TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Eero Kokko

Universaalialgebraa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka

Toukokuu 2013

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
KOKKO, EERO: Universaalialgebraa
Pro gradu -tutkielma, 34 s.
Matematiikka
Toukokuu 2013

Tiivistelmä

Universaalialgebralla tarkoitetaan matematiikan osa-aluetta, jonka tutkimuskohteina ovat yleistetyt algebralliset rakenteet. Tämän tutkielman tavoitteena on perehtyä universaalialgebran peruskäsitteisiin ja esittää joitakin keskeisiä tuloksia huipentuen Birkhoffin lauseeseen.

Tutkielman aluksi perehdytään siihen, kuinka algebra ja laskuoperaatiot määritellään. Yleisesti tunnettujen algebrojen laskuoperaatioilta vaadittuja sääntöjä käydään läpi, ja tarkastellaan algebrojen isomorfisuuden määrittelyä sekä alialgebran ja aliuniversumin käsitteitä. Ekvivalenssiluokkien joukossa voidaan ottaa käyttöön algebrallisia struktuureita tietyillä ehdoilla ja muodostaa tekijäalgebroja. Algebroille määritellään myös yleinen suora tulo ja esitellään suoriin tuloihin liittyviä homomorfismeja.

Tutkielmassa edetään luokkaoperaatioiden määritelmien kautta variston käsitteeseen. Luokkaoperaatioiden keskinäisistä suhteista todistetaan useita tuloksia. Muuttujajoukoista konstruoidaan termialgebroja ja niiden yhteydessä tutustutaan universaaliin kuvausominaisuuteen. Tutkielman lopussa todistetaan tuloksia identiteettien säilymiselle algebrojen luokkien välillä. Lisäksi tarkastellaan vapaita algebroja, ja lopuksi todistetaan Birkhoffin lause, joka osoittaa yhteyden varistojen ja identiteettien määrittelemien luokkien välillä.

Sisältö

Johdanto

Universaalialgebralla tarkoitetaan matematiikan osa-aluetta, jonka tutkimuskohteina ovat yleistetyt algebralliset rakenteet. Siinä missä abstrakti algebra yleensä tarkastelee yhtä esimerkkialgebraa kerrallaan, niin universaalialgebran tavoitteena on todistaa tuloksensa mahdollisimman yleisessä muodossa.

Tämän tutkielman tavoitteena on perehtyä universaalialgebran peruskäsitteisiin ja esittää joitakin keskeisiä tuloksia huipentuen Birkhoffin lauseeseen. Työ seuraa pääasiassa lähdeteoksen Stanley N. Burris & H.P. Sankappanavar *A Course in Universal Algebra* [1] esitysjärjestystä. Todistuksia on pyritty täydentämään niiltä osin, kun ne on katsottu puutteellisiksi.

Ensimmäisessä luvussa perehdytään aiheen keskeisimpiin määritelmiin, kuten algebroihin ja laskuoperaatioihin. Lisäksi tarkastellaan yleisesti tunnettujen algebrojen laskuoperaatioilta vaadittuja sääntöjä. Toisessa luvussa tarkastellaan algebrojen isomorfisuuden määrittelyä sekä alialgebran ja aliuniversumin käsitteitä.

Kolmannessa luvussa paneudutaan siihen, että millä ehdoilla ekvivalenssiluokkien joukossa voidaan ottaa käyttöön algebrallisia struktuureita ja muodostaa tekijäalgebroja. Neljännessä luvussa määritellään algebroille suora tulo ja esitellään muutamia oleellisia homomorfismeja.

Viidennässä luvussa määritellään algebrojen luokkaoperaatiot ja variston käsite, sekä todistetaan useita tuloksia koskien luokkaoperaatioiden keskinäisiä suhteita. Kuudennessa luvussa tarkastellaan muuttujajoukoista konstruoituja termialgebroja. Lisäksi määritellään universaali kuvausominaisuus ja esitellään muutamia tuloksia siihen liittyen.

Seitsemännessä luvussa todistetaan tuloksia identiteettien säilymiselle algebrojen luokkien välillä. Lisäksi tarkastellaan vapaita algebroja, ja lopuksi todistetaan Birkhoffin lause.

1 Määritelmät ja esimerkkejä algebrallisista struktuureista

Yksi universaalialgebran päätarkoituksista on etsiä yhteneviä rakenteita algebrallisista struktuureista, jotka ensisilmäyksellä näyttävät erilaisilta.

Määritelmä 1.1. Olkoon A epätyhjä joukko ja n ei-negatiivinen kokonaisluku. Määritellään $\mathrm{A}^0 = \{\emptyset\}$ ja kun $n > 0$, niin A^n on A:n n-jonojen joukko. Mikä tahansa funktio f joukosta A^n joukkoon A on n-paikkainen laskutoimitus (tai *funktio*). Tällöin n on laskutoimituksen f *paikkaluku* (*arity, rank*). Laskutoimitusta sanotaan äärellispaikkaiseksi (*finitary*), kun laskutoimitus on n-paikkainen jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Jos funktio f on n-paikkainen, niin n-jonon $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ *kuvaa* (*image*) merkitään $f(a_1, \ldots, a_n)$. Laskettaessa joukon A alkioilla laskutoimitusta f kutsutaan *nollapaikkaiseksi* (tai vakioksi), jos sen paikkaluku on nolla, eli sen kuva A:ssa määräytyy kokonaan A^0:n ainoan alkion, $\emptyset$:n, kuvana $f(\emptyset)$. Laskutoimitus f joukossa A on *yksipaikkainen* (*unary*), *kaksipaikkainen* (*binary*) tai *kolmepaikkainen* (*ternary*), jos sen paikkaluku on vastaavassa järjestyksessä 1, 2 tai 3.

Määritelmä 1.2. Algebran *tyyppi* on sellainen *funktiosymboleiden* joukko $\mathcal{F}$, että jokaiselle $f \in \mathcal{F}$ on määritelty ei-negatiivinen kokonaisluku n, joka on f:n *paikkaluku*. Tällöin myös sanotaan, että f on *n-paikkainen funktiosymboli*. Merkitään $\mathcal{F}_n$ joukon $\mathcal{F}$ osajoukkoa, joka sisältää kaikki joukon $\mathcal{F}$ n-paikkaiset funktiosymbolit.

Määritelmä 1.3. Jos $\mathcal{F}$ on algebrojen tyyppi, niin *algebra* $\mathbf{A}$, joka on *tyyppiä* $\mathcal{F}$, on järjestetty pari $\langle \mathrm{A}, \mathrm{F} \rangle$. Tässä A on epätyhjä joukko ja F on äärellinen laskutoimitusten perhe joukossa A, joka on indeksoitu joukolla $\mathcal{F}$ siten, että jokaista n-paikkaista laskutoimitusta $f \in \mathcal{F}$ vastaa n-paikkainen laskutoimitus $f^{\mathbf{A}}$ joukossa A. Algebran $\mathbf{A} = \langle \mathrm{A}, \mathrm{F} \rangle$ joukkoa A sanotaan *universumiksi* (*universe*) tai perustana olevaksi joukoksi (*underlying set*) ja funktiosymboleita muotoa $f^{\mathbf{A}}$ kutsutaan $\mathbf{A}$:n *peruslaskutoimituksiksi* (*fundamental operations of* $\mathbf{A}$). Käytännöllisistä syistä merkitsen tässä työssä laskutoimitusta $f^{\mathbf{A}}$ pelkällä f:llä ja jos F on äärellinen, kuten $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}$, niin käytetään merkinnän $\langle \mathrm{A}, \mathrm{F} \rangle$ sijaan merkintää $\langle \mathrm{A}, f_1, \ldots, f_k \rangle$. Indeksointi valitaan siten, että laskutoimitusten paikkaluku noudattaa seuraavaa suuruusjärjestystä:

$$f_1\text{:n paikkaluku } \geq f_2\text{:n paikkaluku } \geq \cdots \geq f_k\text{:n paikkaluku.}$$

Algebra $\mathbf{A}$ on *unaarinen* (*unary*), jos kaikki sen laskutoimitukset ovat yksipaikkaisia ja *mono-unaarinen*, jos se sisältää ainoastaan yhden laskutoimituksen ja se on yksipaikkainen. Vastaavasti, jos $\mathbf{A}$ sisältää vain yhden kaksipaikkaisen laskutoimituksen, se on *magma* ja ainoaa laskutoimitusta merkitään usein merkillä $+$ tai $\cdot$, jolloin merkintä alkion $\langle a, b \rangle$ kuvalle tällä laskutoimituksella on $a + b$ (summa), $a \cdot b$ tai ab (tulo). Algebra $\mathbf{A}$ on *äärellinen* (*finite*), jos $|\mathrm{A}|$ on äärellinen. Mikäli $|\mathrm{A}| = 1$, niin algebraa sanotaan *triviaaliksi* (*trivial*).

Seuraavaksi esitellään esimerkkejä erilaisista algebrallisista struktuureista, joista osa on hyvin tuttuja ja toiset vähemmän tunnettuja.

Esimerkki 1.1. RYHMÄT. Ryhmä $\mathbf{G}$ on algebra $\langle \mathrm{G}, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$, jossa $\cdot$ on kaksipaikkainen, $^{-1}$ yksipaikkainen ja 1 nollapaikkainen laskutoimitus. Ryhmä toteuttaa seuraavat ehdot:

G1: $\forall x, y, z \in \mathrm{G} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
G2: $\forall x \in \mathrm{G} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
G3: $\forall x \in \mathrm{G} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

Ryhmä $\mathbf{G}$ on *Abelin ryhmä* (vaihdannainen), jos se toteuttaa vielä neljännen ehdon:

G4: $\forall x, y \in \mathrm{G} : x \cdot y = y \cdot x$

Esimerkki 1.2. PUOLIRYHMÄT JA MONOIDIT. *Puoliryhmä* on magma $\langle \mathrm{G}, \cdot \rangle$, jossa (G1) on tosi ja se on vaihdannainen, jos se toteuttaa ehdon (G4). *Monoidi* on algebra $\langle \mathrm{M}, \cdot, 1 \rangle$, joka sisältää kaksipaikkaisen ja nollapaikkaisen laskuoperaation siten, että ne toteuttavat ehdot (G1) ja (G2).

Esimerkki 1.3. KVASIRYHMÄT JA LUUPIT. *Kvasiryhmä* $\langle \mathrm{Q}, /, \cdot, \backslash \rangle$ on algebra, jossa on kolme kaksipaikkaista laskutoimitusta. Kvasiryhmät eroavat ryhmistä erityisesti siinä, että niiden ei tarvitse toteuttaa liitännäisyyslakia (G1). Kvasiryhmässä pätee seuraavat ehdot:

Q1: $\forall x, y \in \mathrm{Q} : x \backslash (x \cdot y) = y$; $(x \cdot y)/y = x$
Q2: $\forall x, y \in \mathrm{Q} : x \cdot (x \backslash y) = y$; $(x/y) \cdot y = x$

Luuppi on kvasiryhmä identiteettilaskutoimituksella varustettuna ja siinä pätee (G2).

Esimerkki 1.4. RENKAAT. *Rengas* on algebra $\langle \mathrm{R}, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$, missä $+$ ja $\cdot$ ovat kaksipaikkaisia laskutoimituksia, $-$ on yksipaikkainen ja 0, sekä 1 ovat nollapaikkaisia toteuttaen seuraavat ehdot:

R1: $\langle \mathrm{R}, +, -, 0 \rangle$ on Abelin ryhmä.
R2: $\langle \mathrm{R}, \cdot, 1 \rangle$ on monoidi.
R3: $\forall x, y, z \in \mathrm{G} : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,
$\forall x, y, z \in \mathrm{G} : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Joidenkin matemaatikkojen mielestä identiteettilaskutoimitus ei ole renkaassa pakollinen, eli myös algebra $\langle \mathrm{R}, +, \cdot, -, 0\rangle$ voi olla rengas. Tällöin edellä mainitussa (R2)-ehdossa riittää monoidin sijaan, että algebra $\langle \mathrm{R}, \cdot\rangle$ on puoliryhmä.

