TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Markus Klemetti

Täydellistymät ja Henselin lemma

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2013

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
KLEMETTI, MARKUS: Täydellistymät ja Henselin lemma
Pro gradu -tutkielma, 49 s.
Matematiikka
Toukokuu 2013

Tiivistelmä

Tämä tutkielma käsittelee modulien ja renkaiden täydellistymiä. Tutustutaan aluksi tarpeellisiin käsitteisiin, kuten suodatukseen. Todistetaan Artin-Reesin lemma ja sen seuraus, Krullin leikkauslause. Esitellään topologiset ryhmät, renkaat ja modulit, ja osoitetaan että suodatus määrittää niille yksikäsitteisen topologian. Määritellään täydellistymä universaaliominaisuuden kautta, ja osoitetaan että jokaista suodatusta kohden on olemassa isomorfiaa vaille yksikäsitteinen täydellistymä. Tarkastellaan täydellistymien tärkeimpiä ominaisuuksia, ja lopuksi todistetaan Henselin lemma. Päälähdeteoksena on käytetty David Eisenbudin kirjaa Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa perehdytään täydellistymiin, jotka ovat yksi kommutatiivisen algebran perustyökaluista. Erityisen hyödyllisen renkaan täydellistymästä verrattuna alkuperäiseen renkaaseen tekee se, että täydellisessä renkaassa saadaan käyttöön Henselin lemma.

Luvussa 2 käydään aluksi nopeaan tahtiin läpi tarvittavia kommutatiivisen algebran käsitteitä. Tämän jälkeen siirrytään suodatuksiin, jotka ovat erityisen oleellinen osa täydellistymän konstruktiota. Todistetaan vielä tärkeä Artin-Reesin lemma, ja sen seuraus, Krullin leikkauslause, joka kertoo mitä renkaasta tai modulista "häviää", kun siirrytään tarkastelemaan sen täydellistymää. Lopuksi tutustutaan vielä muotorenkaiden ja -modulien sekä käänteisen rajan määritelmään ja niiden ominaisuuksiin.

Luvussa 3 unohdetaan hetkeksi luvun 2 käsitteet, ja siirrytään topologian kimppuun. Yhdistetään topologisen avaruuden ja ryhmän käsitteet, jolloin saadaan topologisen ryhmän määritelmä. Keskitytään tarkastelemaan topologisen ryhmän nolla-alkion ympäristöjä, ja huomataan, että nämä määräävät koko ryhmän topologian yksikäsitteisesti. Esitetään sellaiset ehdot nolla-alkioiden ympäristöjen kokoelmalle N, että Abelin ryhmästä G saadaan topologinen avaruus, jonka nolla-alkion ympäristökannan muodostavat kokoelman N alkiot. Tämän jälkeen esitellään vielä topologisen renkaan ja topologisen modulin käsite, ja yleistetään edellä olevat tulokset näillekin. Luvun lopussa todistetaan vielä muutamia tarvittavia topologiaan liittyviä tuloksia. Päälähteenä tässä luvussa on käytetty Daniel Murfet'n muistiinpanoja topologisista renkaista [5].

Luvussa 4 päästään määrittelemään modulin (ja renkaan) täydellistymä. Osoitetaan, että jokaiselle suodatetulle modulille on olemassa isomorfiaa vaille yksikäsitteinen täydellistymä kyseisen suodatuksen suhteen. Tämän jälkeen käydään läpi täydellistymän perusominaisuuksia, ja asioita joiden takia täydellistymä on hyödyllinen. Huomataan esimerkiksi, että täydellistymän otto säilyttää jonojen eksaktiuden, ja että Noetherin renkaan täydellistymä on edelleen Noetherin rengas. Päätetään tutkielma todistamalla kaksi eri versiota Henselin lemmasta.

Tutkielman päälähteenä luvuissa 2 ja 4 on käytetty David Eisenbudin kirjan *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* [3] lukuja 5 ja 7. Lukijalla olisi hyvä olla ainakin perustiedot algebrasta, lineaarialgebrasta ja topologiasta. Hyvää esi- tai oheislukemistoa kommutatiivisen algebran käsitteistä on esimerkiksi Atiyahin ja Macdonaldin kirja *Introduction to Commutative Algebra* [6]. Topologian perusteita voi lukea vaikkapa James Munkresin kirjasta *Topology* [2].

Mainitaan vielä erikseen, että jokaisen renkaan oletetaan olevan kommutatiivinen.

2 Kommutatiivisen algebran peruskäsitteitä

2.1 Algebrat

Määritelmä 2.1. Olkoon $\varphi : R \to S$ rengashomomorfismi. Tällöin (S, φ) on *R-algebra*. Usein jätetään φ mainitsematta ja puhutaan vain R-algebrasta S. Jos $r \in R$ ja $s \in S$, niin merkitään $rs = \varphi(r)s$.

Määritelmä 2.2. Olkoon R rengas. Olkoot S ja T R-algebroja. Kuvaus $f : S \to T$ on *R-algebrojen homomorfismi*, jos se on sekä rengashomomorfismi että R-modulien homomorfismi.

Määritelmä 2.3. Olkoon R rengas ja S R-algebra. Jos jollain $n \in \mathbb{N}$ on olemassa surjektiivinen homomorfismi $f : R[X_1, \dots X_n] \to S$, niin S on *äärellisviritteinen R-algebra.*

2.2 Noetherin renkaat

Määritelmä 2.4. Rengas R on *Noetherin rengas*, jos sen jokaisen ideaali on äärellisviritteinen. R-moduli M on *Noetherin moduli*, jos sen jokainen alimoduli on äärellisviritteinen.

Lause 2.1 (Hilbertin kantalause)**.** *Olkoon R on Noetherin rengas. Tällöin polynomirengas $R[X]$ on Noetherin rengas.*

Todistus. (ks. [3, s. 28]) Olkoon $I \subseteq R[X]$ ideaali. Osoitetaan, että I on äärellisviritteinen. Valitaan jono $f_1, f_2, \dots$ ideaalin I alkioita seuraavasti: Olkoon $f_1 \neq 0$ sellainen polynomi, että sen aste on pienin mahdollinen ideaalin I alkioista. Jos $i \geq 1$ ja $\langle f_1, f_2, \dots, f_i \rangle \neq I$, niin valitaan sellainen f_{i+1}, että tämän aste on pienin mahdollinen joukon $I \backslash \langle f_1, \dots, f_i \rangle$ alkoista. Jos $\langle f_1, \dots, f_i \rangle = I$ jollain $i \geq 1$, niin lopetetaan alkoiden valitseminen.

Olkoon a_j polynomin f_j johtava kerroin aina, kun $j \in \mathbb{N}$. Koska R on Noetherin rengas, niin edellä valittujen polynomien johtavien kerrointen virittämä ideaali $J := \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ on äärellisviritteinen. Voidaan valita ideaalille J äärellinen virittäjäjoukko alkoiden a_j, missä $j \in \mathbb{N}$, joukosta. Olkoon m pienin sellainen kokonaisluku, jolla

$$\langle a_1, \dots a_m \rangle = J.$$

Osoitetaan, että $I = \langle f_1, \dots f_m \rangle$.

Tehdään vastaoletus, että polynomeja valittaessa valittiin f_{m+1}. Voidaan kirjoittaa

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} u_j a_j,$$

missä $u_j \in R$, kun $j \in \{1, \ldots, m\}$. Koska polynomin f_{m+1} aste on nyt vähintään yhtä suuri kuin polynomien $f_1, \ldots, f_m$ asteista suurin, niin voidaan määritellä polynomi $g \in R[X]$ seuraavasti:

$$g = \sum_{j=1}^{m} u_j f_j X^{\deg f_{m+1} - \deg f_j} \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle.$$

Nythän polynomi

$$f_{m+1} - g \in I \quad \text{ja} \quad f_{m+1} - g \notin \langle f_1, \ldots, f_m \rangle,$$

ja sen aste on aidosti pienempi kuin polynomin f_{m+1}, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että polynomin f_{m+1} aste oli joukon $I \backslash \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ alkioista pienin mahdollinen.

□

Lause 2.2. *Olkoon R on Noetherin rengas ja $\varphi : R \to S$ rengashomomorfismi. Tällöin Im $\varphi \subseteq S$ on Noetherin rengas.*

Todistus. (vrt. [3, s. 28]) Ensimmäisen isomorfialauseen nojalla Im φ voidaan kirjoittaa muodossa R/J, missä $J \subseteq R$ on ideaali. Olkoon $I \subseteq R/J$ ideaali. Tällöin myös sen alkukuva I' renkaassa R on ideaali. Oletuksen mukaan R on Noetherin rengas, joten I' on lisäksi äärellisviritteinen. Nythän myös I on äärellisviritteinen, sillä ideaalin I' virittäjien kuvat virittävät sen. Näin ollen Im φ on Noetherin rengas. □

Lause 2.3. *Olkoon R_0 Noetherin rengas ja R äärellisviritteinen algebra yli renkaan R_0. Tällöin R on Noetherin rengas.*

Todistus. (ks. [3, s. 28]) Koska R on äärellisviritteinen algebra yli renkaan R_0, niin R on renkaan $S := R_0[X_1, \ldots, X_r]$ homomorfinen kuva jollain $r \in \mathbb{Z}_+$. Hilbertin kantalauseen (ja helpon induktion) nojalla S on Noetherin rengas. Lauseen 2.2 nojalla Noetherin renkaan S homomorfinen kuva R on Noetherin rengas. □

Lause 2.4. *Olkoon R Noetherin rengas ja M äärellisviritteinen R-moduli. Tällöin, jos $N \subseteq M$ on alimoduli, niin N on äärellisviritteinen.*

Todistus. (vrt. [3, s. 28-29]) Merkitään $M = \langle f_1, \ldots, f_t \rangle$. Olkoon $N \subseteq M$ alimoduli. Osoitetaan induktiolla t:n suhteen, että N on äärellisviritteinen.

Oletetaan ensin, että $t = 1$. Tällöin homomorfismi

$$f : R \to M, \ x \mapsto x f_1$$

on surjektio. Lisäksi on helppo osoittaa, että $f^{-1}(N)$ ideaali. Edelleen, $f^{-1}(N)$ on äärellisviritteinen, koska R on Noetherin rengas. Sen virittäjien kuvat virittävät R-modulin N, sillä f on surjektio.

Oletetaan sitten, että $t > 1$. Joukon N kuva $N/Rf_1 \subseteq M/Rf_1$ on äärellisviritteinen induktio-oletuksen nojalla, sillä $M/Rf_1 = \langle f_2+Rf_1, \ldots, f_t+Rf_1\rangle$. Olkoot $g_1, \ldots, g_s \in N$ sellaiset alkiot, että $N/Rf_1 = \langle g_1+Rf_1, \ldots, g_s+Rf_1\rangle$. Koska $Rf_1 \subseteq M$ on yhden alkion virittämä R-moduli, niin sen alimoduli $N \cap Rf_1$ on perusaskelen nojalla äärellisviritteinen. Merkitään $N \cap Rf_1 = \langle h_1, \ldots, h_r\rangle$.

Osoitetaan, että $N = \langle h_1, \ldots, h_r, g_1, \ldots, g_r\rangle$. Olkoon $n \in N$. Tällöin on olemassa sellaiset $a_1, \ldots a_s$, että

$$\begin{aligned} n + Rf_1 &= a_1(g_1 + Rf_1) + \cdots + a_s(g_s + Rf_1) \\ &= (a_1g_1 + \cdots + a_sg_s) + Rf_1 \\ &\in N/Rf_1. \end{aligned}$$

Siispä

$$n - a_1g_1 - \cdots - a_sg_s \in Rf_1 \cap N = \langle h_1, \ldots h_r\rangle,$$

joten

$$n \in \langle g_1, \ldots, g_s, h_1 \ldots, h_r\rangle.$$

□

2.3 Laakeus

Määritelmä 2.5. Olkoot A, B, C R-moduleja ja $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ R-homomorfismeja. Tällöin R-modulien ja R-homomorfismien jono

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

on *eksakti*, jos $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$. Tätä pidemmät R-homomorfismien jonot ovat eksakteja, mikäli jokainen pari peräkkäisiä homomorfismeja on eksakti.

Esimerkki 2.1. R-modulien ja R-homomorfismien jono

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0.$$

on eksakti, mikäli α on injektio, β on surjektio ja $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$. Sanotaan, että tämä on *lyhyt eksakti jono*.

Määritelmä 2.6. Olkoon R rengas. R-moduli F on *laakea*, jos jokaisen R-upotuksen $M' \to M$ indusoima kuvaus

$$F \otimes_R M' \to F \otimes_R M$$

on myös R-upotus.

Lause 2.5. *Olkoon R rengas, M R-moduli ja*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

eksakti R-modulien ja R-homomorfismien jono. Tällöin jono

$$M \otimes A \xrightarrow{f \otimes id} M \otimes B \xrightarrow{g \otimes id} M \otimes C \to 0$$

on eksakti.

Todistus. Sivuutetaan. Ks. [6, s. 28]. □

Huomautus. Jos R-moduli M on laakea ja

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

on eksakti jono, niin myös

$$0 \to M \otimes A \to M \otimes B \to M \otimes C \to 0$$

on eksakti jono.

Määritelmä 2.7. Olkoon R rengas, M R-moduli ja olkoot A, B joukkoja. Jos jono

$$0 \to R^{(A)} \to R^{(B)} \to M \to 0$$

on eksakti, niin se on R-modulin M *vapaa esitys*.

Lause 2.6. *Olkoon R rengas ja M R-moduli. Tällöin M on laakea, jos ja vain jos kertolaskukuvaus $I \otimes_R M \to M$ on injektio aina, kun $I \subseteq R$ on äärellisviritteinen ideaali.*

Todistus. Sivuutetaan. Ks. [3, s. 161]. □

2.4 Suodatukset ja Artin-Reesin lemma

Määritelmä 2.8. Olkoon G Abelin ryhmä. Sen aliryhmien jono $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on *Abelin ryhmän G suodatus*, mikäli $G_0 = G$ ja $G_i \supseteq G_{i+1}$ aina, kun $i \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 2.9. Olkoon R rengas. Ryhmän $(R, +)$ aliryhmien jono $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on *renkaan R suodatus*, mikäli $R_0 = R$, $R_i \supseteq R_{i+1}$ ja $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ aina, kun $i, j \in \mathbb{N}$. Tässä tapauksessa R on *suodatettu rengas*.

Huomautus. Renkaan R suodatuksen määritelmän ehdosta $R_0 R_i \subseteq R_{0+i} = R_i$ seuraa, että R_i on ideaali aina, kun $i \in \mathbb{N}$. Siispä renkaan suodatus on jono ideaaleja.

Määritelmä 2.10. Olkoon R rengas ja M R-moduli. Sen alimodulien jono $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on *R-modulin M suodatus*, mikäli $M_0 = M$ ja $M_i \supseteq M_{i+1}$ aina, kun $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan sitten, että $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on sellainen renkaan R suodatus, että $R_iM_j \subseteq M_{i+j}$ aina, kun $i, j \in \mathbb{N}$. Tässä tapauksessa R-modulin M suodatus $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on *yhteensopiva* renkaan R suodatuksen $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kanssa.

Esimerkki 2.2. Olkoon R rengas, $I \subseteq R$ ideaali ja M R-moduli. Sanotaan, että jono $(I^i)_{i\in\mathbb{N}}$ on *renkaan R I-adinen suodatus* ja jono $(I^iM)_{i\in\mathbb{N}}$ on *R-modulin M I-adinen suodatus*. Nämä täyttävät selvästi renkaan R ja R-modulin M suodatuksilta vaadittavat ehdot.

Määritelmä 2.11. Olkoon R rengas ja $I \subseteq R$ ideaali. R-modulin M suodatus $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on *I-suodatus*, jos $IM_i \subseteq M_{i+1}$ aina, kun $i \in \mathbb{N}$. I-suodatus on *I-vakaa* (tai vain *vakaa*), jos on olemassa sellainen $i_0 \in \mathbb{N}$, että $IM_i = M_{i+1}$ aina, kun $i \geq i_0$.

Määritelmä 2.12. Rengas R *porrastettu rengas*, jos se voidaan lausua sellaisena aliryhmiensä R_i, missä $i \in \mathbb{N}$, suorana summana

$$R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots ,$$

että $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$ aina, kun $i, j \in \mathbb{N}$. Jos porrastettu rengas R on S-algebra ja renkaan S kuva on joukon R_0 osajoukko, niin R on *porrastettu S-algebra*.

Määritelmä 2.13. Olkoon

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$$

porrastettu rengas. R-moduli M on *porrastettu R-moduli*, jos se voidaan esittää sellaisena alimoduliensa M_i, missä $i \in \mathbb{N}$, suorana summana

$$M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots ,$$

että $R_iM_j \subseteq M_{i+j}$ aina, kun $i, j \in \mathbb{N}$. Joukon $M_k \subseteq M$, missä $k \in \mathbb{N}$, alkiot ovat *k. asteen homogeenisiä alkioita*.

