
TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Riikka Tervaskangas

Weierstrassin funktiosta

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Toukokuu 2013

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

TERVASKANGAS, RIIKKA: Weierstrassin funktiosta

Pro gradu -tutkielma, 29 s.

Matematiikka

Toukokuu 2013

Tiivistelmä

Tutkielma käsittelee Weierstrassin funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta. Weierstrassin funktio on esimerkki funktiosta, joka on kaikkialla jatkuva mutta ei-missään derivoituva. Tutkielmassa näytetään, että vaikka Weierstrassin funktion funktiosarjan kaikki termit ovat kaikkialla jatkuvia ja derivoituvia, itse sarjafunktio on kaikkialla jatkuva mutta ei-missään derivoituva.

Tutkielmassa käsitellään yhden muuttujan reaaliarvoisia funktioita. Päälähteinä tutkielmassa on käytetty Tom Apostolin teosta *Calculus, Volume I: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra* sekä Edwin Hewittin ja Karl Strombergin teosta *Real and Abstract Analysis: A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable*.

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Esitietoja	1
2.1	Funktion raja-arvo ja jatkuvuus	1
2.2	Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia	5
2.3	Funktion derivoituvuus	6
2.4	Trigonometrinen funktioiden ominaisuuksia	11
3	Funktiosarjat	12
3.1	Lukujonot ja -sarjat	12
3.2	Funktiosarjat ja niiden suppeneminen	16
4	Weierstrassin funktio	18
4.1	Aputuloksia	18
4.2	Weierstrassin funktion jatkuvuus ja derivoituvuus	22
4.3	Muita kaikkialla jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita . .	27
	Viitteet	29

1 Johdanto

Funktion jatkuvuus ja derivoituvuus ovat peruskäsitteitä matemaattisessa analyysissä. Eräänä ongelmana näissä käsitteissä on kuitenkin oletus siitä, että jatkuva funktio olisi aina myös derivoituva muutamia erikoispisteitä lukuunottamatta.

Weierstassin funktio on esimerkki funktiosta, joka on kaikkialla jatkuva mutta ei-missään derivoituva. Weierstrassin funktio koostuu sarjasta, jonka termit ovat kaikkialla jatkuvia ja derivoituvia funktioita. Tutkielmassa näytetään, että vaikka Weierstrassin funktion funktiosarjan kaikki termit ovat kaikkialla jatkuvia ja derivoituvia, itse sarjafunktio on kaikkialla jatkuva mutta ei-missään derivoituva.

Tutkielman toisessa luvussa esitellään esitietoina vaadittavia käsitteitä. Kolmannessa luvussa käsitellään ensin lukujonoja ja -sarjoja ja sen jälkeen funktiosarjoja ja niiden suppenemista. Neljäs luku käsittelee Weierstrassin funktiota sekä lyhyesti muita kaikkialla jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita.

Tässä tutkielmassa käsitellään yhden muuttujan reaaliarvoisia funktioita. Lukijalta edellytetään matemaattisen analyysin peruskäsitteiden hallintaa. Päälähteinä tutkielmassa on käytetty Tom Apostolin teosta *Calculus, Volume I: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra* sekä Edwin Hewittin ja Karl Strombergin teosta *Real and Abstract Analysis: A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable*.

2 Esitietoja

Tässä luvussa käsitellään ensin funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta, joita tarvitaan välttämättöminä esitietoina tutkielmassa. Lopuksi esitellään trigonometristen funktioiden ominaisuuksia.

2.1 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Määritelmä 2.1 (ks. [2, s. 60]). Olkoon $a < b$. *Avoim väli* (a,b) on lukujen a ja b välissä oleva joukko, jolle pätee $(a,b) = \{x : a < x < b\}$. Vastavasti *suljettu väli* $[a,b]$ on lukujen a ja b välissä oleva joukko, jolle pätee $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$.

Täsmällisen määritelmän funktion jatkuvuudelle antoi vuonna 1821 ranskalainen matemaatikko Augustin Louis Cauchy (1789-1875). Määritelmä perustuu funktion raja-arvoon, joka esitellään seuraavaksi. (Ks. [2, s. 127].)

Määritelmä 2.2 (ks. [2, s. 127]). Jokainen avoin väli, jonka keskipisteenä on piste p , on pisteen p *ympäristö*. Tätä ympäristöä merkitään $N(p)$, $N_1(p)$, $N_2(p)$ jne.

Väli $N(p)$ on avoin väli, joka on symmetrinen pisteen p suhteen. Siten se sisältää kaikki luvut $x \in \mathbb{R}$, jotka toteuttavat epäyhtälöt $p - r < x < p + r$ jollakin $r > 0$. Luku r merkitsee tässä ympäristön $N(p)$ sädettä.

Määritelmä 2.3 (ks. [2, s. 128]). Merkintä $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ (tai $f(x) \rightarrow A$ kun $x \rightarrow p$) tarkoittaa, että jokaista ympäristöä $N_1(A)$ kohden on olemassa ympäristö $N_2(p)$ siten, että

$$f(x) \in N_1(A) \quad \text{aina, kun } x \in N_2(p) \text{ ja } x \neq p.$$

Tässä tutkielmassa käytetään edellisen määritelmän lisäksi funktion raja-arvolle myös niin sanottua *epsilon-delta* -määritelmää. Tämä määritelmä perustuu ympäristöjen $N_1(A)$ ja $N_2(p)$ säteisiin. Tällöin ympäristön $N_1(A)$ sädettä merkitään kreikkalaisella kirjaimella ϵ ja ympäristön $N_2(p)$ sädettä kreikkalaisella kirjaimella δ . Väite $f(x) \in N_1(A)$ on yhtäpitävä epäyhtälön $|f(x) - A| < \epsilon$ kanssa ja väite $x \in N_2(p)$, $x \neq p$ yhtäpitävä epäyhtälön $0 < |x - p| < \delta$ kanssa. Tällöin määritelmä 2.3 voidaan esittää seuraavasti.

Määritelmä 2.4 (ks. [2, s. 129]). Funktion f *raja-arvo* $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$, jos aina, kun $\epsilon > 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{aina, kun } 0 < |x - p| < \delta.$$

Funktion raja-arvo voi olla myös toispuoleinen. Toispuoleiset raja-arvot määritellään vastaavasti kuin normaali funktion raja-arvo.

Määritelmä 2.5 (vrt. [2, s. 129-130]). Funktiolla f on *vasemmanpuoleinen raja-arvo* $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = A$, jos jokaista ympäristöä $N_1(A)$ kohden on olemassa ympäristö $N_2(p)$ siten, että

$$f(x) \in N_1(A) \quad \text{aina, kun } x \in N_2(p) \text{ ja } x < p.$$

Tämä voidaan esittää *epsilon-delta* -tekniikalla seuraavasti. Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = A$, jos aina, kun $\epsilon > 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{aina, kun } 0 < p - x < \delta.$$

Vastaavasti funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = A$, jos jokaista ympäristöä $N_1(A)$ kohden on olemassa ympäristö $N_2(p)$ siten, että

$$f(x) \in N_1(A) \quad \text{aina, kun } x \in N_2(p) \text{ ja } x > p.$$

Myös tämä voidaan esittää *epsilon-delta* -tekniikalla. Funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = A$ jos aina, kun $\epsilon > 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{aina, kun } 0 < x - p < \delta.$$

Mikäli funktiolla f on raja-arvo A pisteessä p , niin sillä on myös vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot pisteessä p ja

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = A.$$

Funktion vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot voivat myös olla erisuuret. Tällöin funktion f raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ ei ole olemassa. Raja-arvon määritelmä ei anna ehtoa funktion f arvolle pisteessä p , joten funktiolla voi olla olemassa raja-arvo vaikka $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \neq f(p)$, kuten nähdään seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.1. Olkoon funktio $f(x) = 2x$, kun $x \neq 0$, ja $f(0) = 1$. Näytetään raja-arvon määritelmän perusteella, että $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ vaikka $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. On siis osoitettava, että aina, kun $\epsilon > 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|2x - 0| < \epsilon$ aina, kun $0 < |x - 0| < \delta$. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Nyt, kun

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta$$

pätee

$$|2x - 0| = |2x| = 2|x| < 2\delta = \epsilon.$$

Siis $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ vaikka $f(0) \neq 0$.