Esimerkki 1.5. HILAT. *Hila* on algebra $\langle \mathrm{L}, \vee, \wedge\rangle$, jossa on kaksi kaksipaikkaista laskuoperaatiota ja joka toteuttaa ehdot:

L1: $\forall x, y \in \mathrm{L} : x \vee y = y \vee x$
$\forall x, y \in \mathrm{L} : x \wedge y = y \wedge x$
L2: $\forall x, y, z \in \mathrm{L} : x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
$\forall x, y, z \in \mathrm{L} : x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
L3: $\forall x \in \mathrm{L} : x \vee x = x$
$\forall x \in \mathrm{L} : x \wedge x = x$
L4: $\forall x, y \in \mathrm{L} : x = x \vee (x \wedge y)$
$\forall x, y \in \mathrm{L} : x = x \wedge (x \vee y)$

Esimerkki 1.6. BOOLEN ALGEBRA. Algebra $\langle \mathrm{H}, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ on *Boolen algebra*, joka sisältäää kaksi kaksipaikkaista, yhden yksipaikkaisen ja kaksi nollapaikkaista laskutoimitusta, mikäli se on hila (L1)-(L4), distributiivinen (D1)-(D2) (ks. alla) ja pätee (B1)-(B2):

B1: $\forall x \in \mathrm{H}$:	$x \wedge 0 = 0$; $x \vee 1 = 1$	(nolla-alkiot)
B2: $\forall x \in \mathrm{H}$:	$x \wedge x' = 0$; $x \vee x' = 1$	(komplementti)
D1: $\forall x, y, z \in \mathrm{H}$:	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	(osittelulait)
D2: $\forall x, y, z \in \mathrm{H}$:	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	

2 Isomorfiset algebrat, alialgebrat ja aliuniversumit

Määritellään ensin alialgebran ja aliuniversumin käsitteet ja sitten paneudutaan algebrojen välisiin isomorfioihin.

Määritelmä 2.1. Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebroja ja $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$. Mikäli $\mathbf{B}$:n n-paikkaisilla funktioilla $f^{\mathbf{B}}$ pätee, että $f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)$ kaikilla $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{B}$, niin sanotaan, että $f^{\mathbf{B}}$ on $f^{\mathbf{A}}$:n B-rajoittuma.

Määritelmä 2.2. Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebroja. Tällöin $\mathbf{B}$ on $\mathbf{A}$:n *alialgebra*, jos $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ ja kaikki $\mathbf{B}$:n laskutoimitukset ovat rajoittumia vastaavista $\mathbf{A}$:n laskutoimituksista. Jokaisella funktiosymbolilla f siis pätee, että $f^{\mathbf{B}}$ on $f^{\mathbf{A}}$:n B-rajoittuma. Jos algebralla $\mathbf{A}$ on alialgebra $\mathbf{B}$, niin merkitään $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$.

Määritelmä 2.3. B on algebran $\mathbf{A}$ *aliuniversumi* (*subuniverse*), mikäli $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ ja B on suljettu $\mathbf{A}$:n peruslaskutoimitusten suhteen. Toisin sanoen, jos f on $\mathbf{A}$:n n-paikkainen peruslaskutoimitus ja $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{B}$, niin tällöin vaaditaan, että myös $f(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{B}$.

Mikäli $\mathbf{B}$ on $\mathbf{A}$:n alialgebra, niin tällöin B on $\mathbf{A}$:n aliuniversumi. Huomautettakoon, että tyhjä joukko voi olla aliuniversumi, mutta se ei ole minkään alialgebran universumi. $\mathbf{A}$:n aliuniversumeihin kuuluvat myös kaikki algebran $\mathbf{A}$ nollapaikkaiset laskutoimitukset.

Ryhmä-, rengas- ja hilateoriasta tutut isomorfian käsitteet ovat erikoistapauksia algebrojen välisistä isomorfioista.

Määritelmä 2.4. Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebroja. Tällöin kuvaus $\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ on *homomorfismi* $\mathbf{A}$:lta $\mathbf{B}$:lle, jos kaikilla n-paikkaisilla laskutoimituksilla $f \in \mathcal{F}$ ja $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ pätee:

$$\alpha(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).$$

Määritelmä 2.5. Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebroja. Tällöin kuvaus $\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ on *isomorfismi* $\mathbf{A}$:lta $\mathbf{B}$:lle, jos α on bijektio ja homomorfismi.

Jatkossa jätetään merkinnästä $\alpha(x)$ sulut pois, jos se selkiyttää muuten merkintöjä.

Merkitään $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, jos $\mathbf{A}$ on isomorfinen $\mathbf{B}$:n kanssa, eli on olemassa isomorfismi $\mathbf{A}$:lta $\mathbf{B}$:lle. Jos kuvaus α on isomorfismi $\mathbf{A}$:lta $\mathbf{B}$:lle, niin voidaan yksinkertaisesti sanoa, että $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ on isomorfismi.

Määritelmä 2.6. Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ algebroja, jotka ovat tyyppiä $\mathcal{F}$. Kuvaus $\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ on $\mathbf{A}$:n *upotus* $\mathbf{B}$:hen, mikäli α on injektio ja lisäksi homomorfismi (tällaista kuvausta α kutsutaan myös monomorfismiksi). Selkeyden takia sanotaan kuitenkin vain yksinkertaisesti, että $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ on upotus ja jos on olemassa $\mathbf{A}$:n upotus $\mathbf{B}$:hen, niin sanotaan, että $\mathbf{A}$ on mahdollista upottaa $\mathbf{B}$:hen.

Määritelmä 2.7. Olkoon $\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ kuvaus ja $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{A}$. Joukon C kuvaa eli kuvajoukkoa kuvauksessa α merkitään $\alpha(\mathrm{C})$ ja sillä tarkoitetaan joukkoa

$$\alpha(\mathrm{C}) = \{\alpha(x) \in \mathrm{B} : x \in \mathrm{C}\}$$

Lause 2.1. *Jos $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ on upotus, niin $\alpha(\mathrm{A})$ on $\mathbf{B}$:n aliuniversumi.*

Todistus. Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebroja ja olkoon $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ upotus. Olkoon sitten mielivaltainen $f \in \mathcal{F}$, joka on n-paikkainen funktio ja mielivaltaiset $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$. Nyt koska α on upotus, saadaan määritelmän 2.4 perusteella

$$\begin{gathered} f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) = \alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \\ \text{ja koska } f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{A}, \\ \text{niin } \alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{B}. \end{gathered}$$

□

Määritelmä 2.8. Jos $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ on upotus, niin merkintä $\alpha(\mathbf{A})$ tarkoittaa sellaista $\mathbf{B}$:n alialgebraa, jonka universumi on $\alpha(\mathrm{A})$.

Määritelmä 2.9. Merkitään A:n *potenssijoukkoa* eli joukon A kaikkien osajoukkojen joukkoa $\mathcal{P}(\mathrm{A})$. $\mathcal{P}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{B} : \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}\}$.

Määritelmä 2.10. Olkoon A joukko. Kuvaus $\mathrm{C} : \mathcal{P}(\mathrm{A}) \to \mathcal{P}(\mathrm{A})$ on *sulkeumaoperaattori* A:ssa, jos kaikilla $X, Y \subseteq \mathrm{A}$ pätee:

C1: $X \subseteq \mathrm{C}(X)$
C2: $\mathrm{C}^2(X) = \mathrm{C}(X)$
C3: $X \subseteq Y \Rightarrow \mathrm{C}(X) \subseteq \mathrm{C}(Y)$

Määritelmä 2.11. Olkoon $\mathbf{A}$ algebra. Määritellään $\mathrm{Sg}(X)$:n kaikille $X \subseteq \mathrm{A}$ seuraavasti:

$$\mathrm{Sg}(X) = \bigcap\{\mathrm{B} : X \subseteq \mathrm{B} \text{ ja B on } \mathbf{A}\text{:n aliuniversumi}\}.$$

Sanotaan, että $\mathbf{A}$ on *X:n virittämä algebra*, jos $X \subseteq \mathrm{A}$ ja $\mathrm{Sg}(X) = \mathrm{A}$.

Lause 2.2. *Olkoon $\mathbf{A}$ algebra.* $\mathrm{Sg}(X)$ *on aliuniversumi kaikilla $X \subseteq \mathrm{A}$.*

Todistus. Olkoon $\mathbf{A}$ tyypin $\mathcal{F}$ algebra ja olkoon $X \subseteq \mathrm{A}$ mielivaltainen joukko. Olkoot lisäksi mielivaltaiset $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Sg}(X)$. Osoitetaan seuraavaksi, että $f_n(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Sg}(X)$, kun $f_n \in \mathcal{F}$.
Koska $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Sg}(X)$, niin $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{B}$ kaikilla aliuniversumeilla B, joilla $X \in \mathrm{B}$. Koska kaikilla aliuniversumeilla B, joilla $X \in \mathrm{B}$, pätee $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{B}$, niin $f_n(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{B}$ kaikilla B. Tästä seuraa, että myös $f_n(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Sg}(X)$ ja $\mathrm{Sg}(X)$ on siis aliuniversumi. □

Lause 2.3. *Jos algebra* $\mathbf{A}$ *on annettu, on* Sg *sulkeumaoperaattori joukossa* A.

Todistus. Osoitetaan, että (i) $X \subseteq \mathrm{Sg}(X)$, (ii) $\mathrm{Sg}^2(X) = \mathrm{Sg}(X)$ ja (iii) $X \subseteq Y \Rightarrow \mathrm{Sg}(X) \subseteq \mathrm{Sg}(Y)$.

(i) Määritelmästä 2.11

$$\mathrm{Sg}(X) = \bigcap\{\mathrm{B} : X \subseteq \mathrm{B} \text{ ja B on } \mathbf{A}\text{:n aliuniversumi}\}$$

seuraa suoraan, että $X \subseteq \mathrm{B}$ kaikilla leikkauksen aliuniversumeilla B. Tästä seuraa välittömästi, että $X \subseteq \mathrm{Sg}(X)$.

(ii) Määritelmästä 2.11 seuraa, että $\mathrm{Sg}^2(X)$ on muotoa

$$\mathrm{Sg}(\mathrm{Sg}(X)) = \bigcap\{\mathrm{B} : \mathrm{Sg}(X) \subseteq \mathrm{B} \text{ ja B on } \mathbf{A}\text{:n aliuniversumi}\}.$$

Koska $\mathrm{Sg}(X)$ on jo itsessään aliuniversumi, niin se on myös pienin joukon $\mathrm{Sg}(X)$ sisältävä aliuniversumi. Siispä $\mathrm{Sg}^2(X) = \mathrm{Sg}(X)$.

(iii) Oletetaan, että $X \subseteq Y$ ja $a \in \mathrm{Sg}(X)$. Tällöin $a \in \mathrm{B}$ kaikilla aliuniversumeilla B, jotka sisältävät joukon X. Koska $X \subseteq Y$, niin erityisesti $a \in \mathrm{B}'$ kaikilla B', jotka sisältävät joukon Y. Siis $\mathrm{Sg}(X) \subseteq \mathrm{Sg}(Y)$.

□

3 Kongruenssit ja tekijäalgebrat

Määritelmä 3.1. Olkoon A joukko. Kaksipaikkainen relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio A:ssa mikäli kaikilla $a, b, c \in$ A pätee:
E1: $a \sim a$ (refleksiivisyys)
E2: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (symmetrisyys)
E3: $a \sim b$ ja $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (transitiivisuus)

Määritelmä 3.2. Olkoon A joukko. Kaikkien A:n ekvivalenssirelaatioiden joukosta käytetään merkintää Eq(A). Merkitään A:n ekvivalenssiluokkien joukkoa A$/\theta$, missä $\theta \in$ Eq(A) ja ekvivalenssiluokat ovat ekvivalenssirelaation θ määräämät.

Seuraavaksi esiteltävä *yhteensopivuusehto* (*compatibility property*) on olennainen kriteeri, jos ekvivalenssiluokkien joukossa A$/\theta$ halutaan ottaa käyttöön algebrasta **A** periytyvä algebrallinen struktuuri.

Määritelmä 3.3. Olkoon **A** tyypin $\mathcal{F}$ algebra ja $\theta \in$ Eq(A). Tällöin θ on *kongruenssi* **A**:ssa, mikäli θ toteuttaa seuraavan yhteensopivuusehdon: Jokaiselle n-paikkaiselle funktiosymbolille $f \in \mathcal{F}$ ja kaikille alkioille $a_i, b_i \in$ A, jos $a_i \theta b_i$ on voimassa jokaisella $1 \leq i \leq n$, niin:

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)\theta f^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n).$$

Esimerkki 3.1. Olkoon additiivinen monoidi $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$.

(a) Merkitään a:n jakojäännöstä p:llä jaettaessa $[a]_p$. Olkoon θ seuraavanlainen ekvivalenssirelaatio: $a\theta b$, jos ja vain jos $[a]_p = [b]_p$. Olkoot sitten $a\theta b$ ja $c\theta d$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tällöin selvästi $[a+c]_p = [b+d]_p$ eli $(a+c)\theta(b+d)$ ja yhteensopivuusehto siis pätee ekvivalenssirelaatiolle θ.