Määritelmä 2.14. Olkoon R rengas ja $I \subseteq R$ ideaali. Tällöin *ideaalin I räjäytysalgebra renkaassa R* on R-algebra

$$B_IR := R \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots .$$

Huomautus. Räjäytysalgebra B_IR voidaan myös tulkita polynomirenkaan $R[X]$ alirenkaana $R[IX] := \{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_iX^i \in R[X] \mid a_j \in I^j \text{ aina, kun } j \in \mathbb{N}\}$.

Olkoon R rengas, I ideaali, M R-moduli ja $J := (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ modulin M I-suodatus. Tällöin suora summa

$$B_JM := M \oplus M_1 \oplus \cdots$$

on porrastettu B_IR-moduli: Jos $x \in I^k$ ja $y \in M_l$, missä $k, l \in \mathbb{N}$, niin

$$xy \in I^kM_l \subseteq I^{k-1}M_{l+1} \subseteq \cdots \subseteq M_{l+k},$$

koska J on I-suodatus.

Lause 2.7. *Olkoon R rengas, $I \subseteq R$ ideaali ja M äärellisviritteinen R-moduli. Olkoon lisäksi $J := (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sellainen R-modulin M I-suodatus, että M_i on äärellisviritteinen R-moduli aina, kun $i \in \mathbb{N}$. Tällöin suodatus J on I-vakaa, jos ja vain jos $B_I R$-moduli $B_J M$ on äärellisviritteinen.*

Todistus. (vrt. [3, s. 149]) Oletetaan ensin, että $B_J M$ on äärellisviritteinen. On siis olemassa sellaiset $x_1, \dots, x_k \in B_J M$, että $B_J M = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Tällöinhän modulin $B_J M$ virittää äärellinen määrä finiittisiä perheitä, joten on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $x_1, \dots, x_k$ ovat suoran summan

$$M \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

alkioita. Voidaan merkitä

$$x_j = \sum_{i=0}^{n} y_{j,i},$$

missä $y_{j,i} \in M_i$ on i. asteen homogeeninen alkio aina, kun $i \in \{0, \dots, n\}$ ja $j \in \{1, \dots, k\}$. Nythän $B_J M$ on näiden astetta $k \le n$ olevien homogeenisten alkioiden virittämä. Täten siitä, että J on I-suodatus seuraa, että alimoduli

$$M_n \oplus M_{n+1} \oplus \cdots$$

on joukon $\{a y_{j,i} \mid a \in I^{n-i}\} \subseteq M_n$ alkioiden virittämä. Näin ollen

$$M_{n+i} = I^i M_n$$

aina, kun $i \in \mathbb{N}$, joten J on vakaa.

Oletetaan sitten, että suodatus J on vakaa. Tällöin on olemassa sellainen $i_0 \in \mathbb{N}$, että $M_{j+i} = I^j M_i$ aina, kun $i \ge i_0$. Oletuksen nojalla R-modulilla M_i on olemassa äärellinen virittäjäjoukko aina, kun $i \in \mathbb{N}$. Näiden virittäjäjoukkojen yhdiste V virittää $B_I R$-modulina koko joukon $B_J M$:

- Jos $x \in M_i$, missä $0 \le i \le i_0$, niin $x \in \langle V \rangle$, sillä $R \subseteq B_I R$ ja V sisältää R-modulin M_i virittäjät.

- Jos $x \in M_i$, missä $i > i_0$, niin on olemassa sellainen $j \in \mathbb{Z}_+$, että $M_i = M_{i_0+j} = I^j M_{i_0}$. Nythän V sisältää R-modulin M_{i_0} virittäjät ja $R, I^j \subseteq B_I R$, joten $x \in \langle V \rangle$.

$\square$

Lause 2.8 (Artin-Reesin Lemma)**.** *Olkoon R Noetherin rengas ja $I \subseteq R$ ideaali. Olkoot M ja M' sellaisia äärellisviritteisiä R-moduleita, että $M' \subseteq M$. Olkoon lisäksi $J := (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ modulin M I-vakaa suodatus. Tällöin suodatuksen J indusoima suodatus $(M' \cap M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ modulille M' on myös I-vakaa.*

Todistus. (vrt. [3, s. 149]) Olkoon $J' := (M'_i)_{i\in\mathbb{N}} := (M'\cap M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suodatuksen J indusoima suodatus alimodulille M'. Osoitetaan ensin, että $B_{J'}M'$ on B_IR-modulin B_JM porrastettu alimoduli: Jos $a \in I^i$ ja $x \in M'_j = M' \cap M_j$, niin $ax \in M_{i+j}$ sillä B_JM on porrastettu B_IR-moduli. Lisäksi $ax \in M'$, sillä M' on R-moduli ja $a \in I^i \subseteq R$. Siispä $ax \in M' \cap M_{i+j} = M'_{i+j}$.

Nyt J on vakaa suodatus, joten B_JM on äärellisviritteinen B_IR-moduli lauseen 2.7 nojalla. Osoitetaan seuraavaksi, että B_IR on Noetherin rengas.

Oletettiin, että R on Noetherin rengas, joten I on äärellisviritteinen ideaali. Kirjoitetaan $I = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, missä $x_1, \ldots, x_n \in R$. Osoitetaan, että sijoitushomomorfismi $\varphi : R[X_1, \ldots, X_n] \to B_IR$, $f \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ on surjektio.

- Jos $x \in I$, niin on olemassa sellaiset $a_1, \ldots, a_n \in R$, että $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Tällöin $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ on alkion x alkukuva.

- Jos $x \in I^j$, missä $j \in \mathbb{N}$, niin voidaan kirjoittaa $x = y_1 \cdots y_j$, missä $y_1, \ldots, y_j \in I$. Äskeisen perusteella aina, kun $i \in \{0, \ldots, j\}$, on olemassa sellainen $f_i \in R[X_1, \ldots, X_n]$, että $\varphi(f_i) = y_i$. Täten alkiolla x on alkukuva $f_1 \cdots f_j$.

- Jos $x \in B_IR$, niin voidaan kirjoittaa $x = \sum_{i=0}^{k} a_i$, missä $a_j \in I^{i_j}$ jollain $i_j \in \mathbb{N}$ aina, kun $j \in \{0, \ldots, k\}$. Edellisen kohdan perusteella aina, kun $i \in \mathbb{N}$, on olemassa sellainen $f_i \in R[X_1, \ldots, X_n]$, että $\varphi(f_i) = a_i$. Nythän $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i$ on alkion x alkukuva.

Löydettiin siis surjektiivinen homomorfismi $R[X_1, \ldots, X_n] \to B_IR$, joten B_IR on äärellisviritteinen R-algebra. Lauseen 2.3 nojalla B_IR on Noetherin rengas.

Nythän siis B_JM on äärellisviritteinen B_IR-moduli ja B_IR on Noetherin rengas, joten lauseen 2.4 nojalla $B_{J'}M'$ on äärellisviritteinen B_IR-moduli. Lauseesta 2.7 seuraa tällöin, että suodatus J' on I-vakaa. □

2.5 Krullin leikkauslause

Apulause 2.1. *Olkoon R rengas, M äärellisviritteinen R-moduli ja $I \subseteq R$ sellainen ideaali, että $IM = M$. Tällöin on olemassa sellainen alkio $r \in I$, että $(1 - r)M = 0$.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. [3, s. 124]. □

Määritelmä 2.15. Rengas R on *lokaali*, jos sillä on yksikäsitteinen maksimaalinen ideaali.

Lause 2.9 (Krullin leikkauslause). *Olkoon R Noetherin rengas ja $I \subseteq R$ ideaali. Jos M on äärellisviritteinen R-moduli, niin on olemassa sellainen alkio $r \in I$, että*

$$(1-r)\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} I^i M\right) = \{0\}.$$

Jos R on kokonaisalue tai lokaali rengas ja I on aito ideaali, niin

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I^i = \{0\}.$$

Todistus. (vrt. [3, s. 150]) Sovelletaan Artin-Reesin lemmaa R-modulin M alimoduliin $\cap_{i=1}^{\infty} I^i M$. Tällöin on olemassa sellainen kokonaisluku p, että

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{\infty} I^i M &= \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} I^i M\right) \cap I^{p+1} M \\ &= I\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} I^i M\right) \cap I^p M\right) \\ &= I\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} I^i M\right).\end{aligned}$$

Ensimmäinen väite seuraa nyt apulauseesta 2.1.

Toisen väitteen todistamiseksi huomataan, että R itse on äärellisviritteinen R-moduli, joten voidaan asettaa $M = R$. Tällöin riittää osoittaa, että annetuissa tapauksissa $1-r$ ei ole nollantekijä. Koska I on aito ideaali, niin $r \neq 1$, joten $1-r \neq 0$. Jos R on kokonaisalue, niin asia on selvä. Jos R on lokaali rengas ja $m \subseteq R$ sen maksimaalinen ideaali, niin oltava $I \subseteq m$. Siispä myös $r \in m$, joten oltava $1-r \notin m$. Näin ollen $1-r$ on yksikkö. □

2.6 Muotorenkaat ja -modulit

Olkoon R rengas ja $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sen suodatus. Sanotaan, että porrastettu rengas

$$\mathrm{gr}\ R := R/I_1 \oplus I_1/I_2 \oplus \cdots .$$

on renkaan R *muotorengas* suodatuksen $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suhteen.

Muotorenkaan gr R kertolasku määritellään seuraavasti: Jos $a \in I_m$ ja $b \in I_n$, niin

$$(a + I_{m+1})(b + I_{n+1}) = ab + I_{m+n+1} \in I_{m+n}/I_{m+n+1}.$$

Osoitetaan, että tämä on mielekästä. Olkoot $a, a' \in I_m$ ja $b, b' \in I_n$. Oletetaan, että $a + I_{m+1} = a' + I_{m+1}$ ja $b + I_{n+1} = b' + I_{n+1}$. Tästä seuraa, että $a - a' \in I_{m+1}$ ja $b - b' \in I_{n+1}$, joten

$$\begin{aligned}ab - a'b' &= ab - ab' + ab' - a'b' \\ &= a(b-b') + b'(a-a') \in I_{n+m+1}.\end{aligned}$$

Näin ollen $ab + I_{n+m+1} = a'b' + I_{n+m+1}$.

Jos $I \subseteq R$ on ideaali ja $I_i = I^i$ aina, kun $i \in \mathbb{N}$, niin sanotaan, että $\mathrm{gr}_I R := \mathrm{gr}\ R$ on renkaan R muotorengas ideaalin I suhteen.

Olkoon M R-moduli ja $J := (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sen I-suodatus. R-modulin M *muotomoduli* suodatuksen J suhteen on suora summa

$$\mathrm{gr}_J M := M/M_1 \oplus M_1/M_2 \oplus \cdots .$$

Tästä saadaan porrastettu $\mathrm{gr}_I R$-moduli, kun määritellään kertolasku seuraavasti: Jos $a \in I^m$ ja $b \in M_n$, niin

$$(a + I^m)(b + M_n) = ab + M_{n+m+1} \in M_{m+n}/M_{m+n+1}.$$

Tämän mielekkyys voidaan todeta samoin kuin muotorenkaan kertolaskun tapauksessa edellä. Jos sekaantumisen vaaraa ei ole, voidaan muotomodulille käyttää merkintää $\mathrm{gr}\ M$.

Lause 2.10. *Olkoon R rengas, $I \subseteq R$ ideaali ja M äärellisviritteinen R-moduli. Jos*

$$J := (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

on R-modulin M äärellisviritteisistä alimoduleista koostuva I-vakaa suodatus, niin $\mathrm{gr}_J M$ on äärellisviritteinen $\mathrm{gr}_I R$-moduli.

Todistus. (ks. [3, s. 147]) Oletetaan, että $IM_i = M_{i+1}$ aina, kun $i \geq n$. Selvästi $(I/I^2)(M_i/M_{i+1}) = M_{i+1}/M_{i+2}$ aina, kun $i \geq n$. Täten R-moduleiden $M_0/M_1, \ldots, M_n/M_{n+1}$ virittäjien yhdiste virittää renkaan $\mathrm{gr}\ M$. Koska jokainen M_i, missä $i \in \{0, \ldots n\}$ on äärellisviritteinen, niin jokainen virittäjäjoukko voidaan valita äärelliseksi. $\square$

Olkoon M R-moduli, jolla on suodatus

$$J := (M_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Tällöin ei ole olemassa kiinnostavia luonnollisia homomorfismeja $M \to \mathrm{gr}_J M$. Eräs kiinnostava kuvaus voidaan kuitenkin määritellä. Jos $f \in M$, niin merkitään

$$m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid f \in M_n\}.$$

Määritellään alkion f *johtava muoto* $\mathrm{in}(f)$ seuraavasti:

$$\mathrm{in}(f) = \begin{cases} f + M_{m+1} \in M_m/M_{m+1} \subseteq \mathrm{gr}\ M, & \text{jos } m \text{ on olemassa} \\ 0, & \text{jos } m \text{ ei ole olemassa eli jos } f \in \cap_{i=1}^{\infty} M_i \end{cases}$$

Lukua m sanotaan alkion f *asteeksi*. Merkitään tätä $\deg(f)$.

Oletetaan sitten, että $I \subseteq R$ on ideaali ja J on R-modulin M I-suodatus. Jos $M' \subseteq M$ on alimoduli, niin saadaan johtavien muotojen virittämä $\mathrm{gr}_I R$-modulin $\mathrm{gr}_J M$ alimoduli

$$\mathrm{in}(M') := \langle \mathrm{in}(f) \mid f \in M' \rangle.$$

2.7 Käänteiset rajat

Määritelmä 2.16. Olkoon R rengas. *R-modulien käänteinen systeemi* on pari $\big((M_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}\big)$, missä $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on jono R-moduleja ja $\theta_j : M_j \to M_{j-1}$ on R-modulien homomorfismi aina, kun $j \geq 1$.

Määritelmä 2.17. Olkoon $\big((M_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}\big)$ R-modulien käänteinen systeemi. Jono $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ on *koherentti*, mikäli $\theta_{j+1}(x_{j+1}) = x_j$ aina, kun $j \geq 1$. Käänteisen systeemin *käänteinen raja*, jota merkitään

$$\varprojlim M_i,$$

on kaikkien käänteisen systeemin koherenttien jonojen joukko.

Huomautus. Käänteinen raja $\varprojlim M_i$ on R-modulin $\prod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ alimodulina myös R-moduli. Laskutoimitukset määritellään komponenteittain eli jos $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sekä $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ovat koherentteja jonoja ja $r \in R$, niin

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{ja} \quad r(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (rx_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Olkoon $\big((M_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}\big)$ R-modulien käänteinen systeemi ja M' R-moduli. Oletetaan lisäksi, että aina, kun $i \in \mathbb{N}$, on olemassa sellainen R-modulien homomorfismi $g_i : M' \to M_i$, että $\theta_{i+1} \circ g_{i+1} = g_i$. Tällöin jono $(g_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ on koherentti aina, kun $x \in M'$, joten voidaan määritellä R-modulien homomorfismi

$$g : M' \to \varprojlim M_i,\ x \mapsto (g_i(x))_{i\in\mathbb{N}}.$$

Tätä sanotaan *käänteisen rajan universaaliominaisuudeksi.*

Renkaiden käänteinen systeemi voidaan määritellä vastaavasti kuin moduleiden. Se on pari $\big((R_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}\big)$, missä $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on jono renkaita ja θ_j on rengashomomorfismi $R_j \to R_{j-1}$ aina, kun $j \geq 1$. Tämän käänteinen raja määritellään samoin kuin modulien käänteisen systeemin tapauksessa. Jonojen kertolasku tapahtuu komponenteittain, jolloin koherenttien jonojen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ja $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tulo on

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}(y_i)_{i\in\mathbb{N}} := (x_i y_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Käänteinen raja $\varprojlim R_i$ on renkaan $\prod_{i\in\mathbb{N}} R_i$ alirengas, joten se on rengas.

3 Topologiaa

3.1 Topologiset ryhmät

Määritelmä 3.1. *Topologinen ryhmä* on Abelin ryhmä A varustettuna sellaisella topologialla, että kuvaukset

$$a : A \times A \to A,\ (a, b) \mapsto a + b \quad \text{ja}$$
$$v : A \to A,\ a \mapsto -a$$

ovat jatkuvia.

Huomautus. Kuvaus v on selvästi homeomorfismi, joten jos $U \subseteq A$ on avoin, niin $-U$ on avoin myös.

