TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro Gradu -tutkielma

Karoliina Alajoki

Suppenemistestejä sarjoille

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Huhtikuu 2013

Tampereen Yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

ALAJOKI, KAROLIINA: Sarjojen suppenemisesta

Pro gradu -tutkielma, s. 40

Matematiikka

Huhtikuu 2013

Tässä tutkielmassa käsitellään reaalitermisiä lukujonoja ja reaalitermisiä sarjoja. Aluksi esitetään lukujonon määritelmä sekä lukujonon perusominaisuuksia. Käydään läpi Cauchyn lukujonot ja osoitetaan, että lukujono on suppeneva, jos ja vain jos se on Cauchyn lukujono. Osoitetaan myös monotonisen lukujonon suppenemiselle välttämätön ehto. Lukujonon termien yhteenlaskua kutsutaan sarjaksi. Tämän tutkielman pääpaino on juuri sarjoissa. Tutkielmassa esitellään sarja määritelmineen ja tiettyine ominaisuuksineen. Käsitellään sarjan suppeneminen ja hajaantuminen sekä sarjan itseinen suppeneminen. Todistetaan, että itseisesti suppeneva sarja on suppeneva. Tutkielmassa esitellään useita suppenemistestejä sarjoille. Joihinkin suppenemistesteihin tarvitaan sarjoja, joiden suppenemisominaisuudet ovat tunnettuja. Tämän vuoksi käsitellään teleskooppiset sarjat, geometrinen sarja ja p-sarjat. Tässä tutkielmassa käsitellään vertailutesti ja sen raja-arvomuoto, osamäärätesti, juuritesti, Kummerin testi, Raaben testi, Gaussin testi ja Dirichlet'n testi. Lähdekirjallisuutena on pääasiassa käytetty Tom Apostolin teosta Mathematical Analysis, Watson Fulksin teosta Advanced Calculus ja Walter Rudinin teosta Principles of Mathematical Analysis.

Sisältö

Johdanto **1**

1 Lukujonot **3**
1.1 Lukujonojen perusominaisuuksia . . . 3
1.2 Cauchyn lukujonot . . . 4
1.3 Lukujonon ylä- ja alaraja-arvo . . . 6
1.4 Lukujonojen monotonisuus . . . 7

2 Sarjat **9**
2.1 Sarjojen perusominaisuuksia . . . 9
2.2 Vuorottelevat sarjat . . . 14
2.3 Itseisesti ja ehdollisesti suppeneminen . . . 15
2.4 Esimerkkisarjoja . . . 17
2.4.1 Teleskooppiset sarjat . . . 17
2.4.2 Geometrinen sarja . . . 18
2.4.3 P-sarjat . . . 19

3 Suppenemistestejä sarjoille **20**
3.1 Vertailutesti . . . 20
3.2 Integraalitesti . . . 22
3.3 Osamäärätesti . . . 25
3.4 Juuritesti . . . 27
3.5 Kummerin testi . . . 29
3.6 Raaben testi . . . 31
3.7 Gaussin testi . . . 34
3.8 Dirichelet'n testi . . . 36

Viitteet **40**

Johdanto

Tässä tutkielmassa käsitellään reaalitermisiä lukujonoja ja reaalitermisiä sarjoja. Luvussa yksi käsitellään lukujonojen perusominaisuuksia sekä lukujonojen suppenemista ja hajaantumista. Kyseisessä luvussa esitellään myös Cauchyn lukujonot ja tullaan todistamaan, että lukujono on suppeneva, jos ja vain jos se on Cauchyn lukujono. Luvussa yksi käsitellään myös monotoniset lukujonot ja lukujonon ylä- ja alaraja-arvot.

Lukujonoja tarvitaan muodostettaessa sarjoja, joissa tämän tutkielman pääpaino on. Sarjateoria on analyysin osa-alue, jonka käytännöllisistä sovelluksista voidaan mainita sarjakehitelmiin pohjautuvat likiarvon määritelmät. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan perehdytä likiarvoihin, vaan keskitytään tutkimaan sarjojen suppenemista ja erityisesti suppenemistestejä sarjoille. Tutkielman toisessa luvussa esitetään sarjan määritelmä ja käydään läpi sarjan yleisiä ominaisuuksia, esitellään muun muassa Cauchyn ehto sarjoille. Luvussa kaksi käydään läpi myös vuorottelevat sarjat, joita jatkossa hyödynnetään esimerkeissä ja lauseiden todistuksissa.Tässä luvussa tutustutaan suppeneviin ja hajaantuviin sarjoihin sekä itseisesti suppeneviin sarjoihin. Sarjan suppenemiselle esitetään riittävä ja välttämätön ehto. Sarjan itseisellä suppenemisella tarkoitetaan, että sarjan termien itseisarvoista muodostettu sarja on suppeneva. Osoitetaan, että jokainen itseisesti suppeneva sarja on suppeneva. Luvussa kaksi käydään läpi myös teleskooppiset sarjat, geometrinen sarja ja p-sarjat suppenemisominaisuuksineen.

Luvussa kolme käydään läpi yleisimpiä testejä sarjojen suppenemiselle, kuten vertailutesti ja sen raja-arvomuoto, juuritesti ja osamäärätesti. Näiden lisäksi käydään läpi harvemmin käytetyt Kummerin, Raaben ja Gaussin testit. Näillä testeillä voidaan ratkaista tapauksia, joissa osamäärätesti ei anna tulosta. Luvussa kolme esitetään myös Dirichlet'n testi, jolla voidaan osoittaa sarjan ehdollinen suppeneminen.

Lukijalta odotetaan analyysin tuntemusta, kuten integroinnin ja raja-arvon hallintaa. Oletetaan, että lukija tuntee käsitteen rajoitettu lukujono sekä on osaa käyttää kolmioepäyhtälöä. Tutkielmassa esitellään ylä- ja alaraja-arvot, mutta ei niiden ominaisuuksia. Lukijan oletetaan osaavan toimia määritelmän puitteissa, kun kyseiset raja-arvot tulevat myöhemmin käyttöön suppenemistestien yhteydessä.

Lähdekirjallisuutena on pääasiassa käytetty Tom Apostolin teosta Mathematical Analysis, Watson Fulksin teosta Advanced Calculus ja Walter Rudinin teosta Principles of Mathematical Analysis.

Luku 1

Lukujonot

Tarkastelu aloitetaan lukujonoista, joista päästään sarjoihin luvussa kaksi. Lukujonoja tarvitaan, jotta voidaan määritellä sarjat. Tutkielmassa käsitellään reaalitermisiä lukujonoja.

1.1 Lukujonojen perusominaisuuksia

Pykälässä 1.1 määritellään lukujono, lukujonon osajono sekä lukujonon suppeneminen ja hajaantuminen. Todetaan myös, että jokaisella rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono. Tämän pykälän määritelmissä on käytetty lähteinä Tom Apostolin teoksen Mathematical Analysis sivuja 30, 31 ja 62.

Määritelmä 1.1. *Lukujonolla* tarkoitetaan funktiota f, jonka määrittelyjoukko on positiivisten kokonaislukujen joukko $\{1, 2, 3, ...\}$. Tällöin lukujonon arvojoukko on $\{F(1), F(2), F(3), ...\}$. Arvojoukko voidaan myös kirjoittaa $\{F_1, F_2, F_3, ...\}$, jolloin funktion arvoa F_n kutsutaan lukujonon *n:nneksi termiksi.*

Merkinnän $\{F_n\}$ tilalla voidaan käyttää lyhyempää merkintää F_n. Olkoon $s = \{s_n\}$ päättymätön lukujono ja k funktio, jonka määrittelyjoukko on positiiviset kokonaisluvut ja arvojoukko positiivisten kokonaislukujen osajoukko. Oletetaan, että

$$k(m) < k(n), \qquad \text{jos} \quad m < n.$$

Yhdistetty funktio $s \circ k$ on määritelty kaikilla kokonaisluvuilla n, kun $n \geq 1$. Jokaiselle tällaiselle luvulle n pätee

$$(s \circ k)(n) = s_{k(n)}.$$

Yhdistettyä funktiota $s \circ k$ kutsutaan lukujonon s *osajonoksi.* Merkinnän $s_{k(n)}$ tilalla voidaan käyttää merkintää s_{k_n}, joka tarkoittaa lukujonon $\{s_n\}$ osajonoa, jonka n:s termi on $s_{k(n)}$.

Seuraavaksi määritellään lukujonon raja-arvo.