(b) Merkitään luvun a:n numeroiden lukumäärää $l(a)$, kun $a \in \mathbb{N}$. Olkoon sitten ekvivalenssirelaatio $\sim$ määritelty siten, että $a \sim b$ jos ja vain jos $l(a) = l(b)$. Tällöin esimerkiksi $l(1) = 1$, $l(7) = 1$ ja siis $1 \sim 7$. Vastaavasti $l(12) = 2$ ja $l(95) = 2$ eli $12 \sim 95$, mutta $l(1 + 12) = 2 \neq 3 = l(7 + 95)$. Siis $l(1 + 12) \nsim l(7 + 95)$ ja täten $\sim$ ei noudata yhteensopivuusehtoa.

Määritelmä 3.4. Olkoon **A** tyypin $\mathcal{F}$ algebra. Con(**A**) tarkoittaa kaikkien kongruenssien joukkoa algebrassa **A**. Kongruenssin θ määräämä tekijäalgebra **A**:ssa on algebra, jonka universumi on A$/\theta$. Kyseistä algebraa merkitään $\mathbf{A}/\theta$. Kun $a_1, \ldots, a_n \in$ A ja $f \in \mathcal{F}$ on n-paikkainen funktiosymboli, niin $\mathbf{A}/\theta$:n laskuoperaatioiden tulee toteuttaa ehto:

$$f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta.$$

Tämä on hyvinmääritelty, sillä kongruenssin määritelmästä seuraa, että millä tahansa ekvivalenssiluokan edustajilla saadaan sama tulos.

Esimerkki 3.2. Olkoon $\mathbf{G}$ ryhmä. $\mathbf{G}$:n aliryhmä $\mathbf{H}$ on normaali aliryhmä, mikäli $g\mathrm{H} = \mathrm{H}g$ kaikilla $g \in \mathrm{G}$. Voidaan muodostaa yhteys $\mathbf{G}$:n kongruenssien ja $\mathbf{G}$:n normaalien aliryhmien välille seuraavalla tavalla:

(a) Jos $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{G})$, niin $1/\theta$ on $\mathbf{G}$:n normaalin aliryhmän universumi. Lisäksi, jos $a, b \in \mathrm{G}$, niin $\langle a, b\rangle \in \theta$ jos ja vain jos $a \cdot b^{-1} \in 1/\theta$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $1/\theta$ on normaalin aliryhmän universumi. Oletetaan, että $a, b \in 1/\theta$. Tällöin $a\theta 1$ ja $b\theta 1$, joten $a \cdot b\theta 1 \cdot 1$ eli $a \cdot b\theta 1$, josta seuraa, että $a \cdot b \in 1/\theta$ ja $1/\theta$ on siis suljettu. Oletaan sitten, että $a \in 1/\theta$. Tällöin

$$\begin{array}{rrcl} & a & \theta & 1 \\ \Leftrightarrow & a \cdot a^{-1} & \theta & 1 \cdot a^{-1} \\ \Leftrightarrow & 1 & \theta & a^{-1}. \end{array}$$

Jokaisella $a \in 1/\theta$ pätee siis, että $a^{-1} \in 1/\theta$. Lisäksi, koska $g \cdot 1 = 1 \cdot g$ kaikilla $g \in \mathbf{G}$, niin $1/\theta$ on normaali aliryhmä.

Osoitetaan sitten, että jos $a, b \in \mathrm{G}$, niin $\langle a, b\rangle \in \theta$ jos ja vain jos $a \cdot b^{-1} \in 1/\theta$. Oletetaan, että $a, b \in \mathrm{G}$. Tällöin pätee

$$\begin{array}{rrcl} & a & \theta & b \\ \Leftrightarrow & ab^{-1} & \theta & bb^{-1} \\ \Leftrightarrow & ab^{-1} & \theta & 1 \\ \Leftrightarrow & ab^{-1} & \in & 1/\theta. \end{array}$$

□

(b) Jos $\mathbf{N}$ on $\mathbf{G}$:n normaali aliryhmä, niin silloin G:ssä määritelty kaksipaikkainen relaatio

$$\langle a, b\rangle \in \theta \text{ jos ja vain jos } a \cdot b^{-1} \in \mathrm{N}$$

on kongruenssi $\mathbf{G}$:ssä ja $1/\theta = \mathrm{N}$. Täten kuvaus $\theta \mapsto 1/\theta$ on bijektio $\mathbf{G}$:n kongruensseilta $\mathbf{G}$:n normaaleille aliryhmille.

Todistus. Osoitetaan seuraavaksi, että relaatio θ on ekvivalenssirelaatio.
(i) $a \cdot a^{-1} \in \mathrm{N}$ kaikilla $a \in \mathrm{G}$.
(ii) Oletetaan, että $\langle a, b\rangle \in \theta$ eli $ab^{-1} \in \mathrm{N}$. Tällöin on olemassa $n \in \mathrm{N}$ siten, että

$$\begin{array}{rrcl} & ab^{-1} & = & n \\ \Leftrightarrow & ab^{-1}b & = & nb \\ \Leftrightarrow & a & = & nb \\ \Leftrightarrow & aa^{-1} & = & nba^{-1} \\ \Leftrightarrow & n^{-1} \cdot 1 & = & n^{-1}nba^{-1} \\ \Leftrightarrow & n^{-1} & = & ba^{-1}, \end{array}$$

josta seuraa, että $ba^{-1} \in \mathrm{N}$ ja $\langle b, a\rangle \in \theta$.
(iii) Jos $\langle a, b\rangle \in \theta$, niin $ab^{-1} \in \mathrm{N}$ ja $bc^{-1} \in \mathrm{N}$, josta seuraa suoraan $ab^{-1} \cdot bc^{-1} = ac^{-1}$ eli $ac^{-1} \in \mathrm{N}$ ja $\langle a, c\rangle \in \theta$.

Osoitetaan, että θ noudattaa yhteensopivuusehtoa. Olkoot $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathrm{G}$ siten, että $a_1\theta a_2$ ja $b_1\theta b_2$. Koska $a_1\theta a_2$, niin myös käänteisalkiot ovat kongruentteja $a_1^{-1}\theta a_2^{-1}$ ja $a_1 a_2^{-1} \in \mathrm{N}$. Vastaavasti $b_1 b_2^{-1} \in \mathrm{N}$. Koska N on suljettu tulon suhteen, niin $a_1 a_2^{-1} b_1 b_2^{-1} \in \mathrm{N}$, josta saadaan normaalin aliryhmän vaihdannaisuuden perusteella $a_1 b_1 (a_2 b_2)^{-1} \in \mathrm{N}$. Siis $a_1 b_1 \theta a_2 b_2$.

Osoitetaan, että kuvaus $\theta \mapsto 1/\theta$ on bijektio $\mathbf{G}$:n kongruensseilta $\mathbf{G}$:n normaaleille aliryhmille.

Injektiivisyys: Jos olisi olemassa θ_1 ja θ_2 siten, että $\theta_1 \neq \theta_2$ ja $\theta_1 \mapsto 1/\theta$, sekä $\theta_2 \mapsto 1/\theta$, niin olisi olemassa $\langle a, b\rangle \in \theta_1$ siten, että $\langle a, b\rangle \notin \theta_2$. Kuitenkin $1/\theta$:ssa $ab^{-1}\theta 1$ on joko tosi tai epätosi. Siis θ_1 ja θ_2 eivät voi molemmat kuvautua samalle normaalille aliryhmälle $1/\theta$ ja kuvaus on injektio.

Surjektiivisuus: Normaalin aliryhmän $1/\theta$ alkukuva määräytyy siten, että $\langle a, b\rangle \in \theta_1$ jos ja vain jos $ab^{-1} \in \theta$. $\square$

4 Suorat tulot ja homomorfismit

Määritelmä 4.1. Olkoon $\mathbf{A}_i$ indeksoitu algebrojen perhe, missä $i \in I$. Määritellään algebrojen tulo seuraavasti:

$$\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} \mathrm{A}_i \text{ ja } f(i) \in \mathrm{A}_i \text{ jokaisella } i \in I\}.$$

Määritelmä 4.2. Olkoon $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ tyypin $\mathcal{F}$ indeksoitu algebrojen perhe. Määritellään algebrojen *yleinen suora tulo* $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ siten, että se on algebra, jonka universumi on $\prod_{i \in I} \mathrm{A}_i$ ja kaikilla peruslaskutoimituksilla pätee $f \in \mathcal{F}_n$ ja $a_1, \dots, a_n \in \prod_{i \in I} \mathrm{A}_i$

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$$

kaikilla $i \in I$. Siis $f^{\mathbf{A}}$ on määritelty koordinaattikohtaisesti.

Tyhjä tulo $\prod_{i \in \emptyset} \mathbf{A}_i$ on tyhjä funktio, joka muodostaa triviaalin algebran. Lisäksi sovitaan, että $\prod \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i$, kun $i \in I = \{i\}$.

Esimerkki 4.1. Olkoot $\mathbf{A}_1$ ja $\mathbf{A}_2$ tyypin $\mathcal{F}$ algebroja. Tällöin algebrojen suora tulo $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ on algebra, jonka universumi on $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$ ja kaikille $f \in \mathcal{F}_n$, sekä $a_i \in \mathrm{A}_1$, $a_i' \in \mathrm{A}_2$, $1 \leq i \leq n$ pätee

$$f^{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}(\langle a_1, a_1' \rangle, \dots, \langle a_n, a_n' \rangle) = \langle f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a_1', \dots, a_n') \rangle.$$

Määritelmä 4.3. Olkoon $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ tyypin $\mathcal{F}$ indeksoitu algebrojen perhe. Kuvaus

$$\pi_j : \prod_{i \in I} \mathrm{A}_i \to \mathrm{A}_j,$$

missä $j \in I$ ja

$$\pi_j(a) = a(j),$$

on tulon $\prod_{i \in I} \mathrm{A}_i$ *projektiokuvaus* koordinaatille j. Projektiokuvauksen määräämää homomorfismia sanotaan *kanoniseksi homomorfismiksi*.

Lause 4.1. *Olkoon $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ tyypin $\mathcal{F}$ indeksoitu algebrojen perhe. Merkitään $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i = \mathbf{A}$. Projektiokuvauksen määräämä kuvaus $\pi_j : \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_j$ on surjektiivinen homomorfismi.*

Todistus.

$$\begin{aligned}
\pi_j(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) &= (f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))(j) \\
&= f^{\mathbf{A}_j}(a_1(j), \dots, a_n(j)) \\
&= f^{\mathbf{A}_j}(\pi_j(a_1), \dots, \pi_j(a_n)).
\end{aligned}$$

Surjektiivisuus seuraa välittömästi projektiokuvauksen määritelmästä. $\square$

Määritelmä 4.4. (i) Olkoot kuvaukset $\alpha_i : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_i$, $i \in I$. Tällöin *luonnollinen kuvaus*

$$\alpha : \mathrm{A} \to \prod_{i \in I} \mathrm{A}_i$$

määritellään siten, että $(\alpha a)(i) = \alpha_i a$.

(ii) Jos kuvaukset $\alpha_i : \mathrm{A}_i \to \mathrm{B}_i$, $i \in I$ on annettuna, niin tällöin *luonnollinen kuvaus*

$$\alpha : \prod_{i \in I} \mathrm{A_i} \to \prod_{i \in I} \mathrm{B}_i$$

määritellään siten, että $(\alpha a)(i) = \alpha_i(a(i))$.

Lause 4.2. *Jos $\alpha_i : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$, $i \in I$, on indeksoitu perhe homomorfismeja, niin luonnnollinen kuvaus $\alpha : \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ on homomorfismi.*

Todistus. Oletetaan, että $\alpha_i : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ on homomorfismi kaikilla $i \in I$. Merkitään $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i = \mathbf{A}^*$. Olkoot lisäksi $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ ja $f \in \mathcal{F}_n$. Saadaan

$$\begin{aligned}
(\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))(i) &= \alpha_i f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \\
&= f^{\mathbf{A}_i}(\alpha_i a_1, \ldots, \alpha_i a_n) \\
&= f^{\mathbf{A}_i}((\alpha a_1)(i), \ldots, (\alpha a_n)(i)) \\
&= f^{\mathbf{A}^*}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)(i)
\end{aligned}$$

siis

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{A}^*}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

ja α on homomorfismi. □

Yleensä kummastakaan algebrasta $\mathbf{A}_1$ tai $\mathbf{A}_2$ ei ole muodostettavissa algebraan $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ sellaista kuvausta, joka olisi injektiivinen homomorfismi eli upotus. Joissakin erikoistapauksissa se on kuitenkin mahdollista, kuten esimerkiksi kaikilla ryhmillä. Olkoot $\mathbf{G_1}$ ja $\mathbf{G_2}$ ryhmiä ja olkoon kuvaus α:

$$\alpha : \mathbf{G_1} \to \mathbf{G_1} \times \mathbf{G_2}, \text{ missä } g \mapsto \langle g, 1' \rangle,$$

$g \in \mathrm{G}_1$ ja $1'$ on ryhmän G_2 neutraalialkio. Ryhmien triviaalit alialgebrat siis mahdollistavat upotuksen suoraan tuloon. Algebrasta $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ on aina muodostettavissa surjektiivinen homomorfismi algebroihin $\mathbf{A}_1$ ja $\mathbf{A}_2$.

