TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Maria Kyröläinen

Generoivista funktioista

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Maaliskuu 2013

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

KYRÖLÄINEN, MARIA: Generoivista funktioista

Pro gradu -tutkielma, 58 s.

Matematiikka

Maaliskuu 2013

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa perehdytään generoivien funktioiden menetelmään, missä tarkoituksena on yleensä etsiä eksakti kaava annetulle lukujonolle $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Generoivien funktioiden avulla voidaan myös todistaa kaavojen yhtäpitävyyksiä tai löytää esimerkiksi uusi rekursiivinen tai approksimoitu kaava. Kahdesta lähestymistavasta, muodollisesta ja analyyttisestä, tämän tutkielman lähtökohtana on generoivien funktioiden muodollinen teoria, ja esitellyt generoivat funktiot ovatkin muodollisia potenssisarjoja lukuun ottamatta Dirichlet'n sarjan generoivaa funktiota. Tutkielman tavoitteena on esitellä lukijalle generoivien funktioiden menetelmän perusteet tästä lähtökohdasta, ja antaa välineitä menetelmän käyttöön teorian ja esimerkkien kautta.

Aluksi tutkielmassa esitellään lyhyesti muodollisen potenssisarjan määritelmä ja siihen liittyvää teoriaa. Lisäksi käydään läpi tutkielmassa käytettyjä yleisesti tunnettuja kaavoja. Luvussa 3 esitellään generoivien funktioiden metodin pääperiaatteet ja yleisimmät tavallisen generoivan funktion muodot, eli tavallinen potenssisarjamuotoinen generoiva funktio ja eksponentiaalinen generoiva funktio. Edellisten käyttöä demonstroidaan esimerkkien kautta. Luvussa 4 keskitytään edellisessä luvussa esiteltyjen generoivien funktioiden laskuoppiin ja luvussa 5 esitellään vielä yksi edellisistä eroava generoivan funktion muoto, eli Dirichlet'n sarjan generoiva funktio, sekä tämän laskuoppia.

Päälähteenä tutkielmassa on käytetty Herbert S. Wilfin kirjaa generatingfunctionology.

Aiasanat: muodollinen potenssisarja, generoiva funktio, algebrallinen, Taylorin sarja, Dirichlet'n sarja, suurin yhteinen tekijä, aritmeettinen funktio, multiplikatiivinen funktio, Möbiuksen funktio.

Sisältö

1 Johdanto

Lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ generoivaksi funktioksi kutsutaan potenssisarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Generoiva funktio on apuväline, jonka avulla pyritään yleensä selvittämään lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ alkioille eksakti kaava. Esimerkiksi lukujono $2, 4, 6, 8, \ldots$ voidaan esittää muodossa $a_n = 2n$, kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$, mikä on siis eksakti kaava kyseiselle lukujonolle. Tapauksissa, joissa täsmällistä ja yksinkertaista ratkaisua jonon alkioille ei ole olemassa, voidaan generoivien funktioiden avulla löytää jonolle uusi rekursiivinen tai approksimoitu kaava. Generoivien funktioiden avulla on myös mahdollista todistaa helposti kaavojen yhtäpitävyyksiä tai esimerkiksi jonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ käyttäytymistä indeksin n eri arvoilla.

Generoivien funktioiden menetelmässä on olemassa kaksi lähestymistapaa, muodollinen ja analyyttinen lähestymistapa. Tässä tutkielmassa keskitytään generoivien funktioiden muodolliseen teoriaan, ja analyyttinen teoria sivuutetaan, mutta näitä kahta lähestymistapaa voidaan käyttää osin myös rinnakkain. Muodollisessa lähestymistavassa muuttujan x, tai paremminkin sen potenssien, rooli generoivassa funktiossa $f(x)$ on ainoastaan muodollinen, eikä sen saamilla arvoilla tai sarjan suppenemisella ole merkitystä. Analyyttisessä lähestymistavassa puolestaan muuttujan x oletetaan kuuluvan kompleksilukujen joukkoon, ja sarjan $f(x)$ suppeneminen on keskeisessä roolissa.

Tutkielman luvussa 2 kerrataan lyhyesti tunnettuja summakaavoja, joihin tutkielmassa viitataan usein, sekä perehdytään lyhyesti muodollisten potenssisarjojen teoriaan. Luvussa 3 kuvataan generoivien funktioiden metodi ja tavallisimpien generoivien fuktioiden muodot, sekä käyttöesimerkkejä. Neljäs luku keskittyy generoivien funktioiden laskuoppiin eli laskusääntöihin, niiden käyttöön ja oikean generoivan funktion valintaan. Lopuksi viidennessä luvussa esitellään Dirichlet'n sarjan generoiva funktio lyhyesti, sillä tämä ei ole, toisista läpikäydyistä generoivista poiketen, laisinkaan potenssisarja. Tämän generoivan funktion käyttömahdollisuudet ovat laajat erityisesti kombinatoriikan ja lukuteorian saralla.

Päälähteenä tässä tutkielmassa on käytetty Herbert S. Wilfin kirjaa generatingfunctionology [6], ja tätä teosta tutkielmassa seurataankin pääpiirteittäin. Päälähteen tukena on käytetty edellisen kirjan toista painosta [7], Sergei K. Landon teosta Lectures on Generating Functions [3] ja Martin Aignerin kirjaa A Course in Enumeration [2]. Jos aiheeseen haluaa tutustua syvemmin, voi edellisten lisäksi lisälukemistoksi suositella Aignerin teosta Combinatorial Theory [1] ja Stanleyn teoksia Enumerative Combinatorics Vol. 1 [4] ja Vol. 2 [5]. Lukijalta vaaditaan tiettyä perehtyneisyyttä matematiikan perusteisiin, ja erityisesti algebran ja kombinatoriikan tuntemus on suotavaa. Tarkkuutta vaaditaan osin myös todistusten luvussa, sillä vaikka välivaiheet on merkitty tutkielmassa hyvin yksityiskohtaisesti, ei niitä aina ole selitetty, vaan tehtyjen operaatioiden on oletettu olevan lukijalle itsestään selviä.

2 Valmistelevia tarkasteluja

2.1 Muodollinen potenssisarja

Tässä tutkielmassa käytettyä generoivan funktion muotoa kutsutaan muodolliseksi potenssisarjaksi. Muodollinen potenssisarja on tapa esittää jono $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ toisella tavalla, ja muodollisessa potenssisarjassa $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ termi x^n on vain "paikanmäärittäjä" jonon $(n+1)$. jäsenelle a_n. Muodollisia potenssisarjoja käsitellään puhtaasti algebrallisina objekteina, eikä tällöin tarvitse olla kiinnostunut siitä, millä muuttujan x arvoilla kyseinen sarja suppenee. Yleisesti riittääkin, että tiedetään sarjan suppenevan jollain muuttujan x arvolla, ja operaatiot tai laskutoimitukset voidaan suorittaa siltä pohjalta. Generoivia funktioita voidaan siis käsitellä muodollisten potenssisarjojen renkaassa, ja tätä ominaisuutta käytetäänkin usein tässä tutkielmassa generoivia funktioita käsiteltäessä. Tämän vuoksi tässä alaluvussa käydään läpi joitain muodollisten sarjojen ominaisuuksia ja laskutoimituksia.

Määritelmä 2.1. Lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *muodollinen potenssisarja* $A(x)$ on lauseke

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2.1}$$

Kyseessä on toinen tapa esittää jono $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Siinä termi x^n ilmaisee lukujonon $(n+1)$. jäsenen a_n paikan jonossa. Lisäksi lukujonoa $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ kutsutaan potenssisarjan $A(x)$ *kerroinjonoksi* ja termiä a_0 *vakiotermiksi.*

Käytännöllisyyden vuoksi voidaan kerroinjono määritellä myös negatiivisille indekseille, ja tällöin tietenkin $a_k = 0$ aina, kun $k < 0$. Lisäksi merkitään $a_0 = A(0)$. [2, s. 53]

Muodollisille potenssisarjoille $A(x)$ ja $B(x)$ ja niiden kerroinjonoille $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ pätee seuraava lause, joka on suora seuraus edellisestä määritelmästä:

Lause 2.1. *$A(x) = B(x)$, jos ja vain jos $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$.*

Muodollisten potenssisarjojen yhteen- ja vähennyslaskut sekä tulo määritellään seuraavasti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ missä } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{2.3}$$

Viimeisintä kutsutaan myös *Cauchyn tuloksi.* [6, s. 27–28]

Muodollisella potenssisarjalla $A(x)$ sanotaan olevan *käänteissarja Cauchyn tulon suhteen*, jos on olemassa muodollinen potenssisarja $B(x)$ siten, että $A(x)B(x) = B(x)A(x) = 1$.

Lause 2.2. *Muodollisella potenssisarjalla* $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *on käänteissarja Cauchyn tulon suhteen, jos ja vain jos* $a_0 \neq 0$*. Tällöin tämä käänteissarja on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoon muodollisella potenssisarjalla $A(x)$ käänteissarja $1/A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Tällöin $A(x) \cdot (1/A(x)) = 1$, ja siis kaavan (2.3) mukaan on oltava $A(x) \cdot (1/A(x)) = c_0 = 1 = a_0 b_0$ eli $a_0 \neq 0$, sillä tuloksena saadun sarjan muissa termeissä on tulokaavan perusteella tekijänä myös termi x tai sen jokin potenssi. Lisäksi siis kaavan (2.3) perusteella kaikille $n \geq 1$ pätee $c_n = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$. Irrottamalla edellisestä summasta ensimmäinen termi, vähentämällä puolittain loput summasta, ja vielä jakamalla yhtälö puolittain termillä a_0, saadaan

$$b_n = (-1/a_0) \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_{n-k}, \text{kun } n \geq 1. \tag{2.4}$$

Tämä määrittää käänteissarjan $1/A(x)$ loput termit $b_1, b_2, \ldots$ yksikäsitteisesti. Olkoon sitten $a_0 \neq 0$. Tällöin voidaan määritellä termi b_0 yhtälöstä $c_0 = 1 = a_0 b_0$ ja termit $b_1,\ b_2, \ldots$ yhtälöstä (2.4). Näin saatu sarja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ on muodollisen potenssisarjan $A(x)$ käänteissarja Cauchyn tulon suhteen. [6, s. 28] □

Muodollisten potenssisarjojen $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *kompositio* $A(B(x))$ määritellään seuraavasti:

$$A(B(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (B(x))^n. \tag{2.5}$$

Selvästi kompositio on hyvin määritelty, jos $A(x)$ on polynomi, mutta jos $A(x)$ on ääretön potenssisarja ja $b_0 \neq 0$, on komposition vakiokerroin ääretön summa $a_0 + a_1 b_0 + a_2 {b_0}^2 + \cdots$. Toisaalta, jos on $b_0 = 0$, saadaan termin x^n kerroin, missä $n \geq 0$, kompositiossa lausekkeesta

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (b_1 x + b_2 x^2 \cdots)^k,$$

sillä kun $k > n$, lausekkeessa termin x potenssit ovat aina suurempia kuin n. [2, s. 55]

Edellisestä saadaan suorana seurauksena seuraava lause:

Lause 2.3. *Muodollisten potenssisarjojen* $A(x)$ *ja* $B(x)$ *kompositio* $A(B(x))$ *on hyvin määritelty, jos* $A(x)$ *on polynomi tai* $B(0) = 0$*. [2, s. 55]*

Muodollisella potenssisarjalla $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sanotaan olevan *käänteissarja komposition suhteen*, jos on olemassa muodollinen potenssisarja $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ siten, että $A(B(x)) = B(A(x)) = x$. [6, s. 28]

Lause 2.4. *Olkoot $A(x)$ ja $B(x)$ muodollisia potenssisarjoja siten, että $A(B(x)) = B(A(x)) = x$. Tällöin $A(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots$ ja $B(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots$, missä $a_1, b_1 \neq 0$.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 29]) Olkoot $A(x)$ ja $B(x)$ muodollisia potenssisarjoja siten, että $A(B(x)) = B(A(x)) = x$. Nyt siis $A(x)$ ja $B(x)$ ovat muodollisina potenssisarjoina muotoa $a_rx^r + \cdots$ ja $b_sx^s + \cdots$, missä $r, s \geq 0$. Tällöin on voimassa $A(B(x)) = x = a_rb_s^rx^{rs} + a_rb_{s+1}^rx^{r(s+1)} + \cdots$. Jos nyt olisi $r = 0$ tai $s = 0$, niin saataisiin $A(B(x)) = a_rb_s^r + \cdots$, ja siis tuloksena saadun sarjan ensimmäinen termi olisi vakiotermi ja loput termit sisältäisivät aina x:n jonkin potenssin, eli tällöin olisi $A(B(x)) \neq x$. Siis on oltava $r, s \neq 0$. Jos taas olisi $r \geq 2$ tai $s \geq 2$, niin saataisiin $A(B(x)) = a_rb_s^rx^{rs} + a_rb_{s+1}^rx^{r(s+1)} + \cdots$, missä ensimmäisessä termissä muuttujan x potenssi on vähintään 2, ja siis jälleen olisi $A(B(x)) \neq x$. Siis on oltava $r, s = 1$ eli $A(x) = a_1x+a_2x^2+\cdots$ ja $B(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots$, missä $a_1, b_1 \neq 0$. □

Muodollisen potenssisarjan $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *derivaatta* on sarja $A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$. Derivoinnissa pätevät yleiset laskukaavat, kuten yhteen- ja vähennyslasku sekä tulo ja osamäärä. [6, s. 29]

2.2 Tarvittavia kaavoja

Seuraavia tunnettuja laskukaavoja käytetään paljon tämän tutkielman laskutoimituksissa, ja niihin viitataan usein tekstissä. Koska kyseessä olevat kaavat ovat yleisesti tunnettuja, kaavojen todistuksia ei käydä läpi tässä tutkielmassa. Kaavat ovat

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{2.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1, \tag{2.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k = (x+y)^n, \tag{2.9}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}, \text{ missä } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ja } k \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \binom{2n}{n}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(2n-1)}. \tag{2.11}$$

3 Tavallinen ja eksponentiaalinen generoiva funktio

3.1 Generoivien funktioiden metodi ja tavallinen yhden muuttujan generoiva funktio

Tässä alaluvussa käydään läpi tavallinen generoivan funktion muoto lukujonolle, jonka alkiot ovat yksimuuttujaisia. Lisäksi esitellään generoivien funktioiden metodin käytön pääperiaatteet ja joitain käyttöesimerkkejä.

Määritelmä 3.1. Lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *generoivaksi funktioksi* $A(x)$ kutsutaan muodollista potenssisarjaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{3.1}$$

Generoivan funktion $A(x)$ termin x^n kerroin a_n on siis lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ $(n-1)$. alkio.

Usein käsittelyssä oleva lukujono on ilmoitettu rekursioyhtälönä, ja tällöin generoivien funktioiden menetelmässä ensin muunnetaan rekursioyhtälö valitun generoivan funktion muotoon ja sen termein ilmaistuna, minkä jälkeen ratkaistaan yhtälö generoivalle funktiolle. Näin pyritään löytämään kerroin generoivan funktion termille x^n, eli lukujonon alkio a_n. Menetelmän käyttö tapahtuu seuraavasti:

1. Varmistetaan, että vapaan muuttujan (tässä n) arvot ovat tarkkaan määritellyt.

2. Nimetään käytetty generoiva funktio, ja esitetään se annetun lukujonon termein (esim. olkoon $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$).

3. Kerrotaan rekursioyhtälö puolittain termillä x^n ja summataan puolittain yli indeksin n määrittelyalueen.

4. Esitetään saadun yhtälön molemmat puolet generoivan funktion (tässä $A(x)$) muodossa.

5. Ratkaistaan yhtälö tuntemattomalle generoivalle funktiolle ($A(x)$).

6. Kun halutaan rekursion määräämälle lukujonolle eksakti kaava, on tämä mahdollista saavuttaa laajentamalla generoiva funktio ($A(x)$) potenssisarjaksi esim. käyttämällä osamurtokehitelmää ja kasittelemällä sitten jokainen saatu termi erikseen. [6, s.8]

3.1.1 Helpottavia lauseita

Eksakti kaava haetun lukujonon alkiolle a_n generoivien funktioiden menetelmässä on termin x^n kerroin generoivan funktion $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sarjahajotelmassa. Tässä jakeessa esitellään muutamia lauseita, jotka nopeuttavat työskentelyä generoivien funktioiden parissa. Wilf on kirjassaan esittänyt nämä laskusäännöt toteamalla ne itsestäänselvyyksinä, mutta selkeyden vuoksi tässä tutkielmassa säännöt on esitetty lauseina, ja lauseet todistettu kirjoittajan toimesta.