Apulause 3.1. *Olkoon A topologinen ryhmä. Jos $c \in A$, niin kuvaus $A \to A$, $x \mapsto c + x$ on homeomorfismi.*

Todistus. (ks. [5, s. 1]) Tuloavaruuden $A \times A$ aliavaruus $\{c\} \times A$ on selvästi homeomorfinen avaruuden A kanssa kuvauksessa $(c, b) \mapsto b$. Lisäksi summakuvauksen a rajoittuma joukkoon $\{c\} \times A$ on jatkuva, ja tietenkin myös bijektio (koska A on ryhmä). Täten on olemassa jatkuva bijektio $A \to A$, missä $x \mapsto c + x$. Selvästi tällä on käänteiskuvaus $x \mapsto -c + x$, joten saadaan homeomorfismi $x \mapsto c + x$ aina, kun $c \in A$. □

Huomautus. Olkoon A topologinen ryhmä. Jos $U \subseteq A$ on avoin ja $c \in A$, niin joukko $U + c = \{u + c \mid u \in U\}$ on myös avoin. Täten, jos $V \subseteq A$ on avoin, niin myös summa $U + V$ on tällaisten joukkojen yhdisteenä avoin. Jos $c \in A$, niin U on pisteen c ympäristö täsmälleen silloin, kun $-c + U$ on pisteen 0 ympäristö. Täten nolla-alkion ympäristöt määrittävät yksikäsitteisesti topologisen ryhmän A topologian.

Määritelmä 3.2. Olkoon X topologinen avaruus. Jos $x \in X$, niin pisteen x *ympäristökanta* on sellainen epätyhjä joukko M, että aina, kun U on pisteen x ympäristö, on olemassa pisteen x ympäristö $V \in M$, jolla $V \subseteq U$.

Lause 3.1. *Olkoon A topologinen (Abelin) ryhmä. Tällöin nolla-alkion ympäristöistä koostuva joukko N toteuttaa seuraavat ehdot:*

N0. Jos $U \in N$ ja $c \in U$, niin on olemassa sellainen $V \in N$, että $c+V \subseteq U$.

N1. Jos $U \in N$, niin on olemassa sellainen $V \in N$, että $V + V \subseteq U$.

N2. Jos $U \in N$, niin $-U \in N$.

Jos B on Abelin ryhmä ja N on epätyhjä, ehdot N0, N1 ja N2 toteuttava joukon B osajoukkojen kokoelma, ja ehdot

a) jos $U \in N$, niin $0 \in U$,

b) jos $U, V \in N$, niin on olemassa sellainen $W \in N$, että $W \subseteq U \cap V$,

ovat voimassa, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen joukon B topologia, että B on topologinen ryhmä ja N on sen nolla-alkion ympäristökanta.

Todistus. (vrt. [5, s. 2]) $N0$: Olkoon $U \in N$ ja $c \in U$. Nythän kuvaus $x \mapsto x - c$ on homeomorfismi apulauseen 3.1 perusteella, joten $U - c$ on avoin joukko. Koska $c \in U$, niin $0 \in U - c$. Siispä $U - c \in N$ ja edelleen $c + (U - c) = U \subseteq U$.

$N1$: Olkoon $U \in N$. Koska yhteenlaskukuvaus $a : (x, y) \mapsto x + y$ on jatkuva ja $(0, 0) \in a^{-1}(U)$, niin tulotopologian määritelmän nojalla on olemassa sellaiset avoimet joukot $V_1, V_2 \subseteq A$, että

$$(0, 0) \in V_1 \times V_2 \subseteq a^{-1}(U).$$

Asetetaan $V = V_1 \cap V_2$, jolloin

$$V + V \subseteq V_1 + V_2 \subseteq U.$$

$N2$: Olkoon $U \in N$. Koska kuvaus $v : x \mapsto -x$ on jatkuva, niin $v^{-1}(U) = -U$ on avoin. Lisäksi, jos $0 \in U$, niin myös $0 \in -U$. Siispä $-U \in N$.

Osoitetaan sitten jälkimmäinen väite. Olkoon B Abelin ryhmä ja N epätyhjä kokoelma joukon B osajoukkoja, joilla on annetut ominaisuudet. Määritellään avoin joukko seuraavasti: Osajoukko $U \subseteq B$ on avoin täsmälleen silloin, jos kaikilla $x \in U$ on olemassa sellainen $W \in N$, että $x + W \subseteq U$. Osoitetaan, että tämä on topologia:

- Tietenkin $\emptyset$ ja B ovat avoimia.
- Oletetaan, että U_i on avoin kaikilla $i \in I$. Voidaan olettaa, että $U_i \neq \emptyset$ jollain $i \in I$. Olkoon $x \in U_i$. Tällöin on olemassa sellainen $W \in N$, että $x + W \subseteq U_i \subseteq \cup_{i \in I} U_i$, joten $\cup_{i \in I} U_i$ on avoin.
- Oletetaan, että U_i on avoin, kun $i \in \{1, \ldots, n\}$. Voidaan olettaa, että $\cap_{i=1}^n U_i \neq \emptyset$. Olkoon $x \in \cap_{i=1}^n U_i$. Tällöin kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ on olemassa sellainen $W_i \in N$, että $x + W_i \subseteq U_i$. Merkitään $W = \cap_{i=1}^n W_i$. Nythän kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $x + W \subseteq U_i$, joten $x + W \subseteq \cap_{i=1}^n U_i$. Näin ollen $\cap_{i=1}^n U_i$ on avoin.

Ehdosta $N0$ seuraa, että joukon N alkiot ovat avoimia.

Osoitetaan seuraavaksi, että jos U on avoin, niin $c + U$ on avoin aina, kun $c \in B$. Nimittäin, jos $b \in c + U$, niin $b - c \in U$, ja näin ollen on olemassa sellainen $V \in N$, että $b - c + V \subseteq U$. Täten $b + V \subseteq c + U$, joten $c + U$ on avoin.

Osoitetaan sitten, että B on topologinen ryhmä. Tätä varten on näytettävä, että laskutoimitukset $a : B \times B \to B$ ja $v : B \times B$ ovat jatkuvia. Olkoon U avoin joukko ja $(c, d) \in a^{-1}(U)$. Tällöin $c + d \in U$, joten on olemassa sellainen $W \in N$, että $c + d + W \subseteq U$. Ehdon $N1$ nojalla on olemassa sellainen $Q \in N$, että $Q + Q \subseteq W$. Siispä

$$(c, d) \in (c + Q) \times (d + Q) \subseteq a^{-1}(U),$$

mistä nähdään, että $a^{-1}(U)$ on avoin. Täten a on jatkuva. Kuvauksen v jatkuvuuden näyttämiseksi on osoitettava, että jos U on avoin, niin myös $-U$ on. Mutta jos $c \in -U$, niin on olemassa sellainen $V \in N$, että $-c + V \subseteq U$.

Siis $c + (-V) \subseteq -U$. Koska ehdon $N2$ nojalla $-V \in N$, niin on osoitettu, että v on jatkuva. Näin ollen B on topologinen ryhmä.

Osoitetaan vielä annetun topologian yksikäsitteisyys. Olkoon T jokin toinen joukon B topologia, jonka suhteen B on topologinen ryhmä. Oletetaan lisäksi, että kokoelma N on tämän topologian nolla-alkion ympäristökanta. Oletetaan ensin, että U on avoin alkuperäisessä topologiassa. Tällöin kyseisen topologian määritelmän perusteella aina, kun $x \in U$, on olemassa sellainen $V_x \in N$, että $x + V_x \subseteq U$. Koska $t \mapsto x + t$ on homeomorfismi, niin $x + V_x$ on avoin joukko topologiassa T aina, kun $x \in U$. Siispä myös $\cup_{x \in U} x + V_x = U$ on avoin topologiassa T.

Oletetaan sitten, että U on avoin topologiassa T. Tällöin, jos $x \in U$, niin $U - x$ on nolla-alkion ympäristö topologiassa T. Siispä on olemassa sellainen $V \in N$, että $V \subseteq U - x$. Täten $x + V \subseteq U$, joten U on avoin alkuperäisessä topologiassa. Siispä topologiat ovat samat. $\square$

3.2 Topologiset renkaat ja modulit

Määritelmä 3.3. *Topologinen rengas* koostuu renkaasta A ja sellaisesta topologiasta, että $(A, +)$ on topologinen ryhmä ja kertolasku $m : A \times A \to A$, $(b, c) \mapsto bc$ on jatkuva kuvaus. Kaikilla osajoukoilla $V, W \subseteq A$ asetetaan $V \cdot W = \{vw \mid v \in V, w \in W\}$.

Apulause 3.2. *Olkoon A topologinen rengas. Jos $c \in A$, niin kuvaus $A \to A$, $x \mapsto cx$ on jatkuva.*

Todistus. (vrt. [5, s. 2]) Kuvaus $A \to \{c\} \times A$, $b \mapsto (c, b)$ on selvästi homeomorfismi. Koska tulokuvaus $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$, on jatkuva, niin myös sen rajoittuma joukkoon $\{c\} \times A$ on jatkuva. Kuvaukset yhdistämällä saadaan haluttu jatkuva kuvaus $A \to A$, $x \mapsto cx$. $\square$

Lause 3.2. *Olkoon A topologinen rengas. Tällöin nolla-alkion ympäristöjen joukko N toteuttaa lauseen 3.1 ehdot N0, N1 ja N2, sekä ehdot*

N3. jos $c \in A$ ja $U \in N$, niin on olemassa sellainen $V \in N$, että $cV \subseteq U$,

N4. jos $U \in N$, niin on olemassa sellainen $V \in N$, että $V \cdot V \subseteq U$.

Kääntäen, oletetaan, että A on rengas ja N on epätyhjä joukon A osajoukkojen kokoelma, joka toteuttaa ehdot $N0$, $N1$, $N2$, $N3$, $N4$ ja

a) $0 \in U$ kaikilla $U \in N$,

b) jos $U, V \in N$, niin on olemassa sellainen $W \in N$, että $W \subseteq U \cap V$.

Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen joukon A topologia, että A on topologinen rengas ja N on sen nolla-alkion ympäristökanta.

Todistus. (vrt. [5, s. 2-3]) Oletetaan ensin, että A on topologinen rengas. Lauseen 3.1 nojalla N toteuttaa ehdot $N0$, $N1$ ja $N2$. Ehto $N3$ seuraa kuvauksen $x \mapsto cx$ jatkuvuudesta, kuten yhteenlaskun tapauksessa. Todistetaan vielä $N4$. Olkoon $U \in N$. Tällöin kertolaskukuvauksen m jatkuvuuden nojalla alkukuva $m^{-1}(U)$ on avoin. Tulotopologian määritelmän nojalla on olemassa sellaiset V_1, $V_2 \in N$, että $(0,0) \in V_1 \times V_2 \subseteq m^{-1}(U)$. Asetetaan $V = V_1 \cap V_2$, jolloin

$$V \times V \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq m^{-1}(U).$$

Täten $V \cdot V \subseteq U$.

Kääntäen, oletetaan, että A on rengas ja N on sen osajoukkojen kokoelma, jolla on mainitut ominaisuudet. Käyttämällä samaa topologiaa kuin lauseessa 3.1, saadaan topologinen ryhmä A. Osoitetaan, että A varustettuna tällä topologialla on topologinen rengas.

Ensiksi on osoitettava, että jos $c \in A$, niin kuvaus $\theta : A \to A$, $x \mapsto cx$ on jatkuva. Olkoon $U \subseteq A$ avoin joukko ja $x \in \theta^{-1}(U)$ eli $cx \in U$. Ehdon $N0$ perusteella on olemassa sellainen $W \in N$, että $cx + W \subseteq U$. Olkoon sitten $V \in N$ sellainen joukko, että $cV \subseteq W$ ($N3$). Tällöinhän $x + V \subseteq \theta^{-1}(U)$. Täten $\theta^{-1}(U)$ on avoin, ja θ on jatkuva.

Osoitetaan sitten, että tulokuvaus $m : A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto ab$ on jatkuva. Olkoon $U \subseteq A$ avoin joukko ja $(c,d) \in m^{-1}(U)$. Määritellään kuvaus $\psi : A \to A$, $x \mapsto xd$. Nythän $cd \in U$, joten on olemassa sellainen $W \in N$, että $cd + W \subseteq U$. Olkoon $Q \in N$ sellainen joukko, että $Q + Q \subseteq W$. Edelleen, ehdon $N4$ nojalla on olemassa sellainen $V \in N$, että $V \cdot V \subseteq Q$. Olkoon $P \in N$ sellainen joukko, että $P + P \subseteq Q$. Asetetaan

$$P_d = \psi^{-1}(P) \cap Q \cap V,$$
$$P_c = \theta^{-1}(P) \cap Q \cap V.$$

Tällöin, jos $v \in P_d$ ja $v' \in P_c$, niin

$$(c+v)(d+v') = cd + cv' + vd + vv' \in cd + W \subseteq U,$$

sillä $cv', vd \in P$, $vv' \in Q$ ja edelleen $cv' + vd \in Q$, mistä saadaan

$$cv' + vd + vv' \in Q + Q \subseteq W.$$

Täten

$$(c,d) \in (c + P_d) \times (d + P_c) \subseteq m^{-1}(U).$$

Koska P_c ja P_d ovat avoimien joukkojen leikkauksina avoimia, niin m on jatkuva. Tämän topologian yksikäsitteisyys on todistettu lauseessa 3.1. □

Määritelmä 3.4. Olkoon A topologinen rengas ja M A-moduli. Tällöin, jos M on topologinen Abelin ryhmä ja laskutoimitus

$$s : A \times M \to M, (a,x) \mapsto ax$$

on jatkuva, niin M on *topologinen A-moduli.*

Apulause 3.3. *Olkoon A topologinen rengas ja M topologinen A-moduli. Tällöin kuvaukset $A \to M$, $a \mapsto ay$ ja $M \to M$, $x \mapsto bx$ ovat jatkuvia aina, kun $b \in A$ ja $y \in M$.*

Todistus. Kuvaukset $A \to A \times \{y\}$ ja $M \to \{b\} \times M$ ovat selvästi homeomorfismeja. Koska tulokuvaus $A \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$, on jatkuva, niin myös sen rajoittumat joukkoihin $A \times \{y\}$ ja $\{b\} \times M$ ovat jatkuvia. Kuvaukset yhdistämällä saadaan halutut jatkuvat kuvaukset $A \to M$, $a \mapsto ay$ ja $M \to M$, $x \mapsto bx$. □

Lause 3.3. *Olkoon A topologinen rengas, N' sen nolla-alkion ympäristökanta. Olkoon M topologinen A-moduli. Tällöin A-modulin M nolla-alkion ympäristöjen kokoelma N toteuttaa lauseen 3.1 ehdot $N0$, $N1$ ja $N2$ sekä ehdot*

N5. jos $V \in N$, niin on olemassa sellaiset $T \in N'$ ja $U \in N$, että $TU \subseteq V$,

N6. jos $V \in N$ ja $x \in M$, niin on olemassa sellainen $T \in N'$, että $Tx \subseteq V$,

N7. jos $V \in N$ ja $a \in A$, niin on olemassa sellainen $U \in N$, että $aU \subseteq V$.

Kääntäen, oletetaan, että M on A-moduli ja N on epätyhjä joukon M osajoukkojen kokoelma, joka toteuttaa ehdot $N0$, $N1$, $N2$, $N5$, $N6$, $N7$ ja

a) $0 \in U$ kaikilla $U \in N$

b) jos $U, V \in N$, niin on olemassa sellainen $W \in N$, että $W \subseteq U \cap V$.

Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen joukon M topologia, että M on topologinen A-moduli ja N on sen nolla-alkion ympäristökanta.

Todistus. Oletetaan ensin, että M on topologinen A-moduli ja N sen nolla-alkion ympäristöjen kokoelma. Ehdot $N0$, $N1$ ja $N2$ seuraavat lauseesta 3.1.

$N5$: Olkoon $V \in N$. Koska kertolaskukuvaus $s : (a, x) \mapsto ax$ on jatkuva, niin $s^{-1}(V)$ on avoin. Lisäksi $0 \in s^{-1}(V)$, joten on olemassa sellaiset $T \in N'$ ja $U \in N$, että $T \times U \subseteq s^{-1}(V)$. Täten $TU \subseteq V$.

$N6$: Olkoon $V \in N$ ja $x \in M$. Koska $\varphi : A \to M$, $a \mapsto ax$ on jatkuva apulauseen 3.3 nojalla, niin $\varphi^{-1}(V) \subseteq A$ on avoin. Koska $0 \in \varphi^{-1}(V)$, niin on olemassa sellainen $T \in N'$, että $T \subseteq \varphi^{-1}(V)$. Siis

$$Tx = \varphi(T) \subseteq V.$$

$N7$: Olkoon $V \in N$ ja $a \in A$. Koska $\psi : M \to M$, $x \mapsto ax$ on jatkuva apulauseen 3.3 nojalla, niin $\psi^{-1}(V) \subseteq M$ on avoin. Koska $0 \in \psi^{-1}(V)$, niin on olemassa sellainen $U \in N$, että $U \subseteq \psi^{-1}(U)$. Tällöin

$$aU = \psi(U) \subseteq V.$$

Kääntäen, oletetaan sitten, että M on A-moduli ja N on epätyhjä joukon M osajoukkojen kokoelma, joka toteuttaa lauseessa mainitut ehdot. Käyttämällä samaa topologiaa kuin lauseessa 3.1, saadaan topologinen ryhmä M. Osoitetaan, että M varustettuna tällä topologialla on topologinen A-moduli.