Määritelmä 4.5. Olkoon $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ homomorfismi. Tällöin kuvauksen α *ydin*, $\ker(\alpha)$, on määritelty seuraavasti:

$$\ker(\alpha) = \{\langle a, b \rangle \in \mathrm{A}^2 : \alpha(a) = \alpha(b)\}.$$

Lause 4.3. *Olkoon $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ homomorfismi. Tällöin $\ker(\alpha)$ on kongruenssi $\mathbf{A}$:ssa.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että ydin on ekvivalenssirelaatio. Olkoot $a, b, c \in$ A. Koska $\alpha(a) = \alpha(a)$, niin $\langle a, a\rangle \in \ker(\alpha)$. Jos $\langle a, b\rangle \in \ker(\alpha)$, niin $\alpha(a) = \alpha(b)$ ja tällöin myös $\alpha(b) = \alpha(a)$ ja siis $\langle b, a\rangle \in \ker(\alpha)$. Jos $\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle \in \ker(\alpha)$, niin $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(c)$ ja tällöin myös $\alpha(a) = \alpha(c)$ eli $\langle a, c\rangle \in \ker(\alpha)$.

Osoitetaan sitten, että $\ker(\alpha)$ noudattaa yhteensopivuusehtoa. Jos $\langle a_i, b_i\rangle \in \ker(\alpha)$, kun $1 \leq i \leq n$, ja $f \in \mathcal{F}_n$, niin

$$\begin{aligned} \alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) &= f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) \\ &= f^{\mathbf{B}}(\alpha b_1, \ldots, \alpha b_n) \\ &= \alpha f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

siis

$$\langle f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)\rangle \in \ker(\alpha).$$

□

Määritelmä 4.6. Jos $\mathbf{A}$ on algebra ja jos $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, niin tällöin $\nu_\theta : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\theta$ on *luonnollinen kuvaus*, missä $\nu_\theta(a) = a/\theta$ ja $a \in \mathrm{A}$. Jos erehtymisen vaaraa ei ole, niin merkitään kuvausta ν_θ vain ν.

Lause 4.4. *Olkoon algebra* $\mathbf{A}$ *ja olkoon kongruenssi* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Tällöin luonnollinen kuvaus* $\nu_\theta : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\theta$ *on surjektiivinen homomorfismi.*

Todistus. Olkoot tyypin $\mathcal{F}$ algebra $\mathbf{A}$, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ ja kuvaus $\nu_\theta : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\theta$. Olkoon sitten $f \in \mathcal{F}_n$ ja alkiot $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$. Saadaan

$$\begin{aligned} \nu f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) &= f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta \\ &= f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) \\ &= f^{\mathbf{A}/\theta}(\nu a_1, \ldots, \nu a_n), \end{aligned}$$

josta seuraa, että ν on homomorfismi. Surjektiivisuus seuraa suoraan siitä, että A/θ sisältää ainoastaan A:n ekvivalenssiluokkia, joten jokaisella on välttämättä alkukuva A:ssa. □

Määritelmä 4.7. Jos $\mathbf{A}$ on algebra, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ ja $\nu_\theta : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\theta$ on luonnollinen kuvaus, niin ν on *luonnollinen homomorfismi.*

Lause 4.5. *(Homomorfialause). Oletetaan, että* $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *on surjektiivinen homomorfismi. Tällöin on olemassa isomorfismi* $\beta : \mathbf{A}/\ker(\alpha) \to \mathbf{B}$ *siten, että* $\alpha = \beta \circ \nu$, *missä* ν *on luonnollinen homomorfismi* $\nu : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\ker(\alpha)$.

Todistus. Merkitään $\ker(\alpha) = \theta$. Määritellään $\beta(a/\theta) = \alpha(a)$ ja luonnollinen homomorfismi ν siten, että $\nu(a) = a/\theta$, $a \in \mathrm{A}$. Tällöin $\alpha = \beta \circ \nu$. Kuvaus β on hyvinmääritelty, sillä jos $a/\theta = a'/\theta$, niin koska $\theta = \ker(\alpha)$, niin välttämättä $\alpha(a) = \alpha(a')$. Kuvaus β on injektio, koska A/θ:n ekvivalenssiluokat ovat määräytyneet $\ker(\alpha)$:n mukaan eli jokaista ekvivalenssiluokkaa vastaa B:ssä täsmälleen yksi alkio. Vastaavasti jokaisen B:n alkion alkukuva kuuluu johonkin A/θ:n ekvivalenssiluokkaan, koska α on surjektio ja siksi β on surjektio.

Oletetaan sitten, että $f \in \mathcal{F}_n$ ja $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$$\begin{aligned}
\beta(f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta)) &= \beta(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta) \\
&= \alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \\
&= f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) \\
&= f^{\mathbf{B}}(\beta(a_1/\theta), \ldots, \beta(a_n/\theta)).
\end{aligned}$$

Siis β on isomorfismi. $\square$

5 Luokkaoperaatiot ja varistot

Määritelmä 5.1. Olkoon K algebrojen luokka. Määritellään seuraavat operaatiot, jotka kuvaavat saman tyypin algebrojen luokkia algebrojen luokille:

$\mathbf{A} \in \mathrm{I}(\mathrm{K})$ joss olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{K}$ siten, että $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

$\mathbf{A} \in \mathrm{S}(\mathrm{K})$ joss olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{K}$ siten, että $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$.

$\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathrm{K})$ joss on olemassa $\mathbf{M} \in \mathrm{K}$ ja kuvaus ϕ siten, että $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{A}$ on surjektiivinen homomorfismi.

$\mathbf{A} \in \mathrm{P}(\mathrm{K})$ joss $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, missä $I \neq \emptyset$ ja $\mathbf{A}_i \in \mathrm{K}$ jokaisella $i \in I$.

Jos O_1 ja O_2 ovat algebrojen luokkaoperaatioita ja K algebrojen luokka, niin lyhennetään luokkaoperaatioiden tulon merkintää siten, että $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2(\mathrm{K}) = \mathrm{O}_1(\mathrm{O}_2(\mathrm{K}))$. Määritellään luokkaoperaatioiden järjestys siten, että merkitään $\mathrm{O}_1 \leq \mathrm{O}_2$, jos $\mathrm{O}_1(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{O}_2(\mathrm{K})$ kaikilla algebrojen luokilla K. Operaatio on idempotentti, jos $\mathrm{O}^2 = \mathrm{O}$. Algebrojen luokka K on puolestaan suljettu operaation O suhteen, jos $\mathrm{O}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$.

Lause 5.1. *Luokkaoperaatioiden tulo on liitännäinen kaikilla algebrojen luokilla* K.

Todistus. Olkoon K on algebrojen luokka ja olkoot O_1, O_2 ja O_3 luokkaoperaatioita. Osoitetaan, että $\mathrm{O}_1(\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3)(\mathrm{K}) = (\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2)\mathrm{O}_3(\mathrm{K})$.

Määritelmän perusteella $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2(\mathrm{K}) = \mathrm{O}_1(\mathrm{O}_2(\mathrm{K}))$, josta seuraa, että

$$\begin{aligned} & \mathrm{O}_1(\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3(\mathrm{K})) \\ = \; & \mathrm{O}_1(\mathrm{O}_2(\mathrm{O}_3(\mathrm{K}))) \\ = \; & \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2(\mathrm{O}_3(\mathrm{K})). \end{aligned}$$

□

Lause 5.2. *Jos* K *ja* K′ *ovat luokkia, joilla pätee* $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$, *ja* $\mathrm{O} \in \{\mathrm{H}, \mathrm{S}, \mathrm{P}\}$, *niin* $\mathrm{O}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{O}(\mathrm{K}')$ *eli luokkaoperaatiot* H, S *ja* P *ovat monotonisia.*

Todistus. (i) Oletetaan, että $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$ ja $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathrm{K})$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{K}$ siten, että on olemassa surjektiivinen homomorfismi $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Koska $\mathbf{B} \in \mathrm{K}$ ja $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$, niin $\mathbf{B} \in \mathrm{K}'$. Koska on olemassa surjektiivinen homomorfismi $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, niin $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathrm{K}')$.

(ii) Oletetaan, että $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$ ja $\mathbf{A} \in \mathrm{S}(\mathrm{K})$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{K}$ siten, että $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Koska $\mathbf{B} \in \mathrm{K}$ ja $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$, niin $\mathbf{B} \in \mathrm{K}'$ ja koska $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, niin $\mathbf{A} \in \mathrm{S}(\mathrm{K}')$.

(iii) Oletetaan, että $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$ ja $\mathbf{A} \in \mathrm{P}(\mathrm{K})$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B}_i \in \mathrm{K}$, missä $i \in I$, siten, että $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{B}_i$. Koska $\mathbf{B}_i \in \mathrm{K}$ ja $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$, niin $\mathbf{B_i} \in \mathrm{K}'$ kaikilla $i \in I$, mistä välittömästi seuraa, että $\mathbf{A} \in \mathrm{P}(\mathrm{K}')$. □

Lause 5.3. *Monotonisten luokkaoperaatioiden tulot ovat monotonisia.*

Todistus. Olkoot algebrojen luokat K ja K′ siten, että $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$. Lisäksi olkoot monotoniset luokkaoperaatiot $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_{k+1}$.

Perusaskel $n = 2$: Monotonisuudesta seuraa välittömästi $\mathrm{O}_2(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{O}_2(\mathrm{K}')$ ja $\mathrm{O}_1(\mathrm{O}_2(\mathrm{K})) \subseteq \mathrm{O}_1(\mathrm{O}_2(\mathrm{K}'))$.

Induktio-oletus $n = k : \mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_k(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_k(\mathrm{K}')$.

Induktioväite $n = k + 1 : \mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_k \mathrm{O}_{k+1}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_k \mathrm{O}_{k+1}(\mathrm{K}')$.

Perusaskeleesta seuraa
$$\mathrm{O}_{k+1}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{O}_{k+1}(\mathrm{K}').$$
Induktio-oletuksen perusteella saadaan
$$\mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_k(\mathrm{O}_{k+1}(\mathrm{K})) \subseteq \mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_k(\mathrm{O}_{k+1}(\mathrm{K}')).$$
□

Esimerkki 5.1. Tarkastellaan algebroja, joiden tyyppi on $\mathcal{F} = \langle +, \cdot, -, 1, 0 \rangle$.

(a) Kaikkien renkaiden luokka R, johon sallitaan nollarenkaat eli renkaassa saa olla $0 = 1$, on suljettu luokkaoperaatioiden S, H ja P suhteen.

Todistus. $\mathrm{S}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{R}$: Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{S}(\mathrm{R})$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{R}$ siten, että $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Alialgebran määritelmästä seuraa, että **A**:n laskutoimitukset ovat **B**:n A-rajoittumia. Algebra **A** on siis rengas ja $\mathbf{A} \in \mathrm{R}$.

$\mathrm{H}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{R}$: Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathrm{R})$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{R}$ siten, että on surjektiivinen homomorfismi $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Homomorfisuudesta seuraa, että **A**:ssa pätee kaikki renkaan laskuehdot ja koska $\mathcal{F}$ sisältää vain renkaan laskutoimitukset, niin **A** on rengas ja $\mathbf{A} \in \mathrm{R}$.

$\mathrm{P}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{R}$: Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{P}(\mathrm{R})$. Tällöin on olemassa $\mathbf{A}_i \in \mathrm{R}$, $i \in I$ siten, että $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$. Osoitetaan, että osittelulait pätevät. Muut renkaiden ominaisuudet seuraavat vastaavalla tavalla. Olkoot $x, y, z \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(x \cdot (y + z))(i) &= x(i) \cdot^{\mathbf{A}_i} (y(i) +^{\mathbf{A}_i} z(i)) \\
&= (x(i) \cdot^{\mathbf{A}_i} y(i)) +^{\mathbf{A}_i} (x(i) \cdot^{\mathbf{A}_i} z(i)) \\
&= ((x \cdot y) + (x \cdot z))(i)
\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}((x+y)\cdot z)(i) &= (x(i) +^{\mathbf{A}_i} y(i)) \cdot^{\mathbf{A}_i} z(i) \\ &= (x(i) \cdot^{\mathbf{A}_i} z(i)) +^{\mathbf{A}_i} (y(i) \cdot^{\mathbf{A}_i} z(i)) \\ &= ((x\cdot z)+(y\cdot z))(i).\end{aligned}$$

Siis osittelulait pätevät. □

(b) Kaikkien renkaiden luokka R^*, joka ei sisällä nollarenkaita eli kaikissa renkaissa $0 \neq 1$, on suljettu S:n ja P:n suhteen, mutta ei H:n suhteen.