Määritelmä 1.2. Kirjoitetaan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

tarkoittamaan, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

kaikilla $n > N$.

Määritelmä 1.3. Lukujonon $\{a_n\}$ sanotaan olevan *suppeneva*, jos on olemassa piste $a \in \mathbb{R}$ siten, että raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Sanotaan, että lukujono *suppenee* kohti pistettä a. Jos lukujono ei ole suppeneva, sanotaan sen olevan *hajaantuva*.

Lause 1.1. *Jokaisella rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Ks. [5, s. 39]. □

1.2 Cauchyn lukujonot

Pykälässä 1.2 määritetään Cauchyn ehto lukujonoille. Todistetaan, että lukujono on suppeneva, jos ja vain jos se on Cauchyn lukujono. Tämän lauseen avulla voidaan osoittaa lukujonon suppeneminen, vaikka ei tiedettäisi raja-arvoa, jota kohti kyseinen lukujono suppenee. Cauchyn ehtoon lukujonoille on käytetty lähteenä Walter Rudinin teoksen Principles of Mathematical Analysis sivua 39.

Määritelmä 1.4 (Cauchyn ehto lukujonoille)**.** Lukujonon $\{s_n\}$ sanotaan olevan *Cauchyn lukujono*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

kaikilla $n > N$ ja $m > N$.

Cauchyn ehto lukujonoille voidaan muotoilla myös toisella tavalla, joka on yhtäpitävä ensimmäisen muotoilun kanssa. Lukujonon $\{s_n\}$ sanotaan olevan Cauchyn lukujono, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon$$

kaikilla $n > N$ ja $p = 1, 2, 3 \ldots$

Lause 1.2. *Lukujono on supppeneva, jos ja vain jos se on Cauchyn lukujono.*

Todistus (ks. [5, s. 39]). Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Valitaan $\varepsilon > 0$, jolloin myös $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Tällöin on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kaikilla $n \geq N$. Näin ollen

$$|s_n - s_m| \leq |s_n - s| + |s - s_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

kaikilla $n \geq N$ ja $m \geq N$. Suppeneva lukujono $\{s_n\}$ on siis Cauchyn lukujono.

Oletetaan nyt, että lukujono $\{s_n\}$ on Cauchyn lukujono. Todistetaan ensin, että lukujono $\{s_n\}$ on rajoitettu. Kun $\varepsilon = 1$ Cauchyn lukujonon määritelmässä, voidaan valita kokonaisluku N siten, että

$$|s_n - s_m| \leq 1$$

kaikilla $n \geq N$ ja $m \geq N$. Erityisesti

$$|s_n - s_N| \leq 1$$

kaikilla $n \geq N$. Valitaan

$$M = \max(|s_1|, \dots, |s_N|).$$

Tällöin

$$|s_n| \leq M + 1 \qquad \text{kaikilla} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nyt on osoitettu, että lukujono $\{s_n\}$ on rajoitettu. Lauseen 1.1 mukaan rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono. Merkitään kyseistä osajonoa nyt merkinnällä $\{s_{k_n}\}$. Merkitään raja-arvoa

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{k_n}. \tag{1.1}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\{s_n\}$ on Cauchyn lukujono niin on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$|s_n - s_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.2}$$

kaikilla $n \geq N$ ja $m \geq N$. Kohdan (1.1) raja-arvon mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku N', että

$$|s_{n_p} - s| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $n_p \geq N'$. Valitaan $m = n_p$ epäyhtälöön (1.2), jolloin saadaan

$$|s_n - s| \leq |s_n - s_{k_p}| + |s_{k_p} - s| \leq \varepsilon$$

kaikilla $n \geq N$, eli

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Siis Cauchyn lukujono on suppeneva. Näin ollen lukujono on suppeneva, jos ja vain jos se on Cauchyn lukujono. $\square$

Todistuksen perusteella saadaan tulos, joka on syytä esittää omana lauseenaan.

Lause 1.3. *Jokainen suppeneva lukujono on rajoitettu.*

1.3 Lukujonon ylä- ja alaraja-arvo

Pykälässä määritellään lukujonon ylä- ja alaraja-arvo. Lähteenä on käytetty Tom Apostolin teoksen Mathematical Analysis sivuja 353–355.

Määritelmä 1.5. Olkoon $\{a_n\}$ reaaliterminen lukujono. Olkoon U reaaliluku, joka täyttää seuraavat ehdot.

(i) Jokaista positiivilukua ε kohti on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$a_n < U + \varepsilon$$

kaikilla $n > N$.

(ii) Kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $m > 0$ on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että

$$a_n > U - \varepsilon,$$

kun $n > m$.

Tällöin reaalilukua U kutsutaan lukujonon $\{a_n\}$ *yläraja-arvoksi.* Merkitään

$$U = \limsup_{n \to \infty} a_n.$$

Ehdosta (i) seuraa, että joukko $\{a_1, a_2, ...\}$ on ylhäältä rajoitettu. Jos kyseinen joukko ei ole ylhäältä rajoitettu, määritellään, että

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \infty.$$

Jos joukko $\{a_1, a_2, ...\}$ on rajoitettu ylhäältä, mutta ei alhaalta, ja lukujonolla $\{a_n\}$ ei ole äärellistä yläraja-arvoa, niin määritellään

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Lukujonon a_n *alaraja-arvo* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ määritellään

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} b_n,$$

missä $b_n = -a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$

Määritelmän 1.5 kohta (i) kertoo, että kaikki sarjan termit sijaitsevat luvun $U + \varepsilon$ vasemmalla puolella. Kohta (ii) taas kertoo, että äärettömän monta termiä sijaitsee luvun $U - \varepsilon$ oikealla puolella. Selvästi on olemassa tarkalleen yksi luku U, joka täyttää ehdot (i) ja (ii).

Jos lukujono $\{a_n\}$ on suppeneva, niin lukujonolla $\{a_n\}$ on olemassa raja-arvo. Tällöin kyseisen lukujonon ylä- ja alaraja-arvo yhtyvät lukujonon raja-arvoksi. Siis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Esimerkki 1.1 (ks. [2, s. 355])**.** Tarkastellaan lukujonoa $\{a_n\}$, jossa $a_n = (-1)^n$. Lukujonon termi saa parillisilla n:n arvoilla arvokseen 1 ja parittomilla arvokseen -1. Lukujonon arvojoukko on siis $\{-1, 1\}$. Näin ollen alaraja-arvo

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$$

ja yläraja-arvo

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

1.4 Lukujonojen monotonisuus

Pykälässä 1.4 määritellään monotoninen lukujono. Tullaan myös todistamaan, että monotoninen lukujono on suppeneva, jos ja vain jos se on rajoitettu. Monotonisen lukujonon määritelmä on kirjoitettu Tom Apostolin teoksen Mathematical Analysis sivun 355 pohjalta.

Määritelmä 1.6. Olkoon $\{a_n\}$ reaaliterminen lukujono. Lukujonon sanotaan olevan *kasvava*, jos

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \text{kaikilla} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lukujonon sanotaan olevan *vähenevä*, jos

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \text{kaikilla} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lukujonoa kutsutaan *monotoniseksi*, jos se on joko kasvava tai vähenevä.

Lause 1.4. *Monotoninen lukujono on suppeneva, jos ja vain jos se on rajoitettu.*

Todistus. Ks. [5, s. 41] □

Luku 2

Sarjat

Luvussa kaksi käydään läpi sarjan määritelmä sekä joitain perusominaisuuksia. Tässä luvussa määritellään myös sarjan suppeneminen ja sarjan itseisesti suppeneminen. Luvussa kaksi esitetään myös teleskooppiset sarjat, geometrinen sarja ja p-sarjat suppenemisominaisuuksineen.

2.1 Sarjojen perusominaisuuksia

Tässä pykälässä määritellään sarja sekä esitetään riittävä ja välttämätön ehto sarjan suppenemiselle. Lause 2.1 käsittelee sarjan aritmeettisia operaatioita. Lause 2.3 esittää Cauchyn ehdon sarjoille. Tämän pykälän määritelmän lähteenä on käytetty Tom Apostolin teoksen Mathematical Analysis sivuja 355–356.

Sarjoilla tarkoitetaan lukujonon termien yhteenlaskua. Sarjan tarkka määritelmä on esitetty alla.