Lause 3.1. *Olkoon $F(x)$ potenssisarja. Tällöin termin x^n kerroin lausekkeessa $x^a F(x)$ on yhtä kuin termin x^{n-a} kerroin lausekkeessa $F(x)$.*
[6, s. 8]

Todistus. Olkoon b_n termin x^n kerroin lausekkeessa $x^a F(x)$, missä $F(x)$ on potenssisarja. Siis pätee $x^a F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Jaetaan edellinen yhtälö puolittain termillä x^a, jolloin saadaan $F(x) = \frac{1}{x^a} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ja siis $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-a}$. Täten b_n on termin x^{n-a} kerroin potenssisarjassa $F(x)$. □

Lause 3.2. *Olkoon $F(x)$ potenssisarja. Tällöin termin βx^n kerroin potenssisarjassa $F(x)$ on yhtä kuin $1/\beta$ kertaa termin x^n kerroin potenssisarjassa $F(x)$. [6, s. 8]*

Todistus. Olkoon b_n termin βx^n kerroin potenssisarjassa $F(x)$. Siis pätee $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta x^n$ eli $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta b_n x^n$. Nyt siis termin x^n kerroin potenssisarjassa $F(x)$ on βb_n, eli b_n on $1/\beta$ kertaa termin x^n kerroin potenssisarjassa $F(x)$. □

3.1.2 Kahden termin rekursioyhtälö

Esimerkki 3.1. Olkoon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ lukujono, joka toteuttaa ehdon

$$a_{n+1} = 2a_n + n, \text{ missä } n \geq 0 \text{ ja } a_0 = 1. \tag{3.2}$$

Etsitään eksakti kaava jonon alkioille a_n käyttäen generoivien funktioiden menetelmää. Selvästi vapaan muuttujan n arvot ovat tarkkaan määritellyt, joten valitaan generoivaksi funktioksi

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Kerrotaan yhtälö (3.2) puolittain termillä x^n, ja summataan puolittain yli muuttujan n määrittelyalueen, eli $n \geq 0$. Saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n. \tag{3.3}$$

Koska tiedetään, että $a_0 = 1$, ja selvästi on voimassa $x^0 = 1$, yhtälön (3.3) vasenta puolta muokkaamalla saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{x} \\ &= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} \\ &= \frac{1}{x}(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 1 - 1) \\ &= \frac{1}{x}(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + a_0x^0 - 1) \\ &= \frac{1}{x}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 1) \\ &= \frac{1}{x}(A(x) - 1) = \frac{A(x)-1}{x}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Geometrisen sarjan summan (2.7) ja derivaatan määritelmän perusteella saadaan yhtälön (3.3) oikea puoli muokattua muotoon

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n &= 2(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n) + x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= 2(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n) + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}x^n \\ &= 2(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n) + x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 2(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n) + x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \\ &= 2(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n) + x\frac{1}{(1-x)^2} \\ &= 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Tässä kohtaa on huomattavaa, että vaikka edellisen yhtälön tuloksen osana on geometrisen sarjan summan derivaatta, ei kyseisen sarjan suppenemista muuttujan x eri arvoilla tarvitse huolehtia. Tämä johtuu siitä, että generoivat funktiot muodollisina potenssisarjoina voidaan käsitellä niiden renkaassa, kuten on mainittu alaluvussa 2.1. Siis x voidaan ”valita” sopimaan kyseiseen yhtälöön, sillä sen rooli on ainoastaan algebrallinen, eikä muuttujan x arvo näin ollen vaikuta lopputuloksen validiuteen.

Nyt yhdistämällä tulokset (3.4) ja (3.5), saadaan

$$\frac{A(x)-1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2}. \tag{3.6}$$

Kertomalla yhtälö (3.6) puolittain termillä x, vähentämällä puolittain termi $2A(x)x$ ja lisäämällä puolittain luku 1, saadaan

$$A(x) - 2A(x)x = \frac{x^2}{(1-x)^2} + 1. \tag{3.7}$$

Kun yhtälön (3.7) vasemmalta puolelta otetaan tekijäksi $A(x)$ ja jaetaan yhtälö puolittain termillä $1 - 2x$, saadaan ratkaistuksi generoiva funktio

$$A(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2(1-2x)} + \frac{1}{1-2x},$$

ja siis etsitty generoiva funktio $A(x)$ on siistimmässä muodossa

$$A(x) = \frac{1-2x-2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}. \tag{3.8}$$

Nyt haettu jonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ alkio a_i on termin x^i kerroin yhtälön (3.8) potenssisarjahajotelmassa. Ratkaistaan eksplisiittinen kaava osamurtokehitelmän avulla. Yhtälön (3.8) oikea puoli voidaan hajottaa tekijöihinsä seuraavalla tavalla:

$$\frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{(1-x)} + \frac{C}{(1-2x)}. \tag{3.9}$$

Yhtälöstä (3.9) on nyt selvitettävä muuttujien A, B ja C arvot. Ensin kerrotaan yhtälö (3.9) puolittain termillä $(1-x)^2$. Saadaan

$$\frac{(1-x)^2(1-2x+2x^2)}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{(1-x)^2A}{(1-x)^2} + \frac{(1-x)^2B}{(1-x)} + \frac{(1-x)^2C}{(1-2x)}$$

eli

$$\frac{1-2x+2x^2}{(1-2x)} = A + (1-x)B + \frac{(1-x)^2C}{(1-2x)}.$$

Kun tästä ratkaistaan A, saadaan

$$A = \frac{1-2x+2x^2}{(1-2x)} - (1-x)B - \frac{(1-x)^2C}{(1-2x)}.$$

Valitaan sitten $x = 1$. Saadaan

$$A = \frac{1-2+2}{1-2} - (1-1)B - \frac{(1-1)^2C}{1-2}$$

eli $A = -1$. Seuraavaksi kerrotaan yhtälö (3.9) puolittain termillä $(1-2x)$. Saadaan

$$\frac{(1-2x)(1-2x+2x^2)}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{(1-2x)A}{(1-x)^2} + \frac{(1-2x)B}{(1-x)} + \frac{(1-2x)C}{(1-2x)}$$

eli

$$\frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2} = \frac{(1-2x)A}{(1-x)^2} + \frac{(1-2x)B}{(1-x)} + C.$$

Nyt kun valitaan $x = 1/2$, saadaan

$$\frac{1-1+1/2}{(1/2)^2} = \frac{(1-1)A}{(1/2)^2} + \frac{(1-1)B}{1/2} + C,$$

eli $C = 2$. Nyt tarvitsee enää ratkaista B. Koska tiedetään, että $A = -1$ ja $C = 2$, voidaan arvot sijoittaa yhtälöön (3.9). Lisäksi koska yhtälö pätee kaikilla muuttujan x arvoilla, voidaan valita $x = 0$. Saadaan

$$\frac{1-0+0}{(1-0)^2(1-0)} = \frac{-1}{(1-0)^2} + \frac{B}{(1-0)} + \frac{2}{(1-0)},$$

eli $1 = -1 + B + 2$, ja siis $B = 0$. Sijoittamalla ratkaistut $A = -1$, $B = 0$ ja $C = 2$ yhtälöön (3.9), saadaan

$$A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}. \tag{3.10}$$

Nyt koska tuloksen (3.5) perusteella tiedetään, että $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, saadaan

$$\begin{aligned}\frac{-1}{(1-x)^2} &= \frac{-1}{x} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ &= (-1) \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -(n+1)x^n,\end{aligned}$$

ja siis termin x^n kerroin on $-(n+1)$, kun $n \geq 1$. Kaavan (2.7) perusteella puolestaan saadaan

$$\frac{2}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}x^n,$$

eli termin x^n kerroin on 2^{n+1}, kun $n \geq 0$. Kun nämä kaksi tulosta yhdistetään, saadaan

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1, \text{ kun } n \geq 1.$$

Koska ehdon (3.2) perusteella tiedetään, että $a_0 = 1$, niin edellinen pätee myös, kun $n = 0$, eli saadaan

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1, \text{ kun } n \geq 0. \tag{3.11}$$

[6, s. 5–7]

3.1.3 Kolmen termin rekursioyhtälö

Esimerkki 3.2. Ratkaistaan Fibonaccin lukujono käyttäen generoivien funktioiden menetelmää. Olkoon siis

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ missä } n \geq 1, \text{ ja } F_0 = 0, F_1 = 1. \tag{3.12}$$

Valitaan generoivaksi funktioksi

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

ja etsitään lauseke funktiolle $F(x)$. Kerrotaan yhtälö (3.12) puolittain termillä x^n ja summataan yli $n \geq 1$. Saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n. \tag{3.13}$$

Muokkaamalla yhtälön (3.13) vasenta puolta, saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+1} x^{n+1}}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\
&= \frac{1}{x} \left((\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n + x) - x \right) \\
&= \frac{1}{x} (\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - x) = \frac{1}{x}(F(x) - x).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Yhtälön (3.13) oikeaa puolta muokkaamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x F_{n-1} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= F(x) + xF(x).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Yhdistämällä tulokset (3.14) ja (3.15), saadaan

$$\frac{1}{x}(F(x) - x) = F(x) + xF(x). \tag{3.16}$$

Kun yhtälö (3.16) kerrotaan puolittain termillä x, vähennetään puolittain termeillä $xF(x)$ ja $x^2F(x)$, sekä lisätään yhtälöön puolittain termi x, saadaan

$$-x^2F(x) - xF(x) + F(x) = x.$$

Kun edellisestä otetaan vasemmalta puolen tekijäksi $F(x)$, ja jaetaan yhtälö puolittain termillä $1 - x - x^2$, saadaan

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{3.17}$$

Jotta etsityille Fibonaccin luvuille saadaan eksplisiittinen kaava, hajotetaan $x/(1-x-x^2)$ osamurtokehitelmän avulla. Ensin haetaan nimittäjän nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, eli saadaan

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = (1 \pm \sqrt{5})/-2.$$

Merkitään $r_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $r_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, jossa siis $-r_-$ ja $-r_+$ ovat lausekkeen $x/(1-x-x^2)$ nimittäjän nollakohdat. Nyt huomataan, että $r_+ \cdot r_- = -1$. Saadaan

$$1-x-x^2 = -(x-(-r_+))(x-(-r_-)) = -(r_++x)(r_-+x) = (-r_+-x)(r_-+x).$$

Otetaan näin saadun tuloksen ensimmäisistä sulkeista tekijäksi $1/r_-$ ja toisista $1/r_+$. Saadaan

$$\begin{aligned}(-r_+-x)(r_-+x) &= \frac{1}{r_-}(r_- \cdot (-r_+) + x \cdot r_-) \cdot \frac{1}{r_+}(r_+ \cdot r_- + x \cdot r_+)\\ &= \frac{1}{r_- \cdot r_+}(1-xr_-)(-1+xr_+)\\ &= -1(1-xr_-)(-1+xr_+)\\ &= (1-xr_-)(1-xr_+).\end{aligned}$$

Nyt siis

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-xr_-)(1-xr_+)}. \tag{3.18}$$

Koska $r_+ - r_- = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, saadaan yhtälö (3.18) muotoon

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)}\\ &= \frac{1}{r_+-r_-}\left(\frac{x(r_+-r_-)}{(1-xr_+)(1-xr_-)}\right)\\ &= \frac{1}{r_+-r_-}\left(\frac{xr_+-xr_- -1+1}{(1-xr_+)(1-xr_-)}\right)\\ &= \frac{1}{r_+-r_-}\left(\frac{(1-xr_-)-(1-xr_+)}{(1-xr_+)(1-xr_-)}\right)\\ &= \frac{1}{r_+-r_-}\left(\frac{1-xr_-}{(1-xr_+)(1-xr_-)} - \frac{1-xr_+}{(1-xr_+)(1-xr_-)}\right)\\ &= \frac{1}{r_+-r_-}\left(\frac{1}{1-xr_+} - \frac{1}{1-xr_-}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-xr_+} - \frac{1}{1-xr_-}\right).\end{aligned}$$

Geometrisen summan kaavan (2.7) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-xr_+}-\frac{1}{1-xr_-}\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{j=0}^{\infty} r_+^j x^j - \sum_{j=0}^{\infty} r_-^j x^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^j - r_-^j)x^j.\end{aligned}$$

Tästä nähdään helposti, että haettu eksakti kaava Fibonaccin luvuille F_n, eli termin x^n kerroin generoivassa funktiossa $F(x)$, on

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n), \text{ missä } n \geq 0. \tag{3.19}$$

Lisäksi nähdään, että koska $r_+ \sim 1,618$ ja $r_- \sim -0,618$, eli $|r_+| > 1$ ja $|r_-| < 1$, saadaan että kun $n \to \infty$, niin $|r_-|^n \to 0$. Suurella indeksin n arvolla hyvä likiarvo luvulle F_n on siis

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{3.20}$$

Itse asiassa, kun $n \geq 2$, niin $|r_-|^n < 0,5$, joten kun vastaus pyöristetään lähimpään kokonaislukuun, antaa (3.20) täsmälleen oikean ratkaisun Fibonaccin luvuille F_n. [7, s. 8–10]

On myös hyvä huomata, että edellä käytetty geometrisen sarjan summan kaava (2.7) pätee vain, kun $|q| < 1$, eli tässä tapauksessa, kun $|r_+x| < 1$ ja $|r_-x| < 1$. Koska muuttujan x rooli on muodollinen ja operaatiot tehdään muodollisten potenssisarjojen renkaassa, niin aivan kuten edellisessä esimerkissä, riittää tieto, että on olemassa ”sopiva” muuttujan x arvo, ja laskutoimitukset voidaan suorittaa loppuun tämän tiedon pohjalta.

3.1.4 Kolmen termin rekursio reuna-arvoilla

Kolmen termin rekursio, jossa alkuarvoina on annettu rekursion reuna-arvot, eroaa edellisestä esimerkistä siinä, että rekursion avulla ei voida suoraan laskea haetun lukujonon jäsenien arvoja. Reuna-arvot silti määrittelevät jonon yksiselitteisesti. Generoivien funktioiden menetelmä tarjoaa tähän ratkaisun.

Esimerkki 3.3. Olkoon

$$ay_{n+1} + by_n + cy_{n-1} = d_n, \text{ missä } 1 \leq n \leq N-1 \text{ ja } y_0 = y_N = 0. \tag{3.21}$$

Lisäksi kokonaisluku N, vakiot a, b ja c, sekä jono $(d_n)_{n=1}^{N-1}$, ovat ennalta annettuja.