Todistus. (a)-kohdan todistukset $\mathrm{S}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{R}$ ja $\mathrm{P}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{R}$ pätevät myös renkaiden luokalle R^*. $\mathrm{H}(\mathrm{R}^*) \nsubseteq \mathrm{R}^*$: Nollarengas $\{0\}$ on minkä tahansa renkaan homomorfinen kuva, mutta nollarengas ei toteuta ehtoa $0 \neq 1$. □

(c) Nollantekijöitä sisältämättömien renkaiden luokka $\mathrm{R_N}$ on suljettu S:n suhteen, mutta ei H:n tai P:n suhteen.

Todistus. $\mathrm{S}(\mathrm{R_N}) \subseteq \mathrm{R_N}$: Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{S}(\mathrm{R_N})$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{R_N}$ siten, että $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Alialgebran määritelmästä seuraa, että $\mathbf{A}$:n laskutoimitukset ovat $\mathbf{B}$:n A-rajoittumia. Algebra $\mathbf{A}$ on siis rengas, eikä se sisällä nollantekijöitä, joten $\mathbf{A} \in \mathrm{R_N}$. $\mathrm{H}(\mathrm{R_N}) \nsubseteq \mathrm{R_N}$: Luonnollinen kuvaus $\nu : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ on surjektiivinen homomorfismi, mutta jäännösluokkarengas $\mathbb{Z}_4$ sisältää nollantekijöinä $2 \cdot 2 = 4 = 0$. $\mathrm{P}(\mathrm{R_N}) \nsubseteq \mathrm{R_N}$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sisältää nollantekijöitä, vaikka $\mathbb{Z}$ ei sisälläkään. □

(d) Kaikkien kuntien luokka K ei ole suljettu S:n, H:n, eikä P:n suhteen.

Todistus. $\mathrm{S}(\mathrm{K}) \nsubseteq \mathrm{K}$: Rationaalilukujen kunnalla on alirenkaana $\mathbb{Z}$, joka ei ole kunta. $\mathrm{H}(\mathrm{K}) \nsubseteq \mathrm{K}$: Rationaalilukujen kunnasta on surjektiivinen homomorfismi nollarenkaaseen, vaikka nollarengas ei ole kunta. $\mathrm{P}(\mathrm{K}) \nsubseteq \mathrm{K}$: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sisältää nollantekijöitä. Esimerkiksi $\langle 1,0\rangle \cdot \langle 0,1\rangle = \langle 0,0\rangle$.

□

Määritelmä 5.2. Tyypin $\mathcal{F}$ epätyhjä algebrojen luokka K on *varisto*, mikäli seuraavat ehdot pätevät:

V1: $\mathrm{S}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$
V2: $\mathrm{H}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$
V3: $\mathrm{P}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$

Lause 5.4. *Jokaiselle saman tyypin algebrojen luokalle* K *on olemassa pienin varisto, joka sisältää* K*:n.*

Todistus. Olkoon K annettu. Määritellään $\mathrm{K}^* = \{ \mathbf{A} \mid \mathbf{A} \in \mathrm{K}'$ jokaisella sellaisella varistolla K', jolla $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}' \}$.

(1) Osoitetaan, että K^* on varisto eli että $\mathrm{H}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$, $\mathrm{S}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$ ja $\mathrm{P}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$.

Osoitetaan, että $\mathrm{H}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$.
Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathrm{K}^*)$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{K}^*$ siten, että $\phi : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ on surjektiivinen homomorfismi. Koska $\mathbf{B} \in \mathrm{K}^*$, niin K^*:n määritelmästä seuraa, että $\mathbf{B} \in \mathrm{K}'$ jokaisella varistolla K', jolla $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$. Siispä K^*:n määritelmän perusteella $\mathbf{A} \in \mathrm{K}^*$, josta seuraa, että $\mathrm{H}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$.

Osoitetaan, että $\mathrm{S}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$.
Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{S}(\mathrm{K}^*)$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{K}^*$ siten, että $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Koska $\mathbf{B} \in \mathrm{K}^*$, niin K^*:n määritelmästä seuraa, että $\mathbf{B} \in \mathrm{K}'$ jokaisella varistolla K', jolla $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$. Siispä K^*:n määritelmän perusteella $\mathbf{A} \in \mathrm{K}^*$ ja $\mathrm{S}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$ pätee.

Osoitetaan, että $\mathrm{P}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$.
Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{P}(\mathrm{K}^*)$. Tällöin on olemassa $\mathbf{A}_i \in \mathrm{K}^*$, missä $i \in I$ ja $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$. Koska $\mathbf{A}_i \in \mathrm{K}^*$, niin K^*:n määritelmästä seuraa, että $\mathbf{A}_i \in \mathrm{K}'$ jokaisella varistolla K', jolla $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$. K^*:n määritelmän perusteella $\mathbf{A} \in \mathrm{K}^*$. Siis $\mathrm{P}(\mathrm{K}^*) \subseteq \mathrm{K}^*$.

(2) Osoitetaan, että $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}^*$.
Koska luokkaan K^* kuuluu vain algebrat, jotka kuuluvat kaikkiin varistoihin K', joilla $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$, niin kaikille $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ pätee $\mathbf{A} \in \mathrm{K}^*$. Siis $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}^*$.

(3) $\mathrm{K}^* \subseteq \mathrm{K}'$ jokaisella varistolla K', jolla $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$.
Olkoon K' mielivaltainen varisto, jolla pätee $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$. K^*:n määritelmän perusteella K^* sisältää vain algebroja, jotka sisältyvät kaikkiin K:n sisältäviin varistoihin. Siis K^* ei sisällä mitään, mitä K' ei sisältäisi, joten $\mathrm{K}^* \subseteq \mathrm{K}'$. □

Määritelmä 5.3. Käytetään merkintää V(K) pienimmästä varistosta, joka sisältää tyypin $\mathcal{F}$ algebrojen luokan K. Voidaan myös sanoa, että V(K) on K:n *virittämä varisto.* Jos K:ssa on ainoastaan yksi alkio **A**, niin merkitään V(**A**). Puolestaan varisto V on *äärellisesti viritetty*, jos V = V(K) jollakin äärellisten algebrojen äärellisellä joukolla K.

Lemma 5.5. *Seuraavat epäyhtälöt pätevät:* $\mathrm{SH} \leq \mathrm{HS}$, $\mathrm{PS} \leq \mathrm{SP}$ *ja* $\mathrm{PH} \leq \mathrm{HP}$. *Lisäksi operaatiot* H, S *ja* IP *ovat idempotentteja.*

Todistus.

(i) Todistetaan, että $\mathrm{SH} \leq \mathrm{HS}$:

Oletaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{SH(K)}$. Tällöin on olemassa algebra $\mathbf{C} \in \mathrm{K}$ ja $\mathbf{B} \in \mathrm{H(K)}$ siten, että on surjektiivinen homomorfismi $\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ ja $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Koska $\mathbf{C} \in \mathrm{K}$ ja $\alpha^{-1}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{C}$, niin $\alpha^{-1}(\mathbf{A}) \in \mathrm{S(K)}$ ja koska α on homomorfinen surjektio ja $\alpha(\alpha^{-1}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$, niin $\mathbf{A} \in \mathrm{HS(K)}$.

(ii) PS $\leq$ SP:
Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{PS(K)}$. Tällöin on olemassa algebrat $\mathbf{A}_i \in \mathrm{S(K)}$, $i \in I$ siten, että $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ ja lisäksi on algebrat $\mathbf{B}_i \in \mathrm{K}$, joilla pätee $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$. Selvästi $\prod_{i\in I} \mathbf{B}_i \in \mathrm{P(K)}$ ja koska kaikilla $i \in I$ pätee $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$, niin suoran tulon määritelmästä seuraa $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \leq \prod_{i\in I} \mathbf{B}_i$. Siis $\mathbf{A} \in \mathrm{SP(K)}$.

(iii) PH $\leq$ HP:
Oletetaan $\mathbf{A} \in \mathrm{PH(K)}$. Tällöin on olemassa algebrat $\mathbf{B}_i \in \mathrm{K}$, $i \in I$, ja surjektiiviset homomorfismit $\alpha_i : \mathbf{B}_i \to \mathbf{A}_i$ siten, että $\mathbf{A}_i \in \mathrm{H(K)}$ ja $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$. Selvästi $\prod_{i\in I} \mathbf{B}_i \in \mathrm{P(K)}$ ja koska kaikilla $i \in I$ pätee $\alpha_i : \mathbf{B}_i \to \mathbf{A}_i$, niin on olemassa surjektiivinen homomorfismi $\alpha : \prod_{i\in I} \mathbf{B}_i \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, missä kuvaus on määritelty koordinaattikohtaisesti α_i:n mukaan. Siis $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i = \mathbf{A} \in \mathrm{HP(K)}$.

(iv) H $=$ H^2:
Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{HH(K)}$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{H(K)}$ siten, että $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ on surjektiivinen homomorfismi ja $\mathbf{C} \in \mathrm{K}$ siten, että $\beta : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ on surjektiivinen homomorfismi. Koska $\beta \circ \alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ on surjektiivinen homomorfismi, niin $\mathbf{A} \in \mathrm{H(K)}$. Siis $\mathrm{HH(K)} \subseteq \mathrm{H(K)}$. Oletetaan sitten $\mathbf{A} \in \mathrm{H(K)}$. Tällöin $id : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ on surjektiivinen homomorfismi ja $\mathbf{A} \in \mathrm{HH(K)}$. Siis $\mathrm{H(K)} \subseteq \mathrm{HH(K)}$ ja täten $\mathrm{H} = \mathrm{H}^2$.

(v) S $=$ S^2:
Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{S(K)}$. Koska $\mathbf{A} \leq \mathbf{A}$, niin $\mathbf{A} \in \mathrm{SS(K)}$. Oletetaan sitten, että $\mathbf{A} \in \mathrm{SS(K)}$. Tällöin on algebra $\mathbf{B} \in \mathrm{S(K)}$ siten, että $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ ja algebra $\mathbf{C} \in \mathrm{K}$ siten, että $\mathbf{B} \leq \mathbf{C}$. Koska $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \leq \mathbf{C}$, niin $\mathbf{A} \leq \mathbf{C}$ ja $\mathbf{A} \in \mathrm{S(K)}$.

(vi) IP $=$ (IP)^2:
Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{IP(K)}$. Koska $\mathbf{A}$ on itsensä yksipaikkainen suora tulo, niin $\mathbf{A} \in \mathrm{PIP(K)}$ ja koska $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}$, niin $\mathbf{A} \in \mathrm{IPIP(K)}$. Oletetaan sitten, että $\mathbf{A} \in \mathrm{IPIP(K)}$. Tällöin on $\mathbf{B} \in \mathrm{PIP(K)}$ siten, että $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ ja $\mathbf{B}_i \in \mathrm{IP(K)}$, $i \in I$, siten, että $\mathbf{B} = \prod_{i\in I} \mathbf{B}_i$. Lisäksi on $\mathbf{C}_i \in \mathrm{P(K)}$ siten, että $\mathbf{B}_i \cong \mathbf{C}_i$ kaikilla $i \in I$ ja $\mathbf{C}_{ij} \in \mathrm{K}$, $j \in J_i$, siten, että $\mathbf{C}_i = \prod_{j\in J_i} \mathbf{C}_{ij}$. Saadaan, että

$$\mathbf{B} = \prod_{i\in I} \mathbf{B}_i \cong \prod_{i\in I} \mathbf{C}_i = \prod_{i\in I}(\prod_{j\in J_i} \mathbf{C}_{ij}) \cong \prod_{(i,j)\in L} \mathbf{C}_{ij},$$

missä $L = \{(i,j) \mid i \in I, j \in J_i\}$. Edellä mainitun perusteella pätee, että $\prod_{(i,j)\in L} \mathbf{C}_{ij} \in \mathrm{P(K)}$ ja koska $\prod_{(i,j)\in L} \mathbf{C}_{ij} \cong \mathbf{B}$ ja $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}$, niin $\mathbf{A} \cong \prod_{(i,j)\in L} \mathbf{C}_{ij}$ ja $\mathbf{A} \in \mathrm{IP(K)}$.

