TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Markus Vaajala

Viivaintegraali
ja Greenin lause

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka

Tammikuu 2013

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

Vaajala, Markus: Viivaintegraali ja Greenin lause

Pro gradu -tutkielma, 36 s.

Matematiikka

Tammikuu 2013

Tiivistelmä

Tässä pro gradu -tutkielmassa käsitellään viivaintegraalia ja siihen liittyviä ominaisuuksia. Alussa esitellään aiheen ymmärtämisen kannalta tärkeitä käsitteitä ja lauseita. Tavoitteena on edetä siten, että lopulta kaikki Greenin lauseen ymmärtämistä varten tarvittavat käsitteet ja tulokset tulisivat käsiteltyä ja tutkielman lopussa todistetaan osittain kyseinen lause. Tutkielmassa käsiteltäviä aiheita hyödynnetään erityisesti teknillisillä aloilla. Työn tavoite onkin ollut tehdä esityksestä oppimateriaalimainen kokonaisuus ja tätä tukevat työssä esiintyvät lukuisat esimerkit.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän pro gradu -tutkielman luvussa 2 tarkastelemme tarvittavia käsitteitä ja lauseita, jotta kykenemme ymmärtämään ja määrittelemään viivaintegraalin käsitteen.

Lähdemme liikkeelle sellaisista peruskäsitteistä kuten käyrä ja selvitämme, miksi tarvitsemme käyrien parametriesityksiä käsitellessämme viivaintegraaleja. Lisäksi esittelemme lauseita ja määritelmiä, jotka ovat ensiarvoisen tärkeitä myöhemmin tutkielmassa esiintyvän Greenin lauseen todistuksen kannalta. Käymme myös läpi sellaisia käsitteitä kuten suljettu käyrä, yksinkertainen käyrä sekä käyrän jäljen. Hahmottelemme myös, mitä tarkoitetaan alueella D, joka on avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko.

Luvussa 3 määrittelemme, mitä tarkoittaa käyrän sileys ja paloittain sileys, sekä annamme viivaintegraalin määritelmän. Lisäksi esitämme muutamia viivaintegraalin perusominaisuuksia.

Greenin lauseen todistuksen kannalta esitämme luvussa 4 erään ensiarvoisen tärkeän tuloksen. Tämän jälkeen selvitämme luvussa 5, mitä tarkoitetaan sillä, että viivaintegraalit ovat reitistä riippumattomia ja esitämme mitä ehtoja viivaintegraalin on toteutettava, että se olisi reitistä riippumaton. Esittelemme lyhyesti myös käsitteen roottori, jolla on merkittävä rooli insinööritieteissä.

Luvussa 6 esitämme, mitä tarkoitetaan sillä, että alue D on yksinkertaisesti rajattu, sekä lauseen koskien vektorikentän $\boldsymbol{F}$ konservatiivisuutta ja reitistä riippumattomuutta.

Luvussa 7 etenemme tarkastelemaan fysiikassakin käytössä olevaa potentiaalifunktion käsitettä ja opettelemme tapoja, joilla tällainen potentiaalifunktio voidaan löytää, ja kuinka se auttaa laskemaan viivaintegraalien arvoja.

Tutkielman luvussa 8 todistamme matemaatikko George Greenin mukaan nimetyn lauseen, joka antaa yhteyden viivaintegraalin ja kaksinkertaisen integraalin välille.

Tutkielman on tarkoitus olla oppimateriaalimainen esitys viivaintegraaleista ja niihin liittyvistä aiheista. Jokaisen kappaleen lopussa on esitetty esimerkkejä kappaleessa käsitellystä asiasta, ja näiden perusteella lukijan tulisi olla mahdollista ratkaista itsenäisesti aiheeseen liittyviä tehtäviä. Näin tutkielma voisi toimia oppimateriaalina aiheeseen liittyvällä kurssilla tai ainakin tukena analyysin opiskelussa. Lähdeteoksena on käytetty pääasiassa William F. Trenchin kirjaa Advanced calculus.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Luvussa 2 esitämme lyhyesti muutamia pääaiheemme käsittelyssä tarvitsemiamme apuneuvoja. Määrittelemme käsitteet parametrinen käyrä, suljettu käyrä sekä yksinkertainen käyrä. Käsittelemme lisäksi näiden soveltamista eri vektoriavaruuksiin.

Analyysin perusteissa käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^2$ on määritelty joukoksi pisteitä, jotka toteuttavat parametreja x ja y yhdistävän yhtälön. Esimerkiksi käyrä, joka on määritelty yhtälöllä

$$x^2 + y^2 = 1$$

kuvaa origokeskeistä yksikköympyrää, kun taas käyrä, joka on määritelty

$$y = x^2, \qquad -1 \leq x \leq 1,$$

kuvaa osaa paraabelista. Tämä määritelmä ei ole riittävä tutkittaessa viivaintegraaleja, sillä käyrää ei tällöin tule käsittää pelkkänä pistejoukkona vaan pistejoukkona, joka kierretään tietyssä järjestyksessä. Tämän vuoksi tarkastelemme *parametrisia käyriä*. Parametrinen käyrä C avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on suunnattu joukko pisteitä muotoa

