Verkkodokumentti], University of Canterbury, New Zealand, 2012 [Viitattu 22.2.2013].
URL http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm.

[13] E. Roy Weintraub, *Toward a History of Game Theory*, Duke University Press, USA, 1992.