Määritellään generoiva funktio $Y(x) = \sum_{n=0}^{N} y_n x^n$ ja ennalta tunnettu $D(x) = \sum_{n=1}^{N-1} d_n x^n$. Kerrotaan yhtälö (3.21) puolittain termillä x^n ja summataan yli muuttujan n määrittelyalueen, eli $1 \leq n \leq N-1$. Saadaan

$$a\sum_{n=1}^{N-1} y_{n+1}x^n + b\sum_{n=1}^{N-1} y_n x^n + c\sum_{n=1}^{N-1} y_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{N-1} d_n x^n. \tag{3.22}$$

Yhtälön (3.22) oikea puoli voidaan suoraan esittää generoivan funktion $D(x)$ muodossa, joten muokataan yhtälön vasenta puolta. Koska pätee $y_0 = y_N = 0$, saadaan

$$
\begin{aligned}
&a\sum_{n=1}^{N-1} y_{n+1}x^n + b\sum_{n=1}^{N-1} y_n x^n + c\sum_{n=1}^{N-1} y_{n-1}x^n \\
=&a\sum_{n=1}^{N-1} \frac{y_{n+1}x^{n+1}}{x} + b\sum_{n=0}^{N} y_n x^n + c\sum_{n=1}^{N-1} x\cdot y_{n-1}x^{n-1} \\
=&\frac{a}{x}\sum_{n=1}^{N-1} y_{n+1}x^{n+1} + bY(x) + cx\sum_{n=1}^{N-1} y_{n-1}x^{n-1} \\
=&\frac{a}{x}\sum_{n=2}^{N} y_n x^n + bY(x) + cx\sum_{n=0}^{N-2} y_n x^n \\
=&\frac{a}{x}\left(\sum_{n=2}^{N} y_n x^n + y_1 x - y_1 x\right) + bY(x) \\
+&cx\left(\sum_{n=0}^{N-2} y_n x^n + y_{N-1}x^{N-1} - y_{N-1}x^{N-1}\right) \\
=&\frac{a}{x}\left(\sum_{n=0}^{N} y_n x^n - y_1 x\right) + bY(x) + cx\left(\sum_{n=0}^{N} y_n x^n - y_{N-1}x^{N-1}\right) \\
=&\frac{a}{x}\left(Y(x) - y_1 x\right) + bY(x) + cx\left(Y(x) - y_{N-1}x^{N-1}\right).
\end{aligned}
$$

Nyt siis

$$\frac{a}{x}\left(Y(x) - y_1 x\right) + bY(x) + cx\left(Y(x) - y_{N-1}x^{N-1}\right) = D(x),$$

eli saadaan

$$\frac{a}{x}Y(x) - ay_1 + bY(x) + cxY(x) - cy_{N-1}x^N = D(x). \tag{3.23}$$

Kun lisätään yhtälöön (3.23) puolittain lauseke $(ay_1 + cy_{N-1}x^N)$, ja kerrotaan yhtälö puolittain termillä x, saadaan

$$(a + bx + cx^2)Y(x) = x(D(x) + ay_1 + cy_{N-1}x^N). \tag{3.24}$$

Nyt tuntemattoman generoivan funktion $Y(x)$ ratkaisemiseksi on vielä selvitettävä tuntemattomat vakiot y_1 ja y_{N-1}. Yhtälön (3.24) vasemman puolen polynomilla on toisen asteen polynomina kaksi nollakohtaa, olkoot nämä r_+ ja r_-. Jos $r_+ \neq r_-$, voidaan kumpikin arvo sijoittaa vuorollaan yhtälöön (3.24), jolloin yhtälön vasen puoli on yhtä kuin 0, ja oikealle puolelle saadaan puolittain jakamisen jälkeen sulkeiden sisäpuolinen osa. Saadaan siis yhtälöpari

$$\begin{cases} ay_1 + (cr_+^N)y_{N-1} = -D(r_+) \\ ay_1 + (cr_-^N)y_{N-1} = -D(r_-) \end{cases}. \tag{3.25}$$

Kun yhtälöistä ratkastaan ensin $-ay_1$, saadaan tulokset yhdistämällä

$$(cr_+^N)y_{N-1} + D(r_+) = (cr_-^N)y_{N-1} + D(r_-)$$

eli

$$y_{N-1} = \frac{D(r_-) - D(r_+)}{c(r_+^N - r_-^N)}. \tag{3.26}$$

Kun taas yhtälöparista ratkaistaan $-cy_{N-1}$, saadaan

$$\frac{ay_1 + D(r_+)}{r_+^N} = \frac{ay_1 + D(r_-)}{r_-^N}$$

eli

$$y_1 = \frac{D(r_-)r_+^N - D(r_+)r_-^N}{a(r_-^N - r_+^N)}. \tag{3.27}$$

Sijoittamalla tulokset (3.26) ja (3.27) yhtälöön (3.24), saadaan ratkaistua generoiva funktio $Y(x)$. [6, s.10–12]

Erityistapauksessa, missä yhtälön (3.24) polynomin $a+bx+cx^2$ nollakohdaksi saadaan kaksoisjuuri $r = r_+ = r_-$, ei lukujonon $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ jäsenille löydy yksikäsitteistä kaavaa, sillä tällöin generoivan funktion $Y(x)$ yhtälön toteuttavat kaikki suoralla $ay_1 + (cr^N)y_{N-1} = -D(r)$ sijaitsevat pisteet (y_1, y_{N-1}). Siis ei löydy yksikäsitteistä generoivaa funktiota $Y(x)$, eikä näin ollen saada ratkaistua yksikäsitteistä eksplisiittistä kaavaa lukujonon alkioille.

3.2 Tavallinen kahden muuttujan generoiva funktio

Tavallista kahden muuttujan generoivaa funktiota käytetään silloin, kun käsitellään lukujonoa, jonka alkiot ovat kaksimuuttujaisia. Tällöin lukujono on muotoa $(a_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$ ja funktiomuodossa ilmaistuna $f(m,n)$, missä $m, n \geq 0$, ja m ja n kuuluvat tietenkin kokonaislukuihin. Tässä alaluvussa käydään läpi tavallisen kahden muuttujan generoivan funktion muoto, käyttö ja esimerkkejä. Lisäksi tässä tutkielmassa käytetään kaksimuuttujaisten lukujonojen funktiomuotoista esitysmallia.

Määritelmä 3.2. Lukujonon $(x_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$ *generoiviksi funktioiksi* $F(x,y)$, $G_n(y)$ ja $H_m(x)$ kutsutaan muodollisia potenssisarjoja

$$\sum_{n,m} f(m,n)x^n y^m, \tag{3.28}$$

$$\sum_{m} f(m,n)y^m, \text{ missä } n \in \mathbb{Z} \text{ ja} \tag{3.29}$$

$$\sum_{n} f(m,n)x^n, \text{ missä } m \in \mathbb{Z}. \tag{3.30}$$

Huomattavaa on, että määritelmässä (3.2) $G_n(y)$ ja $H_m(x)$ ovat generoivien funktioiden perheitä. Lisäksi, jos summattavan muuttujan summausaluetta ei ole erikseen määritelty, oletetaan että summaus tapahtuu yli kokonaislukujen. [6, s.13–14]

3.2.1 Binomikerroin

Binomikerroin $\binom{n}{m}$ on n-alkioisen joukon m-alkioisten osajoukkojen lukumäärä. Merkitään tässä yhteydessä joukkoa $\{1, 2, ..., n\}$ symbolilla $[n]$. Nyt siis $\binom{n}{m}$ on joukon $[n]$ m-kombinaatioiden lukumäärä. Binomikertoimelle on olemassa kaava, joka nyt esimerkin vuoksi johdetaan generoivien funktioiden menetelmän avulla.

Esimerkki 3.4. Olkoon $f(n, m)$ binomikertoimen $\binom{n}{m}$ funktio. Funktio $f(n, m)$ on järkevä ainoastaan silloin, kun $n, m \geq 0$. Selvästi $f(0, 0) = 1$ on voimassa, sillä tyhjällä joukolla on vain yksi 0 alkiota sisältävä osajoukko, eli itsensä. Lisäksi jos $m > n$, niin $f(n, m) = 0$, sillä joukosta ei voi ottaa itseään suurempaa osajoukkoa. Jotta funktio olisi määritelty kaikille kokonaisluvuille, määritellään $f(n, m) = 0$, kun $n < 0$ tai $m < 0$.

Seuraavaksi etsitään rekursio, joka on voimassa funktiolle $f(n, m)$. Valitaan mielivaltaiset positiiviset kokonaisluvut n ja m siten, että $n \geq m$. Muodostetaan kaikki joukon $[n]$ m-kombinaatiot. Näitä on $f(n, m)$ kappaletta. Jaetaan muodostetut m-kombinaatiot kahteen ryhmään. Toiseen ryhmään laitetaan ne m-kombinaatiot, jotka sisaltävät joukon $[n]$ suurimman luvun n, ja toiseen ne n-kombinaatiot, jotka eivät sisällä lukua n.

Ensimmäisessä ryhmässä ovat nyt kaikki ne m-kombinaatiot, jotka sisältävät luvun n. Nyt jos ryhmän joukoista poistetaan alkio n, tulee ryhmän alkioista joukon $[n-1]$ $(m-1)$-kombinaatioita. Lisäksi tässä ovat kaikki joukon $[n-1]$ $(m-1)$-kombinaatiot, sillä jos olisi olemassa vielä jokin tähän ryhmään kuulumaton joukon $[n-1]$ $(m-1)$-kombinaatio, niin lisäämällä kombinaatioon luku n, saadaan joukon $[n]$ m-kombinaatio, mikä on ristiriita sen kanssa, että alunperin ryhmässä olivat kaikki joukon $[n]$ m-kombinaatiot. Siis ensimmäisen ryhmän m-kombinaatioiden lukumäärä on $f(n-1, m-1)$.

Toisessa ryhmässä puolestaan ovat kaikki ne joukon $[n]$ m-kombinaatiot, jotka eivät sisällä lukua n. Nämä ovat siis joukon $[n-1]$ m-kombinaatioita. Jälleen tässä ryhmässä on oltava kaikki joukon $[n-1]$ m-kombinaatiot, sillä jos olisi olemassa tähän ryhmään kuulumaton joukon $[n-1]$ m-kombinaatio, olisi se selvästi myös yksi joukon $[n]$ m-kombinaatioista, joka ei sisällä lukua n, mikä on ristiriita sen kanssa, että ryhmään kuuluvat kaikki tällaiset m-kombinaatiot. Toisen ryhmän m-kombinaatioiden lukumäärä on siis $f(n-1, m)$.

Nyt koska kaikki joukon $[n]$ m-kombinaatiot ovat jommassakummassa ryhmässä, saadaan

$$f(n, m) = f(n-1, m) + f(n-1, m-1), \text{ missä } 1 \leq m < n. \tag{3.31}$$

Katsotaan, päteekö rekursio myös muille n:n ja m:n arvoille. Jos $m = n$, niin yhtälön (3.31) vasen puoli on yhtä kuin 1 ja oikea puoli on yhtä kuin $0+1 = 1$. Eli yhtälö pätee, kun $m = n$. Kun taas $m > n$, yhtälön molemmat puolet ovat yhtä kuin 0, joten yhtälö pätee, kun $m, n \geq 1$. Jos $m < 0$ tai $n < 0$, yhtälön molemmat puolet ovat yhtä kuin 0, eli yhtälö (3.31) pätee myös negatiivisille kokonaisluvuille. Tapauksessa, jossa $m = 0$ ja $n > 0$, yhtälön molemmat puolet ovat yhtä kuin 1. Jos taas $m = 0$ ja $n < 0$, molemmat puolet ovat yhtä kuin 0. Päinvastaisessa tilanteessa, eli kun $n = 0$ ja $m \neq 0$, yhtälön molemmat puolet ovat yhtä kuin 0. Ainoastaan, kun $n = 0$ ja $m = 0$, yhtälö ei päde, sillä tällöin vasen puoli on yhtä kuin 1 ja oikea puoli yhtä kuin 0. Yhteenvetona yhtälö (3.31) saadaan näin ollen muotoon

$$\begin{aligned} f(n,m) =& f(n-1,m) + f(n-1,m-1), \\ & \text{missä } (n,m) \neq (0,0) \text{ ja } f(0,0) = 1. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Nyt on enää löydettävä yhtälön ratkaisu generoivien funktioiden avulla. Tässä tapauksessa voidaan käyttää mitä tahansa määritelmän (3.2) generoivista funktioista, joten esimerkin vuoksi ratkaistaan yhtälö käyttämällä näitä kaikkia vuorotellen.

Ratkaistaan rekursioyhtälö (3.32) käyttäen generoivaa funktiota (3.28) eli $F(x,y) = \sum_{n,m} f(n,m)x^n y^m$. Kerrotaan ensin yhtälö (3.32) puolittain termillä $x^n y^m$ ja summataan yli lukuparin $(n,m) \neq (0,0)$. Saadaan

$$\sum_{n,m} f(n,m)x^n y^m =$$
$$\sum_{n,m} f(n-1,m)x^n y^m + \sum_{n,m} f(n-1,m-1)x^n y^m, \ (n,m) \neq (0,0)$$

eli

$$\sum_{n,m} f(n,m)x^n y^m + 1 - 1 = \tag{3.33}$$
$$\sum_{n,m} f(n-1,m)x^n y^m + 0 + \sum_{n,m} f(n-1,m-1)x^n y^m + 0, \ (n,m) \neq (0,0).$$

Koska $f(0,0) \cdot x^0 y^0 = 1$, $f(-1,0) \cdot x^0 y^0 = 0$ ja $f(-1,-1) \cdot x^0 y^0 = 0$, yhtälö (3.33) saadaan muotoon

$$F(x,y) - 1 = \sum_{n,m} f(n-1,m)x^n y^m + \sum_{n,m} f(n-1,m-1)x^n y^m. \tag{3.34}$$

Otetaan yhtälön (3.34) oikean puolen ensimmäisestä summasta x summan ulkopuolelle ja nimetään n uudelleen $n = r + 1$. Samoin otetaan toisesta summasta xy summan ulkopuolelle ja nimetään $n = r+1$ ja $m = s+1$. Koska summat ovat yli kokonaislukujen, ei tarvitse huolehtia ylä- tai alarajojen muutoksista uudelleennimeämisissä. Saadaan

$$F(x,y) - 1 = x \sum_{r+1,m} f(r,m)x^r y^m + xy \sum_{r+1,s+1} f(r,s)x^r y^s$$

eli

$$F(x,y) - 1 = x\sum_{r,m} f(r,m)x^r y^m + xy\sum_{r,s} f(r,s)x^r y^s$$

ja siis

$$F(x,y) - 1 = xF(x,y) + xyF(x,y). \tag{3.35}$$

Yhtälöstä (3.35) on helppoa ratkaista $F(x,y)$, ja saadaan siis

$$F(x,y) = \frac{1}{1-x-xy}. \tag{3.36}$$

Nyt $f(x,y)$ on termin $x^n y^m$ kerroin generoivan funktion $F(x,y)$ sarjahajotelmassa.

Ratkaistaan seuraavaksi rekursio (3.32) käyttäen generoivien funktioiden muotoa (3.29), eli funktioperhettä $G_n(y) = \sum_m f(n,m)y^m$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Valitaan siis kokonaisluku $n \neq 0$, lisätään yhtälöön (3.32) puolittain termi y^m, ja summataan yhtälö puolittain yli muuttujan m määrittelyalueen, eli kokonaislukujen. Saadaan

$$\sum_m f(n,m)y^m = \sum_m f(n-1,m)y^m + \sum_m f(n-1,m-1)y^m, \text{ missä } n \neq 0.$$

Kun edellisessä otetaan oikean puolen jälkimmäisestä summasta y summan ulkopuolelle, saadaan

$$G_n(y) = G_{n-1}(y) + yG_{n-1}(y), \text{ missä } n \neq 0. \tag{3.37}$$

Yhtälöstä (3.37) nähdään, että jokainen $G_n(y)$ on $(1+y)$ kertaa edeltävä $G_{n-1}(y)$. Nyt $G_0(y) = 1$, sillä $f(0,0)y^0 = 1$, ja $f(0,m) = 0$ on voimassa aina, kun $m \neq 0$. Lisäksi selvästi $G_n(y) = 0$, kun $n < 0$. Saadaan näin ollen

$$G_n(y) = (1+y)^n, \text{ kun } n \geq 0. \tag{3.38}$$

Nyt siis $f(n,m)$ on termin y^m kerroin lausekkeen $(1+y)^n$ sarjahajotelmassa.

Viimeisenä ratkaistaan vielä rekursioyhtälö (3.32) käyttäen generoivien funktioiden muotoa (3.30), eli funktioperhettä $H_m(x) = \sum_n f(n,m)x^n$, missä $m \in \mathbb{Z}$. Jälleen valitaan kokonaisluku $m \neq 0$, lisätään yhtälöön (3.32) puolittain termi x^n, ja summataan puolittain yli muuttujan n määrittelyalueen, eli kokonaislukujen. Saadaan

$$\sum_n f(n,m)x^n = \sum_n f(n-1,m)x^n + \sum_n f(n-1,m-1)x^n, \text{ missä } m \neq 0.$$

Kun edellisessä otetaan molemmista oikean puolen summista x summan ulkopuolelle ja huomataan, että koska n summataan yli kokonaislukujen, summan indeksointia voidaan muuttaa vapaasti, saadaan

$$H_m(x) = xH_m(x) + H_{m-1}(x), \text{ missä } m \neq 0.$$

Kun tästä vähennetään puolittain termi $xH_m(x)$ ja jaetaan sitten puolittain termillä $(1-x)$, saadaan

$$H_m(x) = \frac{x}{1-x} H_{m-1}(x), \text{ missä } m \geq 1. \tag{3.39}$$

Edellisessä ehto $m \geq 1$ saadaan ehdosta $m \neq 0$ ja siitä, että $H_m(x) = 0$, kun $m < 0$, sillä $f(n,m) = 0$ aina, kun $m < 0$. Ratkaistaan vielä $H_0(x)$. Kaavan (2.7) perusteella, ja koska $f(n,0) = 1$, kun $n \geq 0$, ja koska $f(n,0) = 0$, kun $n < 0$, saadaan

$$H_0 = \sum_n f(n,0)x^n = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{3.40}$$

Nyt yhdistämällä tulokset (3.39) ja (3.40), saadaan

$$H_m(x) = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\ , \text{ kun } m \geq 0, \tag{3.41}$$

ja siis $f(n,m)$ on termin x^n kerroin lausekkeen $\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$ sarjahajotelmassa, eli lauseen 3.1 perusteella termin x^{n-m} kerroin lausekkeessa $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{m+1}$.
[6, s. 15]

Edellisen esimerkin 3.4 tapauksessa saatiin kolme erilaista generoivaa funktiota vastaukseksi. Täsmällinen ratkaisu kerroinjonon alkioille saadaan käyttämällä *Taylorin sarjaa*

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(0), \text{ missä } n \geq 0, \tag{3.42}$$

mitä kutsutaan myös *Maclaurinin sarjaksi.* Kaava (3.42) antaa ratkaisun jonolle $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kun halutaan esittää tunnettu funktio $f(x)$ muodossa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Kaavan käyttö vaatii tietysti sen, että $f(x)$ on jatkuvasti derivoituva, ja sen, ettei toistuva derivointi käy liian hankalaksi suorittaa.