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{bmatrix}, \qquad a \leq t \leq b, \tag{2.1}$$

missä funkiot $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ ovat jatkuvia välillä $[a, b]$. Funktio ϕ_i, missä $i \in \{1, \ldots, n\}$ siis kuvaa pisteen $t \in [a, b]$ joksikin avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteeksi. Sanomme joukon olevan suunnattu, koska funktio $\boldsymbol{\Phi}$ määrää järjestyksen, jossa käyrän C pisteet käydään läpi, kun t saa arvoja välillä $[a, b]$. Funktio

$\mathbf{\Phi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ on käyrän C *parametriesitys*. Jos funktio

$$\boldsymbol{X} = \Psi(\tau) = \begin{bmatrix} \psi_1(\tau) \\ \psi_2(\tau) \\ \vdots \\ \psi_n(\tau) \end{bmatrix}, \qquad c \le \tau \le d, \tag{2.2}$$

on jatkuva välillä $[c, d]$ ja on olemassa aidosti kasvava funktio σ, joka kuvaa välin $[c, d]$ välille $[a, b]$ siten että

$$\mathbf{\Psi}(\tau) = \mathbf{\Phi}(\sigma(\tau)), \qquad c \le \tau \le d, \tag{2.3}$$

niin tällöin ehdot (2.1) ja (2.2) esittävät samaa parametristä käyrää C. Tällöin siis parametriesitykset $\mathbf{\Phi}(t)$ ja $\mathbf{\Psi}(\tau)$ kuvaavat saman pistejoukon samaan järjestykseen, kun t saa arvoja väliltä $[a, b]$ ja τ väliltä $[c, d]$. Tässä tapauksessa sanotaan, että $\mathbf{\Phi}$ ja $\mathbf{\Psi}$ ovat yhtenevät parametriset esitykset käyrälle C ja että parametriesitys $\mathbf{\Psi}$ saadaan parametriesityksestä $\mathbf{\Phi}$ muunnoksella $t = \sigma(\tau)$. [3, s. 610-611]

Sanotaan, että piste $\boldsymbol{X}_0$ on käyrällä C, joka on määritelty ehdon (2.1) mukaan, jos on olemassa piste $t_0 \in [a, b]$ siten että $\boldsymbol{X}_0 = \mathbf{\Phi}(t_0)$. Kaikkien tällaisten pisteiden joukkoa kutsutaan käyrän C *jäljeksi* ja sille käytetään merkintää $tr(C)$. [3, s. 612]

Esimerkki 2.1. Parametriset funktiot

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le \ln(2),$$

ja

$$\mathbf{\Psi}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau^2 \\ \tau \\ \tau^{-1} \end{bmatrix}, \qquad 1 \le \tau \le 2,$$

esittävät molemmat käyrää

$$z = \frac{y}{x}, \qquad 1 \le x \le 4, \quad 1 \le y \le 2$$

lähtien pisteestä $(1, 1, 1)$ ja päättyen pisteeseen $(4, 2, \frac{1}{2})$. Parametrinen funktio $\mathbf{\Psi}$ saadaan parametrisesta funktiosta $\mathbf{\Phi}$ muunnoksella

$$t = \sigma(\tau) = \ln(\tau),$$

missä kasvava funktio σ kuvaa välin $[1, 2]$ välille $[0, \ln(2)]$ siten, että

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}(\sigma(\tau)).$$

Vastaavasti käänteisellä muunnoksella saadaan parametrisestä funktiosta $\boldsymbol{\Phi}$ parametrinen funktio $\boldsymbol{\Psi}$ eli

$$\tau = \sigma^{-1}(t) = e^t.$$

Esimerkki 2.2. Parametriset funktiot

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^4 \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq \sqrt{2}$$

ja

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = \begin{bmatrix} 1+\tau \\ (1+\tau)^2 \end{bmatrix}, \qquad -1 \leq \tau \leq 1$$

esittävät molemmat paraabelin kaarta

$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

kierrettynä pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(2, 4)$. Parametrinen funktio $\boldsymbol{\Psi}$ on saatu parametrisesta funktiosta $\boldsymbol{\Phi}$ parametrimuunnoksella

$$t = \sigma(\tau) = \sqrt{1+\tau},$$

ja vastaavasti parametrinen funktio $\boldsymbol{\Phi}$ on saatu parametrisesta funktiosta $\boldsymbol{\Psi}$ käänteisellä parametrimuunnoksella

$$\tau = \sigma^{-1}(t) = t^2 - 1.$$

Tästä lähtien puhumme parametrisista käyristä pelkkinä käyrinä. [3, s. 611]

Määritelmä 2.1. Olkoon C käyrä, joka toteuttaa yhtälön (2.1). Tällöin $\boldsymbol{\Phi}(a)$ ja $\boldsymbol{\Phi}(b)$ ovat käyrän C alku- ja loppupisteet. Jos $\boldsymbol{\Phi}(a) = \boldsymbol{\Phi}(b)$, sanotaan, että käyrä C on *suljettu*. Jos $\boldsymbol{\Phi}(t_1) \neq \boldsymbol{\Phi}(t_2)$, kun a $\leq t_1 < t_2 < b$ tai $a < t_1 < t_2 \leq b$, niin tällöin sanotaan, että käyrä C on *yksinkertainen*. Yksinkertainen suljettu käyrä on sekä suljettu että yksinkertainen. [3, s. 613]