Lause 2.1. *Olkoot f ja g sellaisia funktioita, että $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ ja $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = B$. Tällöin*

(i) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)] = A + B,$

(ii) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) - g(x)] = A - B,$

(iii) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B,$

(iv) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B},$ jos $B \neq 0$.

Todistus. Ks. [2, s. 136-137]. □

Lause 2.2. *Olkoon $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ kaikilla $x \neq p$ jossain pisteen p ympäristössä $N(p)$. Oletetaan, että*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = A.$$

Tällöin myös

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = A.$$

Todistus. Ks. [2, s. 133-134]. □

Funktion raja-arvon määritelmä ei myöskään anna ehtoa sille, että funktion tulisi olla määritelty pisteessä p . Kuitenkin, jotta funktio olisi jatkuva pisteessä p , sen tulee täyttää seuraavan määritelmän ehdot.

Määritelmä 2.6 (ks. [2, s. 130-131]). *Funktio f on jatkuva pisteessä p , jos*

- (i) funktio f on määritelty pisteessä p ,

$$(ii) \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Funktio f on siis jatkuva pisteessä p , jos se on määritelty pisteessä p ja jos aina, kun $\epsilon > 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \quad \text{aina, kun } |x - p| < \delta.$$

Funktio voi olla myös toispuoleisesti jatkuva pisteessä p , kuten seuraava määritelmä osoittaa.

Määritelmä 2.7 (ks. [1, s. 124]). Funktio f on *vasemmalta jatkuva* pisteessä p , jos

(i) funktio f on määritelty pisteessä p ,

(ii) $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ on olemassa,

(iii) $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = f(p)$.

Oikeanpuoleinen jatkuvuus määritellään vastaavasti.

Lause 2.3. Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia pisteessä p , niin

(i) $f + g$ on jatkuva pisteessä p ,

(ii) $f - g$ on jatkuva pisteessä p ,

(iii) $f \cdot g$ on jatkuva pisteessä p ,

(iv) f/g on jatkuva pisteessä p , edellyttäen, että $g(p) \neq 0$.

Todistus. Ks. [2, s. 132]. □

Vakiofunktiot ovat kaikkialla jatkuvia, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 2.2 (ks. [2, s. 131]). Olkoon $f(x) = c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} c = c = f(p)$$

aina, kun $p \in \mathbb{R}$, joten funktio f on kaikkialla jatkuva.

Esimerkki 2.3. Osoitetaan, että funktio $f(x) = x$ on kaikkialla jatkuva. Olkoon $f(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} x = p = f(p)$$

aina, kun $p \in \mathbb{R}$, joten funktio f on kaikkialla jatkuva.

Lause 2.4. Olkoon funktio v jatkuva pisteessä p ja olkoon funktio u jatkuva pisteessä $q = v(p)$. Tällöin yhdistetty funktio $f = u \circ v$ on jatkuva pisteessä p .

Todistus. Ks. [2, s. 141]. □

Määritelmä 2.8 (ks. [1, s. 120]). Funktio f on *jatkuva avoimella välillä* (a, b) , jos funktio f on jatkuva jokaisessa pisteessä $c \in (a, b)$.

Määritelmä 2.9 (ks. [1, s. 124]). Funktio f on *jatkuva suljetulla välillä* $[a, b]$, jos

- (i) f on jatkuva avoimella välillä (a, b) ,
- (ii) f on oikealta jatkuva pisteessä a ,
- (iii) f on vasemmalta jatkuva pisteessä b .

2.2 Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia

Ennen jatkuvien funktioiden tarkastelua käsitellään lyhyesti rajoitetun joukon käsite sekä supremum ja infimum.

Määritelmä 2.10 (vrt. [2, s. 23-25]). Olkoon S epätyhjä joukko ja olkoon luku B määritelty siten, että $x \leq B$ kaikilla $x \in S$. Tällöin joukko S on *ylhäältä rajoitettu* ja luku B on joukon S yläraja. Vastaavasti joukko S on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku C , että $x \geq C$ kaikilla $x \in S$. Luku C on tällöin joukon S alaraja.

Joukolla S on useita ylärajoja, sillä jokainen luku, joka on suurempi kuin luku B , on myös joukon S yläraja. Jos $B \in S$, merkitään $B = \max S$. Joukolla S on myös useita alarajoja, sillä jokainen luku, joka on pienempi kuin luku C , on myös joukon S alaraja. Jos $C \in S$, merkitään $C = \min S$.

Määritelmä 2.11 (ks. [2, s. 24]). Luku B on epätyhjän joukon S *pienin yläraja*, jos luku B on joukon S yläraja ja jos mikään luku, joka on pienempi kuin luku B , ei ole joukon S yläraja. Pienintä ylärajaa kutsutaan *supremumiksi* ja merkitään $\sup S$.

Vastaavasti luku C on epätyhjän joukon S *suurin alaraja*, jos luku C on joukon S alaraja ja jos mikään luku, joka on pienempi kuin luku C , ei ole joukon S alaraja. Suurinta alarajaa kutsutaan *infimumiksi* ja merkitään $\inf S$.

Aksiooma 2.5 (ks. [2, s. 25]). *Jokaisella epätyhjällä joukolla S , joka on ylhäältä rajoitettu, on olemassa supremum.*

Lause 2.6. *Jokaisella epätyhjällä joukolla U , joka on alhaalta rajoitettu, on olemassa infimum.*

Todistus. Ks. [2, s. 25]. □

Nyt voidaan tarkastella jatkuvien funktioiden rajoittuneisuutta sekä niiden ääriarvoja.

Määritelmä 2.12 (ks. [2, s. 150]). Olkoon funktio f reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty joukossa $S \subseteq \mathbb{R}$. Funktiolla f on *absoluuttinen maksimiarvo* joukossa S , jos on olemassa vähintään yksi piste $c \in S$ siten, että

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Vastaavasti funktiolla f on *absoluuttinen minimiarvo* joukossa S , jos on olemassa piste $d \in S$ siten, että

$$f(x) \geq f(d) \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Määritelmä 2.13 (ks. [2, s. 73]). Funktio f on *rajoitettu välillä* $[a, b]$, jos on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Huomautus 2.7 (ks. [2, s. 151]). Jos funktio f on rajoitettu välillä $[a, b]$, niin funktion f arvojen joukko on ylhäältä ja alhaalta rajoitettu. Tällöin tällä joukolla on supremum ja infimum, joita merkitään seuraavasti.

$$\sup f = \sup \{f(x) | a \leq x \leq b\} \quad \text{ja} \quad \inf f = \inf \{f(x) | a \leq x \leq b\}.$$

Jokaiselle välillä $[a, b]$ rajoitetulle funktiolle pätee $\inf f \leq f(x) \leq \sup f$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Lause 2.8. Jatkuvien funktioiden ääriarvolause. *Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa pisteet $c, d \in [a, b]$ siten, että*

$$f(c) = \sup f \quad \text{ja} \quad f(d) = \inf f.$$

Todistus. Ks. [2, s. 151]. □

Lause 2.9. *Olkoon funktio f jatkuva pisteessä c ja olkoon $f(c) \neq 0$. Tällöin on olemassa väli $(c - \delta, c + \delta)$, jolla funktiolla f on sama merkki kuin funktion f arvolla $f(c)$.*

Todistus. Ks. [2, s. 143-144]. □

2.3 Funktion derivoituvuus

Funktion derivaatalla tarkoitetaan funktion arvon muutoksen nopeutta tietyllä hetkellä. Geometrisesti derivaattaa voidaan havainnollistaa funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimenä. Funktion derivaatta määritellään täsmällisesti funktion raja-arvon avulla.

Määritelmä 2.14 (ks. [2, s. 160]). Funktion f *derivaatta*, jota merkitään symbolilla $f'(x)$, määritellään yhtälöllä

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

edellyttäen, että kyseinen raja-arvo on olemassa. Funktion f derivaattaa sanotaan myös funktion f muutosnopeudeksi pisteessä x .