Esimerkin 3.4 kohdalla Taylorin sarja toimii täydellisesti, sillä tapauksessa (3.41) saadaan

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}}\right) &= \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{(1-x)^{m+n+1}} \\ &= \frac{(m+n)!}{m!(1-x)^{m+n+1}}, \text{ missä } n \geq 0,\end{aligned}$$

ja siis saadaan

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{(m+n)!}{m!1^{m+n+1}} = \frac{(m+n)!}{m!n!}, \text{ missä } m, n \geq 0.$$

Tämä tarkoittaa, että a_n on termin x^n kerroin lausekkeen $\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$ sarjahajotelmassa, eli

$$\text{(3.43)} \qquad \frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} x^n, \text{ missä } m \geq 0.$$

Siis haettu termin x^{n-m} kerroin, eli $f(n,m)$, on

$$a_{n-m} = \frac{1}{(n-m)!} \cdot \frac{(m+n-m)!}{m!1^{m+n-m+1}} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ missä } n, m \geq 0.$$

Saadaan siis

$$\text{(3.44)} \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ missä } n, m \geq 0.$$

Vastaavasti löydetään kaava tapauksessa (3.38), missä generoivasta funktiosta $G_n(y) = (1+y)^n$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (1+y)^n &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(1+y)^{n-m}}{m!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)!(1+y)^{n-m}}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{n!(1+y)^{n-m}}{m!(n-m)!}, \text{ missä } n, m \geq 0. \end{aligned}$$

Tällöin siis termin y^m kerroin generoivan funktion $G_n(y)$ sarjahajotelmassa on

$$a_m = \frac{n!(1+0)^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ missä } n, m \geq 0.$$

Tapauksessa (3.36) generoiva funktio $\mathrm{F}(x, y)$ saadaan ensin geometrisen sarjan summan kaavan (2.7) perusteella muokattua muotoon

$$F(x,y) = \frac{1}{1-x-xy} = \sum_{r=0}^{\infty} (x+xy)^r = \sum_{r=0}^{\infty} x^r (1+y)^r.$$

Etsitty vastaus $f(n,m)$ on siis termin $x^n y^m$ kerroin lausekkeessa $\sum_{r=0}^{\infty} x^r(1+y)^r$ eli termin y^m kerroin lausekkeen $(1+y)^n$ sarjakehitelmässä, mistä palataan suoraan edellisen tapauksen ratkaisuun. [6, s. 16–17]

3.2.2 Stirlingin toiset luvut

Joukon S *ositus* tai *ekvivalenssirelaatio* on kokoelma joukon S epätyhjiä, pareittain erillisiä osajoukkoja, joiden yhdiste on joukko S. Osituksen sisältämiä joukkoja kutsutaan osituksen *luokiksi*. Esimerkiksi yksi joukon [5] ositus on $\{123\}\{4\}\{5\}$. Tässä osituksessa on kolme luokkaa, joista yhdessä ovat luvut 1, 2 ja 3, toisessa vain luku 4 ja viimeisessä luku 5. Luokkien tai niiden sisältämien alkioiden järjestyksellä ei ole väliä, vain se, mitkä alkiot kuuluvat mihinkin luokkaan, merkitsee. [6, s. 17]

Esimerkki 3.5. Joukon [5] kaikki ositukset kahteen luokkaan ovat:

$$\{12\}\{345\}; \{13\}\{245\}; \{14\}\{235\}; \{123\}\{45\}; \{124\}\{35\}; \{134\}\{25\};$$
$$\{1\}\{2345\}; \{125\}\{34\}; \{135\}\{24\}; \{145\}\{23\}; \{1234\}\{5\}; \{1235\}\{4\};$$
$$\{1245\}\{3\}; \{1345\}\{2\}; \{15\}\{234\}.$$

Joukon [5] osituksia kahteen luokkaan on siis täsmälleen 15 kappaletta.

Joukon $[n]$ ositusten lukumäärää k:hon luokkaan kutsutaan *Stirlingin toisiksi luvuiksi* ja merkitään $\left\{ n \atop k \right\}$. Edellisessä esimerkissä $\left\{ 5 \atop 2 \right\} = 15$.

Esimerkki 3.6. Etsitään eksplisiittinen kaava Stirlingin toisille luvuille $\left\{ n \atop k \right\}$ käyttäen generoivien funktioiden metodia. Muodostetaan ensin rekursiokaava luvuille $\left\{ n \atop k \right\}$.

Valitaan mielivaltaiset positiiviset kokonaisluvut n ja k. Kaikkia joukon $[n]$ osituksia k:hon luokkaan on $\left\{ n \atop k \right\}$ kappaletta. Jaetaan nämä ositukset kahteen osaan; ensimmäiseen ryhmään laitetaan kaikki ne ositukset, missä luku n on yksinään omassa luokassaan, ja toiseen ryhmään kaikki loput ositukset, eli ositukset, missä luokassa on vähintään yksi luku luvun n lisäksi.

Nyt ensimmäisessä ryhmässä luku n on aina luokassa yksinään jokaisessa ryhmän osituksessa. Jos ryhmän kaikista osituksista poistetaan tämä luokka, selvästi ryhmään jäävät kaikki joukon $[n-1]$ ositukset $(k-1)$:een luokkaan, eli tässä ryhmässä osituksia on $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$ kappaletta. Lisäksi tässä todellakin ovat kaikki joukon $[n-1]$ ositukset $(k-1)$:een luokkaan, sillä jos olisi vielä tällainen joukon $[n-1]$ ositus, joka ei kuulu kyseiseen ryhmään, niin jos tähän ositukseen lisättäisiin luokka, jossa luku n on yksinään, tulisi siitä joukon $[n]$ ositus k:hon luokkaan, missä n on omana luokkanaan. Tämä on ristiriita sen kanssa, että alunperin tässä ryhmässä olivat kaikki tällaiset joukon $[n]$ ositukset.

Toisessa ryhmässä puolestaan luku n on luokassaan aina vähintään yhden muun luvun kanssa. Näin ollen, jos luku n poistetaan osituksissa omasta luokastaan, ei osituksissa luokkien määrä muutu, vaan käsitellään yhä osituksia k:hon luokkaan, mutta ositettava joukko on nyt $[n-1]$. Tällä kertaa kuitenkin luku n on voinut olla missä tahansa kunkin osituksen k:sta luokasta, joten kun luku n poistetaan osituksista, jää ryhmään identtisiä osituksia aina k kappaletta kutakin. Tässä ryhmässä on siis osituksia $k\left\{ n-1 \atop k \right\}$ kappaletta.

Nyt alkuperäinen ryhmä $\left\{ n \atop k \right\}$ kappaletta osituksia on jaettu kahteen ryhmään, joissa osituksia on $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$ ja $k\left\{ n-1 \atop k \right\}$ kappaletta. Saadaan siis rekursioyhtälö

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k\left\{ n-1 \atop k \right\}.$$

Jotta yhtälö olisi hyvin määritelty, määritellään $\left\{ n \atop k \right\}$ kaikille kokonaisluvuille. Määritellään siis $\left\{ n \atop k \right\} = 0$, kun $k > n$ tai, kun $n < 0$ tai $k < 0$. Lisäksi määritellään $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$, kun $n \neq 0$, ja $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$. Näin edellinen rekursioyhtälö pätee aina, kun $(n,k) \neq (0,0)$. Saadaan

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}, \text{ kun } (n,k) \neq (0,0); \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1. \tag{3.45}$$

Seuraavaksi on löydettävä generoivat funktiot. Mahdolliset kandidaatit ovat

$$\begin{aligned} A_n(y) &= \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} y^k, \\ B_k(x) &= \sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n \text{ ja} \\ C(x,y) &= \sum_{n,k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n y^k. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Jos nyt valittaisiin generoivaksi funktioksi $A_n(y)$, olisi yhtälön (3.45) puolittain kertomisen ja summaamisen jälkeen käsittelyssä yksi lausekkeen osa muotoa $\sum_k k\left\{ {n \atop k} \right\} y^k$ rekursioyhtälön oikean puolen kertoimen k vuoksi. Generoiva funktio $A_n(y)$ voisi kuitenkin olla mahdollinen, sillä lauseke muistuttaa tämän derivaattaa. Toisaalta, jos valittaisiin generoivaksi funktioksi $B_k(x)$, kerroin k ei olisi mukana summassa muuttujana ja olisi näin ollen otettavissa summan ulkopuolelle.

Valitaan siis generoivaksi funktioksi $B_k(x)$. Selvästi nyt $B_0(x) = 1$, sillä $\left\{ {n \atop 0} \right\} \neq 0$ ainoastaan, kun $n = 0$. Valitaan siis mielivaltainen $k > 0$, kerrotaan rekursioyhtälö (3.45) puolittain termillä x^n ja summataan yli muuttujan n määrittelyalueen, eli kokonaislukujen. Saadaan

$$\sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \sum_n \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^n + \sum_n k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^n, \text{ missä } k \geq 1, \ B_0(x) = 1,$$

eli

$$\sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = x\sum_n \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{n-1} + kx\sum_n \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{n-1}, \text{ missä } k \geq 1, \ B_0(x) = 1.$$

Koska summaus tapahtuu yli kokonaislukujen, ei tarvitse huolehtia ylä- ja alarajoista ja saadaan siis

$$B_k(x) = xB_{k-1}(x) + kxB_k(x), \text{ missä } k \geq 1, \ B_0(x) = 1,$$

eli

$$B_k(x) = \frac{x}{1-kx} B_{k-1}(x), \text{ missä } k \geq 1, \ B_0(x) = 1.$$

Nyt koska $B_0(x) = 1$, on jokainen $B_k(x)$ yhtä suuri kuin $\frac{x}{1-kx}$ kertaa edellinen $B_{k-1}(x)$. Saadaan

$$B_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}, \text{ missä } k \geq 0. \tag{3.47}$$

Ehto $k \geq 0$ on voimassa, sillä selvästi yhtälö pätee, kun $k = 0$.

Nyt on vielä löydettävä yhtälölle (3.47) ratkaisu potenssisarjan muodossa, ja tämä löytyy osamurtokehitelmää käyttäen. Kyseessä oleva osamurtokehitelmä on muotoa

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{(1-jx)}. \tag{3.48}$$

Jotta osoittajat α_j saadaan ratkaistua, valitaan mielivaltainen r siten, että $1 \leq r \leq k$. Kerrotaan yhtälö (3.48) ensin puolittain lausekkeella $1-rx$ ja valitaan sitten $x = 1/r$. Koska yhtälön oikelta puolelta summattavat supistuvat pois lukuunottamatta tapausta, missä $j = r$, saadaan

(3.49)

$$\begin{aligned}
\alpha_r &= \frac{1}{(1-1/r)(1-2/r)\cdots(1-(r-1)/r)(1-(r+1)/r)\cdots(1-k/r)} \\
&= \frac{r^{k-1}}{r^{k-1}(1-1/r)(1-2/r)\cdots(1-(r-1)/r)(1-(r+1)/r)\cdots(1-k/r)} \\
&= \frac{r^{k-1}}{(r-r/r)(r-2r/r)\cdots(r-r(r-1)/r)(r-r(r+1)/r)\cdots(r-kr/r)} \\
&= \frac{r^{k-1}}{(r-1)(r-2)\cdots(r-(r-1))(r-(r+1))\cdots(r-k)} \\
&= \frac{r^{k-1}}{(r-1)!(-1)\cdots(r-k)} \\
&= \frac{r^{k-1}}{(-1)^{k-r}(r-1)!(+1)\cdots(k-r)} \\
&= (-1)^{k-r}\frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}, \text{ missä } 1 \leq r \leq k.
\end{aligned}$$

Haettu $\left\{ n \atop k \right\}$ on siis yhtälöiden (3.47) ja (3.48) perusteella termin x^n kerroin lausekkeen

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}, \text{ missä } k \geq 1,$$

sarjahajotelmassa. Nyt siis $\left\{ n \atop k \right\}$ on kaavan (3.1) perusteella sarjahajotelman termin x^{n-k} kerroin lausekkeessa

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} &= \sum_{r=1}^{k}\frac{\alpha_r}{1-rx}\\ &= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r\frac{1}{1-rx}\\ &= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r\sum_{n=0}^{\infty}(rx)^n\\ &= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r\sum_{n=0}^{\infty}r^nx^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}\alpha_r r^n x^n, \text{ missä } k\geq 1.\end{aligned}$$

Tästä nähdään helposti termin x^{n-k} kerroin eli

$$\begin{aligned}\left\{{n \atop k}\right\} &= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r r^{n-k}\\ &= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}r^{n-k}\\ &= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\frac{r^{n-1}}{(r-1)!(k-r)!},\end{aligned} \tag{3.50}$$

mikä on täsmälleen haettu lauseke Stirlingin toisille luvuille. [6, s. 17–20]

Jos edellisessä esimerkissä olisi valittu generoivaksi funktioksi funktioperhe $A_n(y)$, olisi laskutoimitusten loppuunvienti ollut huomattavasti hankalampaa. Kuitenkin tämä lähestymistapa tuottaa tietoa ratkaisufunktiosta eri tavalla. Valitaan siis mielivaltainen $n > 0$, kerrotaan rekursioyhtälö (3.45) puolittain termillä y^k ja summataan puolittain yli luvun k määrittelyalueen. Saadaan

$$\begin{aligned}A_n(y) &= \sum_k\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}y^k + \sum_k k\left\{{n-1 \atop k}\right\}y^k\\ &= y\sum_k\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}y^{k-1} + y\sum_k k\left\{{n-1 \atop k}\right\}y^{k-1}\\ &= yA_{n-1}(y) + (y\frac{d}{dy})A_{n-1}(y)\\ &= (y(1+D_y))A_{n-1}(y),\ \text{missä } n>0 \text{ ja } A_0(y)=1.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Koska selvästi $A_0(y) = 1$, saadaan jokainen $A_n(y)$ kertomalla edellinen $A_{n-1}(y)$ operaattorilla $y(1 - D_y)$. Näin saadaan ratkaisuksi jonon alkioita

$y, y + y^2, y + 3y^2 + y^3, \ldots$, mikä ei auta eksplisiittisen kaavan löytämisessä. Tällä lähestymistavalla saadaan siis selville vain, että

$$A_n(y) = (y + yD_y)^n 1, \text{ missä } n \geq 0. \tag{3.52}$$

Vaikka tällä generoivan funktioperheen valinnalla ei edellisessä esimerkissä siis olisi päästy haettuun eksplisiittiseen kaavaan, voidaan tämän version avulla saada eri tavalla tietoa mm. jonon $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}\right)_{k=1}^{n}$ käyttäytymisestä, kun n on vakio. Generoivan funktion avulla voidaan esim. todistaa tämän jonon unimodaalisuus helposti (ks. esim. [6, s. 129]). Tähän ei kuitenkaan syvennytä tarkemmin tässä tutkielmassa, vaan tyydytään toteamaan, että eri lähestymistavoilla voidaan saada hyvin erilaista tietoa ongelmasta, ja generoivan funktion valinta riippuu halutusta ratkaisusta. [6, s. 20–21]

3.3 Eksponentiaalinen generoiva funktio

Tässä kappaleessa käydään lyhyesti läpi eksponentiaalisen generoivan funktion muoto ja sen käsittelyyn käytetty $x\frac{d}{dx}log$–operaatio. Tällä on lukuisia käyttökohteita lukujonoja käsiteltäessä, kun tavallisen generoivan funktion avulla ei päästä haluttuun lopputulokseen. Eksponentiaalisen generoivan funktion käyttöä havainnollistetaan myös tässä kappaleessa esimerkkien kautta.

Määritelmä 3.3. Lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *eksponentiaaliseksi generoivaksi funktioksi* $A(x)$ kutsutaan muodollista potenssisarjaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n. \tag{3.53}$$

Eksponentiaalisen generoivan funktion tapauksessa siis haettu lukujonon alkio a_n on termin $\frac{x^n}{n!}$ kerroin eksponentiaalisen generoivan funktion $A(x)$ sarjahajotelmassa. [6, s. 20]

3.3.1 Bellin toiset luvut

Stirlingin toiset luvut $\left\{ {n \atop k} \right\}$ kertovat, kuinka monella tavalla n elementtiä voidaan jakaa k:hon osaan. *Bellin luvut* puolestaan kertovat, kuinka monella tapaa n elementtiä voidaan ylipäänsä osittaa. Bellin lukuja merkitään notaatiolla $b(n)$, ja sovitaan erityisesti, että $b(0) = 1$.