$\square$

Lause 5.6. *Jos* $\mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_n$ *on monotonisten luokkaoperaatioiden tulo ja on olemassa* O'_i *siten, että* $\mathrm{O}_i \leq \mathrm{O}'_i$ *jollakin* $1 \leq i \leq n$*, niin pätee:*

$$\mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_i \cdots \mathrm{O}_n \leq \mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}'_i \cdots \mathrm{O}_n.$$

Todistus. Oletetaan, että luokkaoperaatiot $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_{k+1}$ ovat monotonisia.

Perusaskel ($n = 2$): Olkoon luokkaoperaatioiden tulo $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ ja O'_1, sekä O'_2 siten, että $\mathrm{O}_1 \leq \mathrm{O}'_1$ ja $\mathrm{O}_2 \leq \mathrm{O}'_2$. Osoitetaan, että (i) $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 \leq \mathrm{O}'_1\mathrm{O}_2$ ja (ii) $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 \leq \mathrm{O}_1\mathrm{O}'_2$.

(i) Oletuksesta $\mathrm{O}_1 \leq \mathrm{O}'_1$ seuraa, että $\mathrm{O}_1(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{O}'_1(\mathrm{K})$ kaikilla algebrojen luokilla K. Erityisesti $\mathrm{O}_1(\mathrm{O}_2(\mathrm{K})) \subseteq \mathrm{O}'_1(\mathrm{O}_2(\mathrm{K}))$.

(ii) Oletuksesta $\mathrm{O}_2 \leq \mathrm{O}'_2$ ja luokkaoperaatioiden monotonisuudesta seuraa, että $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 \leq \mathrm{O}_1\mathrm{O}'_2$.

Induktio-oletus: kun $n = k$, $1 \leq i \leq k$ ja $\mathrm{O}_i \leq \mathrm{O}'_i$, niin pätee:

$$\mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_i \cdots \mathrm{O}_k \leq \mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}'_i \cdots \mathrm{O}_k.$$

Induktioväite: tosi, kun $n = k + 1$.

Olkoon $\mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_k\mathrm{O}_{k+1}$ ja olkoon $\mathrm{O}_i \leq \mathrm{O}'_i$ jollakin $1 \leq i \leq k+1$. Jos $1 \leq i \leq k$, niin induktio-oletuksen perusteella pätee

$$\mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_i \cdots \mathrm{O}_k \leq \mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}'_i \cdots \mathrm{O}_k$$

ja perusaskeleen perusteella

$$(\mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}_i \cdots \mathrm{O}_k)\mathrm{O}_{k+1} \leq (\mathrm{O}_1 \cdots \mathrm{O}'_i \cdots \mathrm{O}_k)\mathrm{O}_{k+1}.$$

Jos $i = k + 1$, niin väite seuraa suoraan luokkaoperaatioiden monotonisuudesta. $\square$

Lemma 5.7. *Seuraavat epäyhtälöt ovat tosia:* $\mathrm{P} \leq \mathrm{V}$, $\mathrm{SV} \leq \mathrm{V}$ *ja* $\mathrm{HV} \leq \mathrm{V}$.

Todistus.

(i) $\mathrm{P} \leq \mathrm{V}$
Olkoon algebra $\mathbf{A} \in \mathrm{P}(\mathrm{K})$. Monotonisuuden perusteella $\mathrm{P}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathrm{K}))$ ja variston määritelmän perusteella $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathrm{K})) \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{K})$. Siis $\mathbf{A} \in \mathrm{V}(\mathrm{K})$.

(ii) $\mathrm{SV} \leq \mathrm{V}$
Olkoon algebra $\mathbf{A} \in \mathrm{SV}(\mathrm{K})$. Tällöin on olemassa $\mathbf{B} \in \mathrm{V}(\mathrm{K})$ siten, että

$\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. V(K) on varisto ja koska varisto on suljettu alialgebrojen suhteen, niin $\mathbf{A} \in$ V(K).

(iii) HV $\leq$ V
Olkoon algebra $\mathbf{A} \in$ HV(K). Tällöin on olemassa surjektiivinen homomorfismi $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ siten, että $\mathbf{B} \in$ V(K). V(K) on varisto ja koska varisto on suljettu surjektiivisten homomorfismien suhteen, niin $\mathbf{A} \in$ V(K). $\square$

Lemma 5.8. *Seuraavat yhtälöt pätevät:* SI $\leq$ IS*,* I $\leq$ IP *ja* HI $=$ H*.*

Todistus.

(i) SI $\leq$ IS:
Oletetaan, että $\mathbf{A} \in$ SI(K). Tällöin on olemassa algebra $\mathbf{C} \in$ K siten, että $\mathbf{C} \cong \mathbf{B}$ ja $\mathbf{B} \in$ I(K) ja $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Koska $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ ja $\mathbf{B} \cong \mathbf{C}$, niin on olemassa $\mathbf{D} \in$ K siten, että $\mathbf{D} \leq \mathbf{C}$ ja $\mathbf{D} \cong \mathbf{A}$. Koska $\mathbf{C} \in$ K ja $\mathbf{D} \leq \mathbf{C}$, niin $\mathbf{D} \in$ S(K) ja koska $\mathbf{D} \cong \mathbf{A}$, niin $\mathbf{A} \in$ IS(K). Siis SI $\leq$ IS.

(ii) I $\leq$ IP:
Olkoon algebra $\mathbf{A} \in$ I(K). Tällöin on olemassa algebra $\mathbf{B} \in$ K siten, että $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. Koska $\mathbf{B}$ on itsensä yksipaikkainen suora tulo, niin $\mathbf{B} \in$ P(K) ja koska $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, niin $\mathbf{A} \in$ IP(K).

(iii) HI $=$ H:
Olkoon algebra $\mathbf{A} \in$ HI(K). Tällöin on olemassa algebrat $\mathbf{C} \in$ K ja $\mathbf{B} \in$ I(K) siten, että $\mathbf{C} \cong \mathbf{B}$ ja algebrasta $\mathbf{B}$ on surjektiivinen homomorfismi $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Isomorfismin $\mathbf{C} \cong \mathbf{B}$ ja surjektiivisen homomorfismin $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ yhdistetty kuvaus algebrasta $\mathbf{C}$ algebraan $\mathbf{A}$ on surjektiivinen homomorfismi ja $\mathbf{A} \in$ H(K). Oletetaan sitten $\mathbf{A} \in$ H(K). Tällöin on algebra $\mathbf{B} \in$ K, josta on surjektiivinen homomorfismi algebraan $\mathbf{A}$. Koska $\mathbf{B} \cong \mathbf{B}$, niin $\mathbf{B} \in$ I(K) ja koska surjektiivinen homomorfismi $\mathbf{B}$:stä $\mathbf{A}$:han, niin $\mathbf{A} \in$ HI(K). $\square$

Lause 5.9. *(Tarski).* V $=$ HSP.

Todistus. ($\Leftarrow$) Lemman 5.7 perusteella pätee:

$$\mathrm{HSP} \leq \mathrm{HSV} \leq \mathrm{HV} \leq \mathrm{V}.$$

($\Rightarrow$)

Osoitetaan, että HSP on suljettu H:n, S:n ja P:n suhteen:

(i) H(HSP) $=$ (HH)SP $=$ HSP

(ii) S(HSP) $=$ (SH)SP $\leq$ HSSP $=$ H(SS)P $=$ HSP

(iii) $P(HSP) = (PH)SP \leq (HP)SP$
$= H(PS)P \leq H(SP)P = HSPP \leq HS(IPIP)$
$= H(SIP) \leq H(IS)P = (HI)SP \leq HSP$

$\square$

6 Termialgebrat

Määritelmä 6.1. Olkoon X joukko erillisiä objekteja, joita sanotaan muuttujiksi ja olkoon $\mathcal{F}$ algebrojen tyyppi. Tällöin merkintä $\mathrm{T}(X)$ on tyypin $\mathcal{F}$ termien joukko X:n suhteen ja se on pienin joukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) $X \cup \mathcal{F}_0 \subseteq \mathrm{T}(X)$.

(ii) Jos $p_1, \ldots, p_n \in \mathrm{T}(X)$ ja $f \in \mathcal{F}_n$ niin silloin $f(p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{T}(X)$.

Kaksipaikkaiselle funktiosymbolille $\cdot$ suositaan merkintää $p_1 \cdot p_2$ merkinnän $\cdot(p_1, p_2)$ sijaan.

Määritelmä 6.2. Jos $p \in \mathrm{T}(X)$, niin voidaan kirjoittaa $p(x_1, \ldots, x_n)$ ilmaisemaan sitä, että p:ssä esiintyvät muuttujat ovat joukossa $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Termi p on n-paikkainen mikäli p:ssä esiintyvien muuttujien määrä on $\leq n$.

Määritelmä 6.3. Olkoon $\mathcal{F}$ algebran tyyppi ja X joukko. Mikäli $\mathrm{T}(X) \neq \emptyset$, niin $\mathbf{T}(X)$ on tyypin $\mathcal{F}$ *termialgebra* X:n suhteen. Termialgebran $\mathbf{T}(X)$ universumi on $\mathrm{T}(X)$ ja peruslaskutoimitukset määritellään:

$$f^{\mathbf{T}(X)} : \langle p_1, \ldots, p_n \rangle \mapsto f(p_1, \ldots, p_n)$$

kaikilla $f \in \mathcal{F}_n$ ja $p_i \in \mathrm{T}(X)$, kun $1 \leq i \leq n$.

On huomionarvoista, että $\mathbf{T}(X)$ on todellakin X:n virittämä algebra. Lisäksi termialgebrat ovat yksinkertaisimpia mahdollisia esimerkkejä algebroista, joilla on universaali kuvausominaisuus (universal mapping property), joka määritellään seuraavaksi.

Huomattakoon, että $\mathbf{T}(X)$ on määritelty ainoastaan, jos $X \neq \emptyset$ tai $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Jos sekä $X = \emptyset$, että $\mathcal{F}_0 = \emptyset$, niin $\mathrm{T}(X) = \emptyset$, mutta termialgebra $\mathbf{T}(X)$ ei ole tällöin määritelty. $\mathbf{T}(\emptyset)$ on kuitenkin määritelty, jos $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Määritelmä 6.4. Olkoon K tyypin $\mathcal{F}$ algebrojen luokka ja olkoon $\mathbf{U}(X)$ tyypin $\mathcal{F}$ algebra, joka on X:n virittämä. Sanotaan, että algebralla $\mathbf{U}(X)$ on *universaali kuvausominaisuus* K:ssa X:n suhteen, mikäli kaikilla $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ ja kaikilla kuvauksilla

$$\alpha : X \to \mathrm{A}$$

on olemassa homomorfismi

$$\beta : \mathbf{U}(X) \to \mathbf{A},$$

joka laajentaa kuvausta α, toisin sanoen $\beta(x) = \alpha(x)$ kaikilla $x \in X$. Tällöin sanotaan, että X on $\mathbf{U}(X)$:n *vapaiden virittäjien* joukko ja $\mathbf{U}(X)$:n sanotaan olevan X:n *vapaasti virittämä*.

Lause 6.1. *Millä tahansa algebrojen tyypillä $\mathcal{F}$ ja millä tahansa muuttujajoukolla X, missä $X \neq \emptyset$ jos $\mathcal{F}_0 = \emptyset$, termialgebralla $\mathbf{T}(X)$ on universaalikuvausominaisuus X:n suhteen kaikkien tyypin $\mathcal{F}$ algebrojen luokassa.*

Todistus. Olkoon $\alpha : X \to \mathrm{A}$, missä A on tyypin $\mathcal{F}$ algebran $\mathbf{A}$ universumi. Määritellään

$$\beta : \mathrm{T}(X) \to \mathrm{A}$$

rekursiivisesti siten, että

$$\beta x = \alpha x$$

kaikilla $x \in X$ ja lisäksi

$$\beta(f(p_1, \ldots, p_n)) = f^{\mathbf{A}}(\beta p_1, \ldots, \beta p_n)$$

kun $p_1, \ldots, p_n \in \mathrm{T}(X)$ ja $f \in \mathcal{F}_n$. Tällöin $\beta(p(x_1, \ldots, x_n)) = p^{\mathbf{A}}(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$ ja β on haluttu homomorfismi, joka laajentaa kuvausta α. □

Määritelmä 6.5. Olkoon K tyypin $\mathcal{F}$ algebrojen perhe ja olkoon X muuttujien joukko. Määritellään $\mathbf{T}(X)$:ssä kongruenssi $\theta_{\mathrm{K}}(X)$ siten, että:

$$\theta_{\mathrm{K}}(X) = \bigcap \Phi_{\mathrm{K}}(X),$$

missä

$$\Phi_{\mathrm{K}}(X) = \{\phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{T}(X)) : \mathbf{T}(X)/\phi \in \mathrm{IS}(\mathrm{K})\}.$$

Merkitään kongruenssin $\theta_{\mathrm{K}}(X)$ määräämää X:n ekvivalenssiluokkien joukkoa $X/\theta_{\mathrm{K}}(X)$ lyhyemmin vain $\overline{X}$. Vastaavasti kun $x \in X$, niin merkitään ekvivalenssiluokkaa $x/\theta_{\mathrm{K}}(X)$ $\overline{x}$:llä.