Määritelmä 2.1. Olkoon $\{a_n\}$ lukujono. Muodostetaan lukujono $\{s_n\}$ siten, että

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, 3, ...). \tag{2.1}$$

Tällä tavalla muodostettua lukujonoa $\{s_n\}$ kutsutaan (äärettömäksi) *sarjaksi*. Lukua s_n kutsutaan sarjan *n:nneksi osasummaksi* ja termiä a_n kutsutaan sarjan *n:nneksi termiksi*. Sarjan sanotaan olevan *hajaantuva*, jos lukujono $\{s_n\}$ on hajaantuva. Sarjan sanotaan olevan *suppeneva*, jos lukujono $\{s_n\}$ on suppeneva. Myös merkinnöillä

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

tarkoitetaan kohdassa (2.1) määriteltyä sarjaa.

Kirjainta k käytetään indeksinä merkinnässä $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Indeksin k tilalle voidaan kirjoittaa myös jokin muu sopiva kirjain. Jos p on kokonaisluku siten, että $p \geq 1$, merkintä $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ tarkoittaa samaa kuin merkintä $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, missä $b_n = a_{n-p+1}$.

Jos ei ole väärinymmärryksen mahdollisuutta, voidaan käyttää merkintää $\sum b_n$ merkinnän $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ tilalla.

Jos kohdassa (2.1) määritelty sarja $\{s_n\}$ suppenee kohti lukua s, kutsutaan lukua s sarjan *summaksi*. Nyt voidaan kirjoittaa

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Suppenevalle sarjalle yllä olevaa merkintää voidaan käyttää tarkoittamaan sekä sarjaa, että sen summaa.

Sarjan sanotaan olevan positiiviterminen sarja, jos sarjan kaikki termit ovat positiivisia.

Lause 2.1. *Oletetaan, että sarja $\sum a_n$ suppenee kohti lukua a ja sarja $\sum b_n$ kohti lukua b. Tällöin sarja $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ suppenee kohti lukua $\alpha a + \beta b$, jokaiselle parille vakioita α ja β, jolloin siis*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Todistus (ks. [2, s. 356]). Oletuksen mukaan sarja $\sum a_n$ suppenee kohti lukua a ja sarja $\sum b_n$ kohti lukua b, joten

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = a \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = b.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \beta b_k \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k \\ &= \alpha a + \beta b.\end{aligned}$$

Tämä todistaa, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ suppenee kohti lukua $\alpha a + \beta b$.

$\square$

Lause 2.2. *Oletetaan, että sarja* $\sum a_n$ *on positiiviterminen eli kaikki sarjan* $\sum a_n$ *termit* $a_n \geq 0$*, kun* $n = 1, 2, 3 \ldots$ *Tällöin sarja* $\sum a_n$ *on suppeneva, jos ja vain jos sen osasummien muodostama lukujono on ylhäältä rajoitettu.*

Todistus (ks. [4, s. 341]). Osasummien muodostama lukujono on kasvava, jolloin kyseinen lukujono on monotoninen. Lauseen 1.4 mukaan monotoninen lukujono on suppeneva, jos ja vain jos se on rajoitettu. Jotta kasvava lukujono olisi rajoitettu, täytyy sen nimenomaan olla ylhäältä rajoitettu. □

Luvussa yksi esitettiin Cauchyn ehto lukujonoille. Tästä ehdosta saadaan suoraan johdettua Cauchyn ehto sarjoille, joka esitetään seuraavana.

Lause 2.3 (Cauchyn ehto sarjoille)**.** *Sarja* $\sum a_n$ *suppenee, jos ja vain jos jokaiselle* $\varepsilon > 0$ *on olemassa kokonaisluku* N *siten, että*

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon \tag{2.2}$$

kaikilla $n > N$ *ja* $p = 1, 2, 3, ...$

Todistus (ks. [2, s. 356]). Jos sarja on suppeneva, niin sen osasummien muodostama lukujono on myös suppeneva. Olkoon

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Nyt voidaan kirjoittaa kahden osasumman erotus

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}.$$

Tähän kahden osasumman erotukseen voidaan soveltaa Cauchyn ehtoa lukujonoille (lause 1.1), jolloin todetaan osasummien lukujonon olevan todella Cauchyn lukujono, mistä sarjan suppenevuus seuraa. □

Valitaan $p = 1$ epäyhtälössä (2.2). Tällöin saadaan tulos, joka on syytä kirjata omaksi lauseekseen.

Lause 2.4. *Ehto*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

on välttämätön sarjan $\sum a_n$ *suppenemiselle.*

Lauseen 2.4 antama ehto suppenemiselle ei kuitenkaan ole riittävä. Tämän osoittaa seuraava esimerkki.

Esimerkki 2.1 (ks. [2, s. 357]). Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Valitaan $n = 2^m$ ja $p = 2^m$, jolloin

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = \frac{1}{2^m+1} + \cdots + \frac{1}{2^m+2^m} \geq \frac{2^m}{2^m+2^m} = \frac{1}{2}.$$

Huomataan, että Cauchyn ehto sarjoille (lause 2.3) ei toteudu, kun $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Täten sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hajaantuu. Kyseistä sarjaa kutsutaan *harmoniseksi sarjaksi.*

Seuraavaksi esitettävää tulosta hyödynnetään pykälässä 2.4, kun tutustutaan p-sarjoihin.

Lause 2.5. *Oletetaan, että*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0.$$

Tällöin sarja $\sum a_n$ *on suppeneva, jos ja vain jos sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

on suppeneva.

Todistus (ks. [5, s. 46]). Lauseen 2.2 mukaan sarja $\sum 2^k a_{2^k}$ on suppeneva, jos ja vain jos sen osasummien muodostama lukujono on ylhäältä rajoitettu. Tutkitaan siis sarjan osasummien s_n ja t_k rajoittuneisuutta. Olkoon

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ t_k &= a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

Kaikilla $n < 2^k$ pätee, että

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$s_n \leq t_k. \tag{2.3}$$

Toisaalta, jos $n > 2^k$, niin

$$\begin{aligned}
s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\
&\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\
&= \frac{1}{2}t_k.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$2s_n \geq t_k. \tag{2.4}$$

Ehdon (2.3) mukaan lukujono $\{s_n\}$ on rajoitettu, jos lukujono $\{t_k\}$ on rajoitettu. Toisaalta ehdon (2.4) mukaan lukujono $\{t_k\}$ on rajoitettu, jos lukujono $\{s_n\}$ on rajoitettu. Kummatkin lukujonot $\{s_n\}$ ja $\{t_k\}$ ovat joko rajoitettuja ja suppenevia tai rajoittamattomia ja hajaantuvia. Näin ollen sarja $\sum a_n$ on suppeneva, jos ja vain jos sarja $\sum 2^k a_{2^k}$ on suppeneva. □

Esimerkki 2.2. Tutkitaan sarjan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

suppenemista. Kyseiselle sarjalle pätee

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0,$$

joten voidaan käyttää lausetta 2.5. Tutkitaan nyt siis sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

suppenemista. Saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\log 2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Kyseinen sarja on hajaantuva harmonisena sarjana esimerkin 2.1 nojalla. Siis lauseen 2.5 perusteella myös sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

on hajaantuva.

2.2 Vuorottelevat sarjat

Tässä pykälässä määritellään vuorottelevat sarjat ja todistetaan ehto niiden suppenemiselle. Vuorottelevan sarjan määritelmä (2.2) on kirjoitettu Tom Apostolin teoksen Mathematical Analysis sivun 358 pohjalta.

Sarjaa kutsutaan *vuorottelevaksi* (alternoivaksi), jos se saa vuorotellen positiivisia ja negatiivisia arvoja. Vuorottelevan sarjan määritelmä on esitetty seuraavana.

Määritelmä 2.2. Jos $a_n > 0$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuille n, niin sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

kutsutaan *vuorottelevaksi sarjaksi.*

Lause 2.6. *Oletetaan lukujonon $\{a_n\}$ olevan vähenevä ja suppenevan kohti lukua nolla. Tällöin vuorotteleva sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

suppenee. Jos s on vuorottelevan sarjan summa ja s_n sarjan n:s osasumma, niin

$$0 < (-1)^n(s - s_n) < a_{n+1}, \qquad \textit{kun} \quad n = 1, 2, 3\dots \tag{2.5}$$

Todistus (ks. [2, s. 358]). Muodostetaan osasumma

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

Toisaalta

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0.$$

Näin ollen lukujono $\{s_{2n}\}$ on rajoitettu ja kasvava. Tällainen lukujono $\{s_{2n}\}$ on lauseen 1.4 mukaan suppeneva. Samaten lukujono $\{s_{2n-1}\}$, joka on rajoitettu ja vähenevä, on lauseen 1.4 mukaan myös suppeneva. Nämä kaksi sarjaa suppenevat kohti samaa arvoa, sillä

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Nyt jokaista lukua n kohti on olemassa luku m siten, että $s_{2m} \le s_n \le s_{2m+1}$. Lukujono $\{s_n\}$ on siis suppeneva.