Koska jokaisella käyrällä on ääretön määrä parametriesityksiä, on tärkeää huomata, että vaikka määritelmä 2.1 on lausuttu tietyllä parametrisen funktion $\mathbf{\Phi}$ esityksellä, niin jokainen sen osa on tosiasiassa riippumaton käyrälle C valittavasta parametrisoinnista. Esimerkiksi jos $\mathbf{\Psi} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ on toinen esitys käyrälle C ja se on yhtäpitävä parametriesityksen $\mathbf{\Phi}$ kanssa, niin tällöin

$$\mathbf{\Psi}(c) = \mathbf{\Phi}(a) \quad \text{ja} \quad \mathbf{\Psi}(d) = \mathbf{\Phi}(b)$$

eli käyrän C päätepisteet ovat riippumattomia sille valitusta parametrisoinnista. [3, s. 613]

Esimerkki 2.3. Parametrinen funktio

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \qquad -1 \leq t \leq 1$$

ei ole suljettu, sillä määritelmän 2.1 mukaan tulisi olla

$$\mathbf{\Phi}(-1) = \mathbf{\Phi}(1),$$

mutta

$$\mathbf{\Phi}(-1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(1).$$

Siis käyrä ei ole suljettu. Jos tämä käyrä on yksinkertainen, niin määritelmän 2.1 mukaan

$$\mathbf{\Phi}(t_1) \neq \mathbf{\Phi}(t_2), \qquad -1 \leq t_1 < t_2 < 1 \quad \text{tai} \quad -1 < t_1 < t_2 \leq 1.$$

Oletetaan, että

$$-1 \leq p_1 < p_2 < 1.$$

Sijoitetaan pisteet p_1 ja p_2 parametriseen funktioon

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix},$$

jolloin saamme

$$\mathbf{\Phi}(p_1) = \begin{bmatrix} p_1 \\ {p_1}^2 \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{\Phi}(p_2) = \begin{bmatrix} p_2 \\ {p_2}^2 \end{bmatrix}.$$

Koska $p_1 < p_2$, niin vektoreissa ylimmät alkiot ovat aina erisuuret ja tästä seuraa, että

$$\mathbf{\Phi}(p_1) = \begin{bmatrix} p_1 \\ {p_1}^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} p_2 \\ {p_2}^2 \end{bmatrix} \mathbf{\Phi}(p_2),$$

joten käyrä on yksinkertainen.

Esimerkki 2.4. Parametrinen funktio

$$\mathbf{\Psi}(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \\ 1 + \cos(\tau) \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq \tau \leq 3\pi$$

ei ole suljettu eikä yksinkertainen. Jos se olisi suljettu, tulisi päteä

$$\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{\Psi}(3\pi),$$

mutta

$$\mathbf{\Psi}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}(3\pi).$$

Jos se olisi yksinkertainen, tulisi päteä

$$\mathbf{\Psi}(\tau_1) \neq \mathbf{\Psi}(\tau_2), \qquad 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < 3\pi \quad \text{tai} \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 \leq 3\pi.$$

Kuitenkin

$$\mathbf{\Psi}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}(2\pi),$$

joten käyrä ei ole yksinkertainen.

Seuraavassa lauseessa esitellään lyhyesti tulos, joka antaa keinon integroida kahden muuttujan funktiota tietyn joukon S yli. Tulos on tutkielman kannalta oleellinen, sillä siihen tullaan viittaamaan myöhemmin todistettaessa Greenin lausetta.

Lause 2.1. *Olkoon S alue avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Jos f on integroituva joukon S yli, missä*

$$S = \{(x, y)|u(y) \leq x \leq v(y), c \leq y \leq d\}$$

ja integraali

$$\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\, dx$$

on olemassa välillä $c \leq y \leq d$, niin tällöin

$$\int_S f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\, dx. \tag{2.4}$$

[3, s. 515]

Todistus. Katso [3, s. 514-515]. □

Myös seuraava integraalilaskennan tulos on oleellinen Greenin lauseen todistuksessa.

Lause 2.2. *Oletetaan, että F on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a, b). Lisäksi oletetaan, että f on integroituva välillä $[a, b]$ ja että*

$$F'(x) = f(x), \qquad a < x < b.$$

Tällöin

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{2.5}$$

[3, s. 148]

Todistus. Katso [3, s. 149]. □

Seuraavaksi yritämme selventää myöhemmin tutkielmassa esiintyvää *alueen* käsitettä. Määritelläksemme *alueen*, tarvitsemme ensin seuraavia määritelmiä. Määrittelemme ensin muutamia joukko-opin käsitteitä, jotka on hyvä tuntea asian ymmärtämisen kannalta. [3, s. 310]

Määritelmä 2.2. Jos x_0 on reaaliluku ja $\epsilon > 0$, niin avoin väli $(x_0 - \epsilon\,,\ x_0 + \epsilon)$ on luvun x_0 *ϵ-ympäristö*. Jos luvun x_0 jokin *ϵ-ympäristö* sisältyy joukkoon S, tällöin S on pisteen x_0 *ympäristö* ja piste x_0 on joukon S *sisäpiste*. Jos jokainen joukon S piste on sisäpiste, niin joukon S sanotaan olevan *avoin joukko*. Avoimen joukon komplementti on puolestaan *suljettu joukko*. [3, s. 23]

Avoimen joukon ja ϵ-ympäristön määritelmät voidaan laajentaa myös avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Määritelmä 2.3. Jos $\epsilon > 0$, niin pisteen $\boldsymbol{X}_0$ ϵ-ympäristö avaruudessa $\mathbb{R}^n$, missä $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$, on joukko $N_\epsilon(\boldsymbol{X}_0)$ joka toteuttaa ehdon,

$$|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0| < \epsilon.$$

[3, s. 304]

Avoimelle ja suljetulle joukolle voidaan antaa vastaavanlaiset määritelmät avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja tällöin puhutaan *avoimesta pallosta* ja *suljetusta pallosta* (ks. [3, s. 305]).