Esimerkki 3.7. Etsitään kaava Bellin luvuille. Koska Bellin luku $b(n)$ kertoo n elementtiä sisältävän joukon kaikkien mahdollisten ositusten lukumäärän ja Stirlingin toinen luku $\left\{ {n \atop k} \right\}$ lukumäärän n elementtiä sisältävän joukon osituksille k:hon osaan, selvästi Bellin luvut saadaan summaamalla Stirlingin toiset luvut yli muuttujan k, missä $1 \leq k \leq n$. Kaava Stirlingin toisille luvuille $\left\{ {n \atop k} \right\}$ on jo ratkaistu edellisen luvun esimerkissä 3.6, joten suoran kaavan muodostaminen ei ole hankalaa. Lisäksi on huomattavaa, että kaava (3.50) pätee kaikille positiivisille kokonaisluvuille n ja k, erityisesti siis kaava pitää paikkaansa, kun $n < k$, joten tässä tapauksessa summan tuloseksi saadaan automaattisesti 0.

Muodostettaessa kaavaa Bellin luvuille, voidaan siis summata kaavan (3.50) viimeinen osa yli muuttujan k, missä $1 \leq k \leq M$, ja M on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku siten, että $M \geq n$. Saadaan

$$\begin{aligned} b(n) &= \sum_{k=1}^{M} \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!(k-r)!} \\ &= \sum_{k=1}^{M} \sum_{r=1}^{k} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!} \\ &= \sum_{r=1}^{M} \sum_{k=r}^{M} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!} \\ &= \sum_{r=1}^{M} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{M} \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!} \\ &= \sum_{r=1}^{M} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \sum_{k-r=r-r}^{M-r} \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!}. \end{aligned}$$

Kun tästä nimetään uudelleen viimeisen lausekkeen jälkimmäisessä summassa $s = k - r$, saadaan

$$\sum_{r=1}^{M} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \left(\sum_{s=0}^{M-r} \frac{(-1)^s}{s!} \right).$$

Nyt koska M on mielivaltainen luku, jolle $n \leq M$, eli M voi kasvaa mielivaltaisen suureksi, voidaan muuttujia n ja r ajatella, kuin ne olisivat vakioita, ja antaa muuttujan M lähestyä ääretöntä. Tällöin saadaan kaavan (2.8) perusteella

$$b(n) = \frac{1}{e} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!}, \text{ missä } n \geq 1. \tag{3.54}$$

Vaikka nyt on löydetty suora kaava Bellin luvuille, ei kaavaa (3.54) voi käyttää sellaisenaan sen sisältämän äärettömän summan vuoksi. Otetaan siis käyttöön generoivien funktioiden metodi, ja valitaan generoivaksi funktioksi eksponentiaalinen generoiva funktio (3.53). Merkitään tätä notaatiolla

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n. \tag{3.55}$$

Seuraavaksi kerrotaan yhtälö (3.54) puolittain termillä $\frac{x^n}{n!}$ ja summataan yli muuttujan n määrittelyalueen, eli positiivisten kokonaislukujen. Saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!}.$$

Nyt koska $b(0) = 1$ ja $\frac{x^0}{0!} = 1$, saadaan vielä kaavan (2.8) perusteella

$$
\begin{aligned}
B(x) - 1 &= \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(r-1)!} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \cdot r^{n-1}}{r(r-1)!} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(rx)^n}{n!r!} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rx)^n}{n!} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{e} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} (e^{rx} - 1) \\
&= \frac{1}{e} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{(e^x)^r}{r!} - \frac{1}{r!} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{e} (e^{e^x} - e) \\
&= e^{e^x - 1} - 1.
\end{aligned} \tag{3.56}
$$

Siis

$$
B(x) = e^{e^x - 1}, \tag{3.57}
$$

eli ratkaisu Bellin luvulle $b(n)$ on termin $\frac{x^n}{n!}$ kerroin generoivan funktion (3.57) sarjahajotelmassa. [6, s. 21–23]

Edellisestä esimerkistä saadaan seurauksena seuraava lause, mikä on osoitus generoivien funktioiden metodin käytännöllisyydestä. Tässä tapauksessa itse Bellin luvut ovat hyvin monimutkaisia muodostaa, mutta niiden generoiva funktio on yksinkertainen ja helppo muistaa.

Lause 3.3. *Bellin lukujen eksponentiaalinen generoiva funktio on* $e^{e^x - 1}$*, eli Bellin luku* $b(n)$ *on termin* $\frac{x^n}{n!}$ *kerroin lausekkeen* $e^{e^x - 1}$ *potenssisarjahajotelmassa. [6, s. 23]*

3.3.2 $x\frac{d}{dx}\log$ –operaatio

Tähän mennessä tässä tutkielmassa on pyritty johtamaan rekursioyhtälöstä generoivan funktion kaava, ja siten löytämään kaava annetulle lukujonolle. On kuitenkin mahdollista johtaa generoivan funktion yhtälöstä rekursioyhtälö lukujonon alkioille käyttämällä $x\frac{d}{dx}\log$ –operaatiota. Operaation käyttö tapahtuu seuraavasti:

1. Otetaan yhtälöstä puolittain (luonnollinen) logaritmi.

2. Derivoidaan yhtälö puolittain, ja kerrotaan yhtälö sen jälkeen puolittain termillä x.

3. Siistitään yhtälöstä pois osamäärät.

4. Etsitään yhtälön molemmilta puolilta termin x^n kertoimet kaikille indeksin n arvoille, ja yhdistetään saadut kertoimet yhtälöksi. [6, s. 23]

Operaation toimivuus perustuu selkeästi Neperin luvun e olemassaoloon yhtälössä, mikä luonnollisesti tekee tästä operaatiosta toimivan nimenomaan käytettäessä eksponentiaalista generoivaa funktiota.

Esimerkki 3.8. Etsitään rekursioyhtälö Bellin luvuille käyttämällä $x\frac{d}{dx}\log$ –operaatiota lauseen 3.3 Bellin lukujen generoivaan funktioon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n = e^{e^x - 1}. \tag{3.58}$$

Operaation ensimmäinen vaihe on siis ottaa luonnollinen logaritmi puolittain yhtälöstä (3.58). Saadaan

$$\log \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n \right\} = e^x - 1.$$

Seuraavaksi derivoidaan saatu yhtälö puolittain, jolloin saadaan

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nb(n)}{n!} x^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n} = e^x.$$

Kun tämä vielä kerrotaan puolittain termillä x, saadaan

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nb(n)}{n!} x^{n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n} = xe^x.$$

Seuraavaksi siistitään osamäärä kertomalla yhtälö vielä puolittain lausekkeella $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n$, ja tällöin tulokseksi saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nb(n)}{n!} x^n = (xe^x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!} x^n. \tag{3.59}$$

Viimeinen vaihe on löytää termin x^n kertoimet ja yhdistää saadut kertoimet yhtälöksi. Tässä tapauksessa yhtälön (3.59) vasemmalta puolen kerroin on helppo löytää, mutta oikealla puolella on muodostettava kahden potenssisarjan tulo ja sen jälkeen etsittävä kerroin. Seuraavassa kappaleessa käydään läpi yleinen ja helppo tapa muodostaa tämä tulo, joten laskutoimitukset käydään läpi myöhemmin esimerkissä 4.7. Todetaan tässä kohden ainoastaan, että ratkaisuksi saadaan

$$b(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1}{k} b(k), \text{ missä } n \geq 1 \text{ ja } b(0) = 1. \tag{3.60}$$

[6, s. 23–24]

4 Generoivien funktioiden laskuoppia

Tässä luvussa käydään läpi erilaisten generoivien funktioiden laskutoimenpiteitä, ja koska tässä tutkielmassa käsitellyt generoivat funktiot ovat muodollisia potenssisarjoja, myös kaikki laskutoimenpiteet suoritetaan muodollisten sarjojen renkaassa. Lisäksi, koska generoivat funktiot ovat potenssisarjoja, aina kun generoivalle funktiolle tehdään operaatio, tarkoittaa se vastaavan operaation suorittamista kaikille sen kertoimille. Jos käsiteltävä potenssisarja suppenee ja käsitelläänkin funktiota, jokaista tälle funktiolle tehtävää laskutoimitusta vastaa aina jokin operaatio funktion potenssisarjahajotelman kertoimille. Näillä vastaavuuksilla on suuri merkitys, kun mietitään sopivan generoivan funktion valintaa. [6, s. 30]

4.1 Tavallisten generoivien funktioiden laskuoppia

Tavallisella generoivalla funktiolla tarkoitetaan tässä alaluvussa tutkielmassa käytettyä tavallista potenssisarjamuotoista yhden muuttujan generoivaa funktiota. Wilf on kirjassaan [6] sivuuttanut tässä alaluvussa esitettävien lauseiden todistukset, ja selkeyden vuoksi todistukset onkin lisätty tähän tutkielmaan kirjoittajan toimesta.

Määritelmä 4.1. Merkinnällä $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ tarkoitetaan, että f on jonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tavallinen muodollisen potenssisarjan generoiva funktio (engl. ordinary power series generating function), eli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. [6, s. 30]

Oletetaan, että $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$. Tällöin jonon $(a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ tavallinen generoiva funktio on

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{x} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + a_0 x^0 - a_0 x^0 \right) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) \\
&= \frac{f(x) - a_0}{x}.
\end{aligned}$$

Siis jos $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$, niin $((f - a_0)/x) \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$. [6, s. 30]

Eli yhden yksikön muutos jonon alaindeksissä muuttaa generoivaa funktiota erotusosamäärän $\frac{f-a_0}{x}$ verran. Yleisesti, jos alaindeksiä muutetaan h yksikköä, missä $h \geq 1$, saadaan tätä vastaava generoiva funktio seuraavan lauseen mukaisesti:

Lause 4.1. *Jos* $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *ja* $h \in \mathbb{Z}_+$, *niin*

$$(a_{n+h})_{n=0}^{\infty} \overset{ops}{\leftrightarrow} \frac{f - a_0 - \cdots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}.$$

[6, s. 31]

Todistus. Olkoon $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $h \in \mathbb{Z}_+$. Nyt siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tällöin lukujonon $(a_{n+h})_{n=0}^{\infty}$ generoiva funktio on

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+h}x^{n+h}}{x^h} \\
&= \frac{1}{x^h} \cdot \sum_{n=h}^{\infty} a_n x^n \\
&= \frac{1}{x^h} \cdot \left(\sum_{n=h}^{\infty} a_n x^n + a_0x^0 + \cdots + a_{h-1}x^{h-1} - a_0x^0 \cdots - a_{h-1}x^{h-1} \right) \\
&= \frac{1}{x^h} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0x^0 \cdots - a_{h-1}x^{h-1} \right) \\
&= \frac{f(x) - a_0 - \cdots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}.
\end{aligned}$$

Siis

$$(a_{n+h})_{n=0}^{\infty} \overset{ops}{\leftrightarrow} \frac{f - a_0 - \cdots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}, \text{ missä } h \in \mathbb{Z}_+.$$

□

Edellisen lauseen avulla nähdään esimerkiksi Fibonaccin lukujen rekursioyhtälöstä

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ missä } n \geq 0 \text{ ja } F_0 = 0, F_1 = 1,$$

välittömästi, että yhtälö on muunnettavissa generoivien funktioiden yhtälöksi

$$\frac{f(x) - x}{x^2} = \frac{f(x)}{x} + f(x), \text{ missä } f \overset{ops}{\leftrightarrow} (F_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Tämän kappaleen tarkoitus onkin helpottaa siirtymistä jonojen relaatioista potenssisarjojen relaatioihin. [7, s. 34]

Lause 4.2. *Jos* $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$, *niin*

$$xDf \overset{ops}{\leftrightarrow} (na_n)_{n=0}^{\infty}.$$

[6, s. 31]

Todistus. Olkoon $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$, eli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nyt jonon $(na_n)_{n=0}^{\infty}$ tavallinen generoiva funktio on muodollisen potenssisarjan määritelmän perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = xDf(x).$$

Siis $xDf \overset{ops}{\leftrightarrow} (na_n)_{n=0}^{\infty}$. □

Esimerkki 4.1. Olkoon

$$(n+1)a_{n+1} = 3a_n + 1, \text{ missä } n \geq 0 \text{ ja } a_0 = 1,$$

ja olkoon $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$. Nyt lauseiden 4.1 ja 4.2 sekä geometrisen sarjan summan (2.7) perusteella saadaan rekursio $(n+1)a_{n+1} = 3a_n + 1$ eli $na_{n+1} + a_{n+1} = 3a_n + 1$ muutettua generoivien funktioiden yhtälöksi

$$xD\left(\frac{f(x)-1}{x}\right) + \frac{f(x)-1}{x} = 3f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Siis

$$x\left(\frac{f'(x)}{x} + \frac{-1(f(x)-1)}{x^2}\right) + \frac{f(x)-1}{x} = 3f(x) + \frac{1}{1-x},$$

ja näin ollen saadaan

$$f'(x) = 3f(x) + \frac{1}{1-x}.$$

[6, s. 31]

Lause 4.3. *Jos $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$, niin*

$$(xD)^k f \overset{ops}{\leftrightarrow} (n^k a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

[6, s. 31]

Todistus. Olkoon $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Väitetään, että $(xD)^k f \overset{ops}{\leftrightarrow} (n^k a_n)_{n=0}^{\infty}$ eli että $(xD)^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$. Todistetaan väite induktiolla luvun k suhteen.

Lauseen 4.2 perusteella väite on selvästi tosi, kun $k = 1$. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $k = m$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$, ja väitetään, että väite on tosi myös, kun $k = m + 1$. Todistetaan induktioväite. Nyt siis induktio-oletuksen ja muodollisen potenssisarjan derivaatan määritelmän perusteella saadaan

$$\begin{aligned}(xD)^{m+1}f(x) &= (xD)(xD)^m f(x) \\ &= xD\sum_{n=0}^{\infty} n^m a_n x^n \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n^m a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{m+1} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{m+1} a_n x^n,\end{aligned}$$

eli induktioväite pätee. Näin ollen induktioperiaatteen perusteella väite on tosi, ja $(xD)^k f \overset{ops}{\leftrightarrow} (n^k a_n)_{n=0}^{\infty}$. $\square$

Lause 4.4. *Jos* $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *ja* P *on polynomi, niin*

$$P(xD)f \overset{ops}{\leftrightarrow} (P(n)a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

[6, s. 32]

Todistus. Olkoon $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja P polynomi. Tällöin siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m$, missä m on positiivinen kokonaisluku ja kertoimet $p_i \in \mathbb{R}$. Tällöin jonon $(P(n)a_n)_{n=0}^{\infty}$ generoiva funktio on lauseen 4.3 perusteella

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P(n)a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(p_0 + p_1 n + \cdots + p_m n^m)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_0 a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_1 n a_n x^n + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} p_m n^m a_n x^n \\ &= p_0\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + p_1\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \cdots + p_m\sum_{n=0}^{\infty} n^m a_n x^n \\ &= p_0\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + p_1(xD)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \cdots + p_m(xD)^m\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= (p_0 + p_1(xD) + \cdots + p_m(xD)^m)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= P(xD)f(x).\end{aligned}$$

Siis $P(xD)f \overset{ops}{\leftrightarrow} (P(n)a_n)_{n=0}^{\infty}$. $\square$

Esimerkki 4.2. Etsitään suljettu kaava sarjan summalle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+4n+5)}{n!}$. Kaava on selvästi jonon $((n^2+4n+5)/n!)_{n=0}^{\infty}$ generoivan funktion $f(x)$ arvo, kun $x = 1$. Valitaan siis $a_n = 1/n!$, ja näin ollen tämän generoiva funktio on kaavan (2.8) perusteella

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Tästä saadaan lauseen 4.4 perusteella jonon $((n^2+4n+5)/n!)_{n=0}^{\infty}$ generoivaksi funktioksi

$$\begin{aligned}((xD)^2 + 4(xD) + 5)e^x &= (xD)xe^x + 4xe^x + 5e^x \\ &= xe^x + x^2e^x + 4xe^x + 5e^x \\ &= (x^2 + 5x + 5)e^x.\end{aligned}$$

Siis haettu ratkaisu on lausekkeen $(x^2 + 5x + 5)e^x$ arvo, kun $x = 1$, eli $11e$. [6, s. 32]