Lause 2.10. *Jos funktio f on derivoituva pisteessä x , niin f on myös jatkuva pisteessä x .*

Todistus (ks. [2, s. 163]). Tarkastellaan yhtälöä

$$(2.1) \quad f(x+h) = f(x) + h \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right).$$

Yhtälö (2.1) on määritelty, kun $h \neq 0$. Kun $h \rightarrow 0$, niin

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow f'(x).$$

Myös, kun $h \rightarrow 0$, niin

$$h \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \rightarrow 0.$$

Siis

$$f(x+h) \rightarrow f(x),$$

kun $h \rightarrow 0$ ja siten funktio f on jatkuva pisteessä x . □

Funktion jatkuvuus on välttämätön, mutta ei riittävä ehto funktion derivoituvuudelle. Jatkuva funktio ei siis välttämättä ole derivoituva vaikka derivoituva funktio on aina jatkuva.

Lause 2.11. *Olkoot funktiot f ja g määriteltyjä välillä $[a, b]$. Tällöin jokaisessa pisteessä $x \in [a, b]$, missä funktioilla f ja g on olemassa derivaatta, myös niiden summalla, erotuksella, tulolla ja osamäärällä on olemassa derivaatta (osamäärän tapauksessa edellytetään lisäksi, että $g \neq 0$). Tällöin seuraavat derivoimissäännöt pätevät:*

(i) $(f + g)' = f' + g'$,

(ii) $(f - g)' = f' - g'$,

(iii) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$,

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ kaikissa sellaisissa pisteissä x , että $g(x) \neq 0$.

Todistus (Ks. [2, s. 165-166]). □

Vakiofunktion derivaatta on aina 0, kuten huomataan seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.4 (ks. [2, s. 161]). Olkoon funktio f vakiofunktio. Merkitään $f(x) = c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nyt erotusosamääräksi saadaan

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0.$$

Koska erotusosamäärä on 0 kaikilla $h \neq 0$, sen raja-arvo $f'(x)$ on myös 0 kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Vakiofunktion derivaatta on siis aina 0.

Esimerkki 2.5 (ks. [2, s. 161]). Osoitetaan, että lineaarisen funktion $f(x) = mx + b$ derivaatta $f'(x) = m$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Kun $h \neq 0$, niin

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + b - (mx+b)}{h} = \frac{mh}{h} = m.$$

Tällöin raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m = m,$$

joten $f'(x) = m$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lause 2.12. *Olkoon funktio f yhdistetty funktio, joka määritellään $f = u \circ v$. Oletetaan, että derivaatat $v'(x)$ ja $u'(y)$ ovat olemassa, missä $y = v(x)$. Tällöin myös derivaatta $f'(x)$ on olemassa ja se määritellään kaavalla*

$$f'(x) = u'(y) \cdot v'(x).$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x).$$

Todistus (ks. [2, s. 175-176]). Oletetaan, että funktiolla v on derivaatta pisteessä x ja että funktiolla u on derivaatta pisteessä $v(x)$. Halutaan osoittaa, että funktiolla f on derivaatta pisteessä x . Funktion f erotusosamäärä on

$$(2.2) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u[v(x+h)] - u[v(x)]}{h}.$$

Merkitään nyt $y = v(x)$ ja olkoon $k = v(x+h) - v(x)$. Tällöin $v(x+h) = y + k$ ja yhtälöstä (2.2) saadaan

$$(2.3) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{h}.$$

Nyt yhtälön (2.3) oikea puoli merkitsee erotusosamäärää, jonka raja-arvo määrittelee funktion $u(y)$ derivaatan, paitsi että nimittäjässä on luku h luvun k tilalla.

Jos $k \neq 0$, on todistuksen loppuun saattaminen helppoa. Kerrotaan erotusosamäärän osoittaja ja nimittäjä luvulla k . Nyt saadaan

$$\frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u(y+k) - u(y)}{k} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Kun $h \rightarrow 0$, niin

$$\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \rightarrow v'(x).$$

Myös $k \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$, sillä $k = v(x+h) - v(x)$ ja v on jatkuva pisteessä x . Täten

$$\frac{u(y+k) - u(y)}{k} \rightarrow u'(y)$$

kun $h \rightarrow 0$ ja päästään lopputulokseen $f'(x) = u'(y) \cdot v'(x)$.

Koska $k = v(x+h) - v(x)$, on kuitenkin mahdollista, että $k = 0$ äärettömän monella arvolla h , kun $h \rightarrow 0$. Palataan erotusosamäärään (2.3) ja esitetään se muodossa, jossa ei ole lukua k nimittäjässä. Tätä varten määritellään funktio g siten, että

$$(2.4) \quad g(t) = \frac{u(y+t) - u(y)}{t} - u'(y) \quad \text{jos } t \neq 0.$$

Tämä määrittelee siis funktion g vain, kun $t \neq 0$. Kun kerrotaan (2.4) luvulla t ja järjestetään termit uudelleen, yhtälöstä (2.4) saadaan

$$(2.5) \quad u(y+t) - u(y) = t[g(t) + u'(y)].$$

Vaikka yhtälö (2.5) on muodostettu olettaen, että $t \neq 0$, se pätee myös kun $t = 0$, kun määritellään arvo funktiolle g pisteessä $t = 0$. Koska $g(t) \rightarrow 0$ kun $t \rightarrow 0$, valitaan $g(0) = 0$. Tämä takaa funktion g jatkuvuuden pisteessä $t = 0$. Jos nyt korvataan yhtälössä (2.5) luku t luvulla $k = v(x+h) - v(x)$ ja yhtälö (2.5) jaetaan puolittain arvolla h sekä sijoitetaan tämän yhtälön oikea puoli yhtälöön (2.3), saadaan

$$(2.6) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h}[g(k) + u'(y)].$$

Yhtälö (2.6) on määritelty myös kun $k = 0$. Kun $h \rightarrow 0$, niin osamäärä $\frac{k}{h} \rightarrow v'(x)$ ja $g(k) \rightarrow 0$, joten yhtälön (2.6) oikea puoli lähestyy tulon $u'(y) \cdot v'(x)$ raja-arvoa, mikä todistaa lauseen. \square

Derivaattaa käytetään usein funktion ääriarvojen löytämiseen. Funktion absoluuttiset ääriarvot esitettiin määritelmässä 2.12. Funktiolla voi olla myös paikallisia ääriarvoja, jotka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 2.15 (ks. [2, s. 182-183]). Funktiolla f , joka on määritelty joukossa S , on *paikallinen maksimi* pisteessä $c \in S$, jos on olemassa sellainen avoin väli I , $c \in I$, että

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{kaikilla } x \in I \cap S.$$

Vastaavasti funktiolla f on *paikallinen minimi* pisteessä $d \in S$, jos on olemassa sellainen avoin väli I , $d \in I$, että

$$(2.7) \quad f(x) \geq f(c) \quad \text{kaikilla } x \in I \cap S.$$

Lause 2.13. *Olkoon funktio f määritelty avoimella välillä I ja olkoon funktiolla f paikallinen maksimi tai paikallinen minimi jossain välin I sisäpisteessä c . Jos derivaatta $f'(c)$ on olemassa, niin $f'(c) = 0$.*

Todistus (ks. [2, s. 182]). Määritellään funktio Q siten, että

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, & \text{kun } x \neq c, \\ f'(c), & \text{kun } x = c. \end{cases}$$

Koska $f'(c)$ on olemassa, niin $Q(x) \rightarrow Q(c)$ kun $x \rightarrow c$. Funktio Q on siis jatkuva pisteessä c . Halutaan todistaa, että $Q(c) = 0$. Näytetään siis, että epäyhtälöt $Q(c) > 0$ ja $Q(c) < 0$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan, että $Q(c) > 0$. Lauseen 2.9 perusteella on olemassa väli, jossa piste c on keskipisteenä ja jolla funktio Q on positiivinen. Funktion Q lausekkeen osoittajalla ja nimittäjällä on siis tällä välillä sama merkki aina, kun $x \neq c$. Siis

$$f(x) > f(c) \text{ kun } x > c \quad \text{ja} \quad f(x) < f(c) \text{ kun } x < c.$$