Epäyhtälö (2.5) on seuraus epäyhtälöistä

$$(-1)^n(s-s_n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_{n+k}=\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n+2k-1}-a_{n+2k})>0$$

ja

$$(-1)^n(s-s_n)=a_{n+1}-\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n+2k}-a_{n+2k+1})<a_{n+1}.$$

□

Kun lauseessa (2.6) sarjan summaa s arvioidaan osasummalla s_n, tehty virhe on merkiltään sama kuin ensimmäinen huomiotta jätetty termi, ja suuruudeltaan pienempi kuin kyseinen termi epäyhtälön 2.5 mukaan.

2.3 Itseisesti ja ehdollisesti suppeneminen

Sarjojen suppeneminen määriteltiin pykälässä 2.1. Tässä pykälässä määritellään ehdollisesti ja itseisesti suppeneva sarja. Tullaan myös todistamaan, että itseisesti suppeneva sarja on suppeneva. Itseisesti suppenevan sarjan määritelmä on kirjoitettu Tom Apostolin teoksen Mathematical Analysis sivun 359 perusteella.

Määritelmä 2.3. Sarjaa $\sum a_n$ kutsutaan *itseisesti suppenevaksi*, jos sarja $\sum |a_n|$ suppenee. Kyseistä sarjaa kutsutaan *ehdollisesti suppenevaksi*, jos sarja $\sum a_n$ on suppeneva, mutta sarja $\sum |a_n|$ on hajaantuva.

Lause 2.7. *Itseisesti suppeneva sarja* $\sum a_n$ *on suppeneva.*

Todistus (ks. [2, s. 359]). Koska sarja $\sum a_n$ suppenee itseisesti, niin sarja $\sum |a_n|$ suppenee. Valitaan $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$||a_{n+1}|+\ldots+|a_{p+n}||=|a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}|<\varepsilon,$$

kun $n \geq N$ ja $p = 1, 2, 3, \ldots$ Nyt kolmioepäyhtälön perusteella

$$|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|\leq|a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}|<\varepsilon,$$

kun $n \geq N$ ja $p = 1, 2, 3, \ldots$ Sarja $\sum a_n$ täyttää siis Cauchyn ehdon (lause 2.3). Näin ollen sarja $\sum a_n$ on suppeneva. □

Tarkastellaan ehdollista suppenemista esimerkin avulla.

Esimerkki 2.3 (ks. [2, s. 359]). Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Lukujono $\{1/n\}$ on vähenevä ja raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nyt kyseinen vuorotteleva sarja suppenee lauseen 2.6 mukaan. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

on hajaantuva esimerkin 2.1 nojalla. Tarkasteltu sarja $\sum a_n$ siis suppenee, mutta ei suppene itseisesti. Sarja $\sum a_n$ on siis ehdollisesti suppeneva.

Lause 2.8. *Sarjalle* $\sum a_n$ *määritellään*

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{ja} \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}, \qquad \text{kun } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.6}$$

Tällöin

(i) *sarjat* $\sum p_n$ *ja* $\sum q_n$ *ovat hajaantuvia, jos sarja* $\sum a_n$ *on ehdollisesti suppeneva,*

(ii) *sarjat* $\sum p_n$ *ja* $\sum q_n$ *ovat suppenevia ja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n,$$

jos sarja $\sum |a_n|$ *on suppeneva.*

Todistus (ks. [2, s. 359–360]). Yhtälöiden (2.6) mukaan

$$a_n = p_n - q_n \qquad \text{ja} \qquad |a_n| = p_n + q_n.$$

Kohdan (i) todistusta varten oletetaan, että sarja $\sum a_n$ on ehdollisesti suppeneva, jolloin sarja $\sum |a_n|$ on hajaantuva. Jos sarja $\sum q_n$ on suppeneva, niin myös sarja $\sum p_n$ on suppeneva lauseen 2.1 mukaan, koska $p_n = a_n + q_n$. Samaten, jos sarja $\sum p_n$ on suppeneva, niin myös sarja $\sum q_n$ on suppeneva. Näin ollen, jos jompikumpi sarjoista $\sum p_n$ tai $\sum q_n$ on suppeneva, niin kummatkin sarjat ovat suppenevia. Jos kummatkin sarjat ovat suppenevia, niin myös sarja $\sum |a_n|$ on suppeneva, sillä $|a_n| = p_n + q_n$. Tästä seuraa ristiriita alkuperäisen oletuksen kanssa, joten ehto (i) pätee.

Todistetaan nyt lauseen (2.8) ehto (ii). Jos sarja $\sum |a_n|$ on suppeneva, niin myös sarja $\sum a_n$ on suppeneva lauseen 2.7 mukaan. Kahdesta suppenevasta sarjasta yhteenlaskulla saatava sarja on suppeneva lauseen 2.1 mukaan. Näin ollen sarjat $\sum p_n$ ja $\sum q_n$ ovat suppenevia lauseen (2.1) mukaan. Todistetaan vielä kohdan (ii) toinen osa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| - a_n}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|}{2} - \frac{|a_n|}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n.
\end{aligned}$$

Yllä esitetty yhtälöketju pitää paikkansa lauseen 2.1 nojalla. Tämä todistaa lauseen. □

2.4 Esimerkkisarjoja

Tässä pykälässä määritellään teleskooppiset sarjat, geometrinen sarja ja p-sarjat suppenemisominaisuuksineen.

2.4.1 Teleskooppiset sarjat

Lause 2.9 (Teleskooppiset sarjat)**.** *Oletetaan, että $\{a_n\}$ ja $\{b_n\}$ ovat kaksi lukujonoa siten, että $a_n = b_{n+1} - b_n$ kaikille positiivisille kokonaisluvuille n. Tällöin sarja $\sum a_n$ suppenee, jos ja vain jos raja-arvo $\lim_{n\to\infty} b_n$ on olemassa, jolloin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

Todistus (ks. [1, s. 422] ja [2, s. 356]) . Tarkastellaan sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ n:ttä osasummaa

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) \\ &= (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) \\ &= -b_1 + (b_2 - b_2) + \cdots + (b_n - b_n) + b_{n+1} \\ &= b_{n+1} - b_1. \end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

Näin ollen joko kummatkin lukujonot $\{b_n\}$ ja $\{s_n\}$ ovat suppenevia tai kummatkin ovat hajaantuvia. □

2.4.2 Geometrinen sarja

Lause 2.10 (Geometrinen sarja)**.** *Sarjaa, jonka perättäisten termien osamäärä pysyy vakiona, kutsutaan geometriseksi sarjaksi. Sarja voidaan merkitä*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$$

(i) *Jos* $|x| < 1$*, niin geometrinen sarja on suppeneva ja sarjan summa on* $1/(1-x)$*.*

(ii) *Jos* $|x| \geq 1$*, niin geometrinen sarja on hajaantuva.*

Todistus (ks. [2, s. 361]). Muodostetaan geometrisen sarjan n:s osasumma

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

Jos $x \neq 1$, niin

$$(1-x)s_n = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} (x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

Viimeinen yhtäsuuruus saadaan vastaavasti kuin lauseessa 3.3. Jaetaan yhtälö puolittain termillä $1-x$, jolloin

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}, \qquad \text{kun} \qquad x \neq 1.$$

Kun $|x| < 1$, niin sarjan yleisen termin raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

jolloin sarja suppenee kohti summaa

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x}.$$

Tämä todistaa kohdan (i).

Kun $|x| > 1$, geometrinen sarja hajaantuu lauseen 2.4 nojalla, sillä raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty \neq 0.$$

Jos $x = 1$, niin sarjan jokainen termi on 1, jolloin $s_n \to \infty$, kun $n \to \infty$. Kummassakin tapauksessa geometrinen sarja hajaantuu lauseen 2.2 mukaan. Tämä todistaa kohdan (ii). □

2.4.3 P-sarjat

Lause 2.11. *Sarjaa $\sum \frac{1}{n^p}$ kutsutaan p-sarjaksi. P-sarja on suppeneva, jos $p > 1$. Jos $p \leq 1$, kyseinen sarja on hajaantuva.*

Todistus (ks. [5, s. 47]). Jos $p \leq 0$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$$

ja sarja $\sum \frac{1}{n^p}$ on hajaantuva lauseen 2.4 mukaan.