Osoitetaan, että kertolaskukuvaus $s : A \times M \to M$ on jatkuva. Olkoon $U \subseteq M$ avoin joukko ja $(a, x) \in s^{-1}(U)$.

- Ehdon $N0$ nojalla on olemassa sellainen $V_1 \in N$, että $ax + V_1 \subseteq U$.
- Ehdon $N1$ nojalla on olemassa sellainen $V_2 \in N$, että $V_2 + V_2 \subseteq V_1$.
- Ehdon $N5$ nojalla on olemassa sellaiset $T_1 \in N'$ ja $V_3 \in N$, että $T_1V_3 \subseteq V_2$.
- Ehdon $N1$ nojalla on olemassa sellainen $V_4 \in N$, että $V_4 + V_4 \subseteq V_2$.
- Ehdon $N6$ nojalla on olemassa sellainen $T_2 \in N'$, että $T_2x \subseteq V_4$.
- Ehdon $N7$ nojalla on olemassa sellainen $V_5 \in N$, että $aV_5 \subseteq V_4$.

Merkitään $V = V_3 \cap V_5$ ja $T = T_1 \cap T_2$. Olkoon $t \in T$ ja $v \in V$. Tällöin

$$av \in aV \subseteq aV_5 \subseteq V_4$$

ja

$$tx \in Tx \subseteq T_2x \subseteq V_4,$$

joten $av + tx \in V_2$. Samoin $t \in T \subseteq T_1$ ja $v \in V \subseteq V_3$, joten

$$tv \in T_1V_3 \subseteq V_2.$$

Näin ollen

$$av + tx + tv \in V_2 + V_2 \subseteq V_1,$$

joten

$$(a + t)(x + v) = ax + av + tx + tv \in ax + V_1 \subseteq U.$$

Täten

$$(a, x) \in (a + T) \times (x + V) \subseteq s^{-1}(U)$$

Koska V ja T ovat avointen joukkojen leikkauksina avoimia, niin s on jatkuva. Tämän topologian yksikäsitteisyys on todistettu lauseessa 3.1. □

Huomautus. Lauseissa 3.1, 3.2 ja 3.3 esiintyvää yksikäsitteistä topologiaa sanotaan *kokoelman N indusoimaksi topologiaksi.*

Huomautus. Ryhmien, renkaiden ja modulien suodatukset täyttävät lauseiden 3.1, 3.2 ja 3.3 ehdot, joten ne indusoivat aina yksikäsitteisen topologisen ryhmän, renkaan tai modulin.

Apulause 3.4. *Olkoon X topologinen avaruus. Tällöin X on Hausdorffin avaruus, jos ja vain jos diagonaali $d := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\} \subseteq X \times X$ on suljettu.*

Todistus. Oletetaan ensin, että X on Hausdorffin avaruus. Olkoot $x, y \in X$, $x \neq y$. Tällöin on olemassa sellaiset avoimet $U, V \subseteq X$, että $x \in U$, $y \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Nythän $U \times V$ on pisteen (x, y) ympäristö ja $(U \times V) \cap d = \emptyset$, sillä muuten olisi $U \cap V \neq \emptyset$. Näin ollen d on suljettu.

Oletetaan sitten, että d on suljettu. Olkoot $x, y \in X$, $x \neq y$. Koska d on suljettu ja $(x, y) \notin d$, niin on olemassa sellaiset avoimet $U, V \subseteq X$, että $x \in U$, $y \in V$ ja $(U \times V) \cap d = \emptyset$. Siispä $U \cap V = \emptyset$, mistä seuraa, että X on Hausdorffin avaruus. □

Huomautus. Olkoon G topologinen ryhmä, $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sen suodatus ja H sen aliryhmä. Tällöin on olemassa luonnolliset suodatukset $(H \cap G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ja $((H + G_i)/H)_{i \in \mathbb{N}}$ ryhmille H ja G/H. Vastaavat tulokset pätevät myös topologisille renkaille ja moduleille.

Lause 3.4. *Olkoon G topologinen ryhmä ja N sen nolla-alkion ympäristökanta. Merkitään $H = \bigcap_{U \in N} U$. Tällöin*

a) H on aliryhmä,

b) H on joukon $\{0\}$ sulkeuma,

c) G/H on Hausdorffin avaruus,

d) G on Hausdorffin avaruus $\Leftrightarrow H = 0$.

Todistus. (vrt. [6, s. 101-102]) a) Tietenkin $0 \in H$. Oletetaan, että $x, y \in H$ eli $x, y \in U$ aina, kun $U \in N$. Lauseen 3.1 perusteella on olemassa sellaiset $V_1, V_2 \in N$, että $V_1 + V_1 \subseteq U$ ja $-V_2 \subseteq U$ aina, kun $U \in N$. Siispä

$$x + y \in V_1 + V_1 \subseteq U$$

ja

$$-x \in V_2 \subseteq U$$

aina, kun $U \in N$. Näin ollen $x + y$, $-x \in H$.

b) Huomataan, että

$$\begin{aligned} x \in H &\Leftrightarrow x \in U \text{ aina, kun } U \in N \\ &\Leftrightarrow 0 \in x - U \text{ aina, kun } U \in N \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{\{0\}}. \end{aligned}$$

c) Kohdan b) nojalla H on suljettu joukossa G, joten $\{0\}$ on suljettu joukossa G/H. Huomataan, että tämän alkukuva jatkuvassa kuvauksessa

$(x, y) \mapsto x - y$ on diagonaali $d \subseteq (G/H) \times (G/H)$. Nythän diagonaali on suljettu, joten G/H on Hausdorffin avaruus apulauseen 3.4 perusteella.

d) Jos $H = \{0\}$, niin G on Hausdorffin avaruus kohdan c) nojalla. Jos G on Hausdorffin avaruus, niin triviaalisti $H = \{0\}$. $\square$

Määritelmä 3.5. Olkoon X topologinen avaruus. Tällöin joukko $U \subseteq X$ on *tiheä*, mikäli sen sulkeuma $\overline{U} = X$.

4 Täydellistymät

4.1 Täydellistymän määritelmä

Määritelmä 4.1. Olkoon R suodatettu rengas ja M R-moduli, jonka topologian indusoi suodatus $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$, joka on yhteensopiva renkaan R suodatuksen kanssa. Jono $(x_i) \in M^{\mathbb{N}}$ on *Cauchyn jono* joukossa M, jos aina, kun $r \in \mathbb{N}$, on olemassa sellainen $n(r) \in \mathbb{N}$, että jos $p, q \geq n(r)$, niin

$$x_p - x_q \in M_r.$$

Apulause 4.1. *Olkoon R suodatettu rengas ja olkoot M, M' R-moduleita, joiden topologiat indusoivat suodatukset $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ja $(M'_i)_{i \in \mathbb{N}}$, jotka on yhteensopivia renkaan R suodatuksen kanssa. Olkoon lisäksi $\varphi : M \to M'$ jatkuva R-moduleiden homomorfismi ja $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono joukossa M. Tällöin $(\varphi(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono joukossa M'.*

Todistus. Olkoon $r \in \mathbb{N}$. Kuvauksen φ jatkuvuuden nojalla on olemassa sellainen $s \in \mathbb{N}$, että

$$\varphi(M_s) \subseteq M'_r$$

Oletuksen nojalla on olemassa sellainen $n(s) \in \mathbb{N}$, että

$$p, q \geq n(s) \;\Rightarrow\; x_p - x_q \in M_s.$$

Oletetaan, että $p, q \geq n(s)$. Tällöinhän

$$\varphi(x_p) - \varphi(x_q) = \varphi(x_p - x_q) \in \varphi(M_s) \subseteq M'_r,$$

joten $(\varphi(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono. $\square$

Apulause 4.2. *Olkoon R suodatettu rengas ja olkoot M, M' R-moduleita, joiden topologiat indusoivat suodatukset $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ja $(M'_i)_{i \in \mathbb{N}}$, jotka on yhteensopivia renkaan R suodatuksen kanssa. Olkoon lisäksi $\varphi : M \to M'$ R-moduleiden homomorfismi. Jos aina, kun $r \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen $s \in \mathbb{N}$, että*

$$\varphi(M_s) \subseteq M'_r,$$

niin φ on jatkuva.

Todistus. Olkoon $U \subseteq M'$ avoin joukko. Tällöin kaikilla $x \in U$ on olemassa sellainen $j \in \mathbb{N}$, että $x + M'_j \subseteq U$, eli $M'_j \subseteq U - x$. Olkoon $y \in \varphi^{-1}(U)$. Tällöin $\varphi(y) \in U$, joten on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}$, että $M'_r \subseteq U - \varphi(y)$. Oletuksen nojalla on siis olemassa $s \in \mathbb{N}$, jolla $\varphi(M_s) \subseteq U - \varphi(y)$ ja edelleen

$$\varphi(y + M_j) = \varphi(y) + \varphi(M_j) \subseteq U.$$

Täten $y+M_j \subseteq \varphi^{-1}(U)$, joten $\varphi^{-1}(U)$ on avoin ja näin ollen φ on jatkuva. $\square$

Apulause 4.3. *Olkoon R sellainen suodatettu rengas ja M sellainen suodatettu R-moduli, että niiden suodatukset ovat yhteensopivat. Tällöin joukko $N \subseteq M$ on tiheä, jos ja vain jos kaikilla $x \in M$ on olemassa sellainen jono $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ joukossa N, että*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $N \subseteq M$ on tiheä. Tällöinhän $\overline{N} = M$. Olkoon $x \in M$. Jos $x \in N$, niin voidaan asettaa $x_i = x$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, mistä väite seuraa. Oletetaan, että $x \notin N$. Nyt x on joukon N reunapiste, joten erityisesti kaikilla $i \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen $x_i \in N$, että $x_i \in x + M_i$. Näin saatu jono $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tietenkin suppenee kohti pistettä x.

Oletetaan sitten, että kaikilla $x \in M$ on olemassa sellainen jono $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ joukossa N, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tällöin, jos $x \in M$, niin kaikilla $i \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $x_n \in x + M_i$. Näin ollen x on joukon N reunapiste ja siis $x \in \overline{N}$. $\square$

Määritelmä 4.2. Olkoon R rengas, jonka topologian indusoi suodatus $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Oletetaan lisäksi, että M on R-moduli, jonka topologian indusoi suodatus $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$, joka on yhteensopiva suodatuksen $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kanssa. Tällöin topologinen R-moduli M on *täydellinen*, jos se on Hausdorffin avaruus ja jokaisella Cauchyn jonolla on raja-arvo joukossa M.

Määritelmä 4.3. Olkoon R sellainen suodatettu rengas ja M sellainen suodatettu R-moduli, että niiden suodatukset ovat yhteensopivat. Olkoon lisäksi $\hat{M}$ täydellinen topologinen R-moduli ja φ jatkuva R-modulien homomorfismi $M \to \hat{M}$. Tällöin pari $(\hat{M}, \varphi)$ on R-modulin M *täydellistymä*, jos se toteuttaa *täydellistymän universaaliominaisuuden*: Aina, kun (M', ψ) on vastaava pari, on olemassa sellainen yksikäsitteinen jatkuva R-modulien homomorfismi $\hat{\psi} : \hat{M} \to M'$, että $\psi = \hat{\psi} \circ \varphi$ eli kaavio

$$\begin{tikzcd}
\hat{M} \arrow[r, "\hat{\psi}"] & M' \\
M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutoi.

Huomautus. R-modulin M täydellistymää $(\hat{M}, \varphi)$ merkitään usein vain $\hat{M}$. Tällöin sanotaan, että φ on *kanoninen homomorfismi.*

Huomautus. Renkaan R täydellistymä ja täydellisyys määritellään R-modulien vastaavien käsitteiden avulla. Siis rengas R on täydellinen, jos se on R-modulina täydellinen, ja renkaan R täydellistymä on R-modulin R täydellistymä.

Osoitetaan seuraavissa kolmessa lauseessa täydellistymän olemassaolo ja yksikäsitteisyys (isomorfismia vaille).

Lause 4.1. *Olkoon R sellainen suodatettu rengas ja M sellainen suodatettu R-moduli, että niiden suodatukset ovat yhteensopivat. Tällöin R-modulin M täydellistymä $(\hat{M}, \varphi)$ on isomorfismia vaille yksikäsitteinen.*

Todistus. Oletetaan, että $(\hat{M}, \varphi)$ ja $(\hat{M}', \psi)$ ovat R-modulin M täydellistymiä. Täydellistymän määritelmän nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen R-homomorfismi

$$\hat{\psi} : \hat{M} \to \hat{M}',$$

että $\psi = \hat{\psi} \circ \varphi$. Vastaavasti on olemassa sellainen yksikäsitteinen R-homomorfismi

$$\hat{\varphi} : \hat{M}' \to \hat{M},$$

että $\varphi = \hat{\varphi} \circ \psi$. Nythän kuvaus $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi} : \hat{M} \to \hat{M}$ on jatkuva, sillä se on jatkuvien kuvausten yhdistetty kuvaus. Lisäksi

$$(\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}) \circ \varphi = \hat{\varphi} \circ \psi = \varphi.$$

Toisaalta

$$\mathrm{id}_{\hat{M}} \circ \varphi = \varphi,$$

joten täydellistymän määritelmässä esiintyvän R-homomorfismin yksikäsitteisyyden nojalla oltava $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi} = \mathrm{id}_{\hat{M}}$. Vastaavasti saadaan $\hat{\psi} \circ \hat{\varphi} = \mathrm{id}_{\hat{M}'}$, joten $\hat{\psi}$ on bijektio ja näin ollen isomorfismi. □

Lause 4.2. *Olkoon R sellainen suodatettu rengas ja M sellainen suodatettu R-moduli, että niiden suodatukset ovat yhteensopivat. Tällöin on olemassa sellainen pari $(\hat{M}, \varphi)$, että $\hat{M}$ on täydellinen topologinen R-moduli ja φ on jatkuva R-modulien homomorfismi $M \to \hat{M}$. Lisäksi $\varphi(M)$ on tiheä joukossa $\hat{M}$.*

Todistus. (vrt. [4, s. 2], [1, s. 17-18]) Olkoon $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ renkaan R suodatus ja $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sen kanssa yhteensopiva R-modulin M-suodatus. Tällöinhän suodatus $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ määrittää topologian R-modulille M. Kun $n \in \mathbb{N}$, niin inkluusio $M_{n+1} \subseteq M_n$ indusoi luonnollisen R-homomorfismin

$$\theta_{n+1} : M/M_{n+1} \to M/M_n.$$

Nythän pari $\Big((M/M_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}\Big)$ on R-modulien käänteinen systeemi. Olkoon

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \varprojlim M/M_i \\ &= \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} M/M_i \mid x_n = \theta_{n+1}(x_{n+1}) \text{ aina, kun } n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Tällöin käänteisen rajan universaaliominaisuuden nojalla on olemassa R-homomorfismi

$$\varphi : M \to \hat{M},\ x \mapsto (x + M_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Merkitään

$$\hat{M}_n = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M} \mid x_m = 0 \text{ aina, kun } m \leq n\}.$$

Osoitetaan, että $\hat{M}_n$ on R-modulin $\hat{M}$ alimoduli aina, kun $n \in \mathbb{N}$. Olkoot $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M}_n$ ja olkoon $c \in R$.

- Selvästi $0 \in \hat{M}_n$, joten $\hat{M}_n \neq \emptyset$.
- Jos $m \leq n$, niin oletuksen nojalla

  $$x_m + y_n = 0 + 0 = 0,$$

  joten $(x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M}_n$.
- Jos $m \leq n$, niin oletuksen nojalla

  $$cx_m = c \cdot 0 = 0,$$

  joten $(cx_i)_{i\in\mathbb{N}} = c(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M}_n$.

Siispä $\hat{M}_n$ on R-modulin $\hat{M}$ alimoduli.

Nythän $\hat{M}_0 = \hat{M}$ ja $\hat{M}_{n+1} \supseteq \hat{M}_n$ aina, kun $n \in \mathbb{N}$, joten $(\hat{M}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on R-modulin $\hat{M}$ suodatus. Lisäksi, jos $x \in R_m\hat{M}_n$, niin voidaan kirjoittaa

$$x = c(y + M_i)_{i\in\mathbb{N}} = (cy + M_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

missä $c \in R_m$ ja $y \in M_n$. Tällöinhän $cy \in R_mM_n \subseteq M_{n+m}$, joten $cy + M_j = 0$, kun $j \leq n + m$. Näin ollen $x \in \hat{M}_{m+n}$, joten $R_m\hat{M}_n \subseteq \hat{M}_{m+n}$. Siis suodatukset $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ja $(\hat{M}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ovat yhteensopivat. Olkoon R-modulin $\hat{M}$ topologia suodatuksen $(\hat{M}_i)_{\in\mathbb{N}}$ indusoima.

Huomataan, että

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{M}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_n = 0\} = \{0\},$$

joten lauseen 3.4 nojalla $\hat{M}$ on Hausdorffin avaruus.

