TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Jari Ahonen

Trooppisen algebran peruslause

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka

Helmikuu 2013

Tiivistelmä

Tutkielmassa käsitellään yhden muuttujan trooppisia polynomeja ja trooppisen algebran peruslausetta. Luvussa 2 osoitetaan, että trooppinen algebra on semirengas, sekä esitetään muutamia esimerkkejä trooppisesta aritmetiikasta. Luvussa 3 esitetään useita määritelmiä ja apulauseita yhden muuttujan trooppisille polynomeille. Trooppiset polynomit voidaan jakaa ekvivalenssiluokkiin, joille voidaan määritellä yksikäsitteiset edustajat – pienikertoimisimmat polynomit, joiden selvittämiseen tässä tutkielmassa esitetään myös algoritmeja. Lisäksi luvussa todistetaan trooppisen algebran peruslause rationaalikertoimisille trooppisille polynomeille ja käsitellään trooppisten polynomien nollakohtia eli kulmakohtia.

Tutkielman lukijan oletetaan osaavan käsitellä yksinkertaisia epäyhtälöitä ja yhden muuttujan polynomeja sekä funktioita. Periaatteessa hyvin lukiomatematiikan opinnot suorittanut henkilö pystyy seuraamaan tutkielman kulkua, mutta vähintään yliopistotason aineopinnot matematiikassa ovat suotavia.

Asiasanat Semirengas, matematiikka, tropical algebra, fundamental theorem

Sisältö

1 Johdanto

Trooppinen algebra – jota kutsutaan myös min-plus- tai max-plus-algebraksi määritelmästä riippuen – on suhteellisen uusi matematiikan osa-alue. Sen pani alulle brasilialainen matemaatikko ja tietojenkäsittelytieteilijä Imre Simon 1980-luvulla, mutta se herätti laajempaa mielenkiintoa vasta vuosituhannen vaihtumisen jälkeen. Alunperin teoriaa kehitettiin diskreetin matematiikan ja optimoinnin saralla. Viime aikoina trooppiselle algebralle on alettu kehittää sovelluksia muun muassa kombinatoriikassa, laskennallisessa algebrassa ja algebrallisessa geometriassa. Trooppinen algebra -nimenä on kunnian osoitus Imre Simonille. [3, s. 1.]

Monia klassisen algebrallisen geometrian tunnettuja lauseita on todistettu trooppisessa algebrassa. Esimerkkinä tästä on Bézout'n lause [6, lause 1.3.2 ja seuraus 1.3.4]. Nuoruudestaan huolimatta trooppisen algebran pohjalta on tehty jo monenlaisia sovelluksia [7, 9, 10].

Rakenteeltaan tämä tutkielma noudattelee Nathan Griggin tutkielmaa [4]. Luvussa 2 määritellään lyhyesti semirengas ja osoitetaan, että trooppinen algebra on tällainen. Tämä on välttämätöntä, jotta myöhemmissä vaiheissa voidaan perustellusti laskea näiden todistettujen sääntöjen mukaisesti. Luvussa esitetään myös esimerkkejä alkeellisesta trooppisesta aritmetiikasta.

Alaluvuissa 3.1 ja 3.2 annetaan tarpeellisia määritelmiä ja apulauseita trooppisille polynomeille ja funktioille. Tarkastelussa rajoitutaan rationaalikertoimisiin polynomeihin. Alaluvussa 3.3 voidaan näiden alustusten avulla todistaa trooppisen algebran peruslause, joka on muotoiltu seuraavasti:

> Jokainen yhden muuttujan rationaalikertoiminen trooppinen polynomi voidaan esittää funktionaalisesti ekvivalentissa muodossa lineaaristen, rationaalikertoimisten trooppisten polynomien tulona.

Todistusta lähetystytään näkökulmasta, jossa trooppiset polynomit voidaan jaotella ekvivalenssiluokkiin funktionaalisen ekvivalenssin mukaan. Tämän jälkeen osoitetaan ekvivalenssiluokille sopiva edustaja – niin sanottu pienikertoimisin polynomi – jolle peruslause voidaan helpoiten osoittaa. Alaluvussa 3.4 määritellään trooppisille polynomeille merkityksellinen nollakohtien joukko, sillä perinteinen määrittely ei anna mitään hyödyllistä tai merkityksellistä joukkoa trooppisessa algebrassa.

Lukijalta riittää hyvinkin alkeellinen perusosaaminen matematiikasta, sillä todistuksissa ja esimerkeissä käsitellään pääosin yksinkertaisia yhden muuttujan funktioita ja polynomeja sekä epäyhtälöitä. Todistusten ja päättelyketjujen seuraamista auttaa, jos on opiskellut Tampereen yliopiston matematiikan opintoja tai jotain näitä vastaavia opintoja (ks. esim. [1]).

2 Trooppinen semirengas

Ennen trooppiseen algebraan ja yhden muuttujan trooppisiin polynomeihin syventymistä, on välttämätöntä selvittää käytettävissä olevat aritmeettiset työkalut. Struktuurin algebrallinen luokittelu on tähän helpoin keino.

Määritelmä 2.1. (vrt. [8, s. 9–10]). Olkoon R joukko ja olkoot $\oplus$ sekä $\odot$ binäärioperaatioita. *Semirengas* on järjestetty kolmikko $(R, \oplus, \odot)$ siten, että

(i) pari $(R, \oplus)$ on Abelin monoidi,

(ii) pari $(R, \odot)$ on monoidi,

(iii) yhteenlaskun neutraalialkio neutraloi kertolaskussa joukon R alkiot ja

(iv) kertolasku $\odot$ osittelee yhteenlaskun $\oplus$ yli.

Avaamalla määritelmän 2.1 käsitteet saadaan semirenkaalle määritelmä, jossa säännöt ovat eriteltynä käytännöllisempään muotoon.

Määritelmä 2.2. (vrt. [5, s. 5]). Olkoon R joukko ja olkoot $\oplus$ sekä $\odot$ binäärioperaatioita. *Semirengas* on järjestetty kolmikko $(R, \oplus, \odot)$, jolle pätevät seuraavat ehdot:

(i) Yhteenlaskun assosiatiivisuus eli liitännäisyys:
$\forall a, b, c \in R : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

(ii) Yhteenlaskun kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus:
$\forall a, b \in R : a \oplus b = b \oplus a$.

(iii) Yhteenlaskun neutraalialkio eli nolla-alkio:
$\exists\ 0\ \forall a \in R : a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$.

(iv) Kertolaskun assosiatiivisuus: $\forall a, b, c \in R : (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$.

(v) Kertolaskun neutraalialko eli ykkösalkio: $\exists\ 1\ \forall a \in R : a \odot 1 = 1 \odot a = a$.

(vi) Yhteenlaskun neutraalialkio neutraloi kertolaskussa joukon R:
$\forall a \in R : a \odot 0 = 0 \odot a = 0$.

(vii) Osittelulaki eli distributiivisuus:
$\forall a, b, c \in R : a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c \quad \wedge \quad (a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$.

Renkaan määritelmässä ei mainita nolla-alkion ominaisuutta neutraloida joukko R kertolaskussa, koska ominaisuus seuraa suoraan yhteenlaskun vasta-alkioiden olemassaolosta. Semirenkaissa vasta-alkioita ei ehdottomasti ole, mutta neutraloimisominaisuus kuuluu semirenkaan ominaisuuksiin, minkä vuoksi se on erikseen ilmoitettava.

Semirengasta $\mathcal{T} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ kutsutaan *reaaliseksi trooppiseksi semirenkaaksi*. Vastaavalla tavalla voidaan määritellä rationaalinen trooppinen semirengas $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$. Laskutoimituksia kutsutaan *trooppiseksi yhteenlaskuksi* $\oplus$ ja *trooppiseksi kertolaskuksi* $\odot$. Laskutoimituksia $+$ ja $\cdot$ käytetään klassiselle yhteen- ja kertolaskulle. Struktuurin $\mathcal{Q}$ laskutoimitukset määritellään seuraavasti:

$$a \oplus b := \min\{a, b\}$$

$$a \odot b := a + b.$$

Osoitetaan, että min-plus-algebra $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \min, +)$ on semirengas.

Lause 2.1. *Algebrallinen struktuuri* $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \min, +)$ *on semirengas.*

Todistus. (vrt. [2, s. 2–3]). Osoitetaan, että annetulle struktuurille pätee määritelmän 2.2 kaikki kohdat. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

(i) Nyt $(a \oplus b) \oplus c = \min\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{a, \min\{b, c\}\} = a \oplus (b \oplus c)$.

(ii) Huomataan, että $a \oplus b = \min\{a, b\} = \min\{b, a\} = b \oplus a$.

(iii) Havaitaan myös, että $\infty \oplus a \overset{(ii)}{=} a \oplus \infty = \min\{a, \infty\} = a$. Siis ∞ on yhteenlaskun $\oplus$ nolla-alkio.

(iv) Kertolasku $\odot$ on triviaalisti assosiatiivinen, koska klassinen yhteenlasku $+$ on assosiatiivinen,

(v) ja sen neutraalialkio on $0 \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

(vi) Yhteenlaskun nolla-alkiolle ∞ pätee myös, että $a \odot \infty = a + \infty = \infty$ ja $\infty \odot a = \infty + a = \infty$.

(vii) Lopuksi todetaan, että $a \odot (b \oplus c) = a + \min\{b, c\} = \min\{a + b, a + c\} = a \odot b \oplus a \odot c$. Vastaavasti $(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$.