Tämä johtaa ristiriitaan sen kanssa, että funktiolla olisi paikallinen minimi tai paikallinen maksimi pisteessä c . Vastaavasti todistetaan, että oletus $Q(c) < 0$ johtaa myös ristiriitaan, joten $Q(c) = 0$. Koska $Q(c) = f'(c)$, lause on todistettu. \square

Lause 2.14. *Rollen lause. Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä (a, b) ja jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Jos $f(a) = f(b)$, niin on olemassa sellainen $c \in (a, b)$, että $f'(c) = 0$.*

Todistus (ks. [2, s. 184]). Tehdään vastaoletus, että $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. Jatkuvien funktioiden ääriarvolauseen 2.8 perusteella funktio f saa suurimman arvonsa M ja pienimmän arvonsa m välillä $[a, b]$. Lauseen 2.13 perusteella funktio f ei voi saavuttaa kumpaakaan ääriarvoista välin (a, b) sisäpisteessä, joten funktio saa ääriarvonsa pisteissä a ja b . Nyt, koska $f(a) = f(b)$, on $M = m$, joten f on vakiofunktio välillä $[a, b]$. Tällöin esimerkiksi 2.4 perusteella $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in (a, b)$, mikä johtaa ristiriitaan vastaoletuksen kanssa. Täten $f'(c) = 0$ ainakin yhdessä pisteessä $c \in (a, b)$. \square

Seuraavaksi esiteltävä differentiaalilaskennan väliarvolause tunnetaan myös nimellä Lagrangen väliarvolause.

Lause 2.15. *Differentiaalilaskennan väliarvolause. Jos funktio f on derivoituva avoimella välillä (a, b) ja jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, niin on olemassa vähintään yksi sellainen piste $c \in (a, b)$, että*

$$(2.8) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Todistus (ks. [2, s. 185]). Jotta pystytään soveltamaan Rollen lausetta 2.14, tarvitaan funktio, jolla on yhtä suuret arvot välin päätepisteissä a ja b . Tutkitaan tällaista funktiota

$$(2.9) \quad h(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)].$$

Nyt $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$. Funktio h on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b) , joten voidaan käyttää Rollen lausetta 2.14. Sen mukaan on olemassa $c \in (a, b)$ siten, että $h'(c) = 0$. Toisaalta, kun derivoidaan yhtälö (2.9), pätee myös

$$h'(x) = f'(x)(b - a) - [f(b) - f(a)].$$

Kun $x = c$, pätee $h'(x) = h'(c) = 0$ ja $f'(x) = f'(c)$. Tällöin saadaan yhtälö (2.8), joten lause on todistettu. \square

2.4 Trigonometrinen funktioiden ominaisuuksia

Seuraavaksi esitellään sini- ja kosinifunktioiden keskeisiä ominaisuuksia, joita tarvitaan tutkielmassa.

Määritelmä 2.16 (ks. [2, s. 95]). Seuraavat trigonometrinen funktioiden ominaisuudet pätevät:

- (i) Sini- ja kosinifunktiot ovat kaikkialla määriteltyjä reaalilukujen joukossa,
- (ii) $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \pi = -1$,
- (iii) $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$ kaikilla arvoilla x ja y ,
- (iv) $0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Lause 2.16. *Olkoot funktiot $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ funktioita, jotka täyttävät määritelmän 2.16 ehdot. Tällöin kaikilla arvoilla x pätee*

- (i) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,
- (ii) $\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2} = \sin \pi = 0$,
- (iii) $\cos(-x) = \cos x$ ja $\sin(-x) = -\sin x$, eli kosini on parillinen ja sini pariton funktio,
- (iv) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ ja $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$,
- (v) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ja $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, eli sini ja kosini ovat jaksollisia funktioita,

$$(vi) \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$(vii) \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$(viii) \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

$$(ix) \cos y - \cos x = -2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{y+x}{2}.$$

Todistus. Ks. [2, s. 96-97]. □

3 Funktiosarjat

3.1 Lukujonot ja -sarjat

Määritelmä 3.1 (ks. [2, s. 379]). Funktio f , jonka määrittelyjoukko on positiivisten kokonaislukujen joukko $\{1, 2, 3, \dots\}$, on *päättymätön jono*. Funktion arvoa $f(n)$ sanotaan jonon n :nneksi termiksi.

Lukujonon $f(n) = a_n$ indeksointia ei ole välttämätöntä aloittaa luvulla $n = 1$, vaan myös muu aloitus on mahdollinen.

Määritelmä 3.2 (ks. [2, s. 379]). Jonolla $\{f(n)\}$ on raja-arvo L , jos aina, kun $\epsilon > 0$, on olemassa $N > 0$ siten, että

$$|f(n) - L| < \epsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin jono $\{f(n)\}$ *suppenee* kohti arvoa L ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L \quad (\text{tai } f(n) \rightarrow L \text{ kun } n \rightarrow \infty).$$

Jono, joka ei suppene, *hajaantuu*.

Jonon suppeneminen tai hajaantuminen voidaan usein laskea kaikilla positiivisilla arvoilla x määriteltyjen funktioiden avulla.

Määritelmä 3.3 (ks. [2, s. 381]). Jono $\{f(n)\}$ on *kasvava*, jos

$$f(n) \leq f(n+1) \quad \text{kaikilla } n \geq 1.$$

Jos taas

$$f(n) \geq f(n+1) \quad \text{kaikilla } n \geq 1,$$

niin jono on *vähenevä*.

Määritelmä 3.4 (ks. [2, s. 381]). Jono $\{f(n)\}$ on *monotoninen*, jos se on kasvava tai vähenevä.

Määritelmä 3.5 (ks. [2, s. 381]). Jono $\{f(n)\}$ on *rajoitettu*, jos on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(n)| \leq M$ kaikilla arvoilla $n \geq 1$.

Lause 3.1. *Monotoninen jono suppenee, jos ja vain jos se on rajoitettu.*

Todistus (ks. [2, s. 381]). Rajoittamaton jono ei voi supeta. Riittää siis osoittaa, että rajoitettu monotoninen jono suppenee.

Olkoon jono $f(n)$ kasvava ja olkoon $L = \sup f(n)$. Nyt $f(n) \leq L$ kaikilla arvoilla n . Todistetaan, että jono suppenee kohti lukua L . Valitaan mielivaltainen $\epsilon > 0$. Koska $L - \epsilon$ ei voi olla kaikkien jonon arvojen $f(n)$ yläraja, niin täytyy olla $L - \epsilon < f(N)$ jollakin arvolla N . Jos $n \geq N$, niin pätee $f(N) \leq f(n)$, sillä jono $f(n)$ on kasvava. Siis $L - \epsilon < f(n) \leq L$ kaikilla $n \geq N$. Nyt

$$0 \leq L - f(n) < \epsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N,$$

joten jono suppenee kohti lukua L .

Jos jono $f(n)$ olisi vähenevä, todistus etenisi vastaavasti, mutta raja-arvona L käytettäisiin infimumia $\inf f(n)$. \square

Annetusta reaalitylukujen lukujonosta voidaan aina muodostaa uusi lukujono laskemalla yhteen jonon peräkkäisiä termejä. Jos esimerkiksi lukujonosta

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

muodostetaan uusi jono laskemalla osasummia

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

ja niin edelleen, osasummaksi s_n saadaan

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

(Ks. [2, s. 383].)

Määritelmä 3.6 (vrt. [2, s. 384]). Osasummien s_n jono $\{s_n\}$ on *sarja* ja sitä merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole, voidaan sarjalle käyttää merkintää

$$\sum a_k.$$

Määritelmä 3.7 (ks. [2, s. 384]). Jos on olemassa reaalin luku S siten, että $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on *suppeneva* ja sillä on summa S . Tällöin merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Jos jono $\{s_n\}$ hajaantuu, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu* ja sillä ei ole summaa.