Edellisessä esimerkissä arvioitiin generoivaa funktiota arvolla $x = 1$. Tällaistä operaatiota ei kuitenkaan ole olemassa muodollisten sarjojen renkaassa, minkä sisällä operaatiot suoritetaan, sillä tässä tapauksessa termin x rooli on ainoastaan paikanmäärittäjänä. Potenssisarjaa, joka suppenee tietyllä muuttujan x arvolla, voidaan arvioida kyseisellä muttujan x arvolla, mutta tämä on ennemminkin analyyttinen kuin muodollinen lähestymistapa. Kuitenkin, jos ratkaisuun ennen arviointia on päädytty muodollisten sarjojen renkaan laskutoimituksin ja tässä vaiheessa huomataan saadun sarjan suppenevan analyyttiseksi funktioksi jonkin kompleksitason kiekon sisällä, ovat kaikki muodollisten sarjojen renkaassa suoritetut laskutoimenpiteet analyyttisesti valideja myös kaikilla kompleksiluvuilla x tämän kiekon sisällä. Siis lähestymistapaa sarjan suhteen voidaan vaihtaa muodollisesta analyyttiseksi vaikuttamatta ratkaisun validiuteen. [6, s. 32]

Esimerkki 4.3. Etsitään suljettu kaava N:n ensimmäisen kokonaisluvun neliöiden summalle. Nyt

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}, \text{ missä } N > 0, \tag{4.1}$$

sillä kaavan (2.7) perustella

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \\ &= \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+N+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{N+1}x^n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \\
&= \frac{x^{N+1}-1}{x-1}, \text{ missä } N > 0.
\end{aligned}
$$

Nyt jos sovelletaan operaattoria $(xD)^2$ yhtälöön (4.1) ja asetetaan $x = 1$, saadaan yhtälön vasemmalle puolelle haluttu neliöiden summa ja siis toiselle puolelle ratkaisu. Eli oikealle puolelle saadaan

$$
(xD)^2 \sum_{n=0}^{N} x^n = (xD) \sum_{n=0}^{N} nx^n = \sum_{n=0}^{N} n^2 x^n,
$$

ja kun $x = 1$, suopistuu viimeisin muotoon $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

Oikealle puolestaan saadaan

$$
(xD)^2 \left(\frac{x^{N+1}-1}{x-1} \right),
$$

mikä derivointien, lukuisien välivaiheiden ja sijoituksen $x = 1$ jälkeen saadaan muotoon

$$
\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.
$$

Välivaiheet ovat pitkällisiä, eikä niitä käydä tässä läpi, vaan olennaista on huomata, kuinka hankalasta summasta saadaan generoivien funktioiden avulla helposti suljettu kaava. [6, s. 32–33]

Lause 4.5. *Jos* $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *ja* $g \overset{ops}{\leftrightarrow} (b_n)_{n=0}^{\infty}$, *niin*

$$
fg \overset{ops}{\leftrightarrow} \left(\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} \right)_{n=0}^{\infty}.
$$

[6, s. 33]

Todistus. Olkoon $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $g \overset{ops}{\leftrightarrow} (b_n)_{n=0}^{\infty}$. Nyt siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Tällöin saadaan kaavan (2.3) perusteella

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} x^n,
\end{aligned}
$$

eli selvästi $fg \overset{ops}{\leftrightarrow} (\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r})_{n=0}^{\infty}$. □

Lause 4.6. *Jos* $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *ja* $k \in \mathbb{Z}_+$*, niin*

$$f^k \overset{ops}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right)_{n=0}^{\infty}.$$

[6, s. 33]

Todistus. Olkoon $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Nyt siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Väitetään, että

$$f^k \overset{ops}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right)_{n=0}^{\infty}$$

eli että

$$f(x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} x^n.$$

Todistetaan väite induktiolla luvun k suhteen.

Nyt selvästi väite on tosi, kun $k = 1$. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $k = m$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$, ja väitetään, että väite on tosi, kun $k = m + 1$. Nyt induktio-oletuksen ja lauseen 4.5 perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
f(x)^{m+1} =& f(x) \cdot f(x)^m \\
=& f(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m} x^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m} x^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} \left(a_r \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n-r} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m} \right) \right) x^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ \left(\sum_{n_1+\cdots n_m+0=n+0} a_{n_1} \cdots a_{n_m} a_0 \right) \\
& + \left(\sum_{n_1+\cdots n_m+1=n-1+1} a_{n_1} \cdots a_{n_m} a_1 \right) + \\
& \cdots + \left(\sum_{n_1+\cdots n_m+n=n-n+n} a_{n_1} \cdots a_{n_m} a_n \right) \Bigg\} x^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_{m+1}=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_{m+1}} x^n,
\end{aligned}$$

eli induktioväite pätee. Näin ollen väite on induktioperiaatteen nojalla tosi, ja siis

$$f^k \overset{ops}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right)_{n=0}^{\infty}.$$

□

Esimerkki 4.4. Olkoon $f(n,k)$ järjestettyjen summien lukumäärä, missä ei-negatiivinen kokonaisluku n on summan tulos ja ei-negatiivinen kokonaisluku k summan yhteenlaskettavien lukumäärä. Esimerkiksi $f(4,2) = 5$, sillä $4 = 4+0 = 3+1 = 2+2 = 1+3 = 0+4$. Etsitään kaava funktiolle $f(n,k)$.

Nyt $\frac{1}{1-x} \overset{ops}{\leftrightarrow} (1)_{n=0}^{\infty}$ kaavan (2.7) perusteella. Helposti nähdään myös, että $f(n,k) = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} 1$. Täten saadaan lauseen 4.6 perusteella

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^k \overset{ops}{\leftrightarrow} (f(n,k))_{n=0}^{\infty}, \text{ kun } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Nyt kaavan (3.43) perusteella saadaan

$$f(n,k) = \frac{(k-1+n)!}{(k-1)!n!} = \binom{n+k-1}{n}, \text{ kun } k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Koska selvästi $f(n,0) = 0$, ja koska on sovittu alaluvussa 3.2.1, että $\binom{n}{k} = 0$, kun $n < k$, pätee kaava (4.2) myös, kun $k = 0$. Siis kaava (4.2) on etsitty kaava funktiolle $f(n,k)$. [6, s. 33]

Lause 4.7. *Jos* $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$, *niin*

$$\frac{f}{(1-x)} \overset{ops}{\leftrightarrow} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)_{n=0}^{\infty}.$$

[6, s. 34]

Todistus. Olkoon $f \overset{ops}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ eli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nyt kaavan (2.7) perusteella

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(1-x)} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j x^n. \end{aligned}$$

Siis $\frac{f}{(1-x)} \overset{ops}{\leftrightarrow} (\sum_{j=0}^{n} a_j)_{n=0}^{\infty}$. □

Esimerkki 4.5. *Kolikkolähteellä* tarkoitetaan järjestystä, jossa n kolikkoa sijoitetaan päällekkäisiin riveihin niin, että alimmassa rivissä kolikot muodostavat katkeamattoman rivin, ja jokaisessa sen päällä olevassa rivissä kukin kolikko koskettaa täsmälleen kahta alapuolisen rivin kolikkoa. Jos ensimmäisessä rivissä, eli alimmassa, on k kolikkoa, kutsutaan kolikkolähdettä *(n,k)-lähteeksi.*

Käsitellään tässä esimerkissä lähteitä, joissa jokainen rivi koostuu yhtenäisistä kolikkojonoista, ja selvitetään kuinka monta sellaista kolikkolähdettä on olemassa, missä alimmassa rivissä on täsmälleen k kolikkoa.

Olkoon $f(k)$ sellaisten kolikkolähteiden lukumäärä, jossa alimmalla rivillä on täsmälleen k kolikkoa, kun $k \geq 0$. Kun tällaisesta kolikkolähteestä otetaan pois alin rivi, jää jäljelle kolikkolähde, jossa on k kappaletta vähemmän kolikoita kuin alkuperäisessä. Toisaalta, jos halutaan muodostaa kaikki mahdolliset (n, k)-kolikkolähteet, missä $n \geq k$, aloitetaan ensin muodostamalla alin rivi sijoittamalla peräkkäin k kolikkoa. Tämän jälkeen valitaan luku j siten, että $0 \geq j \geq k-1$. Ensimmäisen k kolikkoa sisältävän rivin päälle muodostetaan uusi kolikkolähde, jossa ensimmäisessä rivissä on j kolikkoa. Jos $j = 0$, on vain yksi tapa muodostaa uusi kolikkolähde, eli tyhjä lähde. Muulloin on $k - j$ tapaa sijoittaa uusi lähde alimman rivin päälle. Nyt $f(0) = 1$, ja saadaan siis rekursio

$$f(k) = \sum_{j=1}^{k}(k-j)f(j) + 1, \text{ missä } k \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.3}$$

Nyt huomataan, että yllä olevassa kaavassa on summan sisäpuolella on tulo $(k-j)f(j)$, mikä on selvästi samaa muotoa kuin lauseen 4.5 kahden tavallisen generoivan funktion tulo. Tässä generoivat funktiot ovat lukujonojen $(k)_{k=1}^{\infty}$ ja $(f(k))_{k=1}^{\infty}$ generoivat funktiot. Nyt kun yhtälö (4.3) kerrotaan puolittain termillä x^k ja summataan puolittain yli luvun k, missä $k \in \mathbb{Z}_+$, saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}(k-j)f(j)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} x^k. \tag{4.4}$$

Saadaan siis lauseen 4.5 perusteella

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)x^k = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \sum_{k=1}^{\infty} f(k)x^k + x\sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{4.5}$$

Määritellään sitten lukujonon $(f(k))_{k=0}^{\infty}$ generoiva funktio siten, että $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x)x^n$. Nyt kaavan (2.7) perusteella, ja koska yhtälön (3.5) perusteella lukujonon $(k)_{k=1}^{\infty}$ generoiva funktio on $\frac{x}{(1-x)^2}$ (eli sama kuin lukujonon $(k)_{k=0}^{\infty}$), saadaan yhtälö (4.5) muotoon

$$F(x) - 1 = \frac{x}{(1-x)^2}(F(x) - 1) + \frac{x}{1-x}. \tag{4.6}$$

Siis

$$F(x) - 1 = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 - x} = \frac{x(1-x)}{(1-x)^2 - x},$$

ja näin ollen lukujonon $(f(k))_{k=0}^{\infty}$ generoivaksi funktioksi saadaan

$$F(x) = \frac{x(1-x) + (1-x)^2 - x}{(1-x)^2 - x} = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}.$$

[7, s. 38–39]

4.2 Eksponentiaalisten generoivien funktioiden laskuoppia

Tässä alaluvussa käydään läpi vastaavat lauseet, kuin edeltävässä alaluvussa, mutta generoivana funktiona käytetään muodollisen potenssisarjan eksponentiaalista generoivaa funktiota. Aivan kuten edeltävän alaluvun tapauksessa, myös tässä Wilf [6] on sivuuttanut lauseiden todistukset omassa tekstissään. Lisäksi osa edellisen alaluvun tavallisia generoivia funktioita koskevista lauseista on sivuutettu eksponentiaalisen generoivan funktion tapauksessa. Nämä sivuutetut lauseet ja todistukset on lisätty tähän alalukuun, ja näin pyritty täydentämään alkuperäisen tekstin asiasisältöä kirjan henkeä kunnioittaen.

Määritelmä 4.2. Merkinnällä $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ tarkoitetaan, että f on jonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eksponentiaalinen generoiva funktio (engl. exponential generating function) eli että $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. [6, s. 36]

Lause 4.8. *Jos $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja h on ei-negatiivinen kokonaisluku, niin*

$$(a_{n+h})_{n=0}^{\infty} \overset{egf}{\leftrightarrow} D^h f.$$

[6, s. 37]

Todistus. Olkoon $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja h mielivaltainen ei-negatiivinen kokonaisluku. Nyt siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Väitetään, että tällöin $(a_{n+h})_{n=0}^{\infty} \overset{egf}{\leftrightarrow} D^h f$ eli että $D^h f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+h}}{n!} x^n$, ja todistetaan väite induktiolla luvun h suhteen.

Selvästi väite pätee, kun $h = 0$. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $h = m$, missä $m \in \mathbb{N}$, ja väitetään, että väite pätee myös, kun $h = m+1$. Nyt muodollisen potenssisarjan derivaatan määritelmän ja induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
D^{m+1} f(x) &= D(D^m f(x)) \\
&= D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+m}}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_{n+m}}{n!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+m}}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+m+1}}{n!} x^n.
\end{aligned}$$

Siis induktioväite pätee, ja näin ollen induktioperiaatteen nojalla väite on tosi. Siis $(a_{n+h})_{n=0}^{\infty} \overset{egf}{\leftrightarrow} D^h f$. □

Esimerkki 4.6. Etsitään suora kaava Fibonaccin luvuille F_n, missä

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ missä } n \geq 0, F(0) = 0, F(1) = 1, \tag{4.7}$$

käyttäen eksponentiaalista generoivaa funktiota. Lauseen 4.8 perusteella yhtälö (4.7) saadaan helposti muunnettua eksponentiaalisten generoivien funktioiden differentiaaliyhtälöksi

$$f'' = f' + f. \tag{4.8}$$

Siis

$$f'' - f' - f = 0. \tag{4.9}$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat tällöin $r_- = \frac{1-\sqrt{1+4}}{2}$ ja $r_+ = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2}$, ja näin siis saadaan Fibonaccin lukujen eksponentiaaliseksi generoivaksi funktioksi

$$f(x) = c_1 e^{r_+ x} + c_2 e^{r_- x}. \tag{4.10}$$

Nyt koska on määritelty, että muodolliselle potenssisarjalle $A(x)$ on voimassa $A(0) = a_0$, selvästi $f(0) = F_0 = 0$ ja $f'(0) = F_1 = 1$, mistä saadaan alkuehdot yhtälölle (4.10). Lisäksi

$$f'(x) = r_+ c_1 e^{r_+ x} + r_- c_2 e^{r_- x}. \tag{4.11}$$

Sijoitetaan alkuehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$ yhtälöihin (4.10) ja (4.11), jolloin saadaan

$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0,$$

eli $c_1 = -c_2$, ja

$$r_+ c_1 e^0 + r_- c_2 e^0 = -r_+ c_2 + r_- c_2 = 1,$$

eli $c_2 = \frac{1}{r_- - r_+} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Siis $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Näin ollen Fibonaccin lukujen eksponentiaalinen generoiva funktio on

$$f(x) = \frac{e^{r_+ x}}{\sqrt{5}} - \frac{e^{r_- x}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{r_+ x} - e^{r_- x}}{\sqrt{5}}. \tag{4.12}$$

Nyt kaavan (2.8) perusteella saadaan edellinen yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_+ x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_- x)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{({r_+}^n - {r_-}^n) x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{({r_+}^n - {r_-}^n)}{\sqrt{5}} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

mistä nähdään helposti termin $\frac{x^n}{n!}$ kerroin, eli $\frac{({r_+}^n - {r_-}^n)}{\sqrt{5}}$, mikä on siis haettu suora kaava Fibonaccin luvuille F_n. [7, s. 40–41]

Lause 4.9. *Jos* $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$, *niin*

$$xDf \overset{egf}{\leftrightarrow} (na_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Todistus. Olkoon $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$, eli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Nyt jonon $(na_n)_{n=0}^{\infty}$ eksponentiaalinen generoiva funktio on muodollisen potenssisarjan derivaatan määritelmän perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_n}{n!} x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{n!} x^{n-1} = xDf(x).$$

Siis $xDf \overset{egf}{\leftrightarrow} (na_n)_{n=0}^{\infty}$. □

Lause 4.10. *Jos* $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *ja* $k \in \mathbb{Z}_+$, *niin*

$$(xD)^k f \overset{egf}{\leftrightarrow} (n^k a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Todistus. Olkoon $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Väitetään, että $(xD)^k f \overset{egf}{\leftrightarrow} (n^k a_n)_{n=0}^{\infty}$ eli että $(xD)^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k a_n}{n!} x^n$. Todistetaan väite induktiolla luvun k suhteen.