Semirenkaan määritelmän 2.2 kaikki kohdat pätevät, joten $\mathcal{Q}$ on semirengas. Se ei kuitenkaan ole rengas, koska ei ole olemassa yhteenlaskun vasta-alkioita. Esimerkiksi

$$1 \oplus a = \min\{1, a\} \leq 1 < \infty \text{ aina, kun } a \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}.$$

Siis $\forall a \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} : 1 \oplus a \neq \infty$, joten kaikilla alkioilla ei ole yhteenlaskun vasta-alkiota. $\square$

Yksinkertaistamiseksi kertolaskumerkit $\cdot$ ja $\odot$ voidaan jättää pois, jos ne ovat muuten erotettavissa asiayhteyden perusteella. Esimerkiksi $1 + a \cdot b = 1 + ab$ ja $1 \oplus 2 \odot c = 1 \oplus 2c$. Myös potenssimerkinnät erotetaan asiayhteyden perusteella. Esimerkiksi $x \odot x \oplus 1 = x^{\odot 2} \oplus 1 = x^2 \oplus 1$. Huomataan lisäksi, että trooppisesti $1 \odot x \neq x$, vaan $x = 0 \odot x$, sillä $1 \odot x = 1 + x$ ja $0 \odot x = 0 + x = x$. Klassisia ja trooppisia laskutoimituksia pyritään käyttämään systemaattisesti keskenään eikä sekoittamalla niitä samassa lausekkeessa.

Huomautus 1. Merkintä $x \in \mathcal{Q}$ tarkoittaa, että $x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Huomautus 2. Jos a, b, $c \in \mathcal{Q}$, niin $a < b$ implikoi $a \odot c < b \odot c$, sillä

$$\begin{aligned} a &< b \quad || + c \\ a + c &< b + c \\ a \odot c &< b \odot c \end{aligned}$$

Toisaalta lisäämällä trooppisesti luku c puolittain ei tuota järkeviä tuloksia. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} 1 &< 2 \quad || \oplus 0 \\ \min\{1, 0\} &< \min\{2, 0\} \\ 0 &< 0. \end{aligned}$$

Epäyhtälöitä voidaan siis muokata trooppisella kertolaskulla $\odot$, mutta ei yhteenlaskulla $\oplus$.

Annetaan muutamia esimerkkejä trooppisesta aritmetiikasta.

Esimerkki 2.1. $3 \odot 7 \oplus \infty \oplus 10 = \min\{7 + 3, \infty, 13\} = 10$.

Esimerkki 2.2. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 8 & 2 & 16 \\ 5 & 6 & 17 \end{pmatrix}$.

Esimerkki 2.3. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

3 Yhden muuttujan trooppiset polynomit

Tässä luvussa käsitellään rationaalikertoimisia trooppisia polynomeja. Luvun päätavoitteena on osoittaa todeksi trooppisen algebran peruslause, jota käytetään vielä trooppisten polynomien nollakohtien joukon tarkastelussa ja siinä, millä tavalla nollakohdat olisi järkevä määritellä.

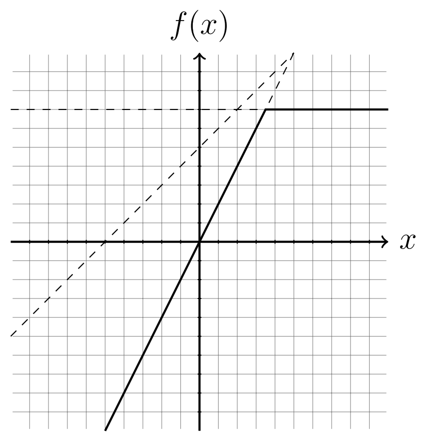
3.1 Polynomit ja funktiot

Trooppisten polynomien määrittely on analoginen jo tuttujen klassisten polynomien määritelmän kanssa.

Määritelmä 3.1 (Trooppinen polynomi)**.** (vrt. [4, s. 5]). *Trooppinen polynomi* $f(x) \in \mathcal{Q}[x]$ määritellään formaalina summana

$$f(x) = \bigoplus_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_0.$$

Esimerkki 3.1. Olkoon $f(x) = x^{\odot 2} \oplus 5 \odot x \oplus 7 = \min\{2 \cdot x, x + 5, 7\}$. Sievennetystä muodosta voidaan piirtää kuvaaja standardikoordinaatistossa. Kuvaajan arvo saadaan funktiojoukon – johon kuuluu $g(x) = 2 \cdot x$, $h(x) = x + 5$ ja $i(x) = 7$ – minimiarvosta muuttujan x arvolla. Kuvassa 1 on esitetty alkuperäinen, paloittain määritelty funktio $f(x)$ ja sen osat.



Kuva 1: Paloittain määritelty funktio $f(x) = \min\{2 \cdot x, x + 5, 7\}$.

Huomautus 3. Jos $f(x) = \bigoplus_{0 \le i \le n} a_i x^i$ on trooppinen polynomi, niin $f(x) \le a_i x^i$ aina, kun $0 \le i \le n$. Jos jollain $x_0 \in \mathcal{Q}$ on olemassa $0 \le k \le n$ siten, että $a_k x_0^k \le a_i x_0^i$ aina, kun $0 \le i \le n$, niin $f(x_0) = a_k x_0^k$

Esimerkistä 3.1 havaitaan, että polynomi $h(x)$ ei vaikuta polynomin $f(x)$ arvojoukkoon. Täten trooppiset polynomit eivät määrittele funktioita yksikäsitteisesti eli eri trooppiset polynomit voivat määritellä saman funktion. Esimerkin 3.1 polynomi $h(x) = 5 \odot x$ voidaan korvata muun muassa polynomilla $j(x) = 4 \odot x$ ja paloittain määritelty funktio $f(x)$ pysyy samana. Tätä ominaisuutta kutsutaan funktionaaliseksi ekvivalenssiksi, jonka perusteella trooppisia polynomeja voidaan luokitella.

Määritelmä 3.2. (vrt. [4, s. 5]). Olkoot $f(x), g(x) \in \mathcal{Q}[x]$. Polynomit f ja g ovat *funktionaalisesti ekvivalentteja* eli $f \sim g$ jos ja vain jos $f(x) = g(x)$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$.

Huomautus 4. Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio, sillä se on refleksiivinen, symmetrinen sekä transitiivinen, mikä on helposti osoitettavissa.

Jos f, g ja h ovat trooppisia polynomeja, niin selvästi $f \sim f$, ja jos $f \sim g$, niin $f(x) = g(x)$, joten $g(x) = f(x)$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$. Täten $g \sim f$. Siis relaatio $\sim$ on refleksiivinen ja symmetrinen.

Jos taas $f \sim g$ ja $g \sim h$, niin $f(x) = g(x)$ ja $g(x) = h(x)$, joten
$f(x) = h(x)$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$. Siis relaatio $\sim$ on myös transitiivinen.

Selvästi kaikki polynomit eivät ole keskenään funktionaalisesti ekvivalentteja. Kuvan 1 kuvaajasta havaitaan, että trooppisen polynomin osat voivat olla merkityksettömiä funktion arvojen kannalta. Intuitiivisesti tuntuu selvältä, että jokaiselle polynomille on funktionaalisesti ekvivalentti muoto, jossa kaikki osat ovat merkityksellisiä polynomin arvojen kannalta. Kuvaajasta havaitaan myös, että "laskemalla" suoria alaspäin kuvaajassa – eli pienentämällä trooppisen polynomin monomin kerrointa – päädytään pienimpään kertoimeen, jolla funktion arvojoukko ei muutu. Näin saadaan polynomille funktionaalisesti ekvivalentti muoto, jossa kertoimet ovat mahdollisimman pienet. Määritellään nyt täsmällisesti trooppisen polynomin pienin kerroin.

Määritelmä 3.3. (vrt. [4, s. 6]). Olkoon $f(x)$ trooppinen polynomi. Polynomin kerroin a_i on *pienin kerroin*, jos polynomi $g(x)$ – joka on saatu polynomista $f(x)$ korvaamalla kerroin a_i luvulla $b < a_i$ ($b \in \mathcal{Q}$) – ja polynomi $f(x)$ eivät ole funktionaalisesti ekvivalentteja millään $b < a_i$.

Esimerkki 3.2. Olkoot $f(x) = 4x^3 \oplus 2x^2 \oplus 5x \oplus 7$ ja $g(x) = 4x^3 \oplus bx^2 \oplus 5x \oplus 7$, missä $b < 2$. Nyt $f(1) = 4 \odot 1^3 \oplus 2 \odot 1^2 \oplus 5 \odot 1 \oplus 7 = \min\{4 + (3 \cdot 1), 2 + (2 \cdot 1), 5 + 1, 7\} = 2 + (2 \cdot 1) = 4$. Huomataan, että

$$g(1) = b \odot 1^2 = b + 2 < 2 + 2 = 4 = f(1),$$

joten $g(1) \neq f(1)$. Määritelmän 3.2 nojalla $f \nsim g$, joten polynomin f toisen asteen kerroin 2 on pienin kerroin.

Huomautus 5. Jos $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_r x^r$ ja $a_n, a_r \neq \infty$, niin a_n ja a_r ovat pienimpiä kertoimia. Lisäksi jos $r < i < n$ ja $a_i = \infty$, niin a_i ei ole pienin kerroin.

Todistetaan, että a_n on pienin kerroin.