Määritellään sitten $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$ eli K-*vapaa algebra* $\overline{X}$*:n suhteen* siten, että:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) = \mathbf{T}(X)/\theta_{\mathrm{K}}(X).$$

Jos $p = p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{T}(X)$, niin voidaan merkitä $p^{\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ sijaan vain $\overline{p}$. Jos X on äärellinen $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, niin algebraa $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$ voidaan merkitä havainnollisemmin $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Algebran $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$ universumi on $\mathrm{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$.

$\overline{X}$:n suhteen K-vapaan algebran $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) = \mathbf{T}(X)/\theta_{\mathrm{K}}(X)$ universumi on tekijäalgebran määritelmän perusteella $\mathrm{T}(X)/\theta_{\mathrm{K}}(X)$ eli $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$ on joukon $\overline{X} = X/\theta_{\mathrm{K}}(X)$ virittämä algebra vastaavalla tavalla, kuten $\mathbf{T}(X)$ on X:n virittämä termialgebra, jonka universumi on $\mathrm{T}(X)$.

Mikäli $\mathrm{K} = \emptyset$ tai K koostuu pelkästään triviaaleista algebroista, niin myös $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$ on triviaali algebra, sillä $\theta_{\mathrm{K}}(X) = \nabla$ eli $\theta_{\mathrm{K}}(X)$ on relaatio $X \times X$.

Jos K:ssa on epätriviaali algebra $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{T}(X)$ on olemassa, niin tällöin $X \cap \overline{x} = \{x\}$, sillä erilliset alkiot $x, y \in X$ voidaan erottaa jollakin homomorfismilla $\alpha : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$. Tässä tapauksessa joukon koko on sama $|\overline{X}| = |X|$.

Jos $|X| = |Y|$ ja $\mathbf{T}(X)$ on olemassa, niin selvästi $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \cong \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{Y})$ isomorfismilla, joka kuvaa $\overline{X}$:n $\overline{Y}$:lle, kuten $\mathbf{T}(X) \cong \mathbf{T}(Y)$ isomorfismilla X:stä Y:lle. Täten $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$ on K:n ja $|X|$:n määräämä isomorfismia vaille.

Lause 6.2. *(Birkhoff). Oletetaan, että* $\mathbf{T}(X)$ *on olemassa. Tällöin* $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$*:llä on universaali kuvausominaisuus* K*:lle* $\overline{X}$*:n suhteen.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ ja $\alpha : \overline{X} \to \mathrm{A}$ on kuvaus. Olkoon lisäksi $\nu : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$ luonnollinen homomorfismi. Tällöin $\alpha \circ \nu$ kuvaa X:n A:han ja $\mathbf{T}(X)$:n universaalin kuvausominaisuuden perusteella on olemassa homomorfismi $\mu : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$, joka laajentaa yhdistetyn kuvauksen rajoittumaa $\alpha \circ \nu \restriction X$. $\theta_{\mathrm{K}}(X)$:n määritelmän perusteella on selvää, että $\theta_{\mathrm{K}}(X) \subseteq \ker(\mu)$, sillä $\ker(\mu) \in \Phi_{\mathrm{K}}(X)$. Täten on olemassa homomorfismi $\beta : \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \to \mathbf{A}$ siten, että $\mu = \beta \circ \nu$, koska $\ker(\nu) = \theta_{\mathrm{K}}(X)$. Tällöin, kun $x \in X$:

$$\begin{aligned} \beta(\overline{x}) &= \beta \circ \nu(x) \\ &= \mu(x) \\ &= \alpha \circ \nu(x) \\ &= \alpha(\overline{x}). \end{aligned}$$

Täten β laajentaa α:aa ja siis $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$:llä on universaali kuvausominaisuus K:ssa X:n suhteen. □

Jos $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \in \mathrm{K}$, niin se on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen algebra K:ssa, joka on $|\overline{X}|$:n kokoisen virittäjien joukon vapaasti virittämä K:n suhteen ja jolla on universaali kuvausominaisuus. Itse asiassa jokainen algebra K:ssa, jolla on universaali kuvausominaisuus K:ssa, on isomorfinen K-vapaiden algebroiden kanssa.

Esimerkki 6.1. Olkoon joukko X ja olkoon X^* sellainen joukko, joka koostuu äärellisistä X:n alkioiden merkkijonoista, sisältäen tyhjän merkkijonon. Tätä joukkoa käyttäen voidaan konstruoida monoidi $\langle X^*, \cdot, 1\rangle$ määrittelemällä $\cdot$ konkatenaatioksi eli merkkijonojen yhteenliittämiseksi ja 1 tyhjäksi merkkijonoksi. Tarkastelemalla universaalia kuvausominaisuutta voidaan huomata, että $\langle X^*, \cdot, 1\rangle$ on isomorfiaa vaille $\overline{X}$:n vapaasti virittämä vapaa monoidi.

Esimerkki 6.2. Olkoon X joukko. Sanotaan, että kuvaus N on *monijoukko*, jos N kuvaa jokaisen X:n alkion jollekin luonnolliselle luvulle. Monijoukkoa N sanotaan äärelliseksi, jos joukko $\{x \in X \mid N(x) \neq 0\}$ on äärellinen. Tarkastellaan sitten kaikkien kommutatiivisten monoidien luokkaa. Tällöin kaikkien X:n äärellisten monijoukkojen joukko, $\mathcal{M}_\omega(X)$, muodostaa kommutatiivisen monoidin $\langle \mathcal{M}_\omega(X), +, 0\rangle$, jos kaksipaikkainen laskutoimitus, merkitään $+$, määritellään seuraavalla tavalla. Olkoot M ja N äärellisiä monijoukkoja X:n suhteen. Määritellään tällöin

$$(M + N)(x) = M(x) + N(x) \text{ kaikilla } x \in X.$$

Tyhjä monijoukko, $0(x) = 0$ kaikilla $x \in X$, on monoidin neutraalialkio.

Olkoon $\mathbf{A}$ mielivaltainen kommutatiivinen monoidi. Tällöin jokaisella kuvauksella $\alpha : X \to \mathrm{A}$ on yksikäsitteinen homomorfinen laajennus $\alpha^* : \mathcal{M}_\omega(X) \to \mathrm{A}$ siten, että

$$\alpha^*(M) = \sum_{x \in X} M(x) \cdot \alpha(x) \text{ kaikilla } M \in \mathcal{M}_\omega(X),$$

missä jokaiselle luonnolliselle luvulle n ja jokaiselle alkiolle $a \in \mathrm{A}$, merkintä $n \cdot a$ tarkoittaa a:n n-monikertaa. Huomaa, että summa X:n suhteen on hyvinmääritelty, sillä jokainen summa on äärellinen.

Seuraus 6.3. *Jos* K *on tyypin* $\mathcal{F}$ *algebrojen luokka ja* $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$*, niin tällöin riittävän suurella joukolla* X*,* $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}))$*.*

Todistus. Valitaan $|X| \geq |\mathrm{A}|$ ja olkoon

$$\alpha : \overline{X} \to \mathrm{A}$$

surjektio. Olkoon sitten

$$\beta : \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \to \mathbf{A}$$

homomorfismi, joka laajentaa kuvausta α. □

Lemma 6.4. *Olkoon* $\theta_i \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*,* $i \in I$ *ja* $\theta = \bigcap_{i \in I} \theta_i$*. Tällöin on olemassa upotus* $\alpha : \mathbf{A}/\theta \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}/\theta_i$*.*

Todistus. Määritellään kuvaus $\alpha : \mathbf{A}/\theta \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}/\theta_i$ siten, että $\alpha(a/\theta) = (a/\theta_i)_{i \in I}$.

Kuvaus on hyvinmääritelty eli $a/\theta = b/\theta \Rightarrow (a/\theta_i)_{i \in I} = (b/\theta_i)_{i \in I}$ kaikilla A/θ:n alkioilla, sillä mikäli olisi $a/\theta_i \neq b/\theta_i$ jollakin $i \in I$, niin siitä välittömästi seuraisi, että $\langle a, b \rangle \notin \bigcap_{i \in I} \theta_i = \theta$ ja olisi $a/\theta \neq b/\theta$.

Osoitetaan sitten kuvauksen homomorfisuus. Merkitään $\mathbf{A}^* = \prod_{i \in I} \mathbf{A}/\theta_i$. Olkoon $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}/\theta$ ja $f \in \mathcal{F}_n$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\alpha(f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta))(i) &= \alpha(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta)(i) \\
&= f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta_i \\
&= f^{\mathbf{A}/\theta_i}(a_1/\theta_i, \ldots, a_n/\theta_i) \\
&= f^{\mathbf{A}/\theta_i}(\alpha(a_1/\theta)(i), \ldots, \alpha(a_n/\theta)(i)) \\
&= (f^{\mathbf{A}^*}(\alpha(a_1/\theta), \ldots, \alpha(a_n/\theta))(i).
\end{aligned}$$

Siis $\alpha(f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta)) = f^{\mathbf{A}^*}(\alpha(a_1/\theta), \ldots, \alpha(a_n/\theta))$.

Kuvauksen injektiivisyys seuraa siitä, että jos on $\alpha(a_1/\theta) = \alpha(a_2/\theta)$, niin tällöin $a_1/\theta_i = a_2/\theta_i$ kaikilla $i \in I$, joten $\langle a_1, a_2 \rangle \in \bigcap_{i \in I} \theta_i = \theta$ ja siis $a_1/\theta = a_2/\theta$.

Kuvaus α on siis upotus. □

Lause 6.5. *Olkoon* K *luokka ja* $\mathbf{T}(X)$ *termialgebra. Tällöin* $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \in \mathrm{ISP}(\mathrm{K})$*.*

Todistus. Määritelmän perusteella

$$\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) = \mathbf{T}(X)/\theta_{\mathrm{K}}(X),$$

missä

$$\theta_{\mathrm{K}}(X) = \bigcap \Phi_{\mathrm{K}}(X)$$

ja

$$\Phi_{\mathrm{K}}(X) = \{\phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{T}(X)) : \mathbf{T}(X)/\phi \in \mathrm{IS}(\mathrm{K})\}.$$

Lemmasta 6.4 seuraa, että on olemassa upotus

$$\mathbf{T}(X)/\theta_{\mathrm{K}}(X) \to \prod_{i \in I} \mathbf{T}(X)/\theta_i,$$

missä $\theta_i \in \Phi_{\mathrm{K}}(X)$ ja $i \in I$. Tämän perusteella pätee

$$\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \in \mathrm{ISPIS}(\mathrm{K}).$$

Lemman 5.8 ja 5.5 perusteella

$$\mathrm{ISPIS} \leq \mathrm{ISIPIPS} \leq \mathrm{ISIPS} \leq \mathrm{IISPS} \leq \mathrm{IISSP} \leq \mathrm{ISP}.$$

Siis

$$\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \in \mathrm{ISP}(\mathrm{K}).$$

□

7 Identiteetit, vapaat algebrat ja Birkhoffin lause

Yksi Birkhoffin tunnetuimmista lauseista yhdistää identiteettien määrittelemät algebrojen luokat täsmälleen niihin, jotka ovat suljettuja H, S ja P operaatioiden suhteen. Tässä luvussa tutustutaan ensin identiteetteihin ja siihen, miten ne liittyvät vapaisiin algebroihin. Lopuksi tarkastellaan aiheeseen liittyviä sovelluksia ja Birkhoffin lausetta.

Identiteettien erikoistapauksia on tullut jo aiemmin vastaan. Tällaisia on ollut esimerkiksi vaihdannaisuus-, liitännäisyys- ja osittelulait. Seuraavaksi formalisoidaan identiteettien yleinen käsite ja algebrassa $\mathbf{A}$ ja algebrojen luokassa K pätevä identiteetti.