Määritelmä 2.4. Olkoon joukko S avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukko. Tällöin piste x_0 on joukon S *reunapiste*, jos jokainen pisteen x_0 ympäristö sisältää ainakin yhden pisteen joukosta S ja yhden pisteen joukon S ulkopuolelta. Kaikkien reunapisteiden joukkoa kutsutaan joukon S *reunaksi* ja merkitään ∂S. Joukon S *sulkeumaa* merkitään $\overline{S}$, ja se määritellään $\overline{S} = S \cup \partial S$. [3, s. 25]

Reunapisteen, sisäpisteen, ympäristön ja sulkeuman määritelmät ovat samat avaruudessa $\mathbb{R}^n$, joten emme määrittele niitä uudestaan. Määritelmistä olisi vain korvattava joukko $\mathbb{R}$ joukolla $\mathbb{R}^n$. [3, s. 304]

Määritelmä 2.5. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukon S sanotaan olevan yhtenäinen, jos on mahdotonta esittää joukkoa S yhdisteenä kahdesta erillisestä epätyhjästä joukosta siten, että kumpaankaan ei sisälly toisen joukon kasautumispistettä. Toisin sanoen tämä pätee vain, jos joukkoa S ei voida ilmaista yhdisteenä $S = A \cup B$, missä

$$A \neq \varnothing, \quad B \neq \varnothing, \quad \overline{A} \cap B = \varnothing, \quad \text{ja} \quad A \cap \overline{B} = \varnothing \tag{2.6}$$

Jos S voidaan ilmaista tällä tavalla, sen sanotaan olevan epäyhtenäinen.[3, s. 310]

Lause 2.3. *Avoin joukko $S \in \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen, jos ja vain jos sen kaksi pistettä on yhdistettävissä katkeamattomalla viivalla.*

Todistus. Katso [3, s. 311] $\square$

Määritelmä 2.6. Alue $D \subseteq \mathbb{R}^n$ on yhdiste avoimesta yhtenäisestä joukosta johon sisältyy koko reuna, vain osa siitä tai ei reunaa ollenkaan.[3, s. 312]

3 Sileät käyrät ja viivaintegraali

Parametrisen funktion $\mathbf{\Phi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ derivaatta on

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \begin{bmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \\ \vdots \\ \phi_n'(t) \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

jokaisella sellaisella $t \in [a, b]$, että ehdon 3.1 vektori on olemassa. Tässä $\phi_i'(a)$ ja $\phi_i'(b)$ on tulkittu oikean- ja vasemmanpuoleisiksi derivaatoiksi.

Jos käyrän C_i päätepiste on käyrän C_{i+1} alkupiste, missä $i = 1, \ldots, k-1$, niin voidaan kirjoittaa

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$$

määräämään käyrä C, joka muodostuu kun kuljetaan käyriä $C_1, C_2, \ldots, C_k$ pitkin tässä järjestyksessä. [3, s. 615-616]

Määritelmä 3.1. Käyrän C sanotaan olevan *sileä*, jos se voidaan esittää muodossa

$$\boldsymbol{X} = \mathbf{\Phi}(t), \qquad a \leq t \leq b,$$

missä $\mathbf{\Phi}'$ on jatkuva ja nollavektorista $\mathbf{0}$ eroava välillä $[a, b]$. Käyrä C on *paloittain sileä*, jos

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k,$$

missä C_1,C_2,...,C_k ovat sileitä. [3, s. 616]

Määritelmä 3.2. Oletetaan, että C on sileä käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja $\boldsymbol{F} = f_1, f_2, \ldots, f_n$ on jatkuva jäljessä $tr(C)$. Tällöin vektorin $\boldsymbol{F}$ *viivaintegraali* pitkin käyrää C määritellään

$$\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \int\limits_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)) \cdot \boldsymbol{\Phi'}(t) dt = \int\limits_a^b \left[\sum_{j=1}^n f_j(\boldsymbol{\Phi}(t)\phi_j^{'}(t) \right] dt, \tag{3.2}$$

missä $\boldsymbol{\Phi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ on käyrän C sileä esitys. (Tässä merkinnällä "$\cdot$" tarkoitetaan sisätuloa.) [3, s. 630]

Ohimennen huomataan, että tämä määritelmä pitäisi paikkansa vaikka sana "sileä" korvattaisiin "jatkuvasti derivoituvalla". Välttääksemme kömpelöitä merkintöjä tässä ja tulevissa kappaleissa, emme kirjoita funktion määrittävää muuttujaa näkyviin integraalilausekkeissa, ellei sitä selvyyden vuoksi vaadita. Käytämme siis mieluummin muotoa $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$ vasemmalla puolella lauseketta (3.2).