Todistus. Olkoot $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_r x^r$ ja $a_n \neq \infty$. Merkitään lisäksi $f_i(x) = a_i x^i$, missä $i \in \{r, r+1, \ldots, n\}$. Selvästi $f(x) = \min\limits_{r \leq i \leq n} \{f_i(x)\}$. Olkoon $k \in \{r, r+1, \ldots, n-1\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f_k(x) \\ a_n + nx &= a_k + kx \\ (n-k)x &= a_k - a_n \quad || : (n-k) > 0 \\ x &= \frac{a_k - a_n}{n-k}. \end{aligned}$$

Jos $a_k = \infty$, niin selvästi $f_n(x_k) < f_k(x_k)$ jollain $x_k \in \mathbb{Q}$. Jos $a_k \neq \infty$, niin on olemassa $x_k \in \mathbb{Q}$ siten, että $f_n(x_k) = f_k(x_k)$, nimittäin $x_k = \dfrac{a_k - a_n}{n-k}$. Olkoon $m_k < x_k$. Tällöin

$$f_n(x_k) - f_n(m_k) = n(x_k - m_k) > k(x_k - m_k) = f_k(x_k) - f_k(m_k),$$

joten

$$\begin{aligned} f_n(x_k) - f_n(m_k) &> f_k(x_k) - f_k(m_k) \\ f_n(x_k) - f_n(m_k) &> f_n(x_k) - f_k(m_k) \quad || - f_n(x_k) \\ -f_n(m_k) &> -f_k(m_k) \\ f_n(m_k) &< f_k(m_k). \end{aligned}$$

Koska k valittiin mielivaltaisesti, niin $f_n(m_k) < f_k(m_k)$ aina, kun $k \in \{r, r+1, \ldots, n-1\}$. Olkoon nyt $M = \min\limits_{r \leq k \leq n-1} \{m_k\}$. Koska $M < x_k$ aina, kun $r \leq k < n$, niin $f_n(M) < f_k(M)$ aina, kun $r \leq k < n$. Siis $f(M) = f_n(M)$. Olkoot

$$\begin{aligned} g(x) &= bx^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus a_{n-2}x^{n-2} \oplus \cdots \oplus a_r x^r \\ &= \min\{b + nx, a_{n-1} + (n-1)x, \ldots, a_r + rx\}, \end{aligned}$$

missä $b < a_n$. Nyt

$$g(M) \leq bM^n = b + nM < a_n + nM = f_n(M) = f(M).$$

Siis $g(M) < f(M)$ eli $g(M) \neq f(M)$, joten polynomit f ja g eivät ole funktionaalisesti ekvivalentteja, mistä seuraa, että a_n on pienin kerroin. $\square$

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että a_r on pienin kerroin.

Apulause 3.1 (Pienimmän kertoimen vaihtoehtoinen määritelmä)**.**
(vrt. [4, s. 6]). *Olkoon $a_i x^i$ trooppisen polynomin $f(x)$ eräs termi siten, että $a_i \neq \infty$. Tällöin a_i on polynomin $f(x)$ pienin kerroin jos ja vain jos on olemassa $x_0 \in \mathbb{Q}$ siten, että $f(x_0) = a_i x_0^i$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $f(x) \neq a_i x^i$, jolloin $f(x) < a_i x^i$ ja osoitetaan, että tällöin a_i ei ole pienin kerroin. Olkoon nyt $\phi(x) = f(x) - (i \cdot x + a_i)$. Funktio $\phi(x)$ on jatkuva, ylhäältä rajoitettu, paloittain määritelty äärellisestä määrästä lineaarisia osia sekä $\phi(x) < 0$. Täten on olemassa väli $[a, b]$, johon kaikki funktion osat kuuluvat ainakin osittain. Ääriarvolauseen nojalla on olemassa $c \in [a, b]$ siten, että $\phi(c) \geq \phi(x)$ aina, kun $x \in [a, b]$. Lisäksi $\phi(x)$ on vähenevä, kun $x > b$, ja kasvava, kun $x < a$, joten $\phi(x) \leq \phi(c)$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$. Koska $\phi(c) \in \phi(\mathbb{R})$, niin $\phi(c) < 0$. Merkitään $\phi(c) := M$. Olkoon $b \in \mathcal{Q}$ siten, että $a_i + M < b < a_i$. Nyt

$$\begin{aligned} a_i + M &< b \quad || + ix \\ (a_i + ix) + M &< (b + ix) \quad || \cdot (-1) \\ -(b + ix) &< -(a_i + ix) - M \quad || + f(x) \\ f(x) - (b + ix) &< \overbrace{f(x) - (a_i + ix)}^{\leq M} - M \leq 0 \end{aligned}$$

aina, kun $x \in \mathcal{Q}$. Siis

$$\begin{aligned} f(x) - (b + ix) &< 0 \\ f(x) &< b + ix. \end{aligned}$$

Jos siis kerroin a_i korvataan luvulla b, niin uusi polynomi $g(x)$ ja polynomi $f(x)$ ovat funktionaalisesti ekvivalentteja, koska termi bx^i ei vaikuta polynomin $g(x)$ arvoihin. Lisäksi $b < a_i$, joten määritelmän 3.3 mukaan a_i ei ole pienin kerroin. Siis $f(x) \neq a_i x^i$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$ implikoi, että a_i ei ole pienin kerroin.

Toisen suunnan osoittamiseksi oletetaan, että on olemassa sellainen luku $x_0 \in \mathbb{Q}$, että $f(x_0) = a_i x^i$. Osoitetaan, että a_i on pienin kerroin. Olkoon $g(x)$ polynomi, joka on saatu polynomista $f(x)$ korvaamalla a_i kertoimella $b < a_i$. Tällöin $g(x_0) \leq b x_0^i < a_i x_0^i = f(x_0)$, joten $g \nsim f$. Määritelmän 3.3 perusteella a_i on pienin kerroin. □

Huomautus 6. Olkoon $f(x) = a_n x^n \oplus \cdots \oplus a_r x^r$ trooppinen polynomi, jonka kerrointa a_i tarkastellaan. Muistetaan, että $f(x) \leq a_i x^i$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$. Jos siis $f(x) < a_i x^i$, niin a_i ei ole pienin kerroin.

Esimerkki 3.3. Tarkastellaan esimerkin 3.2 polynomia $f(x) = 4x^3 \oplus 2x^2 \oplus 5x \oplus 7$ ja erityisesti sen ensimmäisen asteen termiä. Jos $x < \frac{5}{2}$, niin

$$2x^2 = 2 \odot x \odot x < 2 \odot \frac{5}{2} \odot x = \frac{9}{2} \odot x < \frac{10}{2} x = 5x.$$

Siis $f(x) \leq 2x^2 < 5x$, kun $x < \frac{5}{2}$. Jos taas $x \geq \frac{5}{2}$, niin

$$7 = \frac{5}{2} \odot \frac{9}{2} \leq x \odot \frac{9}{2} < \frac{10}{2} x = 5x.$$

Siis $f(x) \leq 7 < 5x$, kun $x \geq \frac{5}{2}$. Täten $f(x) < 5x$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$, joten apulauseen 3.1 nojalla ensimmäisen asteen kerroin 5 ei ole polynomin $f(x)$ pienin kerroin.

Apulause 3.2. *Olkoot $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_{r+1} x^{r+1} \oplus a_r x^r$ sekä $a_i x^i, a_j x^j$ ja $a_k x^k$ sen monomeja siten, että $r \leq i < j < k \leq n$. Jos nyt $a_i x_0^i < a_j x_0^j$ ja $a_k x_0^k < a_j x_0^j$ jollain $x_0 \in \mathbb{Q}$, niin a_j ei ole pienin kerroin.*

Todistus. Oletetaan, että $a_i x_0^i < a_j x_0^j$ ja $a_k x_0^k < a_j x_0^j$ jollain $x_0 \in \mathbb{Q}$. Olkoon $x \leq x_0$. Tällöin

$$\begin{aligned} a_k x^k &= a_k + k \cdot x = a_k + j \cdot x + (k - j) \cdot x \\ &\leq a_k + j \cdot x + (k - j) \cdot x_0 \\ &= a_k + k \cdot x_0 + j \cdot (x - x_0) \\ &< a_j + j \cdot x_0 + j \cdot (x - x_0) \\ &= a_j + j \cdot x \end{aligned}$$

Siis $a_k x^k < a_j x^j$, kun $x \leq x_0$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $a_i x^i < a_j x^j$, kun $x > x_0$. Siis $f(x) < a_j x^j$, joten apulauseen 3.1 nojalla a_j ei ole pienin kerroin. □

Huomautus 7. Kertoimien a_i ja a_k ei tarvitse olla pienimpiä kertoimia.

3.2 Pienikertoimisin polynomi

Määritelmä 3.4. (vrt. [4, s. 8]). Polynomi on *pienikertoimisin polynomi*, jos kaikki sen kertoimet ovat pienimpiä kertoimia.