Lauseen 4.9 perusteella väite on selvästi tosi, kun $k = 1$. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $k = m$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$, ja väitetään, että väite on tosi myös, kun $k = m + 1$. Todistetaan induktioväite. Nyt siis induktio-oletuksen ja muodollisen potenssisarjan derivaatan määritelmän perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
(xD)^{m+1} f(x) &= (xD)(xD)^m f(x) \\
&= xD \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m a_n}{n!} x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{n^m a_n}{n!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{m+1} a_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{m+1} a_n}{n!} x^n.
\end{aligned}$$

Siis induktioväite pätee, ja näin ollen induktioperiaatteen perusteella väite on tosi. Siis $(xD)^k f \overset{egf}{\leftrightarrow} (n^k a_n)_{n=0}^{\infty}$. □

Lause 4.11. *Jos* $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *ja* P *on polynomi, niin*

$$P(xD)f \overset{egf}{\leftrightarrow} (P(n)a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

[6, s. 38]

Todistus. Olkoon $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja P polynomi. Tällöin siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ ja $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m$, missä m on positiivinen kokonaisluku ja kertoimet $p_i \in \mathbb{R}$. Tällöin jonon $(P(n)a_n)_{n=0}^{\infty}$ eksponentiaalinen generoiva funktio on lauseen 4.10 perusteella

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)a_n}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (p_0 + p_1 n + \cdots + p_m n^m) \frac{a_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_0 \frac{a_n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_1 n \frac{a_n}{n!} x^n + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} p_m n^m \frac{a_n}{n!} x^n \\
&= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n + p_1 \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a_n}{n!} x^n + \cdots + p_m \sum_{n=0}^{\infty} n^m \frac{a_n}{n!} x^n \\
&= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n + p_1 (xD) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n + \cdots + p_m (xD)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \\
&= (p_0 + p_1(xD) + \cdots + p_m (xD)^m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \\
&= P(xD) f(x).
\end{aligned}$$

Siis $P(xD)f \overset{egf}{\leftrightarrow} (P(n)a_n)_{n=0}^{\infty}$. □

Lause 4.12. *Jos* $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *ja* $g \overset{egf}{\leftrightarrow} (b_n)_{n=0}^{\infty}$*, niin*

$$fg \overset{egf}{\leftrightarrow} \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r b_{n-r} \right)_{n=0}^{\infty}.$$

[6, s. 39]

Todistus. Olkoon $f \overset{egf}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $g \overset{egf}{\leftrightarrow} (b_n)_{n=0}^{\infty}$. Nyt siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ ja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$. Tällöin saadaan kaavan (2.3) ja binomikertoimen kaavan (3.44) perusteella

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{a_r b_{n-r}}{r!(n-r)!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{n! a_r b_{n-r}}{r!(n-r)! n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{a_r b_{n-r}}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{a_r b_{n-r}}{n!} x^n.
\end{aligned}$$

Siis selvästi $fg \overset{egf}{\leftrightarrow} \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r b_{n-r} \right)_{n=0}^{\infty}$. □

Esimerkki 4.7. Etsitään rekursiivinen kaava esimerkin 3.8 yhtälölle (3.59), eli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nb(n)}{n!}x^n = (xe^x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!}x^n, \tag{4.13}$$

käyttäen eksponentiaalisten generoivien funktioiden laskuoppia. Yhtälöstä (4.13) saadaan kaavan (2.8) perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nb(n)}{n!}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n!}x^n.$$

Tästä puolestaan saadaan lauseen 4.12 perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nb(n)}{n!}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k)x^n.$$

Kun tämä yhtälö jaetaan puolittain termillä x, saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nb(n)}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k)x^n,$$

ja tästä lauseen 4.8 perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k)x^n.$$

Edellisestä nähdään helposti termin $\frac{x^n}{n!}$ kertoimet ja näin saadaan seuraava rekursioyhtälö Bellin luvuille $b(n)$:

$$b(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k), \text{ missä } n \geq 0 \text{ ja } b(0) = 1. \tag{4.14}$$

Esimerkki 4.8. Olkoon c_n se lukumäärä, kuinka monella tapaa n kappaletta sulkupareja, missä yksi sulkupari sisältää yhden vasemmanpuoleisen sulkeen ja yhden oikeanpuoleisen sulkeen, voidaan järjestää jonoon siten, että sulkuparit muodostavat *säännöllisen sulkurakenteen*. Säännöllisessä sulkurakenteessa vasemman- ja oikeanpuoleisten sulkeiden lukumäärä on sama, ja vasemmanpuoleisten sulkeiden lukumäärä millä tahansa pätkällä jonoa on aina suurempi tai yhtäsuuri kuin oikeanpuoleisten sulkeiden, kun jonoa aloitetaan lukemaan alusta vasemmalta oikealle. Lisäksi jokaisessa sulkuparissa vasemmanpuoleista sulkua vastaa seuraava oikealla sijaitseva oikeanpuoleinen sulku siten, että sulkujen väliin jää säännöllinen sulkurakenne. Lukuja c_n kutsutaan *Catalanin luvuiksi* ja sovitaan, että $c_0 = 1$. [3, s. 25–26]

Etsitään suora kaava Catalanin luvuille. Olkoon k pienin luku siten, että $2k$ sulkua jonon alusta, vasemmalta päin läpikäytynä, muodostavat säännöllisen sulkurakenteen. Esimerkiksi jonossa $(())()$ on $k = 2$, ja jonossa $()(())$

on $k = 1$. Jos säännöllisessä sulkurakenteessa on $k = n$, kutsutaan jonoa *primitiiviseksi*. Esimerkiksi jono $(()(()))$ on primitiivinen. Olkoon p_k kaikkien k sulkuparia sisältävien primitiivisten sulkurakenteiden lukumäärä. Nyt primitiivisen sulkurakenteen määritelmän perusteella kaikissa primitiivisissä $2k$-pituisissa sulkurakenteissa ensimmäinen ja viimeinen sulku vastaavat toisiaan, ja näiden sulkujen välissä on $(2k-2)$-pituinen säännöllinen sulkurakenne. Selvästi siis p_k on yhtä kuin $(2k-2)$-mittaisten säännöllisten sulkurakenteiden lukumäärä eli c_{k-1}. [6, s. 40]

Nyt kaikkien säännöllisten sulkurakenteiden ensimmäiset $2k$ sulkua voidaan valita p_k eli c_{k-1} tavalla, ja koska loput $n-k$ sulkuparia muodostavat säännöllisen sulkurakenteen, voidaan ne valita selvästi c_{n-k} tavalla. Siis kaikkien n sulkuparia sisältävien säännöllisten sulkurakenteiden lukumäärä on

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} c_{k-1}c_{n-k}, \text{ missä } n > 0, c_0 = 1 \text{ ja } c_i = 0, \text{ kun } i < 0. \tag{4.15}$$

Yhtälön (4.15) oikea puoli selvästi muistuttaa kahden tavallisen generoivan funktion tulon kertoimia, joten tässä ei selvästikään kannata valita eksponentiaalista generoivaa funktiota, vaan valitaan generoivaksi funktioksi $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Kerrotaan yhtälö (4.15) puolittain termillä x^n ja summataan puolittain yli indeksin n määrittelyalueen. Tällöin, koska $c_0 = 1$, saadaan yhtälön vasemmalle puolelle $C(x) - 1$. Oikealle puolelle puolestaan lauseen 4.5 perusteella, ja koska $c_i = 0$, kun $i < 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_{k-1}c_{n-k}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} x \sum_{k=0}^{n} c_{k-1}c_{n-k}x^{n-1} \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} c_{k-1}c_{n-k}x^{n-1} \\
&= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{(n+1)-1} c_{(k+1)-1}c_{(n+1)-(k+1)}x^{(n+1)-1} \\
&= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}x^n \\
&= x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= xC(x)^2.
\end{aligned}$$

Nyt siis saadaan generoivien funktioiden yhtälö

$$C(x) - 1 = xC(x)^2, \tag{4.16}$$

ja siis

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{4.17}$$

Jos tässä valittaisiin ratkaisuksi $C(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$, niin kun $x \to 0$, niin $C(x) \to \infty$. Mutta tiedetään, että $C(0) = c_0 = 1$. Jos taas valittaisiin $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, niin L'Hôspitalin säännön perusteella, koska $\frac{\frac{1}{2}\cdot 4}{2\sqrt{1-4x}} \to 1$, kun $x \to 0$, niin myös $C(x) \to 1$, kun $x \to 0$. Selvästi siis $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. [6, s. 40–41]

Nyt Newtonin laajennetun binomikaavan (2.9) ja kaavan (2.11) perusteella, kun merkitään $y = -4x$, saadaan lauseke $\sqrt{1-4x}$ muokattua seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
(1+y)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} y^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(2n-1)} y^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{n!(2n-n)!} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)} y^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{n!n!} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{-1}{(2n-1)} y^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)!}{n!n!} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{1}{(2n-1)} y^n \\
&= 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{y^n}{n} \\
&= 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{y^n}{n} \\
&= 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{y^n}{n}.
\end{aligned}
$$

Kun edelliseen sijoitetaan takaisin $y = -4x$, saadaan

$$
1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{(-4x)^n}{n} = 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{4.18}
$$

Kun yhtälön (4.18) tulos sijoitetaan generoivan funktion $C(x)$ yhtälöön, saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &= \frac{1 - 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^n}{n}}{2x} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n,
\end{aligned}
$$

mistä selvästi nähdään, että termin x^n kerroin, eli haettu suora kaava Catalanin luvuille c_n, on

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \text{ missä } n \geq 0. \tag{4.19}$$

(Vrt. [3, s. 27])

Edellä kaavan (4.17) merkin valinnassa sovellettiin analyysia, kuten aiemmin esimerkissä 4.2 on tehty. Aiemmin on myös mainittu, että tarvittaessa analyysia voidaan käyttää apuvälineenä laskutoimituksissa ilman, että se vaikuttaa ratkaisun validiuteen, vaikka toimitaankin muodollisten sarjojen renkaassa.

Esimerkki 4.9. Kirjainten *uudelleenjärjestyksellä* tarkoitetaan n:n kirjaimen permutaatiota, missä yksikään kirjain ei uudelleenjärjestyksessä pysy paikoillaan. Siis yksikään kirjain ei peilaudu tismalleen samaan paikkaan, missä oli alunperin. Olkoon n kirjainta sisältävien uudelleenjärjestysten lukumäärä D_n. Etsitään suora kaava n:n kirjaimen uudelleenjärjestyksille D_n, ja valitaan jonon $(D_n)_{n=0}^{\infty}$ generoivaksi funktioksi eksponentiaalinen generoiva funktio $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!}$.

Selvästi niiden uudelleenjärjestysten, joissa tasan k kirjainta, missä $k \leq n$, pysyy paikoillaan, lukumäärä on D_{n-k}. Nyt binomikertoimen määritelmän perusteella k paikallaan pysyvää kirjainta n kappaleesta kirjaimia, voidaan valita $\binom{n}{k}$:lla tavalla. Tiedetään lisäksi, että kaikkien n kirjainta sisältävien permutaatioiden lukumäärä on $n!$, ja toisaalta kaikissa mahdollisissa n kirjainta sisältävissä permutaatioissa on jokin joukko, vaikka tyhjä joukko, paikallaan pysyviä kirjaimia. Saadaan siis yhtälö

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}, \text{ missä } n \geq 0. \tag{4.20}$$

Nyt, kun yhtälö (4.20) kerrotaan puolittain termillä $x^n/n!$ ja summataan puolittain yli luvun n määrittelyalueen, saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \frac{x^n}{n!}. \tag{4.21}$$

Tästä saadaan lauseen 4.12 perusteella

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!}. \tag{4.22}$$

Kaavojen (2.7) ja (2.8) perusteella, yhtälö (4.22) saadaan muotoon

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x),$$

eli saadaan yhtälö generoivalle funktiolle $D(x)$, ja siis

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \tag{4.23}$$

Nyt yhtälön (4.23) oikealle puolelle saadaan kaavojen (2.8) ja (2.7) perusteella

$$\begin{aligned}\frac{e^{-x}}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n.\end{aligned}$$

Kun näin saadusta generoivan funktion yhtälöstä

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n$$

poimitaan termin x^n kerroin, saadaan yhtälö

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},$$

mistä saadaan helposti ratkaistua haettu kaava uudelleenjärjestelyjen lukumäärälle D_n, eli

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{4.24}$$

[6, s. 42]

Lause 4.13. *Jos* $f \overset{efg}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ *ja* $k \in \mathbb{Z}_+$*, niin*

$$f^k \overset{efg}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right)_{n=0}^{\infty}.$$

[6, s. 42]

Todistus. Olkoon $f \overset{efg}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Nyt siis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Väitetään, että

$$f^k \overset{efg}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} a_{n_1} \cdots a_{n_k} \right)_{n=0}^{\infty}$$

eli että

$$f(x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!} a_{n_1}\cdots a_{n_k} \frac{x^n}{n!}.$$

Todistetaan väite induktiolla luvun k suhteen.

Nyt selvästi väite on tosi, kun $k=1$. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $k=m$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$, ja väitetään, että väite on tosi, kun $k=m+1$. Nyt induktio-oletuksen ja lauseen 4.12 perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
f(x)^{m+1} =& f(x)\cdot f(x)^m \\
=& f(x)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_m}\frac{x^n}{n!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_m}\frac{x^n}{n!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} \left(\binom{n}{r} a_r \sum_{n_1+\cdots+n_m=n-r} \frac{(n-r)!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_m} \right)\right) \frac{x^n}{n!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} \left(\frac{n!}{r!(n-r)!} a_r \sum_{n_1+\cdots+n_m=n-r} \frac{(n-r)!}{n_1!\cdots n_m!} a_{n_1}\cdots a_{n_m} \right)\right) \frac{x^n}{n!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{n_1+\cdots+n_m+r=n-r+r} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!r!} a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_m}a_r \right)\right) \frac{x^n}{n!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_{m+1}=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!n_{m+1}!} a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_{m+1}} \right) \frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

eli induktioväite pätee. Siis väite on induktioperiaatteen nojalla tosi ja

$$f^k \overset{efg}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_k} \right)_{n=0}^{\infty}.$$

□

5 Dirichlet'n sarjan generoiva funktio

Tähän mennessä tässä tutkielmassa käsitellyt generoivat funktiot ovat olleet potenssisarjoja. Tässä luvussa esitellään vielä lyhyesti yhdentyyppinen generoiva funktio, *Dirichlet'n sarjan generoiva funktio*, jonka käyttö korostuu lukuteoriaa ja kombinatoriikkaa käsittelevissä ongelmissa. Kuten aiemmissa luvuissa, myös tässä on kuitenkin lähtökohtana generoivien funktioiden muodollinen teoria.

5.1 Määritelmiä

Tässä alaluvussa käydään lyhyesti läpi Dirichlet'n sarjan ja Dirichlet'n sarjan generoivan funktion määritelmät, sekä joitain muita tässä luvussa käytettäviä määritelmiä ja merkintöjä. Tämän alaluvun tarkoituksena onkin ainoastaan antaa riittävä tausta seuraavan alaluvun sisällön käsittelyyn, eikä siksi syvennytä tarkemmin määritelmien sisältöön. Lisäksi on huomattavaa, että tässä tutkielmassa joukolla $\mathbb{P}$ tarkoitetaan kaikkien alkulukujen joukkoa.

Määritelmä 5.1. Muodollista sarjaa

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \text{ missä } a_n \in \mathbb{C}, \tag{5.1}$$

kutsutaan *tavalliseksi Dirichlet'n sarjaksi.*

Määritelmä 5.2. Muodollista Dirichlet'n sarjaa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{5.2}$$

kutsutaan *Riemannin zeta-funktioksi.* [6, s. 54]

Määritelmä 5.3. Jonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *Dirichlet'n sarjan generoivaksi funktioksi* kutsutaan tavallista Dirichlet'n sarjaa

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{5.3}$$

[6, s. 52]

Määritelmä 5.4. Merkinnällä $a|b$, missä $a, b \in \mathbb{Z}$, tarkoitetaan, että a jakaa luvun b, eli että $b = ac$, missä $c \in \mathbb{Z}$.

Määritelmä 5.5. Merkinnällä $\mathrm{syt}(n, m)$, missä $n, m \in \mathbb{Z}$, tarkoitetaan lukujen n ja m *suurinta yhteistä tekijää*, eli suurinta positiivista kokonaislukua k, jolle sekä $k|n$, että $k|m$.