Osoitetaan seuraavaksi R-modulin $\hat{M}$ täydellisyys. Olkoon $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono joukossa $\hat{M}$. Valitaan mielivaltainen $j \in \mathbb{N}$. Merkitään

$$x_j = (x_{j,i})_{i\in\mathbb{N}},$$

missä $x_{j,i} \in M/M_i$ aina, kun $i \in \mathbb{N}$. Nythän Cauchyn jonon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n(j) \in \mathbb{N}$, että

$$x_p - x_q \in \hat{M}_j$$

aina, kun $p, q \geq n(j)$. Tällöinhän

$$x_{p,i} = x_{q,i}$$

aina, kun $i \leq j$ ja $p, q \geq n(j)$. Voidaan olettaa, että $n(j+1) \geq n(j)$. Nyt

$$x_{n,i} = x_{n(j),i} \tag{4.1}$$

aina, kun $i \leq j$ ja $n \geq n(j)$. Merkitään

$$x'_j = x_{n(j),j} (= x_{n,j}, \text{ kun } n \geq n(j)).$$

Tällöin

$$x' := (x'_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M},$$

sillä

$$\begin{aligned}
\theta_{j+1}(x'_{j+1}) &= \theta_{j+1}(x_{n(j+1),j+1}) && \\
&= x_{n(j+1),j} && (x_{n(j+1)} \in \hat{M}) \\
&= x_{n(j),j} && (n(j+1) \geq n(j)) \\
&= x'_j. &&
\end{aligned}$$

Jos $n \geq n(j)$, niin

$$\begin{aligned}
x' - x_n &= (x'_i)_{i\in\mathbb{N}} - (x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}} \\
&= (x'_i - x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}} \\
&= (x_{n(i),i} - x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M}_j,
\end{aligned}$$

sillä yhtälön (4.1) nojalla

$$x_{n,i} = x_{n(i),i}$$

aina, kun $i \leq j$. Täten $x' = \lim_{n\to\infty} x_n$, joten $\hat{M}$ on täydellinen R-moduli.

Osoitetaan sitten, että kuvaus φ on jatkuva. Huomataan, että $\varphi(M_n) \subseteq \hat{M}_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, sillä jos $x \in M_n$, niin $x + M_i = 0 + M_i$, kun $i \leq n$. Näin ollen kuvauksen φ jatkuvuus seuraa apulauseesta 4.2.

Todetaan lopuksi, että $\varphi(M)$ on tiheä joukossa $\hat{M}$: Olkoon $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M}$. Jos $r \in \mathbb{N}$ ja $y_r \in M$ on alkion x_r alkukuva, niin

$$\varphi(y_r) - (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M}_r,$$

joten $\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Tiheys seuraa tällöin apulauseesta 4.3. $\square$

Lause 4.3. *Olkoon R sellainen suodatettu rengas ja M sellainen suodatettu R-moduli, että niiden suodatukset ovat yhteensopivat. Tällöin on olemassa R-modulin M täydellistymä $(\hat{M}, \varphi)$.*

Todistus. (vrt. [4, s. 2], [1, s. 17-18]) Riittää osoittaa, että edellisen lauseen todistuksessa esiintyvä pari $(\hat{M}, \varphi)$ toteuttaa täydellistymän universaaliominaisuuden. Oletetaan, että M' on täydellinen topologinen R-moduli, $(M'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on sen suodatus, joka on yhteensopiva suodatuksen $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kanssa ja ψ on jatkuva R-homomorfismi $M \to M'$. Olkoon $x \in \hat{M}$. Tällöin on olemassa sellainen jono $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$, että

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = x,$$

sillä $\varphi(M)$ on tiheä joukossa $\hat{M}$. Merkitään

$$y = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n).$$

Määritellään kuvaus

$$\hat{\psi} : \hat{M} \to M', \; x \mapsto y.$$

Osoitetaan tämän kuvauksen mielekkyys. Huomataan ensiksi, että $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono: Jos $r \in \mathbb{N}$, niin raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n(r) \in \mathbb{N}$, että jos $n \geq n(r)$, niin

$$\varphi(x_n) - x \in \hat{M}_r.$$

Tästä seuraa, että jos $p, q \geq n(r)$, niin

$$\varphi(x_p - x_q) = (\varphi(x_p) - x) + (x - \varphi(x_q)) \in \hat{M}_r - \hat{M}_r \subseteq \hat{M}_r,$$

joten

$$x_p - x_q \in \varphi^{-1}(\hat{M}_r) = M_r.$$

Nyt siis $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono, jolloin apulauseesta 4.1 seuraa, että myös $(\psi(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono.

Osoitetaan vielä, että y ei riipu jonon $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ valinnasta. Olkoon $(x'_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ sellainen Cauchyn jono, että $\lim_{n\to\infty} \varphi(x'_n) = x = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ eli

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x'_n - x_n) = 0.$$

Olkoon $r \in \mathbb{N}$. Tällöin kuvauksen ψ jatkuvuuden perusteella on olemassa sellainen $s \in \mathbb{N}$, että

$$\psi(M_s) \subseteq M'_r.$$

Raja-arvon määritelmästä seuraa, että on olemassa sellainen $n(s) \in \mathbb{N}$, että jos $n \geq n(s)$, niin

$$\varphi(x'_n) - \varphi(x_n) = \varphi(x'_n - x_n) \in \hat{M}_s,$$

joten

$$x'_n - x_n \in \varphi^{-1}(\hat{M}_s) = M_s.$$

Merkitään $n(r) = n(s)$. Nyt jos $n \geq n(r)$, niin

$$\psi(x'_n) - \psi(x_n) = \psi(x'_n - x_n) \in \psi(M_s) \subseteq M'_r,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} (\psi(x'_n) - \psi(x_n)) = 0$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} \psi(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = y.$$

Näin ollen kuvaus $\hat{\psi}$ on mielekäs.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\hat{\psi}$ on R-homomorfismi. Olkoon $x, x' \in \hat{M}$ ja $a, b \in R$. Tällöin on olemassa sellaiset jonot $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(x'_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$, että

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = x \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(x'_n) = x'.$$

Merkitään

$$\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = y \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \psi(x'_n) = y'.$$

Nythän

$$\hat{\psi}(x) = y \quad \text{ja} \quad \hat{\psi}(x') = y'.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(ax + bx') &= \hat{\psi}\left(\left(a \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)\right) + \left(b \lim_{n\to\infty} \varphi(x'_n)\right)\right) \\
&= \hat{\psi}\left(\lim_{n\to\infty} (a\varphi(x_n) + b\varphi(x'_n))\right) && \text{(raja-arvojen summa ja skalaaritulo)} \\
&= \hat{\psi}\left(\lim_{n\to\infty} \varphi(ax_n + bx'_n)\right) && (\varphi \text{ on } R\text{-homomorfismi}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \psi(ax_n + bx'_n) && (\text{kuvauksen } \hat{\psi} \text{ määritelmä}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (a\psi(x_n) + b\psi(x'_n)) && (\psi \text{ on } R\text{-homomorfismi}) \\
&= \left(a \lim_{n\to\infty} \psi(x_n)\right) + \left(b \lim_{n\to\infty} \psi(x'_n)\right) && \text{(raja-arvojen summa ja skalaaritulo)} \\
&= ay + by' \\
&= a\hat{\psi}(x) + b\hat{\psi}(x'),
\end{aligned}$$

joten $\hat{\psi}$ on R-homomorfismi.

Osoitetaan sitten, että $\hat{\psi}$ on jatkuva kuvaus. Olkoon $r \in \mathbb{N}$. Kuten tiheyttä todistettaessa todettiin, on olemassa sellainen $s \in \mathbb{N}$, että

$$\psi(M_s) \subseteq M'_r.$$

Näytetään seuraavaksi, että

$$\hat{\psi}(\hat{M}_s) \subseteq M'_r.$$

Olkoon $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{M}_s$. Tällöinhän $x_j = 0$, kun $j \leq s$. Siispä aina, kun $j \in \mathbb{N}$, voidaan valita sellainen $y_j \in x_j$, että $y_j \in M_s$. Edellä todetun nojalla $\psi(y_j) \in M'_r$ aina, kun $j \in \mathbb{N}$. Tiedetään, että M'_r on suljettu joukossa M', joten raja-arvo

$$y' := \lim_{n\to\infty} \psi(y_n) \in M'_r.$$

Täten $\hat{\psi}(\hat{M}_s) \subseteq M'_r$, joten $\hat{\psi}$ on jatkuva kuvaus apulauseen 4.2 perusteella.

Osoitetaan lopuksi, että kuvaus $\hat{\psi}$ on yksikäsitteinen. Olkoon $x \in \hat{M}$. Aiemmin todistettiin, että $\varphi(M)$ on tiheä joukossa $\hat{M}$, joten apulauseen 4.3 nojalla voidaan kirjoittaa

$$x = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n), \tag{4.2}$$

missä $x_i \in M$ aina, kun $i \in \mathbb{N}$. Kuvaukselta $\hat{\psi}$ vaaditaan, että $\psi = \hat{\psi} \circ \varphi$, joten on oltava

$$\psi(x_i) = \hat{\psi}(\varphi(x_i)) \tag{4.3}$$

aina, kun $i \in \mathbb{N}$. Huomataan lisäksi, että

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\psi}(\varphi(x_n)) = \hat{\psi}(x). \tag{4.4}$$

Todistetaan tämä. Olkoon $r \in \mathbb{N}$. Tällöin kuvauksen $\hat{\psi}$ jatkuvuuden nojalla on olemassa sellainen $s \in \mathbb{N}$, että

$$\hat{\psi}(\hat{M}_s) \subseteq M'_r.$$

Raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen $n(s) \in \mathbb{N}$, että kun $n \geq n(s)$, niin

$$\varphi(x_n) - x \in \hat{M}_s.$$

Merkitään $n(r) = n(s)$. Oletetaan, että $n \geq n(r)$. Nyt kuvauksen $\hat{\psi}$ homomorfisuuden perusteella

$$\hat{\psi}(\varphi(x_n)) - \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(\varphi(x_n) - x) \in \hat{\psi}(\hat{M}_s) \subseteq M'_r,$$

joten yhtälö (4.4) on tosi. Yhdistämällä ylläolevat tulokset nähdään, että

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \lim_{n\to\infty} \hat{\psi}(\varphi(x_n)) && (4.4) \\ &= \lim_{n\to\infty} \psi(x_n) && (4.3), \end{aligned}$$

joten kuvaus $\hat{\psi}$ on yksikäsitteinen. □

Huomautus. Lauseen 4.2 todistuksesta nähdään, että renkaan R täydellistymä $\hat{R}$ on isomorfinen käänteisen rajan $\varprojlim R/R_i$ kanssa, joten $\hat{R}$ on rengas. R-modulin M täydellistymä $\hat{M}$ on luonnollisella tavalla myös $\hat{R}$-moduli.

4.2 Täydellistymän ominaisuuksia

Esimerkki 4.1. Olkoon R rengas ja M R-moduli. Jos niillä on ideaalin $I \subseteq R$ määräämä I-adinen suodatus, niin R-modulin M täydellistymää $\hat{M}$ sanotaan *I-adiseksi täydellistymäksi*. Merkitään tätä $\hat{M}_I$.

Määritelmä 4.4. Olkoon R rengas. Jos $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, niin merkitään

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots .$$

Määritellään yhteen- ja kertolasku joukossa $R^{\mathbb{N}}$ seuraavasti: Jos $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, niin

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_iX^i + \sum_{i\in\mathbb{N}} b_iX^i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i + b_i)X^i$$

ja

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_iX^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_iX^i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j}\right) X^i.$$

Näillä laskutoimituksilla varustettuna joukosta $R^{\mathbb{N}}$ saadaan *muodollisten potenssisarjojen rengas*, jota merkitään $R[[X]]$. Määritellään usean muuttujan tapaus induktiivisesti:

$$R[[X_1, \ldots, X_n]] = R[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][[X_n]].$$

Huomautus. Polynomirengas $R[X]$ on muodollisten potenssisarjojen renkaan $R[[X]]$ alirengas.

Esimerkki 4.2. (vrt. [3, s. 181-182]) Olkoon S rengas. Osoitetaan, että muodollisten potenssiarjojen rengas $S[[X_1, \ldots, X_n]]$ on polynomirenkaan $R := S[X_1, \ldots, X_n]$ täydellistymä ideaalin $I := \langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ suhteen.

Homomorfismeista

$$S[[X_1, \ldots, X_n]] \to R/I^i, \ f \mapsto f + I^i$$

saadaan käänteisen rajan universaaliominaisuuden perusteella homomorfismi

$$\varphi : S[[X_1, \ldots, X_n]] \to \varprojlim R/I^i = \hat{R}, \ f \mapsto (f + I^i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Määritellään sitten kuvaus

$$\psi : \varprojlim R/I^i \to S[[X_1, \ldots, X_n]]$$

asettamalla

$$\psi((f_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}}) = f_1 + (f_2 - f_1) + \cdots .$$

Osoitetaan, että ψ on mielekäs kuvaus. Olkoon $(f_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \varprojlim R/I^i$. Merkitään kaikilla $j \in \mathbb{N}$

$$f_j = \sum_{i=0}^{\deg f_j} a_{j,i}X^i.$$

Koska käänteisen rajan määritelmän nojalla $f_{i+1} - f_i \in I^i$ aina, kun $i \in \mathbb{N}$, niin i. asteen termejä esiintyy vain osasummassa

$$f_1 + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_{i+1} - f_i) = f_{i+1}.$$

Näin ollen

$$\psi((f_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i+1,i} X^i.$$

Jos on olemassa sellainen

$$f'_j := \sum_{i=0}^{\deg f'_j} a'_{j,i} X^i \in R,$$

että $f_j + I^j = f'_j + I^j$, niin $f_j - f'_j \in I^i$, joten erityisesti $a_{j,j-1} = a'_{j,j-1}$. Siis ψ on mielekäs kuvaus.

Osoitetaan lopuksi, että $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ ja $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Jos $f \in S[[X_1, \ldots, X_n]]$ ja $(f_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \varprojlim R/I^i$, niin

$$(\psi \circ \varphi)(f) = \psi((f + I^i)_{i\in\mathbb{N}}) = f + (f - f) + \cdots = f$$

ja yllä olevan tarkastelun perusteella

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)((f_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}}) &= \varphi(f_0 + (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \cdots) \\
&= ((f_0 + (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \cdots) + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \\
&= ((f_0 + (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_i - f_{i-1})) + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \\
&= (f_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Näin ollen φ on isomorfismi, joten $S[[X_1, \ldots, X_n]]$ on renkaan R I-adinen täydellistymä.

Esimerkki 4.3 (p-adiset luvut)**.** (ks. [3, s. 182]) Olkoon $p \in \mathbb{Z}$ alkuluku ja $\langle p \rangle \subseteq \mathbb{Z}$ ideaali. Sanotaan, että täydellistymä $\hat{\mathbb{Z}}_{\langle p \rangle}$ on *p-adisten lukujen rengas.*

Tämän renkaan alkiot, *p-adiset luvut*, voidaan kirjoittaa potenssisarjana muodossa

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots,$$

missä $0 \leq a_i < p$. Tällöin esimerkiksi

$$(1 + 0p + 0p^2 + \cdots) + ((p - 1) + 0p + 0p^2 + \cdots) = 0 + 1p + 0p^2 + \cdots.$$

Esimerkki 4.4. Tarkastellaan 2-adisten lukujen rengasta $\hat{\mathbb{Z}}_{\langle 2 \rangle}$. Osoitetaan, että

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1.$$

Nythän

$$\begin{aligned}(2,4,8,16,\dots)=(0,0,0,0,\dots) &\Leftrightarrow (1,3,7,15,\dots)+(1,1,1,1,\dots)=(0,0,0,0,\dots)\\ &\Leftrightarrow (1+2+4+8+\cdots)+1=0\\ &\Leftrightarrow 1+2+4+8+\cdots=-1,\end{aligned}$$

mistä väite seuraa.

Etsitään seuraavassa lauseessa rationaalifunktiolle $1/(1-X)$ esitys täydellistymien avulla.

Lause 4.4. *Olkoon R täydellinen rengas ideaalin I suhteen. Tällöin kertolaskun suhteen suljetun joukon $U := \{1+a \mid a \in I\}$ alkiot ovat yksiköitä renkaassa R.*

Todistus. (ks. [3, s. 193]) Jos $a \in I$, niin sarja $b := 1-a+a^2-\cdots$ on Cauchyn jono, joten se suppenee renkaassa R. Nythän

$$(1+a)b = (1+a)-(1+a)a+(1+a)a^2-\cdots.$$

Tämän sarjan i. osasumma on $1+a^i$, missä $a^i \in I^i$. Koska $\cap_{i\in\mathbb{N}} I^i = \{0\}$, niin $(1+a)b=1$. □

Tarkastellaan renkaan R I-adista täydellistymää $\hat{R} = \varprojlim R/I^i$. Merkitään kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{I}_n = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{R} \mid x_m = 0 \text{ aina, kun } m \le n\}.$$

Lauseen 4.2 todistuksessa osoitettiin, että $J := (\hat{I}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on renkaan $\hat{R}$ suodatus. Ensimmäisestä isomorfialauseesta seuraa, että $\hat{R}/\hat{I}_j \cong R/I^j$ aina, kun $j \in \mathbb{N}$. Täten $\hat{R} \cong \varprojlim \hat{R}/\hat{I}_i = \hat{\hat{R}}$. Edelleen, kanoninen homomorfismi $R \to \hat{R}$ indusoi isomorfismin $\mathrm{gr}_I R \cong \mathrm{gr}_J \hat{R}$. Todistetaan nämä seuraavassa apulauseessa.