Apulause 3.3 (Pienikertoimisimman polynomin yksikäsitteisyys)**.**
(vrt. [4, s. 8]). *Olkoot f ja g trooppisia pienikertoimisimpia polynomeja. Nyt f ja g ovat yhtä suuret jos ja vain jos f ja g ovat funktionaalisesti ekvivalentit.*

Todistus. (vrt. [4, s. 8]). Selvästi jos $f = g$, niin $f(x) = g(x)$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$, joten $f \sim g$. Oletetaan nyt, että $f \neq g$. On siis olemassa polynomin $f(x)$ termi $a_i x^i$ ja polynomin $g(x)$ termi $b_i x^i$ siten, että $a_i x^i \neq b_i x^i$. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $a_i < b_i$. Koska g on pienikertoimisin polynomi, apulauseen 3.1 perusteella on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{Q}$, että $g(x_0) = b_i x^i$. Tällöin

$$f(x_0) \leq a_i x_0^i < b_i x_0^i = g(x_0),$$

joten $f(x_0) \neq g(x_0)$. Määritelmän 3.2 nojalla polynomit f ja g eivät ole funktionaalisesti ekvivalentit. □

Seuraus 1. Pienikertoimisimman polynomin f relaatiolla $\sim$ määräämässä ekvivalenssiluokassa $[f]$ polynomi f on ainoa pienikertoimisin polynomi.

Yksikäsitteisyytensä vuoksi pienikertoimisimmat polynomit sopivat mainiosti edustamaan ekvivalenssiluokkaansa. On vielä osoitettava, että jokaisessa ekvivalenssiluokassa on pienikertoimisin polynomi. Tämä onnistuu osoittamalla, että jokaisella polynomilla on funktionaalisesti ekvivalentti, pienikertoimisin polynomi. Samalla todistetaan menetelmä, jolla pienikertoimisimman polynomin kertoimet voidaan selvittää.

Apulause 3.4. (vrt. [4, s. 8]). *Olkoon $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_r x^r$. On olemassa yksikäsitteinen, pienikertoimisin polynomi $g(x) = b_n x^n \oplus b_{n-1} x^{n-1} \oplus \cdots \oplus b_r x^r$ siten, että $f \sim g$. Lisäksi jokainen polynomin $g(x)$ kerroin*

$$b_j = \min\left(\{a_j\} \bigcup \left\{ \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k \cdot (j-i)}{k-i} \mid r \leq i < j < k \leq n \right\}\right). \tag{3.1}$$

Todistus. (vrt. [4, s. 8–10]). Osoitetaan aluksi polynomien f ja g funktionaalinen ekvivalenssi. Jos $x_0 \in \mathcal{Q}$, niin $f(x_0) = a_s x_0^s = a_s + s \cdot x_0$ jollain $r \leq s \leq n$. Tällöin myös

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \min_{r \leq j \leq n} \{b_j + j \cdot x_0\} \\ &= \min_{r \leq i < j < k \leq n} \left\{ a_j + j \cdot x_0, \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k \cdot (j-i)}{k-i} + j \cdot x_0 \right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Olkoon nyt $x_0 \leq \frac{a_i - a_k}{k-i}$. Tällöin kaikilla i, j ja k siten, että $r \leq i < j < k \leq n$, pätee

$$\begin{aligned}
a_s + s \cdot x_0 &\leq a_k + k \cdot x_0 \\
&= a_k + j \cdot x_0 + (k-j) \cdot x_0 \\
&\leq a_k + j \cdot x_0 + (k-j) \cdot \frac{a_i - a_k}{k-i} \\
&= \frac{a_k(k-i) - (k-j)a_k - (j-k)a_i}{k-i} + j \cdot x_0 \\
&= \frac{a_i(k-j) + a_k(j-i)}{k-i} + j \cdot x_0.
\end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan osoittaa, että jos $x_0 \geq \frac{a_i - a_k}{k-i}$, niin

$$a_s + s \cdot x_0 \leq a_i + i \cdot x_0 \leq \frac{a_i(k-j) + a_k(j-i)}{k-i} + j \cdot x_0.$$

Siis kaikilla i, j ja k arvoilla yhtälöstä 3.2 saadaan, että $g(x_0) = a_s x_0^s$. Lisäksi $f(x_0) = a_s x_0^s$, joten $g(x_0) = f(x_0)$. Alkio x_0 valittiin mielivaltaisesti, joten $g(x) = f(x)$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$. Määritelmän 3.2 perusteella $f \sim g$.

On myös osoitettava, että g on pienikertoimisin polynomi. Olkoot b_j eräs polynomin g monomin kerroin ja kerroin a_j polynomin f pienin kerroin. Yhtälön 3.1 mukaan $b_j \leq a_j$. Koska a_j on pienin kerroin, on olemassa $x_0 \in \mathbb{Q}$ siten, että $f(x_0) = a_j x_0^j$. Edelleen $a_j x_0^j = f(x_0) \stackrel{f \sim g}{=} g(x_0) \leq b_j x_0^j$. Tästä nähdään, että $b_j \geq a_j$, joten $b_j = a_j$ ja $g(x_0) = f(x_0) = a_j x_0^j = b_j x_0^j$.

Oletetaan nyt, että a_j ei ole pienin kerroin. Koska a_r ja a_n ovat pienimpiä kertoimia, voidaan valita $u < j$ ja $v > j$ siten, että a_u ja a_v ovat pienimpiä kertoimia ja a_t ei ole pienin kerroin aina, kun $u < t < v$.

Olkoon $x_0 = \dfrac{a_u - a_v}{v - u}$ eli $a_u + u \cdot x_0 = a_v + v \cdot x_0$. Tehdään vastaoletus, että $f(x_0) \neq a_u x_0^u$. Nyt $f(x_0) = a_w x_0^w < a_u x_0^u$ jollain w. Kerroin a_w on pienin kerroin, joten muuttujien u ja v valinnan perusteella $w < u$ tai $w > v$.

Oletetaan, että $w > v$. Jos $x < x_0$, niin

$$\begin{aligned}
a_v + v \cdot x &= a_v + u \cdot x + (v-u) \cdot x \\
&< a_v + u \cdot x + (v-u) \cdot x_0 \\
&= a_v + v \cdot x_0 + u \cdot (x - x_0) \\
&= a_u + u \cdot x_0 + u \cdot (x - x_0) \\
&= a_u + u \cdot x.
\end{aligned}$$

Toisaalta jos $x \geq x_0$, niin

$$\begin{aligned} a_w + w \cdot x &= a_w + u \cdot x + (w-u) \cdot x \\ &\leq a_w + u \cdot x + (w-u) \cdot x_0 \\ &= a_w + w \cdot x_0 + u \cdot (x - x_0) \\ &< a_u + u \cdot x_0 + u \cdot (x - x_0) \\ &= a_u + u \cdot x. \end{aligned}$$

Siis $a_w + w \cdot x < a_u + u \cdot x$, kun $x \geq x_0$, ja $a_v + v \cdot x < a_u + u \cdot x$, kun $x < x_0$. Siis $f(x) < a_u x^u$, joten a_u ei ole pienin kerroin, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Ristiriitaan saavutaan vastaavalla menettelyllä, jos $w < u$. Vastaoletus $f(x_0) \neq a_u x_0^u$ on siis väärä, joten

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_u x_0^u = a_u + u \cdot \left(\frac{a_u - a_v}{v - u} \right) \\ &= \frac{a_u \cdot v - a_u \cdot u + a_u \cdot u - a_v \cdot u}{v - u} = \frac{a_u \cdot v - a_v \cdot u}{v - u} \\ &= \frac{a_u \cdot (v - j) + a_v \cdot (j - u)}{v - u} + j \cdot \left(\frac{a_u - a_v}{v - u} \right) \\ &= c + j \cdot x_0, \text{ missä } c = \frac{a_u \cdot (v - j) + a_v \cdot (j - u)}{v - u}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Yhtälön 3.1 mukaan $b_j \leq c$ ja yhtälön 3.3 perusteella $cx_0^j = f(x_0) \overset{f \sim g}{=} g(x_0) \leq b_j x_0^j$, joten $b_j \geq c$. Täten $b_j = c$ ja $g(x_0) = b_j x_0^j$. Siis jokainen polynomin g kerroin on pienin kerroin, joten g on pienikertoimisin polynomi.

Polynomin g yksikäsitteisyys on tosi apulauseen 3.3 nojalla. $\square$

Pienikertoimisimpien polynomien osoittamiseen ei ole vielä annettu käyttökelpoista menetelmää. Seuraavassa apulauseessa osoitetaan, että peräkkäisten kertoimien erotuksia vertaamalla voidaan helposti selvittää, onko polynomi pienikertoimisin vai ei.

Apulause 3.5. (vrt. [4, s. 11]). *Olkoon $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_r x^r$, missä jokainen a_i on äärellinen. Merkitään kahden peräkkäisen kertoimen erotusta $d_i = a_{i-1} - a_i$. Nyt $f(x)$ on pienikertoimisin polynomi jos ja vain jos peräkkäisten kertoimien erotus on kasvava eli $d_n \leq d_{n-1} \leq \cdots \leq d_{r+1}$.*

Todistus. (vrt. [4, s. 11–12]). Oletetaan, että on olemassa osajoukko polynomin f peräkkäisiä kertoimia, joiden erotus on aidosti vähenevä. On siis olemassa sellaiset termit ax^{i+1}, bx^i ja cx^{i-1}, että

$$\begin{aligned} b-a &> c-b \\ b &> \frac{1}{2}\cdot(a+c). \end{aligned}$$

Osoitetaan, että $f(x) < bx^i$ eli että b ei ole pienin kerroin.