Esimerkki 3.1. Sarja on *geometrinen sarja*, mikäli sen peräkkäisten termien suhde on vakio. Tällaista sarjaa merkitään $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Jos $|x| < 1$, geometrinen sarja suppenee (ks. [2, s. 388]). Geometriselle sarjalle pätee

$$(3.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Huomautus 3.2 (ks. [2, s. 385]). Tavallisilla äärellisillä summilla on seuraavat ominaisuudet:

$$(3.2) \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

ja

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^n (ca_k) = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

Lause 3.3. Olkoot $\sum a_n$ ja $\sum b_n$ suppenevia reaali-termisiä sarjoja ja olkoot α ja β reaalisia vakioita. Tällöin sarja $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ myös suppenee ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Todistus (ks. [2, s. 386]). Summien ominaisuuksien (3.2) ja (3.3) perusteella voidaan kirjoittaa

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k.$$

Kun $n \rightarrow \infty$, niin

$$\alpha \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{ja} \quad \beta \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Siten

$$\alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siis sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

suppenee kohti summaa

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

□

Lauseella 3.3 on mielenkiintoinen seuraus, jota usein käytetään sarjan hajaantumisen osoittamiseen:

Seuraus 3.4. *Jos sarja $\sum a_n$ suppenee ja sarja $\sum b_n$ hajaantuu, niin sarja $\sum(a_n + b_n)$ hajaantuu.*

Todistus (ks. [2, s. 386]). Koska $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ ja koska $\sum a_n$ suppenee, niin lauseen 3.3 perusteella sarjan $\sum(a_n + b_n)$ suppenemisesta seuraa sarjan $\sum b_n$ suppeneminen. Siten $\sum(a_n + b_n)$ ei voi supeta, jos $\sum b_n$ hajaantuu. \square

Lause 3.5 (ks. [2, s. 395]). *Olkoon $a_n \geq 0$ kaikilla $n \geq 1$. Sarja $\sum a_n$ suppenee, jos ja vain jos sen osasummien jono on ylhäältä rajoitettu.*

Todistus. Tarkka todistus sivuutetaan. \square

Jos sarjan osasummat ovat ylhäältä rajoitettuja luvulla M , niin sarjan summa ei voi ylittää lukua M (ks. [2, s. 395]).

Sarjojen suppenemisen osoittamista varten on kehitetty useita erilaisia testejä. Seuraavaksi esitellään niistä vertailutesti. Testi pätee sarjoille, joiden termit ovat ei-negatiivisia. Tällöin sarjat ovat muotoa $\sum a_n$, missä jokainen termi $a_n \geq 0$.

Lause 3.6. *Vertailutesti. Oletetaan, että $a_n \geq 0$ ja $b_n \geq 0$ kaikilla $n \geq 1$. Jos on olemassa positiivinen vakio c siten, että*

$$(3.4) \quad a_n \leq cb_n$$

kaikilla arvoilla n , niin sarjan $\sum b_n$ suppenemisestä seuraa sarjan $\sum a_n$ suppeneminen. Mikäli yhtälö (3.4) pätee, sarja $\sum b_n$ majoroi sarjaa $\sum a_n$.

Todistus (ks. [2, s. 395]). Olkoon $s_n = a_1 + \dots + a_n$ ja $t_n = b_1 + \dots + b_n$. Tällöin epäyhtälöstä (3.4) seuraa, että $s_n \leq ct_n$. Jos $\sum b_n$ suppenee, lauseen 3.5 perusteella sen osasummat ovat rajoitettuja jollakin luvulla M . Tällöin $s_n \leq cM$ ja siten lauseen 3.5 perusteella $\sum a_n$ on myös suppeneva johtuen siitä, että sen osasummat ovat rajoitettuja luvulla cM . \square

Määritelmä 3.8 (ks. [2, s. 406]). Sarja $\sum a_n$ on *itseisesti suppeneva*, jos sarja $\sum |a_n|$ suppenee. Jos sarja $\sum a_n$ suppenee, mutta sarja $\sum |a_n|$ hajaantuu, sarja $\sum a_n$ suppenee *ehdollisesti*.

Lause 3.7. *Oletetaan, että sarja $\sum |a_n|$ suppenee. Tällöin myös sarja $\sum a_n$ suppenee ja*

$$(3.5) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Todistus (ks. [2, s. 406]). Olkoon sarja $b_n = a_n + |a_n|$. Todistetaan, että sarja b_n suppenee. Tällöin lauseen 3.3 perusteella sarja a_n suppenee, sillä $a_n = b_n - |a_n|$.

Koska $b_n = 0$ tai $b_n = 2|a_n|$, saadaan $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$. Siten sarja $\sum |a_n|$ majoroi sarjaa $\sum b_n$. Koska $\sum |a_n|$ suppenee, myös $\sum b_n$ suppenee ja sarjan $\sum a_n$ suppeneminen seuraa lauseesta 3.6.

Todistaaksemme yhtälön (3.5) huomataan, että kolmioepäyhtälön perusteella

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Kun $n \rightarrow \infty$, todistus pätee. □

3.2 Funktiosarjat ja niiden suppeneminen

Edellisessä luvussa käsiteltiin jonoja, joiden termit olivat reaalilukuja. Tässä luvussa käsitellään jonoja $\{f_n\}$, joiden termit ovat reaaliarvoisia funktioita. Näiden funktioiden määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko. Nyt jokaista määrittelyjoukon arvoa x kohden voidaan muodostaa jono $\{f_n(x)\}$, jonka termit ovat vastaavan funktion arvoja.

Määritelmä 3.9 (vrt. [2, s. 422]). Olkoon S pisteiden x joukko, joilla jono $\{f_n(x)\}$ suppenee. Funktio f , joka on määritelty joukossa S yhtälöllä

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{kun } x \in S,$$

on jonon $\{f_n\}$ *raja-arvofunktio*. Tällöin jono $\{f_n\}$ *suppenee pisteittäisesti* kohti funktiota f joukossa S .

Määritelmä 3.10 (ks. [2, s. 424]). Funktiojono $\{f_n\}$ *suppenee tasaisesti* kohti funktiota f joukossa S , jos aina, kun $\epsilon > 0$, on olemassa kokonaisluku N siten, että kun $n \geq N$, pätee

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Tätä merkitään kirjoittamalla

$$f_n \rightarrow f \text{ tasaisesti joukossa } S.$$

Lause 3.8. *Oletetaan, että $f_n \rightarrow f$ tasaisesti välillä S . Jos jokainen funktio f_n on jatkuva pisteessä $p \in S$, niin raja-arvofunktio f on myös jatkuva pisteessä p .*

Todistus (ks. [2, s. 424-425]). Osoitetaan, että jokaista $\epsilon > 0$ kohden on olemassa ympäristö $N(p)$ siten, että $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ aina, kun $x \in N(p) \cap S$. Jos $\epsilon > 0$ on annettu, on olemassa kokonaisluku N siten, että jos $n \geq N$, niin

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Koska f_N on jatkuva pisteessä p , niin on olemassa ympäristö $N(p)$ siten, että

$$|f_N(x) - f_N(p)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{kaikilla } x \in N(p) \cap S.$$

Siis kaikille $x \in N(p) \cap S$ pätee kolmioepäyhtälön nojalla

$$(3.6) \quad |f(x) - f(p)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \\ \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)|.$$

Koska jokainen itseisarvotermit yhtälön (3.6) oikealla puolella on pienempi kuin $\epsilon/3$, on $|f(x) - f(p)| < \epsilon$, joten todistus on valmis. \square

Lausetta 3.8 voidaan soveltaa päättymättömiin funktiosarjoihin. Jos funktioiden arvot $f_n(x)$ ovat toisten funktioiden osasummia, eli

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x),$$

ja jos $f_n \rightarrow f$ pisteittäin joukossa S , niin

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

kaikilla $x \in S$. Tällöin sarja $\sum u_k$ suppenee pisteittäin kohti summafunktioita f . Jos taas $f_n \rightarrow f$ tasaisesti joukossa S , niin sarja $\sum u_k$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f . Jos jokainen termi u_k on jatkuva pisteessä $p \in S$, jokainen osasumma f_n on myös jatkuva pisteessä p ja siten lauseesta 3.8 saadaan seuraava seuraus.