Apulause 4.4. *Olkoon R rengas, $I \subseteq R$ ideaali ja $\hat{R}$ renkaan R I-adinen täydellistymä. Merkitään $J := (\hat{I}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Tällöin*

1) $\hat{R}/\hat{I}_j \cong R/I^j$ aina, kun $j \in \mathbb{N}$.

2) $gr_I R \cong gr_J \hat{R}$.

Todistus. 1) Tarkastellaan projektiohomomorfismin rajoittumaa

$$p : \hat{R} = \varprojlim R/I^i \to R/I^j,\ (x_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto x_j + I^j.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}(x_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ker}(p) &\Leftrightarrow\ p((x_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}}) = 0\\ &\Leftrightarrow x_j + I^j = 0\\ &\Leftrightarrow x_i + I^i = 0,\ \text{kun } i \le j\\ &\Leftrightarrow (x_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{I}^j.\end{aligned}$$

Siis $\mathrm{Ker}(p) = \hat{I}^j$. Lisäksi tietysti $\mathrm{Im}(p) = R/I^j$, joten ensimmäisen isomorfialauseen perusteella

$$\hat{R}/\hat{I}_j \cong R/I^j.$$

2) Olkoon $j \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että Abelin ryhminä $I^j/I^{j+1} \cong \hat{I}^j/\hat{I}^{j+1}$. Olkoon $\varphi : R \to \hat{R}$ kanoninen homomorfismi. Huomataan ensiksi, että

$$\begin{aligned}\varphi(I^j) &= \{(x + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{R} \mid x \in I^j\}\\ &= \{(x + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{R} \mid x + I^i = 0,\ \text{kun } i \le j\}\\ &\subseteq \hat{I}_j.\end{aligned}$$

Täten on mielekästä määritellä kuvaus

$$\psi_j : I^j/I^{j+1} \to \hat{I}_j/\hat{I}_{j+1},\ x + I^{j+1} \mapsto \varphi(x) + \hat{I}_{j+1}.$$

Siitä, että φ on rengashomomorfismi, seuraa, että ψ_j on ryhmähomomorfismi, jolle lisäksi pätee $\psi_j(x)\psi_j(y) = \psi_j(xy)$ kaikilla $x, y \in I^j/I^{j+1}$. Osoitetaan vielä tämän kuvauksen bijektiivisyys.

Olkoon $z \in \hat{I}_j/\hat{I}_{j+1}$. Tällöin on olemassa sellainen $y := (y_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{I}_j$, että $z = y + \hat{I}_{j+1}$. Tässä $y_i + I^i = 0$, kun $i \le j$, joten erityisesti $y_j \in I^j$.

Käänteisen rajan määritelmän nojalla $y_{j+1} + I^i = y_i + I^i$, kun $i \le j + 1$. Siis

$$(y_{j+1} + I^i)_{i\in\mathbb{N}} - (y_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{I}_{j+1}.$$

Täten

$$\psi_j(y_{j+1}) = (y_{j+1} + I^i)_{i\in\mathbb{N}} + \hat{I}_{j+1} = (y_i + I^i)_{i\in\mathbb{N}} + \hat{I}_{j+1} = z,$$

ja näin ollen ψ_j on surjektio.

Valitaan sitten sellainen $x \in I^j$, että $x + I^{j+1} \in \mathrm{Ker}(\psi_j)$. Tällöinhän

$$\psi_j(x + I^{j+1}) = \varphi(x) + \hat{I}_{j+1} = 0,$$

mistä seuraa, että

$$\varphi(x) = (x + I^i)_{i\in\mathbb{N}} \in \hat{I}_{j+1}.$$

Täten $x + I^i = 0$, kun $i \le j + 1$ ja erityisesti $x + I^{j+1} = 0$. Siis ψ_j on bijektio.

Koska lisäksi $\psi_0(1 + I) = \varphi(1) + \hat{I}_1 = 1 + \hat{I}_1$, niin kuvaukset ψ_j indusoivat halutun rengasisomorfismin

$$\psi : \mathrm{gr}_I R \to \mathrm{gr}_J \hat{R},\ \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x + I^i \mapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \psi_i(x + I^i).$$

□

Lause 4.5. *Olkoon R rengas, joka on täydellinen suodatuksen $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ virittämän topologian suhteen. Olkoon gr R renkaan R muotorengas tämän suodatuksen suhteen. Oletetaan, että $I \subseteq R$ on ideaali ja $a_1, \ldots, a_s \in I$. Jos in$(a_1), \ldots,$ in(a_s) virittävät ideaalin in(I) renkaassa gr R, niin $a_1, \ldots, a_s$ virittävät ideaalin I.*

Todistus. (vrt. [3, s. 194]) Olkoon $I' = \langle a_1, \ldots a_s\rangle$. Voidaan olettaa, että $a_i \neq 0$ aina, kun $i \in \{1, \ldots, s\}$. Täten, koska $\cap_{i\in\mathbb{N}} m_i = \{0\}$, voidaan valita sellainen $d \in \mathbb{Z}_+$, että kaikilla $i \in \{1, \ldots, s\}$ pätee $a_i \notin m_d$. Jos $f \in I$, missä $\deg(\mathrm{in}(f)) = e$, niin oletuksen nojalla voidaan kirjoittaa

$$\mathrm{in}(f) = \sum_{j=1}^{s} G_j \mathrm{in}(a_j),$$

missä $G_j \in \mathrm{gr}_m R$ on homogeeninen termi ja

$$\deg(G_j) = \deg(\mathrm{in}(f)) - \deg(\mathrm{in}(a_j))$$

aina, kun $j \in \{1, \ldots, s\}$. Täten, jos aina, kun $j \in \{1, \ldots, s\}$ valitaan sellainen $g_j \in R$, että $\mathrm{in}(g_j) = G_j$, niin

$$f - \sum_{j=1}^{s} g_j a_j \in m_{e+1}.$$

Samaa kaavaa toistamalla saadaan lopulta sellainen alkio $f' \in I'$, että

$$f - f' \in m_{d+1}.$$

Merkintöjen helpottamiseksi oletetaan, että $f \in m_{d+1}$. (Muulloin sama todistus toimisi tarkastelemalla alkiota $f - f' \in m_{d+1}$.) Tällöin yllä määritellyt alkiot G_j, missä $j \in \{1, \ldots, s\}$, ovat vähintään astetta $e - d > 0$. Voidaan siis valita $g_j \in m_{e-d}$. Tätä menetelmää toistamalla saadaan kaikilla $i \in \mathbb{N}$ määriteltyä sellaiset alkiot

$$g_j^{(i)} \in m_{e-d+i},$$

että jos $n \in \mathbb{N}$, niin

$$f - \sum_{j=1}^{s} g_j^{(0)} a_j - \sum_{j=1}^{s} g_j^{(1)} a_j - \sum_{j=1}^{s} g_j^{(2)} a_j - \cdots - \sum_{j=1}^{s} g_j^{(n)} a_j$$

$$f - \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=0}^{n} g_j^{(i)} a_j \in m_{e+n+1}.$$

On selvää, että näin määritelty sarja $\sum_{i=0}^{\infty} g_j^{(i)}$ suppenee renkaassa R. Merkitään $h_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j^{(i)}$ aina, kun $j \in \{1, \ldots, s\}$. Raja-arvon ominaisuuksien perusteella nyt

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(f-\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=0}^{n}g_j^{(i)}a_j\right)\\
=&f-\sum_{j=1}^{s}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}g_j^{(i)}\right)a_j\\
=&f-\sum_{j=1}^{s}h_ja_j\\
\in&\bigcap_{i\in\mathbb{N}}m_i=\{0\},
\end{aligned}$$

joten $f=\sum_{j=1}^{s}h_ja_j\in I'$, mikä haluttiin osoittaa. □

Lauseen 4.5 avulla pystytään todistamaan yksi täydellistymän hyödyllisistä ominaisuuksista: Nimittäin Noetherin renkaan täydellistymä on edelleen Noetherin rengas.

Lause 4.6. *Olkoon R Noetherin rengas, $m\subseteq R$ ideaali ja $\hat{R}$ renkaan R m-adinen täydellistymä. Tällöin*

a) $\hat{R}$ on Noetherin rengas,

b) $\hat{m}_n=m^n\hat{R}$. Erityisesti $\hat{R}/m^j\hat{R}\cong R/m^j$, joten $\hat{R}$ on täydellinen $m\hat{R}$-adisen suodatuksen suhteen, ja

$$gr_{m\hat{R}}\hat{R}\cong gr_m R.$$

Todistus. (vrt. [3, s. 194-195], [6, s. 111-112]) a) Tässä $\mathrm{gr}_{\hat{m}}\hat{R}\cong \mathrm{gr}_m R$ lauseen 4.4 perusteella. Koska R on Noetherin rengas, niin tekijärengas R/m on Noetherin rengas lauseen 2.2 nojalla. Samasta syystä voidaan kirjoittaa $m=\langle x_1,\dots x_n\rangle$, missä $x_1,\dots x_n\in R$. Nythän

$$\mathrm{gr}_m R=(R/m)[x_1+m^2,\dots,x_n+m^2],$$

joka on Noetherin rengas lauseen 2.3 nojalla.

Olkoon $I\subseteq\hat{R}$ ideaali. Koska $\mathrm{gr}_{\hat{m}}\hat{R}$ on Noetherin rengas, niin voidaan kirjoittaa $\mathrm{in}(I)=\langle\mathrm{in}(a_1),\dots\mathrm{in}(a_s)\rangle$, missä $a_1,\dots,a_s\in I$. Lauseesta 4.5 seuraa tällöin, että $I=\langle a_1,\dots,a_s\rangle$, joten I on äärellisviritteinen.

b) Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\mathrm{in}(\hat{m}_n)&=\{\mathrm{in}(x)\in\mathrm{gr}_{\hat{m}}\hat{R}\mid x\in\hat{m}_n\}\\
&=\{\mathrm{in}(x)\in\mathrm{gr}_{\hat{m}}\hat{R}\mid x\in\hat{R}\text{ ja }\deg(\mathrm{in}(x))\geq n\}\\
&=\{\mathrm{in}(x)\in\mathrm{gr}_{\hat{m}}\hat{R}\mid x\in m^n\hat{R}\}\\
&=\mathrm{in}(m^n\hat{R}).
\end{aligned}$$

Koska R on Noetherin rengas, niin a)-kohdan todistuksen perusteella myös $\mathrm{gr}_{\hat{m}}\hat{R}$ on. Erityisesti ideaaleilla $\mathrm{in}(\hat{m}_n)$ ja $\mathrm{in}(m^n\hat{R})$ on sama äärellinen virittäjäjoukko $\{\mathrm{in}(a_1), \ldots, \mathrm{in}(a_k)\}$, missä $a_1, \ldots, a_n \in \hat{R}$. Täten lauseen 4.5 nojalla

$$m^n\hat{R} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \hat{m}_n.$$

Lauseen muut väitteet seuraavat suoraan tästä. □

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan täydellistymän ja laakeuden välistä yhteyttä.

Apulause 4.5. *Olkoon R rengas ja olkoot $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(J_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sen suodatuksia. Jos aina, kun $i \in \mathbb{N}$, on olemassa sellaiset $j, k \in \mathbb{N}$, että $I_j \subseteq J_i$ ja $J_k \subseteq I_i$, niin on olemassa luonnollinen isomorfismi $\hat{R}_I \to \hat{R}_J$. (Tässä $\hat{R}_I$ tarkoittaa renkaan R täydellistymää suodatuksen $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suhteen ja $\hat{R}_J$ suodatuksen $(J_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suhteen.)*

Todistus. (vrt. [3, s. 195-196]) Oletetaan ensin, että

$$\{J_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Osoitetaan, että projektio

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} R/I_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} R/J_i$$

indusoi isomorfismin $p : \hat{R}_I \to \hat{R}_J$. Homomorfisuus ja surjektiivisuus ovat selviä, joten riittää todeta injektiivisyys. Oletetaan, että $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Tällöinhän $p(x) = 0$ ja erityisesti $p(x)(j) = 0 + J^j$ aina, kun $j \in \mathbb{N}$. Koska joukon $\{J_i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathbb{N}\}$ ideaaleja on äärettömän monta ideaalien $\{I_i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathbb{N}\}$ joukossa, niin äärettömän monella $i \in \mathbb{N}$ pätee $x + I_i = 0$. Käänteisen rajan määritelmän perusteella tällöin oltava $x = 0$. Siispä p on tässä tapauksessa isomorfismi.

Yleisessä tapauksessa voidaan oletuksen nojalla valita sellaiset injektiiviset kuvaukset $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, että aina, kun $j \in \mathbb{N}$, niin

$$I_j \supseteq J_{\alpha(j)} \supseteq I_{\beta(j)} \supseteq J_{\gamma(j)}.$$

Nämä indusoivat homomorfismit

$$R/J_{\gamma(j)} \to R/I_{\beta(j)} \to R/J_{\alpha(j)} \to R/I_j$$

aina, kun $j \in \mathbb{N}$. Täten saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
\hat{R}_J \arrow[d, equal] & \hat{R}_I \arrow[d, equal] & \hat{R}_J \arrow[d, equal] & \hat{R}_I \arrow[d, equal] \\
\varprojlim R/J_{\gamma(j)} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \varprojlim R/I_{\beta(j)} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \varprojlim R/J_{\alpha(j)} \arrow[r] & \varprojlim R/I_j
\end{tikzcd}$$

missä kuvaukset $\varprojlim R/J_{\gamma(j)} \to \varprojlim R/J_{\alpha(j)}$ ja $\varprojlim R/I_{\beta(j)} \to \varprojlim R/I_j$ ovat isomorfismeja ensiksi käsitellyn tapauksen nojalla. Väite seuraa tästä. □

Seuraava askel on osoittaa, että oikeissa olosuhteissa täydellistymät säilyttävät eksaktit jonot. Todistuksen loppuosassa päästään hyödyntämään Artin-Reesin lemmaa.

Apulause 4.6. *Olkoon R Noetherin rengas ja $I \subseteq R$ ideaali. Jos*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

on lyhyt eksakti jono äärellisviritteisiä R-moduleita, niin jono

$$0 \to \varprojlim A/I^j A \to \varprojlim B/I^j B \to \varprojlim C/I^j C \to 0$$

on eksakti. Täten I-adinen täydellistymä säilyttää äärellisviritteisten modulien eksaktit jonot.

Todistus. (vrt. [3, s. 196-197]) Jälkimmäinen väite seuraa ensimmäisestä, sillä mikä tahansa eksakti jono

$$\cdots \to A_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\to} A_n \overset{\varphi_n}{\to} A_{n-1} \to \cdots$$

voidaan lausua ”yhdisteenä” lyhyistä eksakteista jonoista

$$0 \to \mathrm{Im}(\varphi_{n+1}) \to A_n \to \mathrm{Im}(\varphi_n) \to 0.$$

Nimittäin jos alempi jono on aina eksakti, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Im}(\varphi_{n+1}),$$

mistä seuraa ensimmäisen jonon eksaktius.

Aloitetaan ensimmäisen väitteen todistaminen näyttämällä, että luonnollinen homomorfismi

$$\varprojlim B/I^j B \to \varprojlim C/I^j C$$

on surjektio. Tarkastellaan kommutoivaa kaaviota:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& A/I^{j+1}A \arrow[r] \arrow[d] & B/I^{j+1}B \arrow[r] \arrow[d] & C/I^{j+1}C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& A/I^j A \arrow[r] & B/I^j B \arrow[r] & C/I^j C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Olkoon

$$(c_j + I^j C)_{j\in\mathbb{N}} \in \varprojlim C/I^j C.$$

Yritetään etsiä sille alkukuva $(b_j + I^j B)_{j\in\mathbb{N}} \in \varprojlim B/I^j B$. Toisin sanoen yritetään löytää sellainen jono $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$, että aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$, niin

1) $b_j \mapsto c_j + I^j C$,

2) $b_j + I^{j-1}B = b_{j-1} + I^{j-1}B$.

Valitaan alkiot b_j, missä $j \in \mathbb{N}$, induktiivisesti: Oletetaan, että ollaan valittu alkiot $b_1, \ldots, b_j$, jotka toteuttavat ehdot 1) ja 2). Koska oletuksen nojalla kuvaus $B \to C$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $b'_{j+1} \in B$, joka kuvautuu alkiolle $c_{j+1} + I^{j+1}C$. Nythän siis sekä b_j että b'_{j+1} kuvautuvat alkiolle $c_j + I^j C \in C/I^j C$. Koska kaavion kuvaukset ovat homomorfismeja, niin $b_j - b'_{j+1} \mapsto 0 \in C/I^j C$.