Olkoon $x \leq \frac{1}{2}\cdot(c-a)$. Tällöin

$$\begin{aligned} ax^{i+1} &= (i+1)\cdot x + a \\ &\leq i\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(c-a) + a \\ &= i\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(c+a) \\ &\overset{b>\frac{1}{2}\cdot(a+c)}{<} i\cdot x + b, \end{aligned}$$

joten $f(x) \leq ax^{i+1} < bx^i$, kun $x \leq \frac{1}{2}\cdot(c-a)$. Jos taas $x \geq \frac{1}{2}\cdot(c-a)$, niin

$$\begin{aligned} cx^{i-1} &= (i-1)\cdot x + c \\ &\leq i\cdot x - \frac{1}{2}\cdot(c-a) + c \\ &= i\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(c+a) \\ &< i\cdot x + b, \end{aligned}$$

joten tällöin $f(x) \leq cx^{i-1} < bx^i$. Siis $f(x) < bx^i$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$, joten määritelmien 3.3 ja 3.4 nojalla f ei ole pienikertoimisin polynomi.

Oletetaan nyt, että polynomin $f(x)$ peräkkäisten kertoimien erotus on kasvava. Oletuksen mukaan a_n,$a_r \neq \infty$, joten ne ovat pienimpiä kertoimia. Olkoot a_i $(r < i < n)$ eräs polynomin kerroin ja $x_0 = \frac{a_{i-1}-a_{i+1}}{2}$. Osoitetaan, että $f(x_0) = a_i x_0^i$, jolloin apulauseen 3.1 nojalla a_i on pienin kerroin. On osoitettava, että $i\cdot x_0 + a_i \leq k\cdot x_0 + a_k$, kun $r < k < n$. Tämä on triviaalisti tosi, kun $i = k$.

Oletetaan, että $k < i$. Koska peräkkäisten kertoimien erotus on kasvava, niin

$$\begin{aligned} (a_t - a_{t+1}) &\leq (a_s - a_{s+1}), \\ (a_{s+1} - a_s) &\leq (a_{t+1} - a_t), \end{aligned}$$

kun $t \geq s$. Tästä havaitaan, että

$$\begin{aligned} (a_{j+2} - a_j) &= (a_{j+2} - a_{j+1}) + (a_{j+1} - a_j) \\ &\leq (a_{j+2} - a_{j+1})\cdot 2 \end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
(a_{j+3} - a_j) &= (a_{j+3} - a_{j+2}) + (a_{j+2} - a_j) \\
&\leq (a_{j+3} - a_{j+2}) \cdot 3
\end{aligned}
$$

Voidaan osoittaa triviaalisti induktiolla, että

$$
(a_i - a_k) \leq (a_i - a_{i-1}) \cdot (i - k),
$$

kun $k < i$. Nyt

$$
\begin{aligned}
(a_i - a_k) &\leq (a_i - a_{i-1}) \cdot (i - k) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot (a_i - a_{i-1})) \cdot (i - k) \\
&= \frac{1}{2} \cdot ((a_i - a_{i-1}) + \overbrace{(a_i - a_{i-1})}^{\leq (a_{i+1} - a_i)}) \cdot (i - k) \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot (a_{i+1} - a_{i-1}) \cdot (i - k) \\
&= x_0 \cdot (k - i).
\end{aligned}
$$

Täten $i \cdot x_0 + a_i \leq k \cdot x_0 + a_k$. Vastaavanlainen käsittely osoittaa saman pätevän, kun $k > i$. Siis trooppisesti $a_i x_0^i \leq a_k x_0^k$ aina, kun $r \leq k \leq n$. Täten $f(x_0) = a_i x_0^i$, joten apulauseen 3.1 nojalla a_i on pienin kerroin. Koska i valittiin mielivaltaisesti on polynomi f määritelmän 3.4 mukaan pienikertoimisin polynomi. □

Esimerkki 3.4. Tutkitaan polynomeja $f(x) = 1x^7 \oplus 3x^6 \oplus 7x^5 \oplus 11x^4$ ja $g(x) = -3x^3 \oplus x^2 \oplus 2x \oplus 5$. Polynomin f peräkkäisten kertoimien erotukset ovat järjestyksessä $2 < 4 \leq 4$, joten apulauseen 3.5 nojalla f on pienikertoimisin polynomi. Polynomin g kertoimien erotuksista huomataan, että $3 > 2 < 3$. Peräkkäisten kertoimien erotus ei ole kasvava, joten apulauseen 3.5 nojalla polynomi g ei ole pienikertoimisin polynomi.

Huomautus 8. Jos polynomin f kerroin $a_i = \infty$ $(r < i < n)$, niin f ei ole pienikertoimisin polynomi, koska selvästi on olemassa korvaava kerroin $b < a_i$ kertoimelle a_i siten, että uusi polynomi g on funktionaalisesti ekvivalentti alkuperäisen polynomin f kanssa. Toisaalta $a_j = \infty$ aina, kun $j > n$ tai $j < r$, vaikka kyseessä olisi pienikertoimisin polynomi.

Apulause 3.6. *Olkoot $f(x) = a_n x^n \oplus \cdots \oplus a_r x^r$ ja $d_i = a_{i-1} - a_i$. Jos on olemassa $k > i$ siten, että $d_i < \frac{a_i - a_k}{k - i}$, niin a_i ei ole pienin kerroin.*

Todistus. Oletetaan, että $d_i < \frac{a_i - a_k}{k-i}$ jollain $k > i$. Edelleen epäyhtälöä muokkaamalla nähdään, että

$$\frac{a_{i-1} \cdot (k-i) + a_k}{k-(i-1)} < a_i.$$

Olkoon nyt $x_0 \in \mathbb{Q}$ siten, että

$$a_{i-1} x_0^{i-1} = a_k x_0^k \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{a_{i-1} - a_k}{k-(i-1)}.$$

Havaitaan, että

$$\begin{aligned} a_k + kx_0 &= a_k + i \cdot x_0 + (k-i) \cdot x_0 \\ &= a_k + (k-i) \cdot \frac{a_{i-1} - a_k}{k-(i-1)} + i \cdot x_0 \\ &= \frac{a_k \cdot (k-(i-1)) + a_{i-1} \cdot (k-i) - a_k \cdot (k-i)}{k-(i-1)} + i \cdot x_0 \\ &= \frac{a_{i-1} \cdot (k-i) + a_k}{k-(i-1)} + i \cdot x_0 \\ &< a_i + i \cdot x_0 \end{aligned}$$

Siis $a_k x_0^k = a_{i-1} x_0^{i-1} < a_i x_0^i$ ja $k > i$, joten apulauseen 3.2 nojalla a_i ei ole pienin kerroin. □

Seuraava apulause pohjustaa toista menetelmää, jolla tietyissä tapauksissa voidaan löytää polynomille f pienimmät kertoimet helpommin kuin apulauseen 3.4 menetelmällä. Vaihtoehtoinen menetelmä perustuu siihen, että jos kahden pienimmän kertoimen välissä ei ole yhtään pienintä kerrointa, nämä ovat löydettävissä yksinkertaisen kaavan avulla.

Apulause 3.7. *Olkoot $f(x) = a_n x^n \oplus \cdots \oplus a_r x^r$ trooppinen polynomi ja a_i sekä a_j $(i < j)$ pienimpiä kertoimia. Jos a_k ei ole pienin kerroin millään $i < k < j$, niin $f(x_0) = a_i x_0^i = a_j x_0^j$ jollain $x_0 \in \mathbb{Q}$.*

Todistus. Olkoot $f(x)$ trooppinen polynomi ja a_i sekä a_j sen pienimpiä kertoimia siten, että a_k ei ole pienin kerroin millään $i < k < j$. Tehdään vastaoletus, että $f(x_0) \neq a_i x_0^i = a_j x_0^j$. Siis $f(x_0) = a_w x_0^w < a_i x_0^i = a_j x_0^j$ jollain $w < i$ tai $w > j$. Oletetaan ensin, että $w < i$. Jos $x > x_0$, niin

$$\begin{aligned} a_w + w \cdot x &= a_w + i \cdot x + (w-i) \cdot x \\ &< a_w + i \cdot x + (w-i) \cdot x_0 \\ &= a_w + w \cdot x_0 + i \cdot (x - x_0) \\ &< a_i + i \cdot x_0 + i \cdot (x - x_0) \\ &= a_i + i \cdot x. \end{aligned}$$

Siis $f(x) \leq a_w x^w < a_i x^i$, kun $x > x_0$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että jos $x < x_0$, niin $f(x) \leq a_j x^j < a_i x^i$. Siis $f(x) < a_i x^i$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$, joten apulauseen 3.1 nojalla a_i ei ole pienin kerroin, mikä on ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa.

Jos taas $w > j$, niin on osoitettavissa, että $f(x) < a_j x^j$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$, mikä johtaa taas ristiriitaan.

Koska vastaoletus johtaa ristiriitaan, niin $f(x_0) = a_i x_0^i = a_j x_0^j$. □

Apulause 3.8. *Olkoot $f(x) = a_n x^n \oplus \cdots \oplus a_r x^r$ trooppinen polynomi ja a_i sekä a_j $(i < j)$ pienimpiä kertoimia. Jos a_k ei ole pienin kerroin millään $i < k < j$, niin polynomi*

$$g(x) = \bigoplus_{m=r}^{n} b_m x^m, \text{ missä } b_m = \begin{cases} a_m, \text{ kun } m \leq i \text{ tai } m \geq j \\ a_j + \frac{j-k}{j-i} \cdot (a_i - a_j), \text{ kun } i < m < j, \end{cases}$$

on funktionaalisesti ekvivalentti polynomin $f(x)$ kanssa. Lisäksi kertoimet b_m ovat pienimpiä kertoimia, kun $i < m < j$.