Seuraus 3.9 (ks. [2, s. 425]). *Jos funktiosarja $\sum u_k$ suppenee tasaisesti kohti summafunktioita f joukossa S ja jos jokainen termi u_k on jatkuva pisteessä $p \in S$, niin summa f on myös jatkuva pisteessä p .*

Huomautus 3.10 (ks. [2, s. 425]). Edellinen seuraus 3.9 voidaan ilmaista myös seuraavin symbolein:

$$\lim_{x \rightarrow p} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow p} u_k(x).$$

Weierstrass kehitti testin, jolla voidaan näyttää, että funktiosarja on tasaisesti suppeneva. Testi on pätevä aina, kun tutkittava sarja voidaan rajoittaa suppenevalla sarjalla, jonka termit ovat positiivisia vakioita.

Lause 3.11. Weierstrassin M-testi. *Olkoon $\sum u_n$ funktiosarja, joka suppenee pisteittäin kohti funktiota f joukossa S . Jos on olemassa suppeneva positiivisten termien sarja $\sum M_n$, $M_n \geq 0$ siten, että*

$$0 \leq |u_n(x)| \leq M_n \quad \text{jokaisella } n \geq 1 \text{ ja kaikilla } x \in S,$$

niin sarja $\sum u_n$ suppenee tasaisesti joukossa S .

Todistus (ks. [2, s. 427]). Vertailutestin 3.6 perusteella sarja $\sum u_n(x)$ suppee itseisesti kaikilla $x \in S$. Lauseen 3.7 perusteella aina, kun $x \in S$

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Koska sarja $\sum M_k$ suppenee, niin jokaista $\epsilon > 0$ kohden on olemassa kokonaisluku N siten, että kun $n \geq N$, pätee

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon.$$

Tästä seuraa, että

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| < \epsilon$$

kaikilla $n \geq N$ ja jokaisella $x \in S$. Siten sarja $\sum u_n$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa S . \square

4 Weierstrassin funktio

4.1 Aputuloksia

Esimerkki 4.1. Osoitetaan ensin, että funktio $f(x) = \cos x$ on kaikkialla jatkuva. Tiedetään (ks. [4, s. 123]), että

$$(4.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1 \text{ ja } \lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0.$$

Valitaan mielivaltainen $x_0 \in \mathbb{R}$. Tulee osoittaa, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h) = \cos x_0.$$

Nyt lauseen 2.16 kohdan (vi) perusteella

$$\begin{aligned} (4.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \cos x_0 \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \cos h \right) - \left(\lim_{h \rightarrow 0} \sin x_0 \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \sin h \right) \\ &= (\cos x_0) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \cos h \right) - (\sin x_0) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \sin h \right). \end{aligned}$$

Yhtälöiden(4.1) perusteella saadaan nyt yhtälöstä (4.2)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h) = (\cos x_0) \cdot 1 - (\sin x_0) \cdot 0 = \cos x_0.$$

Siis funktio $f(x) = \cos x$ on kaikkialla jatkuva.

Osoitetaan sitten, että funktio $f(x) = \sin x$ on kaikkialla jatkuva. Valitaan mielivaltainen $x_0 \in \mathbb{R}$. Tulee osoittaa, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0.$$

Nyt lauseen 2.16 kohdan (vii) perusteella

$$\begin{aligned} (4.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h) \\ &= (\lim_{h \rightarrow 0} \sin x_0) \cdot (\lim_{h \rightarrow 0} \cos h) + (\lim_{h \rightarrow 0} \cos x_0) \cdot (\lim_{h \rightarrow 0} \sin h) \\ &= (\sin x_0) \cdot (\lim_{h \rightarrow 0} \cos h) + (\cos x_0) \cdot (\lim_{h \rightarrow 0} \sin h). \end{aligned}$$

Yhtälöiden(4.1) perusteella saadaan nyt yhtälöstä (4.3)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h) = (\sin x_0) \cdot 1 + (\cos x_0) \cdot 0 = \sin x_0.$$

Siis funktio $f(x) = \sin x$ on kaikkialla jatkuva.

Esimerkki 4.2. Osoitetaan, että

$$\sin(\pi a^{k-n} \alpha_n) = 0,$$

kun a on pariton positiivinen kokonaisluku ja α_n on kokonaisluku, $k, n \in \mathbb{N}$, $k > n$.

Lauseen 2.16 kohdan (ii) perusteella $\sin \pi = 0$ ja $\sin 0 = 0$. Koska a on pariton positiivinen kokonaisluku ja α_n on kokonaisluku, on $a^{k-n} \alpha_n$ kokonaisluku. Lauseen 2.16 kohdan (v) perusteella sinifunktio on jaksollinen. Siten myös $\sin(\pi a^{k-n} \alpha_n) = 0$ aina, kun $a^{k-n} \alpha_n \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki 4.3 (ks. [2, s. 134-135]). Osoitetaan, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Koska nimittäjä lähestyy lukua 0, kun $x \rightarrow 0$, raja-arvoa ei voida laskea suoraan. Määritelmän 2.16 kohdan (iv) perusteella

$$(4.4) \quad 0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x},$$

kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Epäyhtälö (4.4) pätee myös, kun $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, sillä lauseen 2.16 kohdan (iii) perusteella $\cos(-x) = \cos x$ ja $\sin(-x) = -\sin x$.

Nyt

$$\cos x \rightarrow 1, \quad \text{kun } x \rightarrow 0,$$

sillä esimerkin 4.1 perusteella kosinifunktio on jatkuva, kun $x = 0$. Siten myös

$$\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1, \quad \text{kun } x \rightarrow 0.$$

Tällöin epäyhtälön (4.4) ja lauseen 2.2 perusteella myös

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \quad \text{kun } x \rightarrow 0.$$

Esimerkki 4.4. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä a on pariton positiivinen kokonaisluku, $0 < b < 1$, $b \in \mathbb{R}$ ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ sekä $k \in \mathbb{N}$, on kaikkialla jatkuva.

Funktio

$$j(x) = b^k$$

on vakiofunktiona jatkuva esimerkin 2.2 perusteella. Olkoon funktio

$$k(x) = (g \circ h)(x)$$

yhdistetty funktio siten, että

$$g(x) = \cos x \quad \text{ja} \quad h(x) = a^k \pi x.$$

Funktio $g(x) = \cos x$ on jatkuva esimerkin 4.1 perusteella ja funktio $h(x) = a^k \pi x$ on jatkuva esimerkkien 2.2 ja 2.3 sekä lauseen 2.3 kohdan (iii) perusteella. Tällöin funktio

$$k(x) = (g \circ h)(x) = \cos(a^k \pi x)$$

on jatkuva lauseen 2.4 perusteella. Siten funktio

$$f(x) = j(x) \cdot k(x) = j(x) \cdot (g \circ h)(x) = b^k \cos(a^k \pi x)$$

on jatkuva lauseen 2.3 kohdan (iii) perusteella.

Esimerkki 4.5 (ks. [2, s. 162]). Funktion $f(x) = \sin x$ derivaatta on $\cos x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mikä voidaan osoittaa seuraavasti.

Olkoon funktio $s(x) = \sin x$. Tällöin

$$(4.5) \quad \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}.$$

Yhtälö (4.5) halutaan saada sellaiseen muotoon, että raja-arvo on mahdollista laskea kun $h \rightarrow 0$. Lauseen 2.16 kohdan (viii) perusteella

$$\sin y - \sin x = 2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}.$$

Merkitään $y = x + h$. Saadaan

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right).$$

Esimerkin 4.1 perusteella kosinifunktio on jatkuva ja siten, kun $h \rightarrow 0$, niin

$$\cos \left(x + \frac{1}{2}h \right) \rightarrow \cos x.$$

Esimerkin 4.3 perusteella tiedetään, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

joten

$$(4.6) \quad \frac{\sin(h/2)}{h/2} \rightarrow 1, \quad \text{kun } h \rightarrow 0.$$

Tällöin erotusosamäärällä (4.5) on raja-arvo $\cos x$, kun $h \rightarrow 0$, joten $s'(x) = \cos x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 4.6 (ks. [2, s. 162-163]). Olkoon $c(x) = \cos x$. Näytetään, että $c'(x) = -\sin x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Lauseen 2.16 kohdan (ix) perusteella tiedetään, että

$$\cos y - \cos x = -2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{y+x}{2}.$$

Merkitään $y = x + h$. Saadaan

$$(4.7) \quad \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Esimerkin 4.1 perusteella sinifunktio on jatkuva ja siten, kun $h \rightarrow 0$, niin

$$\sin\left(x + \frac{1}{2}h\right) \rightarrow \sin x.$$

Raja-arvosta (4.6) seuraa, että $c'(x) = -\sin x$.