Määritelmä 7.1. Tyypin $\mathcal{F}$ identiteetti X:n suhteen on muotoa

$$p \approx q$$

missä $p, q \in \mathrm{T}(X)$. Merkitään $\mathrm{Id}(X)$ X:n tyypin $\mathcal{F}$ identiteettien joukkoa. Tyypin $\mathcal{F}$ algebrassa $\mathbf{A}$ pätee identiteetti $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$, jos kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in A$ on voimassa

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Tätä merkitään

$$\mathbf{A} \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$$

tai

$$\mathbf{A} \models p \approx q.$$

Vastaavasti algebrojen luokassa K pätee $p \approx q$, lyhennettynä

$$\mathrm{K} \models p \approx q,$$

jos jokainen K:n jäsen toteuttaa identiteetin $p \approx q$. Jos Σ on joukko identiteettejä, niin sanotaan K toteuttaa Σ:n ja merkitään

$$\mathrm{K} \models \Sigma,$$

jos $\mathrm{K} \models p \approx q$ kaikilla $p \approx q \in \Sigma$. Niitä X:n identiteettejä, jotka ovat tosia luokassa K, voidaan sanoa X:n K-identiteeteiksi ja niille voidaan käyttää merkintää

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{K}}(X) = \{p \approx q \in \mathrm{Id}(X) : \mathrm{K} \models p \approx q\}$$

Symbolia $\not\models$ voidaan käyttää, jos identiteetti ei ole tosi.

Lemma 7.1. *Jos* K *on tyypin* $\mathcal{F}$ *algebrojen luokka, niin samat identiteetit pätevät luokissa* K, I(K), S(K), H(K), P(K) *ja* V(K).

Todistus. Todistetaan ensin, että luokkien I(K), S(K), H(K), P(K) ja V(K) identiteetit pätevät myös luokassa K.

K ja I(K) selvästikin toteuttavat samat identiteetit. Puolestaan koska

$$\mathrm{I} \leq \mathrm{IS},\ \mathrm{I} \leq \mathrm{H},\ \mathrm{I} \leq \mathrm{IP} \text{ ja } \mathrm{I} \leq \mathrm{V}$$

niin

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{S(K)}}(X),\ \mathrm{Id}_{\mathrm{H(K)}}(X),\ \mathrm{Id}_{\mathrm{P(K)}}(X),\ \mathrm{Id}_{\mathrm{V(K)}}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathrm{K}}(X).$$

Todistetaan sitten, että luokan K identiteetti pätee myös luokissa I(K), S(K), H(K), P(K) ja V(K). Osoitetaan ensin, että luokan K identiteetti pätee luokissa (i) S(K), (ii) H(K) ja (iii) P(K).

Oletetaan kohdissa (i), (ii) ja (iii), että

$$\mathrm{K} \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n).$$

(i) Jos $\mathbf{B} \leq \mathbf{A} \in \mathrm{K}$ ja $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{B}$, niin myös $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{A}$. Tällöin pätee

$$p^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Koska $\mathbf{B}$ on $\mathbf{A}$ alialgebra, niin

$$p^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Täten siis

$$\mathbf{B} \models p \approx q.$$

(ii) Oletetaan, että $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ on surjektiivinen homomorfismi, jossa $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$. Jos $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{B}$, niin valitaan $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ siten, että

$$\alpha(a_1) = b_1, \ldots, \alpha(a_n) = b_n.$$

Tällöin

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$$

ja siis

$$\alpha p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \alpha q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$$

ja koska α on homomorfismi, niin

$$p^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Täten

$$\mathbf{B} \models p \approx q.$$

(iii) Oletetaan, että $\mathbf{A}_i \in \mathrm{K}$, missä $i \in I$. Olkoot $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A} = \prod_{i \in I} \mathrm{A}_i$. Tällöin

$$p^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)) = q^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$$

jokaisella $i \in I$. Näin ollen

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)(i) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)(i)$$

kun $i \in I$, joten

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Täten

$$\mathbf{A} \models p \approx q.$$

Lauseen 5.9 perusteella $\mathrm{V} = \mathrm{HSP}$, joten $\mathrm{V}(\mathrm{K}) \models p \approx q$.

□

Identiteetin toteutuminen voidaan myös muotoilla homomorfismin avulla.

Lemma 7.2. *Jos* K *on tyypin* $\mathcal{F}$ *algebrojen luokka ja* $p \approx q$ *on tyypin* $\mathcal{F}$ *identiteetti* X*:n suhteen, niin tällöin*

$$\mathrm{K} \models p \approx q$$

jos ja vain jos jokainen $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ *ja jokainen homomorfismi* $\alpha : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ *toteuttaa ehdon*

$$\alpha p = \alpha q.$$

Todistus. $(\Rightarrow)$ Olkoot $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ ja $q = q(x_1, \ldots, x_n)$. Oletetaan, että $\mathrm{K} \models p \approx q$, $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ ja $\alpha : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ on homomorfismi. Tällöin

$$p^{\mathbf{A}}(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = q^{\mathbf{A}}(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

joten

$$\begin{aligned} &\alpha p^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \ldots, x_n) = \alpha q^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \ldots, x_n) \\ \Rightarrow\ &\alpha p = \alpha q. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Vastakkaisen suunnan todistamiseen valitaan $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ ja $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$. Tekijäalgebran $\mathbf{T}(X)$ universaalin kuvausominaisuuden perusteella on olemassa homomorfismi $\alpha : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ siten, että

$$\alpha x_i = a_i, \text{ kun } 1 \leq i \leq n.$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) &= p^{\mathbf{A}}(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \\ &= \alpha p \\ &= \alpha q \\ &= q^{\mathbf{A}}(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \\ &= q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

Siis $\mathrm{K} \models p \approx q$.

□

Lause 7.3. *Olkoon tyypin* $\mathcal{F}$ *algebrojen luokka* K *ja alkiot* $p, q \in \mathrm{T}(X)$. *Tällöin pätee*

$$\begin{aligned} & \mathrm{K} \models p \approx q \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \models p \approx q \\ \Leftrightarrow\ & \overline{p} = \overline{q} \textit{ voimassa } \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})\textit{:ssä} \\ \Leftrightarrow\ & \langle p, q \rangle \in \theta_{\mathrm{K}}(X). \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$ $\overline{X}$:n suhteen K-vapaa algebra, $p = p(x_1, \ldots, x_n)$, $q = q(x_1, \ldots, x_n)$ ja olkoon ν luonnollinen homomorfismi

$$\nu : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}).$$

Koska lauseen 6.5 perusteella $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \in \mathrm{ISP(K)}$ ja lemman 7.1 perusteella luokkaoperaatiot säilyttävät identiteetit, niin $\mathrm{K} \models p \approx q$ implikoi, että $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \models p \approx q$.

Oletetaan sitten, että $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \models p \approx q$. Tällöin

$$p^{\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = q^{\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$$

siis $\overline{p} = \overline{q}$. Oletetaan sitten $\overline{p} = \overline{q}$ $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})$:ssä. Tällöin

$$\nu(p) = \overline{p} = \overline{q} = \nu(q),$$

siis

$$\langle p, q \rangle \in \ker(\nu) = \theta_{\mathrm{K}}(X).$$

Oletetaan lopuksi, että $\langle p, q \rangle \in \theta_{\mathrm{K}}(X)$. Olkoon $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ ja $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$. Valitaan tällöin $\alpha : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ siten, että $\alpha x_i = a_i$, kun $1 \leq i \leq n$. Koska $\ker(\alpha) \in \Phi_{\mathrm{K}}(X)$, saadaan

$$\ker(\alpha) \supseteq \ker(\nu) = \theta_{\mathrm{K}}(X),$$

josta seuraa homomorfialauseen 4.5 perusteella, että on olemassa homomorfismi $\beta : \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}) \to \mathbf{A}$ siten, että $\alpha = \beta \circ \nu$. Tällöin

$$\alpha(p) = \beta \circ \nu(p) = \beta \circ \nu(q) = \alpha(q)$$

ja tästä seuraa lemman 7.2 perusteella, että

$$\mathrm{K} \models p \approx q.$$

$\square$

Seuraus 7.4. *Oletetaan, että* K *on tyypin* $\mathcal{F}$ *algebrojen luokka ja oletetaan, että* $p, q \in \mathrm{T}(X)$. *Tällöin millä tahansa muuttujien joukolla* Y, *joka toteuttaa ehdon* $|Y| \ \geq |X|$, *pätee*

$$\mathrm{K} \models p \approx q \textit{ joss } \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{Y}) \models p \approx q.$$

Todistus. (⇒) Tämä suunta on selvä, koska lauseen 6.5 perusteella $\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{Y}) \in$ ISP(K).

(⇐) Valitaan $X_0 \supseteq X$ siten, että $|X_0| = |Y|$. Tällöin

$$\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}_0) \cong \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{Y})$$

ja koska

$$\mathrm{K} \models p \approx q \text{ joss } \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}_0) \models p \approx q,$$

niin lauseen 7.3 perusteella

$$\mathrm{K} \models p \approx q \text{ joss } \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{Y}) \models p \approx q.$$

□

Seuraus 7.5. *Oletetaan, että* K *on tyypin* $\mathcal{F}$ *algebrojen luokka ja* X *muuttujajoukko. Tällöin millä tahansa äärettömällä muuttujajoukolla* Y *pätee*

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{K}}(X) = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{Y})}(X).$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $p \approx q \in \mathrm{Id}_{\mathrm{K}}(X)$, missä $p = p(x_1, \ldots, x_n)$, $q = q(x_1, \ldots, x_n)$ ja $p, q \in \mathrm{T}(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Koska $|\{x_1, \ldots, x_n\}| < |Y|$, niin seurauksen 7.4 perusteella saadaan

$$\mathrm{K} \models p \approx q \text{ joss } \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{Y}) \models p \approx q.$$

□

Määritelmä 7.2. Olkoon Σ tyypin $\mathcal{F}$ identiteettijoukko. Määritellään $\mathrm{M}(\Sigma)$ olemaan luokka, joka muodostuu algebroista, jotka toteuttavat Σ:n. Algebrojen luokka K on *identiteettien määrittelemä* (*equational class*), mikäli on olemassa identiteettijoukko Σ, joka toteuttaa ehdon $\mathrm{K} = \mathrm{M}(\Sigma)$. Tällöin sanotaan, että K on Σ:n määrittelemä tai aksiomatisoima.

Lause 7.6. *(Birkhoff).* K *on identiteettien määrittelemä, jos ja vain jos* K *on varisto.*

Todistus. (⇒) Olkoon Σ joukko identiteettejä. Oletetaan, että $\mathrm{K} = \mathrm{M}(\Sigma)$.

Lemman 7.1 perusteella

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}) \models \Sigma,$$

josta seuraa, että

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}) \subseteq M(\Sigma)$$

toisaalta

$$\mathrm{M}(\Sigma) = \mathrm{K},$$

joten

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$$

eli K on varisto.

(⇐) Oletetaan, että K on varisto.

Olkoon

$$\mathrm{K}' = \mathrm{M}(\mathrm{Id}_{\mathrm{K}}(X))$$

Edellisen suunnan perusteella K' on varisto, $\mathrm{K}' \supseteq \mathrm{K}$ ja $\mathrm{Id}_{\mathrm{K}'}(X) = \mathrm{Id}_{\mathrm{K}}(X)$. Lauseen 7.3 perusteella

$$\mathbf{F}_{\mathrm{K}'}(\overline{X}) = \mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X}),$$

joka seuraa siitä, että

$$\theta_{\mathrm{K}'}(X) = \theta_{\mathrm{K}}(X).$$

Nyt millä tahansa äärettömällä muuttujajoukolla Y toteutuu seurauksen 7.5 mukaisesti

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{K}'}(Y) = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}_{\mathrm{K}'}(\overline{X})}(Y) = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{X})}(Y) = \mathrm{Id}_{\mathrm{K}}(Y).$$

Nyt seurauksen 6.3 mukaan jokaiselle $\mathbf{A} \in \mathrm{K}'$ sopivalla Y toteutuu

$$\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathbf{F}_{\mathrm{K}'}(\overline{Y}))$$

ja siis

$$\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathbf{F}_{\mathrm{K}}(\overline{Y})),$$

josta seuraa lauseen 6.5 nojalla, että

$$\mathbf{A} \in \mathrm{HSP}(\mathrm{K}).$$

Täten $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$, joten $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$, $\mathrm{K}' = \mathrm{K}$ ja $\mathrm{K} = \mathrm{M}(\mathrm{Id}_{\mathrm{K}}(X))$. □

Viitteet

[1] Stanley N. Burris & H.P. Sankappanavar *A Course in Universal Algebra*, The Millennium Edition. `http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/UALG/univ-algebra.pdf` (Tarkistettu 30.5.2013)

[2] Wolfgang Wechler *Universal Algebra for Computer Scientists*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[3] Thomas W. Judson *Abstract Algebra: Theory and Applications*, 2012 Annual edition. `http://abstract.ups.edu/download/aata-20120811.pdf` (Tarkistettu 30.5.2013)