Todistus. Olkoot $f(x) = a_n x^n \oplus \cdots \oplus a_r x^r$ trooppinen polynomi ja a_i sekä a_j $(i < j)$ pienimpiä kertoimia ja

$$g(x) = \bigoplus_{m=r}^{n} b_m x^m, \text{ missä } b_m = \begin{cases} a_m, \text{ kun } m \leq i \text{ tai } m \geq j \\ a_j + \frac{j-k}{j-i} \cdot (a_i - a_j), \text{ kun } i < m < j. \end{cases}$$

Apulauseen 3.7 nojalla on olemassa $x_0 \in \mathbb{Q}$ siten, että $f(x_0) = a_i x_0^i = a_j x_0^j$. Jos valitaan m siten, että $i < m < j$, niin

$$\begin{aligned} b_m x_0^m &= a_j + \frac{j-m}{j-i} \cdot (a_i - a_j) + m \cdot x_0 \\ &= a_j + (j-m) \cdot \frac{a_i - a_j}{j-i} + m \cdot x_0 \\ &= a_j + (j-m) \cdot x_0 + m \cdot x_0 \\ &= a_j + j \cdot x_0 = f(x_0). \end{aligned}$$

Oletetaan, että $g(x_0) \neq b_m x_0^m$, missä $i < m < j$. Koska $b_m x_0^m = a_j x_0^j = a_i x_0^i$, on olemassa $k < i$ tai $k > j$ siten, että $g(x_0) = b_k x_0^k = a_k x_0^k < a_j x_0^j = f(x_0)$. Tämä on johtaa kuitenkin ristiriitaan, sillä $f(x_0) \leq a_k x_0^k$ aina, kun $r < k < n$. Siis $g(x_0) = b_m x_0^m$, kun $i < m < j$. Apulauseen 3.1 nojalla b_m on pienin kerroin, kun $i < m < j$.

Jos $x < x_0$, niin

$$\begin{aligned} a_j x^j &= a_j + m \cdot x + (j-m) \cdot x \\ &< a_j + m \cdot x + (j-m) \cdot x_0 \\ &= a_j + j \cdot x_0 + m \cdot (x - x_0) \\ &= b_m + m \cdot x_0 + m \cdot (x - x_0) \\ &= b_m + m \cdot x = b_m x^m. \end{aligned}$$

Siis $g(x) \leq b_j x^j = a_j x^j < b_m x^m$, kun $x < x_0$. Vastaavasti jos $x > x_0$ saadaan, että $g(x) \leq b_i x^i = a_i x^i < b_m x^m$. Siis $g(x) = b_m x^m$ $(i < m < j)$ vain, kun $x = x_0$, ja tällöin $g(x_0) = b_m x^m = a_j x_0^j = f(x_0)$.

Jos $x \neq x_0$, niin $g(x) = b_k x^k$ jollain $k \leq i$ tai $k \geq j$. Tällöin

$$g(x) = \min_{k \leq i \,\vee\, k \geq j} \{b_k x^k\} = \min_{k \leq i \,\vee\, k \geq j} \{a_k x^k\} = f(x).$$

Siis $g(x) = f(x)$ aina, kun $x \in \mathcal{Q}$, joten määritelmän 3.2 nojalla $f \sim g$. $\square$

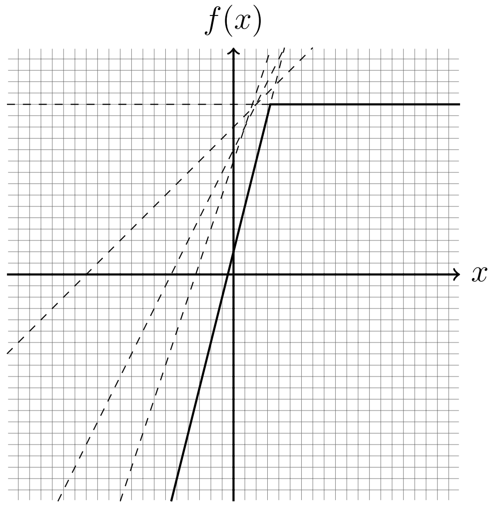
Huomautus 9. Apulauseen avulla määritelty funktio $g(x)$ on siis muuten sama kuin $f(x)$, mutta kertoimet a_m $(i < m < j)$ on muutettu pienimmiksi kertoimiksi, ja $g(x) = b_m x^m$ vain, kun $x = \frac{a_i - a_j}{j - i}$.

Esimerkki 3.5. Olkoon $f(x) = 2x^4 \oplus 10x^3 \oplus 11x^2 \oplus 13x \oplus 15$ trooppinen polynomi. Huomataan nyt, että jos $x_0 = \frac{13}{4}$, niin $2x_0^4 = 2 + \frac{13}{4} \cdot 4 = 15$. Lisäksi

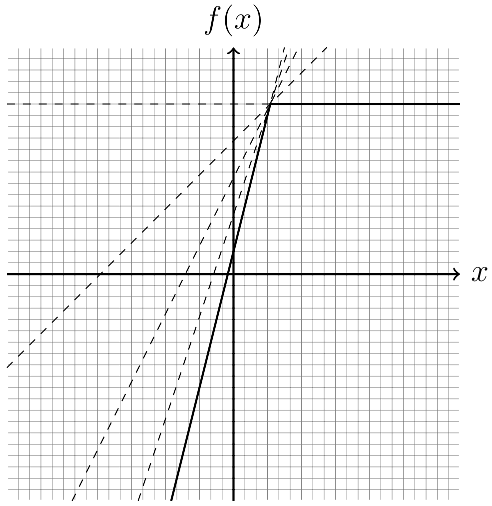
$$\begin{aligned} 10x_0^3 &= 10 + 3 \cdot \frac{13}{4} = 19\frac{3}{4} > 15, \\ 11x_0^2 &= 11 + 2 \cdot \frac{13}{4} = 17\frac{1}{2} > 15, \\ 13x_0 &= 13 + \frac{13}{4} = 16\frac{1}{4} > 15, \end{aligned}$$

joten apulauseen 3.2 nojalla ensimmäisen, toisen ja kolmannen asteen kertoimet eivät ole pienimpiä kertoimia. Apulauseen 3.8 nojalla polynomi $g(x) = 2x^4 \oplus (2 + \frac{1}{4} \cdot (15-2))x^3 \oplus (2 + \frac{2}{4} \cdot (15-2))x^2 \oplus (2 + \frac{3}{4} \cdot (15-2))x \oplus 15 = 2x^4 \oplus 5\frac{1}{4}x^3 \oplus 8\frac{1}{2}x^2 \oplus 11\frac{3}{4}x \oplus 15$ on funktionaalisesti ekvivalentti polynomin $f(x)$ kanssa, ja muunnetut kertoimet ovat pienimpiä kertoimia.

Kuvassa 2 nähdään polynomin $f(x)$ kuvaaja. Kertoimet muuttamalla saadun polynomin $g(x)$ kuvaaja on esitetty kuvassa 3. Kuvista nähdään, että polynomit $f(x)$ ja $g(x)$ määrittelevät saman funktion.



Kuva 2: Polynomin $f(x) = 2x^4 \oplus 10x^3 \oplus 11x^2 \oplus 13x \oplus 15$ kuvaaja.



Kuva 3: Polynomin $g(x) = 2x^4 \oplus 5\frac{1}{4}x^3 \oplus 8\frac{1}{2}x^2 \oplus 11\frac{3}{4}x \oplus 15$ kuvaaja.

3.3 Trooppisen algebran peruslause

Edellä osoitettiin, että jokainen polynomi kuuluu jonkin pienikertoimisimman polynomin ekvivalenssiluokkaan relaatiolla $\sim$. Täten jokaisella polynomilla on funktionaalisesti ekvivalentti pienikertoimisin polynomi. Lisäksi esitettiin ja todistettiin menetelmiä, joilla pienimmät kertoimet ovat määritettävissä, sekä erilaisia metodeja tunnistaa, onko kerroin pienin kerroin vai ei. Trooppisen algebran peruslauseessa osoitetaan, että jokainen pienikertoimisin polynomi voidaan jakaa tekijöihin, mistä seuraa, että jokainen trooppinen polynomi voidaan jakaa tekijöihin funktionaalisesti ekvivalentissa muodossa.

Lause 3.1 (Trooppisen algebran peruslause)**.** (vrt. [4, s. 12]). *Olkoon* $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_r x^r \in \mathcal{Q}[x]$ *pienikertoimisin polynomi. Tällöin* $f(x)$ *voidaan esittää yksikäsitteisesti lineaaristen tekijöiden tulona*

$$a_n x^r (x \oplus d_n)(x \oplus d_{n-1}) \cdots (x \oplus d_{r+1}). \tag{3.4}$$

Todistus. (vrt. [4, s. 13]). Koska $f(x)$ on pienikertoimisin polynomi, apulauseen 3.5 nojalla peräkkäisten kertoimien erotus on kasvava eli $d_n \leq d_{n-1} \leq \cdots \leq d_{r+1}$, missä $d_i = a_{i-1} - a_i$. Kun yhtälön 3.4 sulut avataan, saadaan useita saman asteen termejä. Esimerkiksi asteen $n-1$ termejä ovat

$$a_n d_n x^{n-1}, a_n d_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_n d_{r+1} x^{n-1}.$$

Osoitetaan induktiolla, että asteen i termeistä $a_n d_n d_{n-1} \ldots d_{i+1} x^i$ on pienin. Tutkitaan polynomin $f(x)$ kertoimien erotusten tuloa $c_n c_{n-1} \cdots c_i$, missä $c_j \in \{d_n, d_{n-1}, \ldots, d_{r+1}\}$ ja tulon tekijät on järjestetty siten, että

$$c_n \leq c_{n-1} \leq \cdots \leq c_i.$$

Selvästi $d_n \leq c_n$.