Tiedetään, että kaikilla R-moduleilla M pätee $M/I^j R \cong (R/I^j) \otimes M$. Täten lauseen 2.5 nojalla jono

$$A/I^j A \to B/I^j B \to C/I^j C \to 0$$

on eksakti. Erityisesti on olemassa sellainen $a_{j+1} \in A$, jolla

$$a_{j+1} \mapsto (b_j - b'_{j+1}) + I^j B.$$

Asetetaan $b_{j+1} = b'_{j+1} + a_{j+1} (\in B)$. Nythän alkiolla $a_{j+1} + I^{j+1}B \in B/I^{j+1}B$ on alkukuva $a_{j+1} + I^{j+1}A \in A/I^{j+1}A$, koska kaavio kommutoi. Siispä jonon

$$A/I^{j+1}A \to B/I^{j+1}B \to C/I^{j+1}C \to 0$$

eksaktiuden nojalla $a_{j+1} \mapsto 0 \in C/I^{j+1}C$. Täten

$$b_{j+1} = b'_{j+1} + a_{j+1} \mapsto c_{j+1} + I^j C,$$

joten ehto 1) on voimassa. Ehto 2) toteutuu myös, sillä kaavion kommutoinnin perusteella

$$\begin{aligned}
b_{j+1} + I^j B &= (b'_{j+1} + a_{j+1}) + I^j B \\
&= (b'_{j+1} + I^j B) + (a_{j+1} + I^j B) \\
&= (b'_{j+1} + I^j B) + ((b_j - b'_{j+1}) + I^j B) \\
&= b_j + I^j B.
\end{aligned}$$

Enää täytyy osoittaa, että jono

$$0 \to \varprojlim A/I^j A \to \varprojlim B/I^j B \to \varprojlim C/I^j C$$

on eksakti. Tämän todistamiseksi halutaan asettaa R-modulin $\varprojlim A/I^j A$ tilalle R-moduli $\varprojlim A/(A \cap I^j B)$, koska tällöin yllä oleva jono on eksaktien jonojen

$$0 \to A/(A \cap I^j B) \to B/I^j B \to C/I^j C$$

käänteinen raja, joka on helppo osoittaa eksaktiksi.

Jotta tämä vaihto saataisiin tehtyä, on näytettävä, että R-modulin A I-adinen täydellistymä on sama kuin suodatuksen $(A \cap I^i B)_{i\in\mathbb{N}}$ määräämä täydellistymä. Tietenkin $A \cap I^j B \supseteq I^j A$ aina, kun $j \in \mathbb{N}$. Artin-Reesin lemman (lause 2.8) nojalla on olemassa sellainen $k \in \mathbb{N}$, että

$$A \cap I^{j+k} B = I^j (A \cap I^k B) \subseteq I^j A.$$

aina, kun $j \in \mathbb{N}$. Apulauseen 4.5 nojalla suodatukset $(A \cap I^i B)_{i\in\mathbb{N}}$ ja $(I^i A)_{i\in\mathbb{N}}$ määräävät saman täydellistymän.

Osoitetaan seuraavaksi, että jono

$$0 \to \varprojlim A/(A \cap I^j B) \to \varprojlim B/I^j B \to \varprojlim C/I^j C$$

on eksakti. Tämä seuraa suoraan käänteisen rajan määritelmästä: Jos $(b_1, b_2, \ldots) \in \varprojlim B/I^i B$ kuvautuu alkiolle $0 \in \varprojlim C/I^i C$, niin jokainen b_j, missä $j \in \mathbb{N}$, kuvautuu alkiolle $0 \in C/I^j C$. Täten jonon

$$A/I^j A \to B/I^j B \to C/I^j C$$

eksaktiuden nojalla $b_j \in A/(A \cap I^j B)$ aina, kun $j \in \mathbb{N}$. (Tässä samaistetaan b_j ja sen alkukuva joukossa A/I^j.) Siis

$$(b_1, b_2, \ldots) \in \varprojlim A/(A \cap I^j B),$$

kuten haluttiin. □

Todistetaan seuraavaksi erittäin hyödyllinen tulos, joka koskee renkaan R täydellistymän $\hat{R}$ suhdetta tensorituloon ja laakeuteen.

Lause 4.7. *Olkoon R Noetherin rengas, $I \subseteq R$ ideaali ja $\hat{R}$ renkaan R I-adinen täydellistymä.*

a) Jos M on äärellisviritteinen R-moduli, niin luonnollinen kuvaus

$$\hat{R} \otimes_R M \to \varprojlim M/I^j M = \hat{M}$$

on isomorfismi.

b) $\hat{R}$ on laakea R-modulina.

Todistus. (vrt. [3, s. 197-198]) a) Aloitetaan todistaminen tapauksesta $M = R$. Tällöinhän tensoritulon perusominaisuuksien nojalla

$$\hat{R} \otimes_R R \cong \hat{R} = \varprojlim R/I^j,$$

joten väite on tässä tapauksessa tosi. Tästä seuraa, että tulos pätee myös renkaan R äärellisille potensseille, sillä tensoritulon ja käänteisen rajan ominaisuuksien nojalla

$$\hat{R} \otimes_R R^n \cong (\hat{R} \otimes_R R)^n \cong \hat{R}^n = \left(\varprojlim R/I^i\right)^n \cong \varprojlim R^n/I^i R^n.$$

Siispä tulos pätee kaikille äärellisviritteisille vapaille R-moduleille.

Olkoon sitten M mielivaltainen äärellisviritteinen R-moduli ja

$$0 \to F \to G \to M \to 0$$

sen vapaa esitys, missä $F := R^A$ ja $G := R^B$. Voidaan olettaa, että B on äärellinen joukko, koska M on äärellisviritteinen. Näin ollen G on Noetherin rengas lauseen 2.3 nojalla. Toisaalta oltava $F \cong \mathrm{Im}(F \to G) = \mathrm{Ker}(G \to M)$, joten F on Noetherin renkaan G ideaali, ja näin ollen F on äärellisviritteinen.

Apulauseen 4.6 ja lauseen 2.5 nojalla kommutoivan kaavion

$$\begin{tikzcd}
\hat{F} \arrow[r] & \hat{G} \arrow[r] & \hat{M} \arrow[r] & 0 \\
\hat{R} \otimes_R F \arrow[r] \arrow[u] & \hat{R} \otimes_R G \arrow[r] \arrow[u] & \hat{R} \otimes_R M \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"'] & 0
\end{tikzcd}$$

vaakarivit ovat eksakteja. Aiemmin todetun perusteella kaksi vasemmanpuoleista pystysuunnan kuvausta ovat isomorfismeja. Osoitetaan, että kuvaus $\varphi : \hat{R} \otimes_R M \to \hat{M}$ on isomorfismi.

Olkoon $x \in \hat{M}$. Koska $\hat{G} \to \hat{M}$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $y \in \hat{G}$, että $y \mapsto x$. Nythän $\hat{R} \otimes_R G \to \hat{G}$ on isomorfismi, joten on olemassa sellainen $z \in \hat{R} \otimes_R G$, että $z \mapsto x$. Kaavion kommutoinnin perusteella alkion z kuva $w \in \hat{R} \otimes_R M$ on alkion x alkukuva. Siis φ on surjektio.

Olkoon sitten $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Sillä on alkukuva $y \in \hat{R} \otimes_R G$, koska $\hat{R} \otimes_R G \to \hat{R} \otimes_R M$ on surjektio. Olkoon $z \in \hat{G}$ alkion y kuva. Kaavion kommutoinnin perusteella $z \mapsto 0 \in \hat{M}$. Toisaalta kaavion ylärivin eksaktiuden perusteella $\mathrm{Im}(\hat{F} \to \hat{G}) = \mathrm{Ker}(\hat{G} \to \hat{M})$, joten joukossa $\hat{F}$, ja edelleen isomorfisuuden perusteella joukossa $\hat{R} \otimes_R F$, on alkion z alkukuva w. Nythän $w \mapsto y$, joten $y \in \mathrm{Im}(\hat{R} \otimes_R F \to \hat{R} \otimes_R G) = \mathrm{Ker}(\hat{R} \otimes_R G \to \hat{R} \otimes_R M)$. Täten $x = 0$. Siis φ on injektio, mistä isormorfisuus seuraa.

b) Lauseen 2.6 perusteella riittää osoittaa, että kertolaskukuvaus

$$J \otimes_R \hat{R} \to J\hat{R} \subseteq \hat{R}$$

on R-upotus aina, kun $J \subseteq R$ on äärellisviritteinen ideaali. Edelleen, a)-kohdan nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kuvaus

$$\hat{J} \to \hat{R}$$

on R-upotus. Tämä seuraa apulauseesta 4.6, sillä jono

$$0 \to J \to R \to R/J \to 0$$

on eksakti, kun $J \to R$ on inkluusio ja $R \to R/J$ on kanoninen surjektio. $\square$

4.3 Potenssisarjat ja Henselin lemma

Tarkastellaan seuraavaksi täydellisten renkaiden välisiä homomorfismeja. Yksi polynomirenkaan $R[X_1, \ldots, X_n]$ hyödyllinen puoli on se, että R-algebrojen homomorfismi siitä toiselle R-algebralle S määräytyy yksikäsitteisesti muuttujien X_i, missä $i \in \{1, \ldots, n\}$, kuvien perusteella. Potenssisarjarenkaalla $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ on samankaltainen ominaisuus, mutta ainoastaan jos S on täydellinen rengas.

Olkoon R rengas ja S R-algebra, joka on täydellinen ideaalin $J \subseteq S$ suhteen. Olkoot $f_1, \ldots, f_n \in J$. Otetaan käyttöön polynomien sijoitushomomorfismia vastaava merkintä potenssisarjoille: Jos

$$g := \sum_{\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in R[[X_1, \ldots, X_n]],$$

missä $a_\alpha \in R$ aina, kun $\alpha \in \mathbb{N}^n$, niin määritellään

$$g(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} \in S.$$

Osoitetaan, että tämä on mielekästä. Nythän g voidaan kirjoittaa asteittain jaoteltuna sarjana muodossa

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = j} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}.$$

Huomataan, että

$$\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = j} a_\alpha f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} \in J^j,$$

aina, kun $j \in \mathbb{N}$. Siispä sarjan

$$g(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = j} a_\alpha f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}$$

osasummien jono on Cauchyn jono, ja näin ollen renkaan S täydellisyyden nojalla $g(f_1, \ldots, f_n) \in S$.

Lause 4.8. *Olkoon R rengas ja S R-algebra, joka on täydellinen ideaalin $J \subseteq S$ suhteen. Olkoot $f_1, \ldots, f_n \in J$.*

a) On olemassa sellainen yksikäsitteinen R-algebrojen homomorfismi

$$\varphi : R[[X_1, \ldots, X_n]] \to S,$$

että $X_i \mapsto f_i$ aina, kun $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin

$$g \mapsto g(f_1, \ldots, f_n)$$

kaikilla $g \in R[[X_1, \ldots, X_n]]$.

b) Jos indusoitu kuvaus $R \to S/J$ on surjektio, ja $J = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$, niin φ on surjektio.

c) Jos indusoitu muotorenkaiden välinen kuvaus

$$gr(\varphi) : R[X_1, \dots, X_n] \cong gr_{\langle X_1, \dots X_n \rangle} R[[X_1, \dots, X_n]] \to gr_J S$$

on injektio, niin φ on injektio.

Todistus. (vrt. [3, s. 199]) a) Yksikäsitteinen R-algebrojen homomorfismi $R[X_1, \dots, X_n] \to S/J^t$, missä $X_i \mapsto f_i + J^t$ aina, kun $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $t \in \mathbb{N}$, faktoroituu kuvauksen

$$R[[X_1, \dots, X_n]]/\langle X_1, \dots, X_n \rangle^t = R[X_1, \dots, X_n]/\langle X_1, \dots, X_n \rangle^t \to S/J^t$$

kautta. Täten saadaan yksikäsitteinen homomorfismi

$$R[[X_1, \dots, X_n]] \to S/J^t,$$

missä $X_i \mapsto f_i + J^t$ aina, kun $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $t \in \mathbb{N}$. Koska oletuksen nojalla $S = \hat{S} = \varprojlim S/J^t$, niin käänteisen rajan universaaliominaisuuden nojalla on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi

$$\varphi : R[[X_1, \dots, X_n]] \to S,$$

missä $X_i \mapsto f_i$ aina, kun $i \in \{1, \dots, n\}$, kuten vaaditaan.

Olkoon $g \in R[[X_1, \dots, X_n]]$. Tällöin alkion $g + \langle X_1, \dots, X_n \rangle^t$ kuva renkaassa S/J^t on $g(f_1, \dots, f_n) + J^t$ aina, kun $t \in \mathbb{N}$, joten alkion g kuva renkaassa S on $g(f_1, \dots, f_n)$. Tämä on mielekästä, sillä S on täydellinen ideaalin J suhteen.

b) Oletetaan, että indusoitu kuvaus $R \to S/J$ on surjektio, ja $J = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Osoitetaan, että kuvaus

$$\langle X_1, \dots, X_n \rangle / \langle X_1, \dots, X_n \rangle^2 \to J/J^2$$

on surjektio. Jos $x \in J$, niin on olemassa sellaiset $a_1, \dots, a_n \in R$, että $x = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$. Tällöinhän

$$(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) + \langle X_1, \dots, X_n \rangle^2 \mapsto x + J^2,$$

mistä surjektiivisuus seuraa. Täten myös indusoitu kuvaus

$$\mathrm{gr}(\varphi) : \mathrm{gr}_{\langle X_1, \dots, X_n \rangle} R[[X_1, \dots, X_n]] \to \mathrm{gr}_J S$$

on surjektio. Olkoon nyt $0 \neq g \in S$ ja $i \in \mathbb{N}$ suurin sellainen luku, että $g \in J^i$. Renkaan S täydellisyydestä seuraa, että $\cap J^j = 0$, joten tällainen i on olemassa. Koska $\mathrm{gr}(\varphi)$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $g_0 \in \langle X_1, \dots, X_n \rangle^i$, että $\mathrm{in}(g_0) \mapsto \mathrm{in}(g)$. Tästä seuraa, että $g_1 := g - \varphi(g_0) \in J^{i+1}$.

Vastaavasti jatkamalla saadaan jono $(g_j)_{j\geq 1}$, missä $g_j \in \langle X_1, \ldots, X_n\rangle^{i+j}$ aina, kun $j \geq 1$, ja $g = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(g_j)$. Koska φ säilyttää äärettömät summat, niin $g = \varphi(\sum_{k=1}^{\infty} g_j)$, mistä väite seuraa.

c) Oletetaan, että $\mathrm{gr}(\varphi)$ on injektio. Olkoon $0 \neq g \in R[[X_1, \ldots, X_n]]$, jolloin $\mathrm{in}(g) \neq 0$. Merkitään $d = \deg(\mathrm{in}(g))$. Nythän kuvauksen $\mathrm{gr}(\varphi)$ injektiivisyyden nojalla

$$\mathrm{gr}(\varphi)(\mathrm{in}(g)) \neq 0$$

muotorenkaan $\mathrm{gr}_J S$ d-asteisessa osassa. Kuitenkin

$$g + \langle X_1, \ldots, X_n\rangle^{d+1} = \mathrm{in}(g)$$

joten

$$\varphi(g) + J^{d+1} = \mathrm{gr}(\varphi)(\mathrm{in}(g)).$$

Siispä $\varphi(g) \neq 0$ myös. $\square$

Lauseen 4.8 hyödyntämiseksi otetaan käyttöön uusi merkintä. Jos $f \in R[[X]]$ on yhden muuttujan potenssisarja, niin olkoon f' se potenssisarja, joka saadaan, kun derivoidaan potenssisarjan f jokainen termi muuttujan X suhteen. Tällöin saadaan käyttöön esimerkiksi esitys

$$f = f(0) + f'(0)X + (\text{suuremman asteen termejä}).$$

Seuraus 4.1. *Olkoon $f \in \langle X\rangle \subseteq R[[X]]$ potenssisarja. Endomorfismi*

$$\varphi : R[[X]] \to R[[X]],\ g \mapsto g(f)$$

on isomorfismi, jos ja vain jos $f'(0)$ on yksikkö renkaassa R.

Todistus. (vrt. [3, s. 200]) Oletetaan ensin, että φ on isomorfismi. Ideaalin $\langle X\rangle$ jokaisen alkion vakiotermi on 0, ja φ ei näiden alkioiden vakiotermiä muuta. Nythän φ on isomorfismi, joten oltava $\varphi(\langle X\rangle) = \langle X\rangle$ (vakiot kuvautuvat vakioille). Koska $f = \varphi(X)$ on ideaalin $\varphi(\langle X\rangle)$ virittäjä, niin se on myös ideaalin $\langle X\rangle$ virittäjä. Siispä $f + \langle X^2\rangle$ virittää ideaalin $\langle X\rangle/\langle X^2\rangle$. Tässähän potenssisarjan f vakiotermi on 0, joten

$$f + \langle X^2\rangle = f'(0)X + \langle X^2\rangle.$$

Erityisesti on olemassa sellainen $g \in R[[X]]$, että

$$gf'(0)X + \langle X^2\rangle = X + \langle X^2\rangle.$$

Oltava siis $gf'(0) = 1$, joten $f'(0) \in R^*$.