Esimerkki 4.7. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä a on pariton positiivinen kokonaisluku, $0 < b < 1$, $b \in \mathbb{R}$ ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Osoitetaan ensin, että funktio

$$g(x) = b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä a on pariton positiivinen kokonaisluku, $0 < b < 1$, $b \in \mathbb{R}$ ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ sekä $k \in \mathbb{N}$, on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Merkitään

$$h(x) = b^k.$$

Funktio $h(x)$ on esimerkin 2.4 perusteella derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Merkitään sitten

$$k(x) = (j \circ i)(x),$$

missä

$$j(x) = \cos x \quad \text{ja} \quad i(x) = a^k \pi x.$$

Nyt funktio $j(x) = \cos x$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$ esimerkin 4.6 perusteella. Funktio $i(x) = a^k \pi x$ on derivoituva esimerkin 2.5 perusteella. Tällöin funktio

$$k(x) = (j \circ i)(x) = \cos(a^k \pi x)$$

on derivoituva lauseen 2.12 perusteella. Siis funktio

$$g(x) = h(x) \cdot k(x) = b^k \cos(a^k \pi x)$$

on derivoituva lauseen 2.11 kohdan (iii) perusteella.

Funktio

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b^k \cos(a^k \pi x)$$

on tällöin derivoituva lauseen 2.11 kohdan (i) perusteella.

4.2 Weierstrassin funktion jatkuvuus ja derivoituvuus

Weierstrassin funktion esitti saksalainen matemaatikko Karl Weierstrass (1815-1897). Weierstrassin funktio on esimerkki funktiosta, joka on kaikkialla jatkuva mutta ei-missään derivoituva. Weierstrassin funktio oli ensimmäinen julkaistu kaikkialla jatkuva ei-missään derivoituva funktio. Se esitettiin ensimmäisen kerran 18.7.1872. Julkaisu tapahtui 1875 Borchardts' Journalissa, Saksassa Heidelbergin yliopistossa professorina toimivan Paul du Bois-Reymondin toimesta. Koska Weierstrassin funktio oli ensimmäinen julkaistu kaikkialla jatkuva ei-missään derivoituva funktio, sitä pidetään usein ensimmäisenä tällaisena funktiona. Muutkin matemaatikot, kuten Cellerier ja Darboux, olivat kuitenkin esittäneet aiemmin vastaavia jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita, mutta niitä ei oltu ehditty julkaista. (Ks. [5, s. 20-22].)

Määritelmä 4.1 (ks. [3, s. 258]). *Weierstrassin funktio*. Olkoon a pariton positiivinen kokonaisluku ja $0 < b < 1$, $b \in \mathbb{R}$. Olkoon myös $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Tällöin Weierstrassin funktioksi kutsutaan sellaista funktiota f , joka on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x).$$

Lause 4.1. *Weierstrassin funktio*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä a on pariton positiivinen kokonaisluku, $0 < b < 1$, $b \in \mathbb{R}$ ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus (ks. [3, s. 258]). Jokaista lukua k kohden pätee

$$|b^k \cos(a^k \pi x)| \leq b^k \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

sillä $b \in (0, 1)$ ja $|\cos(a^k \pi x)| \leq 1$. Koska sarja $\sum_{k=0}^{\infty} b^k$ on geometrinen sarja ja $|b| < 1$, niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} b^k$ suppenee esimerkin 3.1 perusteella.

Nyt, koska

$$|b^k \cos(a^k \pi x)| \leq b^k$$

ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} b^k$ suppenee, niin lauseen 3.6 perusteella sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b^k \cos(a^k \pi x)|$$

suppenee. Siten lauseen 3.7 perusteella sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x),$$

joka määrittelee funktion f , suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Lisäksi lauseen 3.7 ja esimerkin 3.1 perusteella

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Tästä seuraa lauseen 3.11 perusteella, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$$

suppenee tasaisesti kohti funktiota f kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Koska esimerkin 4.4 perusteella funktiosarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$$

jokainen termi on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja koska sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$$

suppenee tasaisesti, niin seurauksen 3.9 perusteella funktio f on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. □

Lause 4.2. *Weierstrassin funktio*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä a on pariton positiivinen kokonaisluku, $0 < b < 1$, $b \in \mathbb{R}$ ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, ei ole derivoituva millään arvolla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus (ks. [3, s. 259-260]). Olkoot

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} b^k \left(\frac{\cos(a^k \pi(x+h)) - \cos(a^k \pi x)}{h} \right)$$

ja

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} b^k \left(\frac{\cos(a^k \pi(x+h)) - \cos(a^k \pi x)}{h} \right),$$

kun $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Tällöin

$$(4.8) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = S_n + R_n.$$

Käyttämällä differentiaalilaskennan väliarvolausetta 2.15 saadaan

$$(4.9) \quad \frac{\cos(a^k \pi(x+h)) - \cos(a^k \pi x)}{h} = -a^k \pi \sin(a^k \pi(x+h')),$$

missä $0 < h' < h$. Nyt yhtälön (4.9) oikean puolen itseisarvo on pienempi tai yhtä suuri kuin $a^k \pi$ ja siten

$$|S_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k \pi = \pi \frac{a^n b^n - 1}{ab - 1}$$

geometrisen sarjan osasummana. Edelleen

$$\pi \frac{a^n b^n - 1}{ab - 1} < \frac{\pi a^n b^n}{ab - 1}.$$

Siis

$$(4.10) \quad |S_n| < \frac{\pi a^n b^n}{ab - 1}.$$

Merkitään

$$a^n x = \alpha_n + \beta_n,$$

missä α_n on kokonaisluku ja $-1/2 \leq \beta_n < 1/2$. Olkoon

$$h_n = \frac{1 - \beta_n}{a^n}.$$

Koska $3/2 \geq 1 - \beta_n > 1/2$, niin saadaan

$$\frac{3}{2a^n} \geq \frac{1 - \beta_n}{a^n} > \frac{1}{2a^n}$$

ja siten

$$(4.11) \quad \frac{2a^n}{3} \leq \frac{1}{h_n} < 2a^n,$$

sillä $h_n > 0$.

Arvioidaan sitten arvoa $|R_n|$. Jos $k \geq n$, niin

$$\begin{aligned} a^k \pi(x + h_n) &= a^{k-n} a^n \pi(x + h_n) \\ &= a^{k-n} \pi(a^n x + 1 - \beta_n) \\ &= a^{k-n} \pi(1 + \alpha_n). \end{aligned}$$

Nyt voidaan merkitä

$$\cos(a^k \pi(x + h_n)) = \cos(a^{k-n} \pi(1 + \alpha_n)).$$

Mikäli α_n on parillinen, on $1 + \alpha_n$ pariton. Koska a^{k-n} on pariton, on termi $a^{k-n}(1 + \alpha_n)$ myös pariton. Tällöin on olemassa luku $l \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$\cos(a^{k-n} \pi(1 + \alpha_n)) = \cos((2l + 1)\pi) = -1.$$

Mikäli taas α_n on pariton, on $1 + \alpha_n$ parillinen ja siten termi on $a^{k-n}(1 + \alpha_n)$ nyt parillinen. Tällöin on olemassa luku $l \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$\cos(a^{k-n} \pi(1 + \alpha_n)) = \cos(2l\pi) = 1.$$

Tästä seuraa, että

$$(4.12) \quad \cos(a^k \pi(x + h_n)) = \cos(a^{k-n} \pi(1 + \alpha_n)) = (-1)^{1+\alpha_n}.$$