Jotta määritelmässä 3.2 olisi järkeä, on näytettävä, että $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$ on riippumaton tietystä käyrälle C valittavasta sileästä esityksestä. Olkoon $\boldsymbol{\Phi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ja $\boldsymbol{\Psi} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ käyrän C esityksiä siten, että

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}(\sigma(\tau)), \qquad c \leq \tau \leq d, \tag{3.3}$$

missä σ on jatkuvasti differentioituva ja kuvaa välin $[c, d]$ väliksi $[a, b]$. Soveltamalla muuttujanvaihtoa $t = \sigma(\tau)$ viimeiseen integraalilausekkeeseen kohdassa (3.2) saadaan

$$\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \int\limits_c^d \left[\sum_{j=1}^n f_j(\boldsymbol{\Phi}(\sigma(\tau)))\phi_j^{'}(\sigma(\tau)) \right] \sigma^{'}(\tau)\, d\tau. \tag{3.4}$$

Koska $\phi_j(\sigma(\tau)) = \psi_j(\tau)$, niin ketjusäännön mukaan

$$\phi_j^{'}(\sigma(\tau))\sigma^{'}(\tau) = \psi_j^{'}(\tau),$$

joten kohta (3.4) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \int\limits_a^b \left[\sum_{j=1}^n f_j(\Psi(\tau))\psi^{'}(\tau) \right] d\tau,$$

joka on juuri lausekkeen $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$ määritelmä lausuttuna funktion $\boldsymbol{\Psi}$ avulla. Tämän vuoksi $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$ ei riipu tietystä käyrälle C valittavasta parametrisesta esityksestä. [3, s. 631]

Määritelmä 3.3. Jos $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$ on paloittain sileä ja vektorikenttä $\boldsymbol{F}$ on jatkuva jäljessä $tr(C)$, niin

$$\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{C_i} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}.$$

[3, s. 631]

Seuraavassa lauseessa merkintä $-C$ tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että määriteltyä käyrää kuljetaan päinvastaista reittiä pitkin.

Lause 3.1. *Määritelmän 3.2 oletusten ollessa voimassa pätee*

$$\int\limits_{-C} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = -\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}.$$

[3, s. 631]

Todistus. Todistus palautuu tunnettuun integraalilaskennan määritelmään, jossa määrätyn integraalin integroimisrajat vaihtamalla tulee integraalimerkin eteen miinus. Tällöin

$$\begin{aligned}\int\limits_{-C} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} &= \int\limits_b^a \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(t)\, dt \\ &= -\int\limits_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(t)\, dt = -\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}.\end{aligned}$$

□

Seuraava lause seuraa suoraan viivaintegraalin määritelmästä.

Lause 3.2. *Jos vektorikentät $\boldsymbol{F}$ ja $\boldsymbol{G}$ ovat jatkuvia käyrällä C, ja a ja b ovat vakioita, niin tällöin*

$$\int\limits_C (a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{dX} = a\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} + b\int\limits_C \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{dX}.$$

[3, s. 636]

Esimerkki 3.1. Lasketaan viivaintegraali $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$, kun on määritelty, että $x^2 + y^2 = 4$, $x = z$ ja

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} y \\ x \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin alkuehdoista seuraa, että

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} y \\ x \\ 4 \end{bmatrix},$$

ja olkoon C on jana pisteestä $(0,2,0)$ pisteeseen $(2,0,2)$. Parametrisoidaan käyrä C asettamalla

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ -2t+2 \\ 2t \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Tällöin

$$\boldsymbol{\Phi}'(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ja

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)) = \begin{bmatrix} -2t+2 \\ 2t \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan määritelmän 3.2 mukaisesti kirjoittaa vektorille $\boldsymbol{F}$ viivaintegraali pitkin käyrää C eli

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} &= \int\limits_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(t)\, dt \\
&= \int\limits_0^1 [(-2t+2)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}] \cdot [2\boldsymbol{i} + (-2)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}]\, dt \\
&= \int\limits_0^1 [(-2t+2)\cdot 2] + [2t \cdot (-2)] + (2 \cdot 4)\, dt \\
&= \int\limits_0^1 -4t + 4 - 4t + 8\, dt = \int\limits_0^1 -8t + 12\, dt = 8.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.2. Lasketaan viivaintegraali $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$, missä

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{bmatrix},$$

ja C on jana pisteestä $(0,0,0)$ pisteeseen $(1,2,-1)$. Voimme parametrisoida käyrän C siten, että

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Tällöin derivaatalle saadaan

$$\boldsymbol{\Phi}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ja sijoittamalla vektorikenttään $\boldsymbol{F}$ saadaan

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)) = \begin{bmatrix} t(2t) \\ 2t(-t) \\ t(-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ -2t^2 \\ -t^2 \end{bmatrix},$$

ja voimme laskea integraalin arvon sijoittamalla seuraavasti

$$\begin{aligned} \int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} &= \int\limits_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(t)) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(t)\, dt \\ &= \int\limits_0^1 [(2t^2)(1) + (-2t^2)(2) + (-t^2)(-1)]\, dt \\ &= -\int\limits_0^1 t^2\, dt = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

[3, s. 631-632]