Jos $p > 0$, sovelletaan lausetta 2.5, jonka mukaan sarja $\sum \frac{1}{n^p}$ on suppeneva, jos ja vain jos sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

on suppeneva. Nyt

$$2^{1-p} < 1, \qquad \text{jos ja vain jos} \qquad 1 - p < 0 \qquad \text{eli} \qquad p > 1.$$

Tällöin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} (2^{(1-p)})^k$ suppenee geometrisenä sarjana lauseen 3.4 mukaan. Siis p-sarjat ovat suppenevia vain, jos $p > 1$. Näin ollen p-sarjat ovat hajaantuvia jos $p \leq 1$. □

Esimerkissä 2.1 esitetty harmoninen sarja on erityistapaus p-sarjoista. Harmoniselle sarjalle $p = 1$. Kuten esimerkissä 2.1 jo huomattiin, harmoninen sarja on hajaantuva. Tämä voitaisiin nyt todeta suoraan lauseen 3.5 perusteella.

Luku 3

Suppenemistestejä sarjoille

Tässä luvussa esitetään erilaisia suppenemistestejä sarjoille.

3.1 Vertailutesti

Pykälässä 3.1 esitetään vertailutesti ja sen raja-arvomuoto. Testeihin tutustutaan myös esimerkkien avulla.

Lause 3.1 (Vertailutesti)**.** *Oletetaan, että $a_n > 0$ ja $b_n > 0$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Jos on olemassa positiiviset vakiot c ja N siten, että*

$$a_n < cb_n \qquad \textit{kaikilla} \qquad n \geq N,$$

niin sarja $\sum a_n$ on suppeneva, jos sarja $\sum b_n$ on suppeneva.

Todistus (ks. [2, s. 360]). Sarjan $\sum a_n$ osasummien muodostama jono on rajoitettu, jos sarjan $\sum b_n$ osasummien jono on rajoitettu. Sarjan $\sum b_n$ osasummien jono on rajoitettu lauseen 2.2 mukaan, koska kyseinen sarja on suppeneva. Saman lauseen mukaan sarja $\sum a_n$ on suppeneva, koska sen osasummien muodostama lukujono on rajoitettu. □

Esimerkki 3.1 (ks. [4, s. 343])**.** Tutkitaan sarjan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

suppenemista vertailutestin avulla. Kun $n > 2$, niin

$$\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}.$$

Tästä voidaan ottaa puolittain neliöjuuret, jolloin saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n},$$

kun $n > 2$. Harmoninen sarja $\sum \frac{1}{n}$ on esimerkin 2.1 perusteella hajaantuva. Näin ollen sarja

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

on hajaantuva vertailutestin perusteella.

Lause 3.2 (Vertailutestin raja-arvomuoto)**.** *Oletetaan, että* $a_n > 0$ *ja* $b_n > 0$ *kaikille* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Jos*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$

niin kummatkin sarjat $\sum a_n$ *ja* $\sum b_n$ *suppenevat tai kummatkin sarjat hajaantuvat.*

Todistus (ks. [4, s. 343]). Jos raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

missä $A > 0$, niin on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \frac{A}{2}, \qquad \text{jos} \qquad n > N.$$

Tällöin

$$-\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} - A < \frac{A}{2},$$

josta saadaan

$$\frac{1}{2}A < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}A < 2A.$$

Eli

$$b_n < \left(\frac{2}{A}\right) a_n \quad \text{ja} \quad a_n < (2A) b_n \quad \text{kaikilla} \quad n > N.$$

Nyt vertailutestin mukaan sarja $\sum a_n$ on suppeneva, jos ja vain jos sarja $\sum b_n$ on suppeneva. Näin ollen toinen sarjoista on suppeneva, jos toinenkin sarjoista on. Toinen sarjoista hajaantuu siis vain silloin, kun toinenkin sarjoista hajaantuu. $\square$

Seuraavaksi esitetään esimerkki, jossa p-sarjoja hyödynnetään vertailutestin raja-arvomuodon kanssa.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(n+8)}}$$

suppenemista.Vertailusarjana käytetään sarjaa $\sum \frac{1}{n^2}$, joka on suppeneva p-sarja lauseen 2.11 mukaan. Muodostetaan raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(n+8)}} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3(n+8)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{n}}} = 1.$$

Koska raja-arvo on olemassa ja se on suurempi kuin nolla, niin tutkittu sarja suppenee vertailutestin raja-arvomuodon perusteella.

3.2 Integraalitesti

Tässä pykälässä käydään läpi integraalitesti todistuksineen. Integraalitestin avulla tutustutaan Eulerin vakioon esimerkissä 3.3.

Lause 3.3 (Integraalitesti)**.** *Oletetaan funktion f olevan positiivinen ja vähenevä funktio, jonka määrittelyjoukko on $[1, \infty[$. Oletetaan myös, että funktion $f(x)$ raja-arvo*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Olkoon

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad t_n = \int_1^n f(x) \quad ja \quad d_n = s_n - t_n$$

kaikille positiivisille kokonaisluvuille n. Tällöin

(i) $0 < f(n+1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$, *kaikilla* $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(ii) *raja-arvo* $\lim_{n\to\infty} d_n$ *on olemassa,*

(iii) *sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *on suppeneva, jos ja vain jos lukojono* $\{t_n\}$ *on suppeneva*

(iv) $0 \leq d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leq f(k)$, *kaikilla* $n = 1, 2, 3, \ldots$

Todistus (ks. [2, s. 361-362]) . Kohdan (i) todistusta varten, kirjoitetaan

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_1^{k+1} f(x)\,dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_1^{k+1} f(k)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$f(n+1) = s_{n+1} - s_n \leq s_{n+1} - t_{t+1} = d_{n+1}.$$

Yllä olevan epäyhtälön sekä tiedon, että funktio $f(x)$ on positiivinen ja vähenevä raja-arvonaan $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ perusteella saadaan, että

$$0 < f(n+1) \leq d_{n+1}. \tag{3.1}$$

Toisaalta pätee

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= t_{n+1} - t_n - (s_{n+1} - s_n) \\ &= \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1) \\ &\geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx - f(n+1) \\ &= (n+1)f(n+1) - nf(n+1) - f(n+1) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tällöin

$$d_{n+1} \leq d_n \leq d_1 = f(1). \tag{3.3}$$

Lauseen ensimmäinen kohta on todistettu nyt epäyhtälöiden (3.1) ja (3.3) avulla.

Integraalitestin kohdasta (i) seuraa kohta (ii). Kohta (iii) seuraa taas kohdasta (ii).

Seuraavaksi todistetaan lauseen kohta (iv). Arvioidaan vastaavasti kuin epäyhtälössä (3.2), jolloin

$$0 \leq d_n - d_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx - f(n+1) = f(n) - f(n+1).$$

Nyt

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1)), \qquad \text{jos} \quad k \geq 1.$$

Huomataan, että kyseiset sarjat ovat teleskooppisia. Nyt voidaan käyttää lausetta 2.9, jolloin saadaan

$$0 \leq -\lim_{n\to\infty} d_n + d_k \leq -\lim_{n\to\infty} f(n) + f(k)$$

ja edelleen

$$0 \leq d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leq f(k).$$

Tämä todistaa kohdan (iv). □

Merkitään $D = \lim_{n\to\infty} d_n$, jolloin lauseen 3.6 kohdasta (i) seuraa, että $0 \leq D \leq f(1)$. Toisaalta kyseisen lauseen kohdan (iv) mukaan

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx - D \leq f(n). \tag{3.4}$$

Kyseinen epäyhtälö on hyödyllinen arvioitaessa tiettyjä äärellisiä summia integroimalla.

Määritelmä 3.1. Oletetaan, että $\{a_n\}$ ja $\{b_n\}$ ovat lukujonoja siten, että $b_n \geq 0$ kaikille positiivisille kokonaisluvuille n. Merkitään

$$a_n = O(b_n),$$

jos on olemassa vakio $M > 0$ siten, että $|a_n| \leq Mb_n$ kaikille positiivisille kokonaisluvuille n. Merkitään nyt

$$a_n = o(b_n), \qquad \text{kun} \qquad n \to \infty,$$

jos $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$.