Oletetaan seuraavaksi, että $f'(0) =: u$ on yksikkö renkaassa R. Tiedetään, että $\mathrm{gr}_{\langle X\rangle} R[[X]] = R[X]$, ja että

$$\mathrm{gr}(\varphi) : R[X] \to R[X],\ f \mapsto uf$$

on isomorfismi, sillä u on yksikkö. Lauseen 4.8 nojalla φ on injektio. Voidaan kirjoittaa $f = uX + hX^2 = (u + hX)X$, missä $h \in R[[X]]$. Lauseen 4.4 nojalla $u+hX = u(1+u^{-1}hX)$ on yksikkö renkaassa $R[[X]]$, joten f virittää ideaalin $\langle X \rangle$. Koska

$$R \cong R[[X]]/\langle X \rangle = R[[X]]/\langle f \rangle,$$

niin lauseen 4.8 perusteella φ on myös surjektio ja näin ollen isomorfismi. $\square$

Seurausta 4.1 käyttämällä saadaan todistettua Henselin lemma.

Lause 4.9 (Henselin lemma)**.** *Olkoon R rengas, joka on täydellinen ideaalin I suhteen, ja $f \in R[X]$ polynomi. Jos on olemassa $a \in R$, jolla*

$$f(a) \in f'(a)^2 I,$$

niin polynomilla f on sellainen juuri $b \in R$, että

$$b - a \in f'(a)I.$$

Jos $f'(a)$ ei ole nollantekijä renkaassa R, niin b on yksikäsitteinen.

Todistus. (vrt. [3, s. 200-201]) Merkitään $f'(a) = e$. Koska aina, kun $i \in \mathbb{Z}_+$

$$(a + eX)^i = a^i + ia^{i-1}eX + (eX)^2 h_i$$

jollain $h_i \in R[X]$, niin voidaan valita sellainen $h \in R[[X]]$, että

$$\begin{aligned} f(a + eX) &= f(a) + f'(a)eX + (eX)^2 h && (4.5)\\ &= f(a) + e^2(X + X^2 h). && (4.6) \end{aligned}$$

Lauseen 4.8 nojalla on olemassa rengashomomorfismi

$$\varphi : R[[X]] \to R[[X]],\ g \mapsto g(X + X^2 h).$$

Tämä on isomorfismi seurauksen 4.1 perusteella, sillä

$$(X + X^2 h)'(0) = 1.$$

Kuvaamalla yhtälö (4.6) puolittain käänteiskuvauksella φ^{-1} saadaan

$$f(a + e\varphi^{-1}(X)) = f(a) + e^2 X. \qquad (4.7)$$

Oletuksen nojalla voidaan kirjoittaa $f(a) = e^2 c$, missä $c \in I$. Lauseen 4.8 perusteella on olemassa R-algebrojen homomorfismi

$$\psi : R[[X]] \to R,\ f \mapsto f(-c).$$

Tätä soveltamalla saadaan yhtälöstä (4.7)

$$f(a + e\psi(\varphi^{-1}(X))) = e^2c + e^2(-c) = 0.$$

Asetetaan $b = a + e\psi(\varphi^{-1}(X))$, jolloin $f(b) = 0$. Huomataan, että potenssisarjan $\varphi^{-1}(X)$ vakiotermin on oltava 0. Nimittäin, jos olisi $\varphi^{-1}(X) = g + d$, missä $g \in \langle X \rangle$ ja $d \in R$, niin

$$X = \varphi(g + d) = \varphi(g) + d,$$

missä myös $\varphi(g) \in \langle X \rangle$, joten $d = 0$. Näin ollen $\psi(\varphi^{-1}(X)) \in I$. Siispä $b - a \in f'(a)I$, kuten haluttiinkin.

Oletetaan sitten, että e ei ole nollantekijä. Alkion b yksikäsitteisyyden osoitettamiseksi oletetaan, että myös b_1 on polynomin f sellainen juuri, että $b_1 - a \in eI$. Merkitään

$$b = a + er \quad \text{ja} \quad b_1 = a + er_1,$$

missä $r, r_1 \in I$. Lauseen 4.8 nojalla on olemassa olemassa rengashomomorfismit

$$\beta : R[[X]] \to R[[X]],\ f \mapsto f(r) \quad \text{ja} \quad \beta_1 : R[[X]] \to R[[X]],\ f \mapsto f(r_1).$$

Soveltamalla näitä kuvauksia yhtälöön (4.6) saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= f(a + er) = f(a) + e^2(r + r^2h(r)) \\ 0 &= f(a + er_1) = f(a) + e^2(r_1 + r_1^2h(r_1)). \end{aligned}$$

Vähennetään nämä puolittain toisistaan. Koska e ei ole nollantekijä, niin voidaan supistaa alkiolla e^2, jolloin saadaan

$$r + r^2h(r) = r_1 + r_1^2h(r_1)$$

eli $\beta(\varphi(X)) = \beta_1(\varphi(X))$. Lauseen 4.8 yksikäsitteisyyskohdan perusteella $\beta \circ \varphi = \beta_1 \circ \varphi$, ja koska φ on isomorfismi, niin $\beta = \beta_1$. Täten $r = r_1$, kuten vaadittiin. □

Huomautus. Jos R on täydellinen ideaalin m suhteen, niin se on täydellinen myös kaikkien ideaalien m^n, missä $n \geq 1$, suhteen apulauseen 4.5 nojalla. Siispä Henselin lemmassa voidaan käyttää ideaalin m tilalla myös sen potensseja.

Esimerkki 4.5. Polynomilla $f := X^4 + 3 \in \mathbb{Z}[X] \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_{\langle 7 \rangle}[X]$ ei ole kokonaislukujuuria, mutta renkaasta $\mathbb{Z}/\langle 7 \rangle = \mathbb{Z}_7$ saadaan esimerkiksi juuri $\overline{3}$. Täten Henselin lemman nojalla löydetään renkaan $\mathbb{Z}$ täydellistymästä $\hat{\mathbb{Z}}_{\langle 7 \rangle}$ juuri polynomille f.

Esimerkki 4.6 (Neliöjuuret ja p-adiset luvut)**.** ([3, s. 184]) Olkoon $p \in \mathbb{Z}$ alkuluku. Etsitään p-adisten lukujen renkaan $\hat{\mathbb{Z}}_p$ täydelliset neliöt, eli sellaiset alkiot, joiden neliöjuuri sisältyy renkaaseen $\hat{\mathbb{Z}}_p$.

Olkoon $c \in \hat{\mathbb{Z}}_p$. Voidaan kirjoittaa c yksikäsitteisesti muodossa $c = p^n b$, missä $n \in \mathbb{N}$, $b \in \hat{\mathbb{Z}}_p$ ja $p \nmid b$. Täten c on täydellinen neliö, jos ja vain jos n on parillinen luku ja b on täydellinen neliö.

Tarkastellaan polynomia $f = X^2 - b \in \hat{\mathbb{Z}}_p[X]$. Sen derivaatta on $f' = 2X$. Jos alkiolla $\overline{b} := b + p\hat{\mathbb{Z}}_p$ on neliöjuuri renkaassa $\hat{\mathbb{Z}}_p/p\hat{\mathbb{Z}}_p \cong \mathbb{Z}/\langle p \rangle$ eli sellainen $a \in \mathbb{Z}$, että $\overline{b} = \overline{a}^2$, niin polynomilla $\overline{f} := X^2 - \overline{b}$ on juuri a. Jos $p \neq 2$, niin $f'(\overline{a}) = 2\overline{a} \neq 0$ kunnassa $\mathbb{Z}/\langle p \rangle$, joten voidaan käyttää Henselin lemmaa toteamaan, että alkiolla b on p-adinen neliöjuuri. Täten ilmeisen triviaalista ehdosta, että alkiolla $\overline{b}$ on neliöjuuri, seuraa, että myös alkiolla b on neliöjuuri, jos $p \neq 2$.

Jos $p = 2$, niin $f'(\overline{a}) = 0$ ja edeltävä argumentti ei toimi. Oletetaan sen sijaan, että $b \equiv 1 \mod 8$. Tällöin voidaan valita $a = 1$, mistä saadaan $f'(a) = 2$ ja

$$f(a) = 1 - b \equiv 0 \mod 2^2 p = 8.$$

Siis Henselin lemman nojalla saadaan 2-adinen neliöjuuri alkiolle b. Oletus, että $b \equiv 1 \mod 8$ vaikuttaa rajoittavalta, kunnes huomataan, että jos b on neliö, niin ehdosta $p \nmid b$ seuraa, että b on pariton. Tällöin on olemassa sellainen $a \in \hat{\mathbb{Z}}_p$, että

$$b = (1 + 2a)^2 = 1 + 4(a + a^2).$$

Tässä $2 \mid a + a^2$, joten $b \equiv 1 \mod 8$. Siispä Henselin lemma antaa täydellisen vastauksen tässäkin tapauksessa.

Esitellään ja todistetaan vielä usein kirjallisuudessa esiintyvä Henselin lemman klassinen muotoilu.

Olkoon R lokaali rengas ja $m \subsetneq R$ maksimaalinen ideaali. Jos $a \in R$, niin merkitään sen sivuluokkaa $\overline{a} = a + m \in R/m$. Edelleen, jos polynomi $f := \sum a_i X^i \in R[X]$, niin kuvaamalla sen kertoimet kanonisella surjektiolla $R \to R/m$ saadaan polynomi $\overline{f} := \overline{a_i} X^i \in (R/m)[X]$.

Lause 4.10 (Henselin lemma, klassinen muoto)**.** *Olkoon R lokaali rengas ja $m \subsetneq R$ maksimaalinen ideaali. Olkoon lisäksi $f \in R[X]$ d-asteinen pääpolynomi, jolle on olemassa sellaiset keskenään jaottomat pääpolynomit $G, H \in (R/m)[X]$, että*

$$F := \overline{f} = GH.$$

Tällöin on olemassa sellaiset pääpolynomit $g, h \in R[X]$, että $\overline{g} = G$, $\overline{h} = h$ ja $f = gh$.

Todistus. (vrt. [7, s. 9-10]) Merkitään $\deg G = r$, jolloin $\deg H = d - r$. Osoitetaan induktion avulla että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ on olemassa sellaiset $g_n, h_n \in R[X]$, että $\deg g_n = r$, $\deg h_n = d - r$, $\overline{g_n} = G$, $\overline{h_n} = H$ ja

$$f - g_n h_n \in m^n[X].$$

Täten polynomin $f - g_n h_n$ kertoimet ovat ideaalin m^n alkioita.

Oletetaan ensin, että $n = 1$. Olkoot $g_1, h_1 \in R[X]$ sellaisia pääpolynomeja, että $\overline{g_1} = G$ ja $\overline{h_1} = H$. Tällöin $\deg g_1 = r$ ja $\deg h_1 = d - r$. Koska

$$\overline{f} = GH = \overline{g}\overline{h} = \overline{gh},$$

niin $f - g_1 h_1 \in m[X]$.

Tehdään induktio-oletus, että halutunlaiset g_n ja h_n on saatu konstruoitua. Voidaan siis merkitä

$$f - g_n h_n = \sum_{i=0}^{d} c_i X^i,$$

missä $c_i \in m^n$. Koska $G = \overline{g_n}$ ja $H = \overline{h_n}$ ovat keskenään jaottomia, niin kaikilla $i \in \{0, \ldots, d\}$ on olemassa sellaiset polynomit $v_i, w_i \in R[X]$, että

$$X^i = \overline{v_i g_n} + \overline{w_i}\overline{h_n}.$$

Tiedetään, että $\overline{g_n}$ on astetta r. Jakoyhtälön perusteella on olemassa sellaiset $q, r \in R[X]$, että

$$\overline{v_i} = \overline{q}\overline{h_n} + \overline{r},$$

missä $\deg \overline{r} < d - r$. Täten aiempi yhtälö saadaan muotoon

$$X^i = \overline{r g_n} + (\overline{w_i + q g_n})\overline{h_n},$$

joten voidaan olettaa, että $\deg \overline{v_i} \leq d - r$. Tästä seuraa, että

$$\deg \overline{w_i}\overline{h_n} = \deg(X^i - \overline{v_i g_n}) \leq d.$$

Siis oltava $\deg \overline{w_i} \leq r$, koska $\deg \overline{h_n} = d - r$. Edelleen,

$$X^i - v_i g_n - w_i h_n \in m[X]. \tag{4.8}$$

Määritellään

$$g_{n+1} = g_n + \sum_{i=0}^{d} c_i w_i \quad \text{ja} \quad h_{n+1} = h_n + \sum_{i=0}^{d} c_i v_i.$$

Koska $c_i \in m^n \subseteq m$, niin $\overline{g_{n+1}} = \overline{g_n} = G$ ja $\overline{h_{n+1}} = \overline{h_n} = H$. Nyt $\deg g_{n+1}$ on korkeintaan r, joten sen on oltava täsmälleen r, ja vastaavasti $\deg h_{n+1} = d - r$. Viimeisen ehdon tarkistamiseksi huomataan, että

$$\begin{aligned}
f - g_{n+1}h_{n+1} &= f - \left(g_n + \sum_{i=0}^{d} c_i w_i\right)\left(h_n + \sum_{i=0}^{d} c_i v_i\right) \\
&= \left(f - g_n h_n - \sum_{i=0}^{d} c_i X^i\right) + \sum_{i=0}^{d} c_i (X^i - g_n v_i - h_n w_i) - \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{i} c_j c_{i-j} w_j w_{i-j}.
\end{aligned}$$

Induktio-oletuksen nojalla ensimmäinen termi

$$f - g_n h_n - \sum_{i=0}^{d} c_i X^i = 0$$

ja yhtälön (4.8) avulla saadaan, että toinen termi

$$\sum_{i=0}^{d} c_i (X^i - g_n v_i - h_n w_i) \in m^n m[X] = m^{n+1}[X].$$

Koska myös viimeinen termi

$$\sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{i} c_j c_{i-j} w_j w_{i-j} \in m^{2n}[X] \subseteq m^{n+1}[X],$$

niin induktio on valmis.

Nyt alkion g_{n+1} määritelmän nojalla $g_{n+1} - g_n \in m^n[X]$, joten jos merkitään $g_n = \sum_{i=0}^{d} a_{n,i} X^i$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, niin saadaan Cauchyn jono

$$(a_{n,i})_{n \in \mathbb{Z}_+} \qquad (i \in \{0, \ldots, d\}).$$

Vastaavasti, jos merkitään $h_n = \sum_{i=0}^{d} b_{n,i} X^i$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ niin saadaan Cauchyn jono

$$(b_{n,i})_{n \in \mathbb{Z}_+} \qquad (i \in \{0, \ldots, d\}).$$

Koska R on täydellinen, niin voidaan määritellä renkaan $R[X]$ polynomit

$$g := \sum_{i=0}^{d} a'_i X^i \quad \text{ja} \quad h := \sum_{i=0}^{d} b'_i X^i,$$

missä

$$a'_i = \lim_{n \to \infty} a_{n,i} \quad \text{ja} \quad b'_i = \lim_{n \to \infty} b_{n,i}$$

aina, kun $i \in \{0, \ldots, d\}$.

Nythän $f - g_n h_n \in m^n[X]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Täydellinen rengas R on erityisesti Hausdorffin avaruus, joten lauseen 3.4 nojalla

$$f - gh \in \bigcap_{n=0}^{\infty} m^n[X] = \{0\}$$

eli $f = gh$. Koska $\overline{g_n} = G$ ja $\overline{h_n} = H$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, niin oltava myös $\overline{g} = G$ ja $\overline{h} = H$. Edelleen, koska f, G ja H ovat pääpolynomeja, niin polynomien g ja h suurimman asteen termit ovat muotoa $(1+a)X^r$ ja $(1+a)^{-1}X^{d-r}$, missä $a \in m$. Vaihtamalla polynomien g ja h tilalle pääpolynomit $(1+a)^{-1}g$ ja $(1+a)h$ saadaan aikaiseksi pääpolynomit häiritsemättä muita ehtoja. Väite seuraa tästä. $\square$

Viitteet

[1] Liu, Qing, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press Inc., 2002.

[2] Munkres, James R., *Topology, Second Edition*. Prentice Hall, Inc., 2000.

[3] Eisenbud, David, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 1995.

[4] Singh, Balwan, *Completion, Formal Smoothness and Cohen Structure Theorems*. http://www.math.iitb.ac.in/atm/caag1/balwant.pdf.

[5] Murfet, Daniel, *Topological Rings*. http://therisingsea.org/notes/TopologicalRings.pdf.

[6] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[7] Ash, Robert, *A Course In Commutative Algebra*. http://www.math.uiuc.edu/ r-ash/ComAlg/ComAlg4.pdf.