4 Reaaliarvoisten funktioiden viivaintegraalit

Toisinaan on tarpeen käsitellä reaaliarvoisten funktioiden viivaintegraaleja. Jos f on jatkuva käyrällä C, jota määrittää funktio $\boldsymbol{\Phi} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, voimme määritellä

$$\int\limits_C f dx_i = \int\limits_a^b f(\boldsymbol{\Phi}(t))\phi_i'(t)\, dt.$$

Funktiota $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ voidaan siis integroida monen eri muuttujan suhteen, jonka vuoksi on käytetty merkintää dx_i, missä $i = 1, 2, \ldots, n$, selventämään minkä muuttujan suhteen integrointi suoritetaan. Funktio f voidaan olettaa vektorikentän $\boldsymbol{F}$ indeksiä i vastaavaksi komponentiksi, jolloin jäljelle jääneet $n-1$ komponenttia katoavat ja määritellään

$$\int\limits_C f dx_i = \int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}.$$

Näin määriteltynä ja lauseen 3.2 mukaan jos $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ niin

$$\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_C f_i \, dx_i.$$

Voimme siis hajottaa viivaintegraalin $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$ komponentteihin, jotka voivat usein olla helpommin integroitavissa kuin alkuperäinen lauseke. [3, s. 636]

Esimerkki 4.1. Kirjoittamalla vektorikenttä

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

muotoon

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

ja soveltamalla lausetta 3.2 saadaan

$$\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \int\limits_C \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{dX} + \int\limits_C \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{dX} = \int\limits_C P \, dx + 0 \, dy + \int\limits_C 0 \, dx + Q \, dy$$

eli olemme näyttäneet, että

$$\int\limits_C P \, dx + Q \, dy = \int\limits_C P \, dx + \int\limits_C Q \, dy.$$

Tämä saattaa tuntua triviaalilta, mutta ei ole sitä. Tässä esityksessä on etuna se, että oikeanpuoleiset integraalit voidaan määrittää käyttäen käyrän C eri parametrisaatiota, mikäli se on tarpeen. Tämä on ensiarvoisen tärkeää todistettaessa Greenin lausetta, joka esitetään myöhemmin. [3, s. 636-637]

5 Reitistä riippumattomat viivaintegraalit

Jos F on jatkuva määrittelyjoukossa $D \in \mathbb{R}^n$ ja

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$$

aina kun C_1 ja C_2 ovat paloittain sileitä käyriä ja niiden päätepisteet ovat samat joukossa D, sanomme, että vektorin $\boldsymbol{F}$ viivaintegraalit ovat *reitistä riippumattomia* joukossa D. Tällöin kirjoitetaan

$$\int_{\boldsymbol{X_0}}^{\boldsymbol{X_1}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$$

merkitsemään vektorin $\boldsymbol{F}$ viivaintegraalia pitkin mitä tahansa paloittain sileää käyrää joukossa D pisteestä $\boldsymbol{X}_0$ pisteeseen $\boldsymbol{X}_1$. [3, s. 638]

Esimerkki 5.1. Lausekkeen

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \end{bmatrix}$$

viivaintegraalit eivät ole riippumattomia reitistä avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Esimerkiksi oletetaan, että käyrä C_1 on yksikköympyrän kaari ja käyrä C_2 jana pisteestä $(1, 0)$ pisteeseen $(0, 1)$. Parametrisoimalla käyrän C_1 muotoon

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} (x - y)dx + (x + y)dy &= \int_0^{\pi/2} [(\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t)]\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} [\cos t(-\sin t) + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t \cos t]\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt \qquad |\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\
&= \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2.
\end{aligned}$$

Parametrisoimalla käyrän C_2 muotoon

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

saadaan

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_2} (x-y)dx + (x+y)dy &= \int\limits_0^1 [(1-t-t)(-1) + (1-t+t)(1)]\,dt \\ &= \int\limits_0^1 2t = 1.\end{aligned}$$

[3, s. 639-640]

Esimerkki 5.2. Lausekkeen

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

viivaintegraalit ovat riippumattomia reitistä avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Tämä selviää kun huomaamme, että

$$yz = \frac{\partial}{\partial x}(xyz), \quad xz = \frac{\partial}{\partial y}(xyz), \quad xy = \frac{\partial}{\partial z}(xyz).$$

Voimme määritellä, että C on sileä käyrä, jolla on päätepisteet (x_0, y_0, z_0) ja (x_1, y_1, z_1), ja jota kuvaa

$$\boldsymbol{X} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \qquad a \le t \le b.$$

Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\int\limits_C (yz)\,dx + (xz)\,dy + (xy)\,dz &= \int\limits_a^b [y(t)z(t)x^{'}(t) + x(t)z(t)y^{'}(t) + x(t)y(t)z^{'}(t)]\,dt \\ &= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}[x(t)y(t)z(t)]\,dt \\ &= x(b)y(b)z(b) - x(a)y(a)z(a) \\ &= x_1y_1z_1 - x_0y_0z_0.\end{aligned}$$

Tämän vuoksi $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}X$ riippuu vain käyrän C päätepisteistä, jos C on sileä käyrä. Kuten seuraavassa todistuksessa nähdään, tämä pätee myös jos käyrä C on paloittain sileä. [3, s. 640]