Yhtälöstä

$$a_n = c_n + O(b_n)$$

seuraa, että $a_n - c_n = O(b_n)$. Samaten yhtälöstä

$$a_n = c_n + o(b_n)$$

seuraa, että $a_n - c_n = o(b_n)$. Näiden merkintöjen avulla tiettyjä epäyhtälöitä voidaan korvata yhtälöillä. Esimerkiksi epäyhtälö (3.4) saadaan muotoon

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + D + O(f(n)). \tag{3.5}$$

Esimerkki 3.3 (ks. [2, s. 363]). Tarkastellaan tapausta, missä $f(x) = \frac{1}{x}$. Selvästi $f(x)$ on positiivinen ja vähenevä kaikilla positiivisilla muuttujan x arvoilla. Huomataan, että raja-arvo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Nyt voidaan soveltaa integraalitestiä, sillä sen asettamat ehdot täyttyvät. Tällöin

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x}\, dx = \log n.$$

Raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \log n = \infty,$$

joten lukujono $\{t_n\}$ on hajaantuva. Näin ollen sarja $\sum \frac{1}{n}$ on hajaantuva integraalitestin nojalla. Harmonisen sarjan hajaantuminen osoitettiin Cauchyn ehtoon perustuen jo esimerkissä 2.1. Tapauksesta tulee kuitenkin kiinnostava, kun muodostetaan lauseen 3.3 kohdan (ii) mukainen raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right).$$

Kyseistä raja-arvoa kutsutaan Eulerin vakioksi ja sitä merkitään kirjaimella C (tai γ). Nyt yhtälön (3.5) mukaan harmonisen sarjan osasummia voidaan laskea yhtälön

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

avulla.

3.3 Osamäärätesti

Tässä pykälässä käsitellään osamäärätesti. Osamäärätesti on yksi yleisimmistä testeistä tutkittaessa sarjojen suppenemista. Osamäärätestiä kutsutaan myös d'Alembertin osamäärätestiksi, julkaisijansa Jean le Rond d'Alembertin mukaan.

Lause 3.4 (Osamäärätesti). *Oletetaan, että sarjan $\sum a_n$ termit ovat erisuuria kuin nolla. Merkitään*

$$r = \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \textit{ja} \qquad R = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Tällöin

(a) *sarja* $\sum a_n$ *suppenee itseisesti, jos* $R < 1$,

(b) *sarja* $\sum a_n$ *hajaantuu, jos* $r > 1$,

(c) *testi ei anna tulosta, jos* $r \leq 1 \leq R$.

Todistus (ks. [2, s. 363]). Olkoon $R < 1$. Valitaan x siten, että $R < x < 1$. Luvun R määritelmän mukaan on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$|a_{n+1}/a_n| < x, \qquad \text{jos} \qquad n \geq N.$$

Koska $x = x^{n+1}/x^n$, saadaan

$$\frac{|a_{n+1}|}{x^{n+1}} \leq \frac{|a_n|}{x^n} \leq \cdots \leq \frac{|a_N|}{x^N}, \qquad \text{jos} \quad n \geq N.$$

Täten

$$|a_n| \leq cx^n, \qquad \text{jos} \qquad n \geq N,$$

missä $c = |a_N|x^{-N}$. Vertailutestin mukaan tästä seuraa lauseen 3.4 ehto (a) eli sarja $\sum a_n$ on suppeneva.

Kohdan (b) todistusta varten todetaan, että kun $r > 1$ niin $|a_{n+1}| > |a_n|$ kaikille $n \geq N$. Nyt ei voi olla, että

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

joka on välttämätön ehto sarjan $\sum a_n$ suppenemiselle. Näin ollen sarja $\sum a_n$ on hajaantuva. Tämä todistaa kohdan (b).

Kohdan (c) todistusta varten tarkastellaan vastaesimerkkinä sarjoja $\sum \frac{1}{n}$ ja $\sum \frac{1}{n^2}$. Kummassakin tapauksessa $r = R = 1$. Sarja $\sum \frac{1}{n}$ on hajaantuva esimerkin 2.1 perusteella. Sarja $\sum \frac{1}{n^2}$ taas on suppeneva p-sarja lauseen 2.11 mukaan. □

Huomataan, että jos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

niin osamäärätesti ei anna tulosta tarkalleen silloin, kun

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Tarkastellaan vielä osamäärätestin käyttöä esimerkin avulla.

Esimerkki 3.4 (ks. [4, s. 350]). Tarkastellaan sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$$

suppenemista osamäärätestin avulla. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Muodostetaan nyt kahden peräkkäisen termin osamäärän itseisarvon yläraja-arvo

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Koska kyseinen yläraja-arvo on $\frac{1}{2} < 1$, niin sarja $\sum \frac{(-1)^n n}{2^n}$ on itseisesti suppeneva osamäärätestin perusteella.

3.4 Juuritesti

Pykälässä 3.5 käsitellään juuritesti, jota kutsutaan myös Cauchyn juuritestiksi.

Lause 3.5 (Juuritesti). *Olkoon* $\sum a_n$ *sarja, jolle merkitään*

$$p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tällöin

(a) *sarja* $\sum a_n$ *on itseisesti suppeneva, jos* $p < 1$,

(b) *sarja* $\sum a_n$ *on hajaantuva, jos* $p > 1$,

(c) *testi ei anna tulosta, jos* $p = 1$.

Todistus (ks. [2, s. 364]). Oletetaan, että $p < 1$. Valitaan luku x siten, että $p < x < 1$. Raja-arvon p määritelmästä seuraa, että on olemassa sellainen kokonaisluku N siten, että

$$|a_n| < x^n, \qquad \text{kun} \qquad n \geq N.$$

Näin ollen sarja $\sum |a_n|$ on suppeneva vertailutestin nojalla. Tämä todistaa kohdan (a).

Jos $p > 1$, niin $|a_n| > 1$ äärettömän usein, joten raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

Koska raja-arvo ei ole nolla, sarja $\sum a_n$ on hajaantuva. Kohta (b) on näin todistettu.

Kohta (c) voidaan todistaa käyttäen samoja sarjoja esimerkkeinä kuin osamäärätestin todistuksessa. □

Tarkastellaan seuraavaksi osamäärätestin käyttöä esimerkin avulla.

Esimerkki 3.5 (ks. [5, s. 51]). Tarkastellaan sarjan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

suppenemista. Sovelletaan ensin osamäärätestiä. Määritetään sarjan perättäisten termien osamäärän alaraja-arvo

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n} \cdot \frac{2^n}{1}\right) = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Määritetään myös kyseisen tapauksen yläraja-arvo

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{3^n}{1}\right) = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty.$$

Nyt

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

joten osamäärätesti ei anna tulosta. Sovelletaan seuraavaksi juuritestiä. Muodostetaan yläraja-arvo

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2^n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2n+1}}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{2+1/n}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Koska $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, niin sarja $\sum a_n$ on suppeneva juuritestin perusteella. Juuritestillä saatiin siis ratkaistua sarjan suppeneminen, vaikka osamäärätestillä sitä ei saatukaan selville.

3.5 Kummerin testi

Seuraavaksi esitellään Kummerin testi. Kummerin testi on kehitelty, jotta voitaisiin tutkia tapauksia, joissa $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$.

Lause 3.6 (Kummerin testi). *Olkoon $\sum a_n$ positiiviterminen sarja.*

(a) *Jos on olemassa positiivinen lukujono $\{b_n\}$, positiivinen vakio α ja kokonaisluku N, joille*

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1} \geq \alpha \qquad \textit{kaikilla} \qquad n \geq N,$$

niin sarja $\sum a_n$ on suppeneva.

(b) *Jos on olemassa positiivinen lukujono $\{b_n\}$ ja kokonaisluku N siten, että*

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1} \leq 0 \qquad \textit{kaikilla} \qquad n \geq N,$$

niin sarja $\sum a_n$ on hajaantuva, jos sarja $\sum \frac{1}{b_n}$ on hajaantuva.

Kohdat (a) ja (b) voidaan esittää myös ylä- ja alaraja-arvon avulla.