Oletetaan nyt, että $d_n d_{n-1} \ldots d_{k+2} \leq c_n c_{n-1} \ldots c_{k+2}$ jollain k. Tällöin

$$c_n c_{n-1} \ldots c_{i+2} c_{i+1} \overset{IO}{\geq} d_n d_{n-1} \ldots d_{i+2} c_{i+1}.$$

Nyt c_{i+1} ei voi olla mikään termeistä $d_n, d_{n-1}, \ldots, d_{i+2}$, koska nämä esiintyvät termissä kertoimina kukin vain kerran. Siis c_{i+1} vastaa jotain termeistä $d_{i+1}, d_i, \ldots, d_{r+1}$. Siis $c_{i+1} \geq d_{i+1}$. Täten

$$\begin{aligned} c_n c_{n-1} \ldots c_{i+2} c_{i+1} &\geq d_n d_{n-1} \ldots d_{i+2} d_{i+1} \quad || \odot a_n x^i = a_n + i \cdot x \\ a_n c_n c_{n-1} \ldots c_{i+2} c_{i+1} x^i &\geq a_n d_n d_{n-1} \ldots d_{i+2} d_{i+1} x^i. \end{aligned}$$

Siis $a_n d_n d_{n-1} \ldots d_{i+1} x^i$ on pienin asteen i termi. Toisaalta termin kerroin supistuu edelleen, sillä

$$\begin{aligned} a_n d_n d_{n-1} \ldots d_{i+1} &= a_n + d_n + d_{n-1} + \cdots + d_{i+1} \\ &= a_n + (a_{n-1} - a_n) + (a_{n-2} - a_{n-1}) + \cdots + (a_i - a_{i+1}) \\ &= a_i. \end{aligned}$$

Muokataan tämän perusteella yhtälöä 3.4:

$$\begin{aligned}
& a_n x^r (x \oplus d_n)(x \oplus d_{n-1}) \cdots (x \oplus d_{r+1}) \\
= \; & a_n x^n \oplus a_n d_n x^{n-1} \oplus a_n d_n d_{n-1} x^{n-2} \oplus \cdots \oplus a_n d_n d_{n-1} \cdots d_{r+1} x^r \\
= \; & a_n x^n \oplus a_{n-1} x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_r x^r = f(x),
\end{aligned}$$

mikä oli osoitettava.

Yksikäsitteisyyden osoittamiseksi tehdään vastaoletus: oletetaan, että on olemassa toinen tapa esittää polynomi $f(x)$ lineaaristen tekijöiden tulona, jota merkitään tulolla g. Selvästi tulon g ja polynomin f aste on sama ja niiden pienin äärellinen termi on samaa astetta. Olkoon siis

$$g(x) = a'_n x^r (x \oplus d'_n)(x \oplus d'_{n-1}) \cdots (x \oplus d'_{r+1}),$$

missä jokainen termi d'_i on uudelleen järjestetty siten, että $d'_n \leq d'_{n-1} \leq \cdots \leq d'_{r+1}$. Sulut avaamalla havaitaan, että peräkkäisten termien erotus on kasvava, joten apulauseen 3.5 nojalla g on pienikertoimisin polynomi. Koska g oli vaihtoehtoinen esitystapa, niin $d_i \neq d'_i$ jollain i, mistä seuraa, että $f \neq g$. Apulauseen 3.3 nojalla f ja g eivät ole funktionaalisesti ekvivalentit. Täten tekijöihin jako on yksikäsitteinen. $\square$

Esimerkki 3.6. Olkoon $f(x) = (5 \odot x \oplus 3) \odot (x \oplus 1) \in \mathcal{Q}[x]$ trooppinen polynomi. Sulkuja avaamalla ja polynomia uudelleenjärjestämällä saadaan

$$f(x) = 5x^2 \oplus 6x \oplus 4.$$

Ensimmäisen asteen termi ei ole pienin kerroin apulauseen 3.2 nojalla, koska $5x_0^2 = 4 < 6x_0$, kun $x_0 = -\frac{1}{2}$. Apulauseen 3.4 menetelmällä

$$f(x) = 5x^2 \oplus 6x \oplus 4 \sim 5x^2 \oplus \frac{4 \cdot (2-1) + 5 \cdot (1-0)}{2} x \oplus 4 = 5x^2 \oplus 4\frac{1}{2}x \oplus 4.$$

Nyt peräkkäisten kertoimien erotuksista nähdään, että $(4\frac{1}{2} - 5) \leq (4 - 4\frac{1}{2})$, joten trooppisen algebran peruslauseen nojalla

$$f(x) \sim 5x^2 \oplus 4\frac{1}{2}x \oplus 4 = 5(x \oplus (-\frac{1}{2}))(x \oplus (-\frac{1}{2})).$$

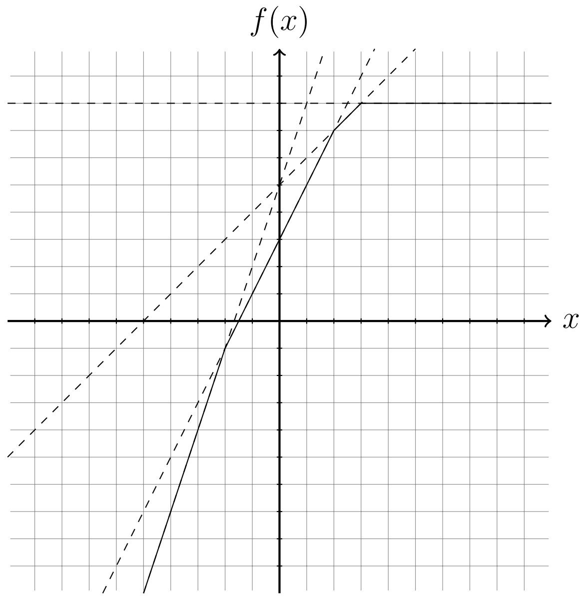
Siis $f(x) \sim 5(x \oplus (-\frac{1}{2}))^2$.

3.4 Trooppisen polynomin kulmajoukko

Perinteiseseti polynomin $f(x)$ nollakohtien joukolla (zero locus) tarkoitetaan pistejoukkoa, jonka alkioilla polynomin arvoksi saadaan määritellyn yhteenlaskun neutraalialkio. Esimerkiksi klassisen polynomin $x^2 - 1$ nollakohtien joukko on $\{-1, 1\}$. Vastaavanlainen määrittely trooppisessa algebrassa tuottaa kuitenkin triviaaleja tuloksia. Jos esimerkiksi trooppisella polynomilla $f(x)$ on äärellinen vakiotermi, niin $f(x) \neq \infty$, sillä polynomin arvoilla on selkeä yläraja. Jos taas $f(x_0) = \infty$ jollain $x_0 \in \mathcal{Q}$, niin selvästi $x_0 = \infty$. Tämä määrittely ei siis tuota käytännöllisiä tuloksia.

Lähestymällä ongelmaa algebran peruslauseen kautta huomataan, että polynomin nollakohdat esiintyvät reaalikertoimisen polynomin peruslauseen mukaisessa tulomuodossa. Trooppisen algebran peruslauseessa polynomin $f(x)$ peräkkäisten kertoimien erotukset esiintyvät tulomuodossa vastaavilla paikoilla ja ne näyttisivät vastaavan funktion $f(x)$ kuvaajan niin sanottuja kulmia. Näissä kulmissa ainakin kaksi polynomin $f(x)$ monomia saa saman arvon.

Olkoon esimerkiksi $f(x) = 5x^3 \oplus 3x^2 \oplus 5x \oplus 8$ trooppinen, pienikertoimisin polynomi. Kuvasta 4 nähdään, että ainakin tässä esimerkissä pienikertoimisimman polynomin peräkkäisten kertoimien erotukset vastaavat kuvaajan kulmia.



Kuva 4: Polynomin $f(x) = 5x^3 \oplus 3x^2 \oplus 5x \oplus 8$ kuvaaja.

Määritellään nyt trooppisen algebran "juuret" näiden kulmakohtien joukoksi ja osoitetaan, että tämän joukon alkiot ovat pienikertoimisimman polynomin peräkkäisten kertoimien erotukset.

Määritelmä 3.5. (vrt. [4, s. 15]). Olkoon $f(x) = a_n x^n \oplus \cdots \oplus a_r x^r \in \mathcal{Q}[x]$. *Kulmakohtien joukoksi* (*corner locus*) kutsutaan joukkoa

$$\mathcal{Z}(f) = \left\{ x_0 \in \mathbb{Q} \mid f(x_0) = a_i x^i = a_j x^j \ \wedge \ i \neq j \right\}.$$

Joukon $\mathcal{Z}(f)$ alkioita kutsutaan kulmakohdiksi ja pareja $(x_0, f(x_0))$ kulmapisteiksi.

Toisin sanoen pisteessä $x_0 \in \mathbb{Q}$ vähintään kaksi polynomin f eri monomia saavuttaa yhtä aikaa kaikista polynomin monomeista pienimmän arvon eli funktion $f(x)$ arvon. Piste x_0 vastaa kuvaajan kulmia eli paloittain määritellyn funktion osien rajakohtia.