Lause 5.1. *Oletetaan, että* $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *on jatkuva avoimella alueella* D*. Tällöin vektorin* F *viivaintegraalit ovat riippumattomia polusta alueessa* D*, jos ja vain jos on olemassa funktio* f*, joka on määritelty alueessa* D *siten, että*

$$\boldsymbol{F} = \nabla f \tag{5.1}$$

eli siis jos ja vain jos $\boldsymbol{F}$ *on konservatiivinen alueessa* D*.*

[3, s. 640]

Todistus. Oletetaan ehdon (5.1) pätevän alueella D. Oletetaan myös, että käyrä C on sileä alueella D ja että sitä kuvaa sileä parametrinen funktio muotoa

$$\boldsymbol{X} = X(t), \qquad a \le t \le b,$$

jolla on alku- ja loppupisteet $\boldsymbol{\alpha}$ ja $\boldsymbol{\beta}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}X &= \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t)) \cdot \boldsymbol{X}^{'}(t)\, dt \\ &= \int_a^b \left[\sum_{j=1}^n f_j(\boldsymbol{X}(t)) x_j^{'}(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\boldsymbol{X}(t))}{\partial x_j} x_j^{'}(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{X}(t))\, dt \\ &= f(\boldsymbol{X}(b)) - f(\boldsymbol{X}(a)) = f(\boldsymbol{\beta}) - f(\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Jos $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$, missä C_i on sileä käyrä, jolla on päätepisteinä $\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ ja $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, niin tällöin soveltamalla tätä tulosta käyrään C_i saamme

$$\int_{C_i} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = f(\boldsymbol{\alpha}_i) - f(\boldsymbol{\alpha}_{i-1}).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} &= \sum_{i=1}^k [f(\boldsymbol{\alpha}_i) - f(\boldsymbol{\alpha}_{i-1})] \\ &= f(\boldsymbol{\alpha}_k) - f(\boldsymbol{\alpha}_0) = f(\boldsymbol{\beta}) - f(\boldsymbol{\alpha}), \end{aligned}$$

koska $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$ ja $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_k$. Tämä todistaa, että ehdosta (5.1) seuraa reitistä riippumattomuus alueessa D.

Käänteisesti oletetaan, että vektorin $\boldsymbol{F}$ viivaintegraalit ovat riippumattomia polusta alueessa D, ja olkoon $\boldsymbol{X}_0$ mielivaltainen piste alueessa D. Määritellään

$$f(\boldsymbol{X}) = \int\limits_{\boldsymbol{X}_0}^{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dY},$$

missä X on alueessa D ja integrointireitiksi valitaan mielivaltainen paloittain sileä käyrä alueessa D. (Merkitsemme tässä integroimismuuttujaa kirjaimella $\boldsymbol{Y}$ välttääksemme sekaannuksen määrätyn integraalin ylärajan $\boldsymbol{X}$ kanssa.) Näytämme että

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1} = f_1(\boldsymbol{X}). \tag{5.3}$$

Todistus, että $f_{x_i}(\boldsymbol{X}) = f_i(\boldsymbol{X})$, kun $i = 2, \ldots, n$, on vastaavanlainen. Jos

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{X}^{'} = (x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5.4}$$

voimme löytää funktion $f(\boldsymbol{X}^{'})$ integroimalla mitä tahansa paloittain sileää käyrää pitkin alueessa D pisteestä $\boldsymbol{X}_0$ pisteeseen $\boldsymbol{X}$. Tämän jälkeen voimme integroida pitkin janaa L pisteestä $\boldsymbol{X}$ pisteeseen $\boldsymbol{X}^{'}$ olettaen, että väli Δx_1 on niin pieni, että $L \subset D$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X}^{'}) &= \int\limits_{\boldsymbol{X}_0}^{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dY} + \int\limits_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{X}^{'}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dY} \\ &= f(\boldsymbol{X}) + \int\limits_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{X}^{'}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dY}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Jana L voidaan esittää muodossa

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(t) = \begin{bmatrix} x_1 + t\Delta x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

joten yhtälöstä (5.5) seuraa, että

$$f(\boldsymbol{X}') - f(\boldsymbol{X}) = \Delta x_1 \int_0^1 f_1(x_1 + t\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt.$$

Sen vuoksi

$$\frac{f(\boldsymbol{X}') - f(\boldsymbol{X})}{\Delta x_1} - f_1(\boldsymbol{X}) =$$

$$\int_0^1 [f_1(x_1 + t\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)]\, dt, \tag{5.6}$$

jos $\Delta x_1 \neq 0$. Koska f on jatkuva pisteessä $\boldsymbol{X}$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f_1(x_1 + t\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

jos $0 \leq t \leq 1$ ja $|\Delta x_1| < \delta$. Tämän vuoksi ehdoista (5.4) ja (5.6) seuraa, että

$$\left| \frac{f(\boldsymbol{X}') - f(\boldsymbol{X})}{\Delta x_1} - f_1(\boldsymbol{X}) \right| < \varepsilon \quad \text{jos} \quad 0 < |\Delta x_1| < \delta.$$

Tästä seuraa yhtälö (5.3) ja näin todistus saadaan valmiiksi. [3, s. 640-643]

□

Ilman menetelmää vektorin $\boldsymbol{F}$ konservatiivisuuden määrittämiseksi lauseesta 5.1 ei ole paljoakaan käytännön hyötyä laskettaessa tietynlaisia viivaintegraaleja. Seuraava lause antaa helposti sovellettavat ja välttämättömät ehdot vektorikentän $\boldsymbol{F}$ konservatiivisuudelle.