(a) *Sarja $\sum a_n$ on suppeneva, jos $\liminf_{n\to\infty} c_n > 0$.*

(b) *Sarja $\sum a_n$ on hajaantuva, jos $\limsup_{n\to\infty} a_n < 0$ ja sarja $\sum 1/b_n$ on hajaantuva.*

Todistus (ks. [4, s. 353]). Oletetaan, että on olemassa positiivinen lukujono $\{b_n\}$, positiivinen vakio α ja luku N siten, että Kummerin testin kohta (a) toteutuu. Koska $a_{n+1} > 0$, niin

$$b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} \geq \alpha a_{n+1}, \qquad \text{jos} \quad n \geq N.$$

Siis

$$\begin{aligned}
b_N a_N - b_{N+1} a_{N+1} &\geq \alpha a_{N+1}, \\
b_{N+1} a_{N+1} - b_{N+2} a_{N+2} &\geq \alpha a_{N+2}, \\
&\vdots \\
b_{N+p-1} a_{N+p-1} - b_{N+p} a_{N+p} &\geq \alpha a_{N+p},
\end{aligned}$$

missä p on positiivinen kokonaisluku. Laskemalla epäyhtälöt yhteen saadaan

$$b_N a_N - b_{N+p} a_{N+p} \geq \alpha(a_{N+1} + \cdots + a_{N+p}).$$

Nyt sarjan $\sum a_n$ osasummille s saadaan

$$s_{N+p} - s_N \leq \frac{1}{\alpha}(b_N a_N - b_{N+p} a_{N+p}) \leq \frac{1}{\alpha} b_N a_N.$$

Siis

$$s_{N+p} \leq s_N + \frac{1}{\alpha} b_N a_N.$$

Näin ollen lukujono $\{s_{N+p}\}$ on ylhäältä rajoitettu. Tällöin myös osasummien muodostama lukujono $\{s_n\}$ on rajoitettu eli sarja $\sum a_n$ on suppeneva. Tämä todistaa kohdan (a).

Todistetaan nyt kohta (b). Oletetaan, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N, että $c_n \leq 0$, kun $n \geq N$. Oletetaan myös sarjan $\sum 1/b_n$ olevan suppeneva. Tällöin

$$b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} \leq 0$$

kaikilla $n \geq N$. Näin ollen lukujono $\{a_n b_n\}$ on ei-vähenevä. Tällöin

$$b_n a_n \geq b_{n-1} a_{n-1} \geq \cdots \geq b_N a_N$$

kaikilla $n \geq N$. Tästä seuraa, että $a_n \geq b_N a_N / b_n$. Vertailuperiaatteen mukaan sarja $\sum a_n$ hajaantuu, koska sarja $\sum 1/b_n$ hajaantuu. Tämä todistaa kohdan (b). $\square$

Kummerin testiä käytettäessä täytyy siis aina löytää sopiva lukujono b_n ja vakio α. Seuraavaksi tutustutaan Kummerin testin käyttöön esimerkin avulla.

Esimerkki 3.6. Tarkastellaan sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{n} + \cdots$$

suppenemista. Muodostetaan kahden peräkkäisen termin osamäärän raja-arvo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{n}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)n}{(2n+2)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 1/n^2}{2 + 4/n + 2/n^2} = 1.
\end{aligned}$$

Osamäärätesti ei siis anna tulosta. Sovelletaan siis Kummerin testiä. Nyt

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}n-(n+1)&=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)n-(n+1)\\&=(n+1)-(n+1)+\frac{n+1}{2n+1}\\&=\frac{n+1}{2n+1}.\end{aligned}$$

Koska lukujono $\{\frac{n+1}{2n+1}\}$ on vähenevä ja raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2},$$

niin

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}n-(n+1)\geq\frac{1}{2}>0.$$

Näin ollen on olemassa Kummerin testin mukainen positiivinen lukujono $\{b_n\}=\{n\}$, kun n on positiivinen kokonaisluku. On myös olemassa positiivinen vakio $\alpha=\frac{1}{2}$. Sarja $\sum a_n$ on siis suppeneva Kummerin testin mukaan.

3.6 Raaben testi

Tässä pykälässä käsitellään Raaben testi, joka on johdannainen Kummerin testistä. Raaben testissä Kummerin testin lukujonoksi $\{b_n\}$ on valittu lukujono $\{n\}$.

Lause 3.7 (Raaben testi). *Olkoon $\sum a_n$ positiiviterminen sarja. Oletetaan raja-arvon*

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$$

olevan olemassa. Tällöin

(a) *sarja $\sum a_n$ on suppeneva, jos $r>1$,*

(b) *sarja $\sum a_n$ on hajaantuva, jos $r<1$,*

(c) *jos $r=1$, testi ei anna tulosta.*

Todistus (ks. [3, s. 3]). Oletaan, että raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$$

on olemassa. Nyt on olemassa $\varepsilon > 0$, jolle on olemassa positiivinen kokonaisluku N siten, että

$$r - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < r + \varepsilon$$

kaikilla positiiivisilla kokonaisluvuilla $n \geq N$. Näin ollen

$$n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) < (r-1) + \varepsilon \tag{3.6}$$

ja

$$n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) > (r-1) - \varepsilon \tag{3.7}$$

kaikilla $n \geq N$.

Jos $r > 1$, valitaan $\varepsilon = \frac{r-1}{2} > 0$. Nyt epäyhtälöstä (3.7) saadaan, että

$$n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) > (r-1) - \varepsilon = \frac{r-1}{2} > 0$$

kaikilla $n \geq N$. Huomataan, että kyseessä on Kummerin testin tapaus (a), jossa

$$b_n = n \qquad \text{ja} \qquad \alpha = \frac{r-1}{2}.$$

Sarja $\sum a_n$ on siis suppeneva Kummerin testin nojalla, kun $r > 1$.

Jos $r < 1$, niin valitaan $\varepsilon = \frac{1-r}{2} > 0$. Nyt epäyhtälöstä (3.6) saadaan, että

$$n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) < (r-1) + \varepsilon = \frac{r-1}{2} < 0$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq N$. Huomataan, että kyseessä on Kummerin testin tapaus (b). Nyt

$$\alpha = \frac{r-1}{2} < 0, \qquad \text{jolloin} \qquad c_n < 0.$$

Sarja $\sum b_n = \sum n$, joten sarja $\sum 1/b_n = \sum 1/n$. Sarja $\sum 1/n$ on hajaantuva esimerkin 2.1 perusteella harmonisena sarjana. Näin ollen sarja $\sum a_n$ on hajaantuva Kummerin testin perusteella, kun $r < 1$.

Jos $r = 1$, niin sarja $\sum a_n$ voi olla suppeneva tai hajaantuva. Tämä voidaan osoittaa käyttäen esimerkkejä (ks. [3, s. 3–4]). $\square$

Esimerkki 3.7 (ks. [3, s. 18]). Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n (n+1)!}.$$

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Sovelletaan ensin osamäärätestiä. Muodostetaan kahden peräkkäisen termin osamäärän itseisarvon yläraja-arvo

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+2)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2(n+1)-1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n (n+1)!} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2(n+2)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Huomataan, että osamäärätesti ei anna tulosta. Sovelletaan Raaben testiä. Muodostetaan kahden peräkkäisen termin osamäärä

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n (n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1}(n+2)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2(n+1)-1)} \\
&= \frac{2(n+2)}{2n+1} \\
&= 1 + \frac{3}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) n &= \left(1 + \frac{3}{2n+1} - 1\right) \\
&= \frac{3n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Siis raja-arvo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Koska yllä esitetty raja-arvo on suurempi kuin yksi, niin sarja $\sum a_n$ on suppeneva Raaben testin nojalla.