Mikäli α_n on pariton, on termi $a^{k-n} \alpha_n$ myös pariton, sillä a^{k-n} on pariton. Tällöin on olemassa luku $m \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$(4.13) \quad \cos(a^{k-n} \pi \alpha_n) = \cos((2m + 1)\pi) = -1.$$

Mikäli taas α_n on parillinen, on termi $a^{k-n} \alpha_n$ nyt parillinen. Tällöin on olemassa luku $m \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$(4.14) \quad \cos(a^{k-n} \pi \alpha_n) = \cos((2m)\pi) = 1.$$

Yhtälöistä (4.13) ja (4.14) seuraa, että

$$(4.15) \quad -\cos(a^{k-n} \pi \alpha_n) = (-1)^{1+\alpha_n}.$$

Lauseen 2.16 kohdan (vi), yhtälön 4.15 ja esimerkin 4.2 perusteella

$$\begin{aligned} (4.16) \quad -\cos(\pi a^k x) &= -\cos(\pi a^{k-n} a^n x) \\ &= -\cos(\pi a^{k-n} (\alpha_n + \beta_n)) \\ &= -\cos(\pi a^{k-n} \alpha_n + \pi a^{k-n} \beta_n) \\ &= -(\cos(\pi a^{k-n} \alpha_n) \cos(\pi a^{k-n} \beta_n) - \sin(\pi a^{k-n} \alpha_n) \sin(\pi a^{k-n} \beta_n)) \\ &= -(\cos(\pi a^{k-n} \alpha_n) \cos(\pi a^{k-n} \beta_n) - 0 \cdot \sin(\pi a^{k-n} \beta_n)) \\ &= -\cos(\pi a^{k-n} \alpha_n) \cos(\pi a^{k-n} \beta_n) \\ &= (-1)^{1+\alpha_n} \cos(\pi a^{k-n} \beta_n). \end{aligned}$$

Asettamalla $h = h_n$ saadaan yhtälöiden (4.11), (4.12) ja (4.16) perusteella

(4.17)

$$\begin{aligned}
|R_n| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} b^k \left(\frac{\cos(a^k \pi(x+h)) - \cos(a^k \pi x)}{h} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{(-1)^{1+\alpha_n} + (-1)^{1+\alpha_n} \cos(\pi a^{k-n} \beta_n)}{h_n} \right| \\
&= \left| \frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n} \right| \cdot \sum_{k=n}^{\infty} b^k (1 + \cos(\pi a^{k-n} \beta_n)) \\
&= \left| \frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n} \right| \cdot \left(b^n (1 + \cos(\pi a^0 \beta_n)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} b^k (1 + \cos(\pi a^{k-n} \beta_n)) \right) \\
&\geq \left| \frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n} \right| \cdot b^n (1 + \cos(\beta_n \pi)) \\
&\geq \left| \frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n} \right| \cdot b^n \\
&= \frac{b^n}{h_n} \\
&\geq \frac{2a^n b^n}{3}.
\end{aligned}$$

Yhtälön (4.8) perusteella

$$\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| = |R_n + S_n|.$$

Kolmioepäyhtälön perusteella

$$|R_n + S_n| \geq |R_n| - |S_n|.$$

Koska h oli mielivaltaisesti valittu, pätee yhtälö (4.10) myös h_n :lle. Kun yhdistetään arvojen $|R_n|$ ja $|S_n|$ arviot (yhtälöt (4.10) ja (4.17)), huomataan, että

$$\begin{aligned}
|R_n| - |S_n| &> \frac{2a^n b^n}{3} - \frac{\pi a^n b^n}{ab-1} \\
&= (ab)^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right).
\end{aligned}$$

Koska $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, niin $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}$ on positiivinen vakio. Siis

$$(4.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left((ab)^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right) \right) = \infty.$$

Jos funktiolla

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä a on pariton positiivinen kokonaisluku, $0 < b < 1$, $b \in \mathbb{R}$ ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ olisi olemassa derivaatta, olisi olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A.$$

Tällöin olisi myös olemassa raja-arvo

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = A$$

ja olisi voimassa

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| = |A|,$$

mikä on ristiriidassa yhtälön (4.18) kanssa. Siis funktiolla

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x),$$

missä a on pariton positiivinen kokonaisluku, $0 < b < 1$, $b \in \mathbb{R}$ ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, ei ole olemassa derivaattaa, kun $x \in \mathbb{R}$. □

4.3 Muita kaikkialla jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita

Jo ennen Weierstrassin funktion julkaisua oli muitakin vastaavia kaikkialla jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita kehitetty. Nämä muut funktiot julkaistiin kuitenkin vasta Weierstrassin funktion jälkeen.

Seuraavaksi esitellään lyhyesti Cellierin, Darboux'n sekä Takagin ja van der Waerdenin funktiot. Näistä Cellierin sekä Darboux'n funktiot on kehitetty ennen Weierstrassin funktiota, Takagin ja van der Waerdenin funktiot sen sijaan vasta Weierstrassin funktion jälkeen. Funktioiden jatkuvuuden ja ei-missään derivoituvuuden todistukset kuitenkin sivuutetaan aiheen laajuuden vuoksi.

Charles Cellier määritteli kaikkialla jatkuvan ei-missään derivoituvan funktion jo ennen vuotta 1860, mutta se löydettiin ja julkaistiin vasta hänen kuolemansa jälkeen vuonna 1890. Cellierin funktio on hyvin samanlainen Weierstrassin funktion kanssa ja Cellierin funktion ei-missään derivoituvuus voidaankin osoittaa G.H. Hardyn vuonna 1916 Transactions of the American Mathematical Society -julkaisussa esitetyn Weierstrassin funktion yleistyksen avulla. (Ks. [5, s. 17,27].)

Lause 4.3 (ks. [5, s. 17]). Cellierin funktio. *Funktio*

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sin(a^k x), \quad a > 1$$

on jatkuva mutta ei-missään derivoituva joukossa \mathbb{R} .

Todistus. Sivutetaan. □

Cellerierin funktion alkuperäinen muoto antoi luvulle a ehdon $a > 1000$, missä a on parillinen kokonaisluku, mutta Hardyn tekemä yleistys lievensi tätä ehtoa muotoon $a > 1$.

Darboux'n funktio esiteltiin vuonna 1873, kaksi vuotta ennen Weierstrassin funktiota. Darboux'n funktio julkaistiin kuitenkin vasta kaksi vuotta sen esittelyn jälkeen. (Ks. [5, s. 28].)

Lause 4.4 (ks. [5, s. 28]). Darboux'n funktio. *Funktio*

$$D(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sin((k+1)!x)$$

on jatkuva mutta ei-missään derivoituva joukossa \mathbb{R} .

Todistus. Sivutetaan. □

Takagin ja van der Waerdenin funktiot ovat hyvin samanlaisia. Takagin funktio esiteltiin vuonna 1903 yksinkertaisempana esimerkkinä kaikkialla jatkuvasta ei-missään derivoituvasta funktiosta. Ilmeisesti tietämättömänä Takagin hyvin samanlaisesta funktiosta van der Waerden julkaisi funktionsa vuonna 1930. (Ks. [5, s. 36].)

Lause 4.5 (ks. [5, s. 36]). Takagin funktio. *Funktio*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^k x - m|$$

on jatkuva mutta ei-missään derivoituva joukossa \mathbb{R} .

Todistus. Sivutetaan. □

Lause 4.6 (ks. [5, s. 36]). van der Waerdenin funktio. *Funktio*

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |10^k x - m|$$

on jatkuva mutta ei-missään derivoituva joukossa \mathbb{R} .

Todistus. Sivutetaan. □

Viitteet

- [1] Anton, Howard. *Calculus with Analytic Geometry*. Third Edition. John Wiley & Sons Inc., 1988.
- [2] Apostol, Tom M. *Calculus, Volume I: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*. Second Edition. John Wiley & Sons Inc., 1967.
- [3] Hewitt, Edwin, Stromberg, Karl. *Real and Abstract Analysis: A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable*. Springer-Verlag, 1975.
- [4] Stewart, James. *Calculus. Early Transcendentals*. Sixth Edition. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- [5] Thim, J. *Continuous Nowhere Differentiable Functions. Master Thesis*. Luleå Tekniska Universitet, 2003.