Lause 3.2. (vrt. [4, s. 15]). *Olkoot $d \in \mathbb{Q}$ ja $f(x)$ pienikertoimisin polynomi. Tällöin $x \oplus d$ on polynomin $f(x)$ tekijä jos ja vain jos $d \in \mathcal{Z}(f)$.*

Todistus. (vrt: [4, s. 15–16]). Oletetaan ensin, että binomi $x \oplus d$ on polynomin $f(x) \in \mathcal{Q}[x]$ tekijä. Kirjoitetaan f trooppisen algebran peruslauseen mukaisena lineaaristen tekijöiden tulona, jolloin $d_i = d$ jollain d_i. Jos $j > i$, niin

$$\begin{aligned} a_i + i \cdot d_i &= a_i - (j-i) \cdot d_i + j \cdot d_i \\ &= a_i \underbrace{- d_i - d_i - \ldots - d_i}_{(j-i) \text{ kpl}} + j \cdot d_i \\ &\leq a_i - (d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_j) + j \cdot d_i \\ &= a_j + j \cdot d_i. \end{aligned}$$

Vastaava voidaan osoittaa, kun $j < i$. Siis $a_i + i \cdot d_i \leq a_j + j \cdot d_i$, joten $f(d_i) = a_i d_i^i$. Trooppisen peruslauseen todistuksessa havaittiin, että $a_i = a_n d_n d_{n-1} \cdots d_{i+1}$, joten

$$a_i d_i^i = a_n d_n d_{n-1} \cdots d_{i+1} d_i^i = a_n d_n d_{n-1} \cdots d_{i+1} d_i d_i^{i-1} = a_{i-1} d_i^{i-1}.$$

Määritelmän 3.5 nojalla $d \in \mathcal{Z}(f)$.

Oletetaan nyt, että $d \in \mathcal{Z}(f)$. Tehdään vastaoletus, että $f(d) = a_j d^j = a_k d^k$ siten, että $j < i < k$ eli että polynomin termit eivät ole peräkkäiset.

Siis $a_j d^j = a_k d^k < a_i d^i$. Apulauseen 3.2 nojalla a_i ei ole pienin kerroin, mikä johtaa ristiriitaan. Vastaoletus on siis väärä, joten a_j ja a_k ovat peräkkäiset kertoimet. On siis olemassa sellainen i, että

$$\begin{aligned} a_i d^i &= a_{i-1} d^{i-1} \\ a_i + i \cdot d &= a_{i-1} + (i-1) \cdot d \quad || - (i-1) \cdot d \\ a_i + d &= a_{i-1} \\ d &= a_{i-1} - a_i. \end{aligned}$$

Luku d on siis peräkkäisten kertoimien erotus. Koska polynomi $f(x)$ on pienikertoimisin polynomi, niin trooppisen algebran peruslauseen nojalla $x \oplus d$ on polynomin $f(x)$ tekijä. $\square$

Näin määriteltynä ja todistettuna trooppinen polynomi voidaan jakaa tekijöihin, kun tunnetaan sen kulmakohdat, jotka voidaan mieltää trooppisen polynomin juuriksi. Lisäksi kaikki väitteet ja tulokset pätevät, vaikka joukko $\{\mathbb{Q} \cup \infty\}$ korvattaisiin millä tahansa muulla järjestetyllä kunnalla.

Tarkastellaan vielä esimerkin kautta kahden muuttujan polynomin kulmakohtien joukkoa.

Esimerkki 3.7. Olkoon $f(x, y) = 1x^2 \oplus 3xy \oplus 7y$. Polynomin kulmapisteiden joukko määritellään vastaavasti kuin yhden muuttujan polynomien kulmakohtien joukko eli parien (x, y) – joissa ainakin kaksi polynomin termiä saavuttaa polynomin arvon – joukoksi. Merkitään polynomin f kulmapisteiden joukkoa $\mathcal{Z}(f)$. Tutkitaan siis neljää tapausta:

(1) $1x^2 = 3xy < 7y$,

(2) $1x^2 = 7y < 3xy$,

(3) $3xy = 7y < 1x^2$ ja

(4) $1x^2 = 3xy = 7y$.

Tutkitaan tapaus (1) tarkemmin. Muiden kohtien tulokset saadaan vastaavalla menettelyllä.

(1) Tutkitaan ensin epäyhtälöä $3xy < 7y$, josta nähdään, että $x < 4$. Nyt

$$\begin{aligned} 1x^2 &= 3xy \\ 1 + 2x &= 3 + x + y \\ y &= -2 + x. \end{aligned}$$

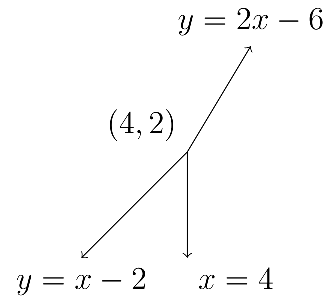
Siis $(x, x-2) \in \mathcal{Z}(f)$, kun $x < 4$.

(2) Ratkaisemalla yhtälö muuttujan y suhteen saadaan $y = 2x - 6$. Epäyhtälön $7y < 3xy$ mukaan $x > 4$. Täten $(x, 2x-6) \in \mathcal{Z}(f)$, kun $x > 4$.

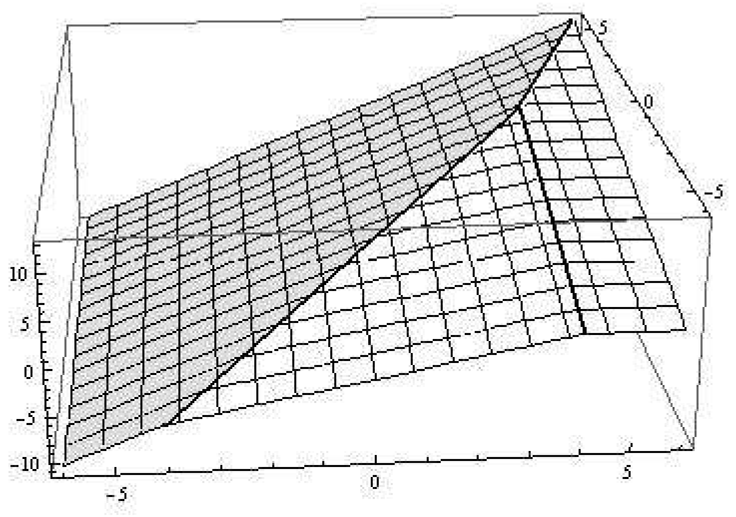
(3) Aluksi huomataan yhtälöstä $3xy = 7y$, että $x = 4$, jolloin epäyhtälön $7y < 1x^4$ mukaan $y < 2$. Siis $(4, y) \in \mathcal{Z}(f)$, kun $y < 2$.

(4) $3xy = 7y$, kun $x = 4$. Tällöin $1x^2 = 7y$, kun $y = 2$, joten $(4, 2) \in \mathcal{Z}(f)$.

Tietojen perusteella voidaan piirtää kuvan 5 kuvaaja, jonka pistejoukko vastaa polynomin f kulmapisteiden joukkoa. Polynomia f vastaava kuvaaja on puolestaan kolmiulotteinen kuvan 6 mukaisesti.



Kuva 5: Polynomin $f(x, y) = 1x^2 \oplus 3xy \oplus 7y$ kulmapisteiden joukko.



Kuva 6: Polynomin $f(x, y) = 1x^2 \oplus 3xy \oplus 7y$ kuvaaja.

4 Viitteet

[1] Burton, David M. (1972). *Abstract and Linear Algebra.* Reading: Addison-Wesley Publishing Company.

[2] Ellis, Amanda (2005). *Tropical algebra*, Saatavilla osoitteesta: http://www.math.utah.edu/mathcircle/notes/MathCircleIv2.pdf [käytetty tammikuun 1. 2013].

[3] Gathmann, Andreas (2006). *Tropical Algebraic Geometry.* Saatavilla osoitteesta: http://arxiv.org/abs/math/0601322 [käytetty tammikuun 10. 2013].

[4] Grigg, Nathan B. (2007). *Factorization of Tropical Polynomials in One and Several Variables.* Saatavilla osoitteesta: http://staff.washington.edu/grigg/research/publications/thesis.pdf [käytetty tammikuun 1. 2013].

[5] van der Hoorn, Tessa (2011). *Tropical geometry.* Saatavilla osoitteesta: http://igitur-archive.library.uu.nl/student-theses/2011-1005-200424/HoornTessaMA2011.pdf [käytetty tammikuun 1. 2013].

[6] MacLagan, Diane ja Sturmfels, Bernd (2009). *Introduction to Tropical Geometry.* Saatavilla osoitteesta: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/Tropical Book.pdf [käytetty tammikuun 10. 2013].

[7] Mikhalkin, Grigory (2004). *Enumerative tropical algebraic geometry in* $\mathbb{R}^2$. Saatavissa osoitteesta: http://arxiv.org/abs/math/0312530v4 [käytetty tammikuun 10. 2013].

[8] Rowen, Louis (2011). *An algebraic approach to tropical mathematics.* Saatavilla osoitteesta: http://moonstone.math.ncku.edu.tw/2011Alg Conference/Talks/Rowen.pdf [käytetty tammikuun 1. 2013].

[9] Speyer, David ja Sturmfels, Bernd (2003). *The Tropical Grassmanian.* Saatavilla osoitteesta: http://arxiv.org/abs/math/0304218v3 [käytetty tammikuun 10. 2013].

[10] Sturmfels, Bernd (2002). *Solving Systems of Polynomical Equations.* Saatavissa osoitteesta: http://math.berkeley.edu/∼bernd/cbms.pdf [käytetty tammikuun 10. 2013].