3.7 Gaussin testi

Tässä pykälässä esitetään Gaussin testi, joka myös on johdannainen Kummerin testistä. Gaussin testiä voidaan käyttää Raaben testin asemasta, sillä se voi antaa tuloksen tapauksissa, joissa Raaben testi ei sitä anna. Käytetään Raaben testin mukaisesta raja-arvosta merkintää

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r.$$

Lause 3.8 (Gaussin testi)**.** *Olkoon $\sum a_n$ positiiviterminen sarja. Oletetaan, että on olemassa rajoitettu lukujono $\{A_n\}$, mielivaltainen reaaliluku r ja positiivinen kokonaisluku N siten, että*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{r}{n} + \frac{A_n}{n^2},$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n > N$. Tällöin

(a) *sarja $\sum a_n$ on suppeneva, jos $r > 1$,*

(b) *sarja $\sum a_n$ on hajaantuva, jos $r \leq 1$.*

Todistus (ks. [6, s. 109]). Osoitetaan ensin, että Gaussin testi on erikoistapaus Raabelin testistä. Nyt

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{r}{n} + \frac{A_n}{n^2}.$$

Siis

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r + \frac{A_n}{n},$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(r + \frac{A_n}{n}\right) = r.$$

Huomataan, että Gaussin testi tosiaan on erikoistapaus Raaben testistä. Nyt tapaukset $r > 1$ ja $r < 1$ seuraavat suoraan Raaben testistä. Täytyy siis vain tarkastella tapausta $r = 1$. Oletetaan, että

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{x_n}{n^2},$$

missä lukujono $\{x_n\}$ on rajoitettu. Tämän tapauksen todistamista varten käytetään Kummerin testiä. Valitaan $b_n = n \log n$. Nyt saadaan Kummerin testin osa

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1}$$

muotoon

$$
\begin{aligned}
&n \log n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\log(n+1) \\
&= n \log n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_n}{n^2}\right) - (n+1)\log(n+1).
\end{aligned}
$$

Tutkitaan nyt yllä olevan termin yläraja-arvoa. Oletetaan, että raja-arvot

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = 1
$$

ovat tunnettuja.
Nyt

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left[n \log n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_n}{n^2}\right) - (n+1)\log(n+1)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[n \log n + \log n + \frac{\log n}{n} \cdot x_n - (n+1)\log n - (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\log n}{n} \cdot x_n - (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= 0 \cdot x_n - 1 \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

Nyt

$$
\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c_n = -1 < 0,
$$

Täytyy vielä tutkia sarjan

$$
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}
$$

hajaantumista. Kyseinen sarja on hajaantuva esimerkin 2.2 nojalla. Koska $c_n < 0$ ja sarja $\sum 1/b_n$ on hajaantuva, niin sarja $\sum a_n$ on hajaantuva Kummerin testin perusteella, kun $r = 1$. Näin ollen Gaussin testi on todistettu. $\square$

Esimerkki 3.8 (ks. [4, s. 354]). Tarkastellaan sarjaa

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} + \cdots
$$

Sovelletaan ensin osamäärätestiä. Muodostetan kahden peräkkäisen termin osamäärän itseisarvon yläraja-arvo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+2}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+1/2n}{1+1/n}\right| \\ &= 1.\end{aligned}$$

Sovelletaan Gaussin testiä. Muodostetaan kahden peräkkäisen termin osamäärä

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{2n+2}{2n+1} \\ &= 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n(2n+1)} \\ &= 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{2(2n+1)}.\end{aligned}$$

Peräkkäisten termien osamäärä on nyt Gaussin testin muodossa. Nyt

$$r=\frac{1}{2} \qquad \text{ja} \qquad A_n=-\frac{n}{2(2n+1)}.$$

Lukujonon $\{A_n\}$ on vähenevä ja raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} A_n = -\frac{1}{4}.$$

Lukujono $\{A_n\}$ on siis rajoitettu. Tällöin Gaussin testin mukaan sarja $\sum a_n$ on hajaantuva, koska $r<1$.

3.8 Dirichelet'n testi

Tässä pykälässä käsitellään Dirichlet'n testiä. Aluksi esitetään lause, jota tarvitaan Dirichlet'n testin todistamisessa. Dirichlet'n testillä voidaan määrittää sarjan suppeneminen, vaikka sarja ei olisikaan itseisesti suppeneva.

Lause 3.9. *Oletetaan, että $\{a_n\}$ ja $\{b_n\}$ ovat kaksi lukujonoa, joille määritellään*

$$A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Tällöin

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k). \tag{3.8}$$

Näin ollen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *on suppeneva, jos sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1} - b_k)$ *ja lukujono* $\{A_n b_{n+1}\}$ *ovat kummatkin suppenevia.*

Todistus (ks. [2, s. 365]). Kun kirjoitetaan $A_0 = 0$, niin

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} \\
&= A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k).
\end{aligned}$$

Yllä olevan yhtälöketjun nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lim_{n\to\infty} \left(A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k) \right).$$

Näin ollen sarja $\sum a_k b_k$ on suppeneva, jos sarja $\sum A_k(b_{k+1} - b_k)$ ja lukujono $\{A_n b_{n+1}\}$ ovat suppenevia ja yhtälö (3.8) pätee. $\square$

Seuraavaksi käydään läpi Dirichlet'n testi.

Lause 3.10 (Dirichlet'n testi)**.** *Oletetaan, että sarjan* $\sum a_n$ *osasummat muodostavat rajoitetun lukujonon. Oletetaan myös, että lukujono* $\{b_n\}$ *on vähenevä ja suppenee kohti lukua nolla. Tällöin sarja* $\sum a_n b_n$ *on suppeneva.*

Todistus (ks. [2, s. 365]). Olkoon

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Oletetaan, että on olemassa luku M siten, että $|A_n| \leq M$ kaikille luvuille n. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0,$$

joten lukujono $\{A_n b_{n+1}\}$ on suppeneva. Näin ollen sarjan $\sum a_n b_n$ suppenemisen osoittamiseksi täytyy osoittaa vielä sarjan $\sum A_k(b_{k+1}+b_k)$ suppeneminen. Koska lukujono $\{b_n\}$ on vähenevä, niin

$$|A_k(b_{k+1} - b_k)| \leq M(b_k - b_{k+1})$$

kaikilla positiivisilla indeksin k arvoilla. Sarja $\sum(b_{k+1} - b_k)$ on suppeneva teleskooppisena sarjana, koska

$$\lim_{n\to\infty} (b_{k+1} - b_k) = 0.$$

Näin ollen sarja $\sum A_k(b_{k+1} - b_k)$ on vertailuperiaatteen mukaan itseisesti suppeneva. Koska sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1} - b_k)$$

ja lukujono $\{A_n b_{n+1}\}$ ovat suppenevia, niin sarja $\sum a_n b_n$ on suppeneva lauseen 3.8 mukaan. □

Seuraavaksi tarkastellaan Dirichlet'n testiä esimerkin avulla.

Esimerkki 3.9. Tarkastellaan sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

suppenemista Dirichlet'n testin avulla. Valitaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sin n \qquad \text{ja} \qquad \{b_n\} = \frac{1}{n}.$$

Lukujono $\{b_n\}$ on vähenevä ja raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Lukujono $\{b_n\}$ täyttää siis Dirichlet'n testin ehdot. Tarkastellaan nyt, onko olemassa sellaista positiivistä lukua M, että

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin n\right| \leq M$$

kaikille kokonaisluvuille N. Koska

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+y}{2},$$

missä

$$x = n + \frac{1}{2} \qquad \text{ja} \qquad y = n - \frac{1}{2},$$

niin saadaan

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} 2\sin n \sin\frac{1}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \right) \\
&= \cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{3}{2} - \cos\frac{5}{2} + \cdots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&= \cos\frac{1}{2} - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Nyt

$$\left| \cos\frac{1}{2} - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right) \right| \leq 2, \qquad \text{koska} \qquad \cos N \leq 1.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} 2\sin n \sin\frac{1}{2} &\leq 2, \\
\sum_{k=1}^{N} \sin n &\leq \frac{1}{\sin 1/2}, \\
\left| \sum_{k=1}^{N} \sin n \right| &\leq \frac{1}{\sin 1/2}
\end{aligned}$$

kaikille positiivisille kokonaisluvuille N. Näin ollen osasumma $\sum \sin n$ on rajoitettu. Siis myös kyseinen sarja toteuttaa Dirichlet'n testin asettamat ehdot. Täten sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

on suppeneva Dirichlet'n testin mukaan.

Viitteet

[1] Tom M. Apostol, Calculus Volume 1, Introduction with vectors and analytical geometry, Blaisdell Publishing Company, New York,1961, fifth printing 1965

[2] Tom M. Apostol, Mathematical Analysis, A Modern approach to advanced Calculus, Addison-Wesley Publishing Company Reading Massaschusetts, 1957, fifth printing 1971

[3] Ng Tze Beng, My Calculus Web, Place to learn and to explore, Chapter 13 Special test for Convergence,[Verkkodokumentti], URL http://www.math.nus .edu.sg/ matngtb/Calculus/MA3110/ Chapter%2013%20Special%20Test%20 for%20Convergence.pdf, [viitattu 29.4.2013]

[4] Watson Fulks, Advanced Calculus, An Introduction to Analysis, John Wiley & Sons Inc New York, 1961, sixht printing 1965

[5] Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953

[6] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner, Andrew M. Bruckner, Elementary Real Analysis Volume 1, Prentice Hall, Pearson, 2001, second edition 2008