Määritelmä 5.6. *Aritmeettisella funktiolla* tarkoitetaan funktiota positiivisten kokonaislukujen joukolta $\mathbb{Z}_+$ kompleksilukujen joukkoon $\mathbb{C}$. Aritmeettinen funktio f on *multiplikatiivinen*, jos se toteuttaa ehdon

$$f(mn) = f(m)f(n), \text{ missä } n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

kun n ja m ovat keskenään jaottomat, eli $\mathrm{syt}(n, m) = 1$. [6, s. 54]

Määritelmä 5.7. Dirichlet'n sarjan generoivalla funktiolla $A(s)$ on *käänteisfunktio Dirichlet'n konvoluution suhteen*, jos on olemassa Dirichlet'n sarja $B(s)$ siten, että

$$A(s)B(s) = 1.$$

[3, s. 105]

5.2 Dirichlet'n sarjan generoivan funktion laskuoppia

Tässä alaluvussa käydään läpi lyhyesti Dirichlet'n sarjan generoivan funktion käyttöä ja laskuoppia. Tähän on edellisen luvun laskusääntöjä käsittelevistä lauseista otettu vain pari tärkeintä, sillä generoivan funktion erilaisen luonteen vuoksi muut "laskusäännöt" eivät Dirichlet'n sarjan tapauksessa ole niin käyttökelpoisia. Toisaalta, Dirichlet'n sarjan tapauksessa löytyy täysin toisenlaisia laskusääntöjä, joiden käyttömahdollisuudet ovat ylivertaisia tietyn tyyppisiä ongelmia käsiteltäessä, erityisesti kun käsitellään multiplikatiivisia aritmeettisia funktioita. Kuten edellisessä luvussa, myös tässä, on laskusääntöjä koskeviin lauseisiin täydennetty todistukset, jos ne lähdeteoksessa on sivuutettu.

Määritelmä 5.8. Merkinnällä $f(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=1}^{\infty}$ tarkoitetaan, että $f(s)$ on jonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ Dirichlet'n sarjan generoiva funktio eli että $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. [6, s. 52]

Lause 5.1. *Jos $f(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $g(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} (b_n)_{n=1}^{\infty}$, niin*

$$f(s)g(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} \left(\sum_{d|n} a_d b_{n/d} \right)_{n=1}^{\infty}.$$

[6, s. 53]

Todistus. Olkoon $f(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $g(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} (b_n)_{n=1}^{\infty}$, eli $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ja $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$. Nyt

$$\begin{aligned}
f(s)g(s) =& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \\
=& (a_1 + a_2 2^{-s} + \cdots + a_n n^{-s})(b_1 + b_2 2^{-s} + \cdots + a_n n^{-s}) \\
=& (a_1 b_1) + (a_1 b_2) 2^{-s} + \cdots + (a_{n_i} b_{n_j}) {n_i}^{-s} {n_j}^{-s} + \cdots \\
=& (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) 2^{-s} + (a_1 b_3 + a_3 b_1) 3^{-s} \\
& + (a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1) 4^{-s} + (a_1 b_5 + a_5 b_1) 5^{-s} + \cdots \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{kl=n} a_k b_l \right) n^{-s} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} a_d b_{n/d}}{n^s}.
\end{aligned}$$

Siis

$$f(s)g(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} \left(\sum_{d|n} a_d b_{n/d} \right)_{n=1}^{\infty}.$$

□

Lause 5.2. *Jos* $f(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ja* $k \in \mathbb{Z}_+$*, niin*

$$f(s)^k \overset{Dir}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right)_{n=1}^{\infty}.$$

[6, s. 53]

Todistus. Olkoon $f(s) \overset{Dir}{\leftrightarrow} (a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$, eli nyt $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. Väitetään, että tällöin

$$f(s)^k \overset{Dir}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right)_{n=1}^{\infty}$$

eli että

$$f(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{n_1 n_2 \cdots n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k}}{n^s}.$$

Todistetaan väite induktiolla luvun k suhteen. Nyt selvästi väite pätee, kun $k = 1$, sillä tällöin

$$f(s)^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{n_1 = n} a_{n_1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $k = m$, ja väitetään, että väite pätee myös, kun $k = m + 1$. Todistetaan induktioväite. Nyt induktio-oletuksen ja lauseen 5.1 perusteella

$$\begin{aligned}
f(s)^{m+1} =& f(s) \cdot f(s)^m \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{n_1 n_2 \cdots n_m = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m}}{n^s} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{d|n} a_d \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_m = n/d} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m} \right) \right\} n^{-s} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{d_1} \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_m = n/d_1} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m} \right) \right. \\
& \left. + \cdots + a_{d_l} \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_m = n/d_l} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m} \right) \right\} n^{-s} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_m d_1 = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m} a_{d_1} \right) \right. \\
& \left. + \cdots + \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_m d_l = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_m} a_{d_l} \right) \right\} n^{-s} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_{m+1} = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_{m+1}} \right) n^{-s},
\end{aligned}$$

eli induktioväite pätee. Siis induktioperiaatteen nojalla väite on tosi, ja

$$f(s)^k \overset{Dir}{\leftrightarrow} \left(\sum_{n_1 n_2 \cdots n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right)_{n=1}^{\infty}.$$

□

Dirichlet'n sarjan generoiva funktio jonolle $(1)_{n=1}^{\infty}$ on määritelmän 5.2 mukainen Riemannin zeta-funktio $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Nyt lauseen 5.1 perusteella

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s},$$

missä $d(n)$ on luvun n kaikkien jakajien lukumäärä. Samoin lauseen 5.2 perusteella, $\zeta^k(s)$ tuottaa generoivan funktion jonolle, jonka jäsenet ovat luvun n järjestettyjen tekijöihin jakojen lukumäärät, missä tekijöitä on k kappaletta. [6, s. 54]

Jokainen positiivinen kokonaisluku n voidaan esittää yksikäsitteisesti alkulukutekijöidensä potenssien tulona, kun lukujen järjestystä ei oteta huomioon. Siis kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$ on voimassa

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \text{ missä } p_i \in \mathbb{P} \text{ ja } a_i \in \mathbb{Z}_+, \text{ kun } 1 \leq i \leq r. \tag{5.4}$$

Tästä seuraa, että määritelmän 5.6 mukaisen multiplikatiivisen aritmeettisen funktion $f(n)$ arvo on määriteltävissä luvun n alkulukutekijöiden potenssien antamien funktion f arvojen tulona. Siis

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_r^{a_r}), \text{ missä } p_i \in \mathbb{P} \text{ ja } a_i \in \mathbb{Z}_+, \text{ kun } 1 \leq i \leq r.$$

[6, s. 54]

Esimerkki 5.1. Olkoon $f(n)$ sellainen aritmeettinen multiplikatiivinen funktio, että kaikille $p \in \mathbb{P}$ ja $m \in \mathbb{Z}_+$ on voimassa $f(p^m) = p^{2m} (= (p^m)^2)$. Tällöin kaavan (5.4) perusteella, ja koska $f(n)$ on multiplikatiivinen, on oltava $f(n) = n^2$ kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$. Todellakin, jos $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$, missä $p_i \in \mathbb{P}$ ja $a_i \in \mathbb{Z}_+$, kun $1 \leq i \leq r$, niin

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(\prod_i p_i^{a_i} \right) = \prod_i f(p_i^{a_i}) \\ &= \prod_i p_i^{2a_i} = \left\{ \prod_i p_i^{a_i} \right\}^2 \\ &= n^2. \end{aligned}$$

[6, s. 54–55]

Toinen, vähemmän ilmeinen esimerkki multiplikatiivisesta funktiosta, on $d(n)$, eli luvun n jakajien lukumäärä. Esimerkiksi

$$6 = d(12) = d(3 \cdot 4) = d(3)d(4) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Täsmällisemmin, olkoot $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ keskenään jaottomia. Tällöin tulon mn jokainen jakaja d on luvun m jakajan d' ja luvun n jakajan d'' yksikäsitteinen tulo. Nyt voidaan valita $d' = \mathrm{syt}(d, m)$ ja $d'' = \mathrm{syt}(d, n)$. Siis tulon mn jakajien lukumäärä on luvun m jakajien lukumäärä kertaa luvun n jakajien lukumäärä. [6, s. 55]

Lause 5.3. *Olkoon $f(n)$ multiplikatiivinen aritmeettinen funktio. Tällöin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \{1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + f(p^3)p^{-3s} + \cdots\}. \tag{5.5}$$

[6, s. 55]

Todistus. (Vrt. [6, s. 55–56]) Olkoon $f(n)$ multiplikatiivinen aritmeettinen funktio. Nyt

$$\begin{aligned}
&\prod_{p \in \mathbb{P}} \{1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + f(p^3)p^{-3s} + \cdots\} \\
&=(1 + f(2)2^{-s} + f(2^2)2^{-2s} + f(2^3)2^{-3s} + \cdots)\times \\
&\quad (1 + f(3)3^{-s} + f(3^2)3^{-2s} + f(3^3)3^{-3s} + \cdots)\times \\
&\quad (1 + f(5)5^{-s} + f(5^2)5^{-2s} + f(5^3)5^{-3s} + \cdots)\times \\
&\quad (1 + f(7)7^{-s} + f(7^2)7^{-2s} + f(7^3)7^{-3s} + \cdots) \times \cdots
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Jotta yllä oleva ääretön tulo saadaan kerrottua "auki", otetaan jokaisen tulon sulkuparin sisältä vuoron perään erilleen täsmälleen yksi summan termi, ja kerrotaan näin saadut termit keskenään. Näin saatu ääretön määrä kertoimia summataan yhteen, ja tuloksena on tällöin äärettömän tulon sijasta ääretön summa. Tässä summassa jokainen termi on muotoa $(f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\ldots)(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots)^{-s}$, missä $p_i \in \mathbb{P}$, $p_i < p_{i+1}$ ja $a_i \in \mathbb{N}$, kun $i \geq 1$. Lisäksi, koska funktio $f(n)$ on multiplikatiivinen ja eri alkulukujen potenssit ovat keskenään jaottomia, saadaan summan termit muotoon

$$\frac{f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\ldots}{(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots)^s} = \frac{f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots)}{(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots)^s}, \text{ missä } p_i \in \mathbb{P},\ p_i < p_{i+1} \text{ ja } a_i \in \mathbb{N},$$

kun $i \geq 1$.

Nyt tiedetään, että jokainen positiivinen kokonaisluku n voidaan esittää alkulukutekijöidensä tulona muodossa $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$, missä $p_i \in \mathbb{P}$ ja $a_i \in \mathbb{Z}_+$, kun $1 \leq i \leq r$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$, missä $p_i \in \mathbb{P}$, $p_i < p_{i+1}$ ja $a_i \in \mathbb{N}$. Tässä vain alkulukutekijöiden, joita ei luvun n alkulukutekijöihin jaossa esiinny, potenssi (eli a_i) on yhtä kuin 0.

Nyt siis kaikille positiivisille kokonaisluvuille n on olemassa yksikäsitteinen termi tulon (5.6) summamuodossa. Tämä termi on muotoa $\frac{f(n)}{n^s}$, kun $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$, missä $p_i \in \mathbb{P}$, $p_i < p_{i+1}$ ja $a_i \in \mathbb{N}$. Siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \{1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + f(p^3)p^{-3s} + \cdots\}.$$

□

Kaavasta (5.5) nähdään helposti, että multiplikatiivinen funktio on täysin määriteltävissä sen alkulukupotensseille antamien arvojen kautta. Kaavassa vasemmalla puolella $f(n)$ saa arvot kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla, kun taas oikealla puolella arvot lasketaan ainoastaan alkulukujen potensseille.

Esimerkki 5.2. Olkoon $f(n)$ sellainen aritmeettinen multiplikatiivinen funktio, että $f(n) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Selvästi funktion $f(n)$ Dirichlet'n sarjan generoiva funktio on $\zeta(s)$. Nyt lauseen 5.3 ja geometrisen sarjan summan (2.7) perusteella

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \{1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots\} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left\{ \frac{1}{1 - p^{-s}} \right\} \\ &= \frac{1}{\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

[6, s. 57]

Määritelmä 5.9. Multiplikatiivista aritmeettista funktiota $\mu(n)$, missä

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{t(n)}, & \text{missä } t(n) \text{ on luvun } n \text{ alkulukutekijöiden lukumäärä,} \\ & \text{jos jokaisen alkulukutekijän potenssi on korkeinaan 1,} \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

kutsutaan *Möbiuksen funktioksi.* (Vrt. [3, s. 105])

Möbiuksen funktio voidaan määritellä multiplikatiivisena funktiona niin, että

$$\mu(p^a) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a = 0, \\ -1, & \text{jos } a = 1, \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases} \tag{5.8}$$

missä $p \in \mathbb{P}$ ja $a \in \mathbb{N}$. [6, s. 57]

Lause 5.4. *Möbiuksen funktion $\mu(n)$ Dirichlet'n sarjan generoiva funktio on Riemannin zeta-funktion $\zeta(s)$ käänteisfunktio Dirichlet'n konvoluution suhteen, eli*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}. \tag{5.9}$$

[6, s. 57]

Todistus. Olkoon $\mu(n)$ määritelmän 5.9 mukainen Möbiuksen funktio. Nyt lauseen 5.3 perusteella Dirichlet'n sarjan generoiva funktio multiplikatiiviselle funktiolle $\mu(n)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \{1 + \mu(p)p^{-s}\} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \{1 - p^{-s}\}.$$

Nyt, koska kaavan (5.7) perusteella $\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})}$, selvästi

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

□

Lause 5.5. *Olkoot jonot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujonoja siten, että*

$$a_n = \sum_{d|n} b_d, \quad \text{missä } n \geq 1. \tag{5.10}$$

Tällöin

$$b_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d, \quad \text{missä } n \geq 1. \tag{5.11}$$

[6, s. 57–58]

Todistus. (Vrt. [6, s. 57–58]) Olkoot jonot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujonoja siten, että yhtälö (5.10) on voimassa. Olkoot $A(s)$ ja $B(s)$ jonojen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ Dirichlet'n sarjan generoivia funktioita, eli $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ja $B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$.

Kerrotaan yhtälö (5.10) puolittain termillä n^{-s} ja summataan puolittain yli luvun $n \geq 1$. Saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} b_d}{n^s}. \tag{5.12}$$

Nyt lauseen 5.1 perusteella

$$B(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} b_d}{n^s},$$

eli kaava (5.12) voidaan kirjoittaa muotoon

$$A(s) = B(s)\zeta(s). \tag{5.13}$$

Kerrotaan yhtälö (5.13) puolittain Möbiuksen funktion generoivalla funktiolla $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$, jolloin saadaan

$$B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} A(s). \tag{5.14}$$

Jälleen lauseen 5.1 perusteella, edellinen saadaan muotoon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d}{n^s}, \tag{5.15}$$

mistä nähdään helposti termin $\frac{1}{n^s}$ kertoimet eli

$$b_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d, \text{ missä } n \geq 1. \tag{5.16}$$

□

Lausetta 5.5 kutsutaan *Möbiuksen käänteiskaavaksi.*

Esimerkki 5.3. *Bittijonoksi* kutsutaan lukujonoa, joka koostuu n kappaleesta peräkkäin liitettyjä lukuja 1 ja 0. Bittijono on *primitiivinen*, jos jonoa ei voida esittää liittämällä n/d kappaletta d-alkioista identtistä bittijonoa, missä $d \neq n$ ja $d|n$, peräkkäin. Esimerkiksi jono "100100100" ei ole primitiivinen, mutta jono "1101" on. Etsitään kaava primitiivisten n-alkioisten bittijonojen lukumäärälle $f(n)$.

Nyt selvästi kaikkien n-alkioisten bittijonojen lukumäärä on 2^n. Lisäksi jokainen n-alkioinen lukujono voidaan esittää yksikäsitteisesti n/d kappaleella peräkkäin liitettyjä identtisiä d-alkioisia primitiivisiä bittijonoja, missä $d|n$ ja $d \leq n$. Siis primitiivisten bittijonojen tapauksessa $d = n$. Saadaan täten

$$2^n = \sum_{d|n} f(d), \tag{5.17}$$

missä $f(d)$ on primitiivisten d-alkioisten bittijonojen lukumäärä. Nyt yhtälöstä (5.17) saadaan lauseen 5.5 perusteella ratkaistua kaava luvuille $f(n)$. Siis

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^d. \tag{5.18}$$

Viitteet

[1] Aigner, Martin. 1979/1997: *Combinatorial Theory.* Classics in Mathematics Vol. 234. Springer-Verlag, Berlin.

[2] Aigner, Martin. 2007: *A Course in Enumeration.* Graduate Text in Mathematics Vol. 238. Springer-Verlag, Berlin.

[3] Lando, Sergei K. 2003: *Lectures on Generating Functions.* Student Mathematical Library Vol. 23. American Mathematical Society, USA.

[4] Stanley, Richard P. 1986/1997: *Enumerative Combinatorics Volume 1.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol. 49. Cambridge University Press, New York.

[5] Stanley, Richard P. 1999: *Enumerative Combinatorics Volume 2.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol. 62. Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Wilf, Herbert S. 1990: *generatingfunctionology.* Academic Press, Inc, San Diego, CA.

[7] Wilf, Herbert S. 1990/1994: *generatingfunctionology.* 2. uud.painos. Academic Press, Inc [viitattu 5.2.2013].
Saatavissa: <http://www.math.upenn.edu/ wilf/gfology2.pdf>