Lause 5.2. *Jos $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ on jatkuvasti derivoituva konservatiivinen vektorikenttä avoimella alueella $D \subseteq \mathbb{R}^n$, niin*

$$\frac{\partial f_i(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(\boldsymbol{X})}{\partial x_i} \quad \textit{jos} \quad i, j = 1, \ldots, n \quad \textit{ja} \quad \boldsymbol{X} \in D. \tag{5.7}$$

[3, s. 643]

Todistus. Jos $\boldsymbol{F} = \nabla f$ alueessa D, niin tällöin

$$f_i(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_i} \quad \text{ja} \quad f_j(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} \quad \text{jos} \quad \boldsymbol{X} \in D.$$

Tästä seuraa ,että

$$\frac{\partial f_i(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f_j(\boldsymbol{X})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{jos} \quad \boldsymbol{X} \in D, \tag{5.8}$$

ja koska $\boldsymbol{F}$ on jatkuvasti derivoituva, toiset osittaisderivaatat yhtälössä (5.8) ovat yhtäsuuret (Tämä seuraa osittaisderivaattaan liittyvistä laskusäännöistä. Katso esimerkiksi [3, s.339]). Tällöin yhtälöstä (5.8) seuraa ehto (5.7). [3, s. 643] $\square$

Jos $n = 2$ ja

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix},$$

ehto (5.7) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{5.9}$$

Jos $n = 3$ ja

$$\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}, \tag{5.10}$$

ehto (5.7) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Jos F lausekkeessa (5.10) on derivoituva, määritellään sen *roottori* seuraavasti

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{5.11}$$

Tämä määritelmä on helppo muistaa kun se kirjoitetaan determinanttina

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Lauseesta 5.2 seuraa että, jos $\boldsymbol{F}$ on jatkuvasti derivoituva ja konservatiivinen joukossa D, niin tällöin $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ joukossa D. [3, s. 643-644]

Esimerkki 5.3. Oletetaan, että $n = 3$ ja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$. Tällöin saamme yhtälön 5.7 muotoon

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

jonka voimme edelleen kirjottaa muodossa

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

Nyt sijoittamalla tämän roottorin määritelmään 5.11 saamme

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}.$$

Esimerkki 5.4. Jos

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = x^3 y\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k},$$

niin tällöin

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 y & x+z & xyz \end{vmatrix} = (xz-1)\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + (1-x^3)\boldsymbol{k}.$$

Esimerkki 5.5. Näimme esimerkissä 5.2, että vektorin

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

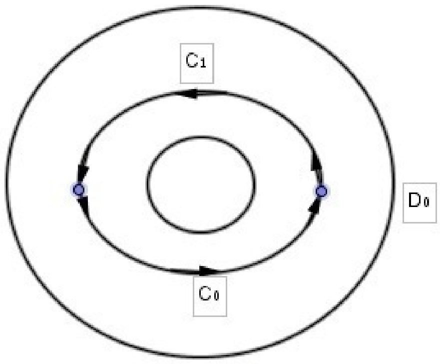
viivaintegraalit ovat riippumattomia polusta avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Lauseen 5.1 mukaan $\boldsymbol{F}$ on tällöin konservatiivinen avaruudessa $\mathbb{R}^3$, ja niinpä lauseesta 5.2 seuraa, että $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Tämä on helppo märittää, sillä

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-x)\boldsymbol{i} + (y-y)\boldsymbol{j} + (z-z)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}.$$

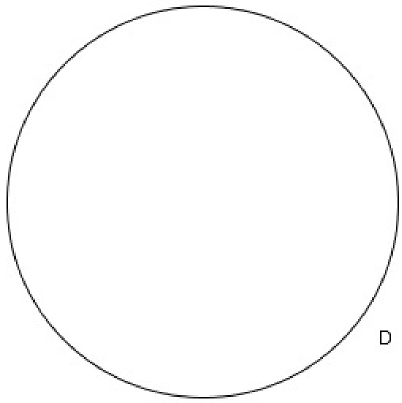
[3, s. 644]

6 Yhdesti yhtenäiset alueet

Todetaksemme, että $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}X$ on reitistä riippumaton alueella D, kun vektorikenttä $\boldsymbol{F}$ on jatkuvasti derivoituva ja toteuttaa ehdon (5.7) alueella D, tarvitsemme ylimääräisen oletuksen alueesta D eli että sen tulee olla *yhdesti yhtenäinen*. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa, että jos C_0 ja C_1 ovat mitä tahansa paloittain määriteltyjä käyriä alueella D, joilla on yhteiset päätepisteet, niin tällöin jälki $tr(C_0)$ voidaan muuntaa jäljeksi $tr(C_1)$ ilman, että se katkaistaan ja ilman, että poistutaan alueelta D. Alue tasossa $\mathbb{R}^2$ on yhdesti yhtenäinen, jos siinä ei ole reikiä. Tämän vuoksi kuvasssa 1 oleva alue ei ole yhdesti yhtenäinen, sillä jälkeä $tr(C_0)$ ei voida muuntaa jäljeksi $tr(C_1)$, ilman sen katkaisemista tai poistumista alueelta D_0. Sen sijaan kuvassa 2 oleva alue D on yhdesti yhtenäinen.



Kuva 1



Kuva 2

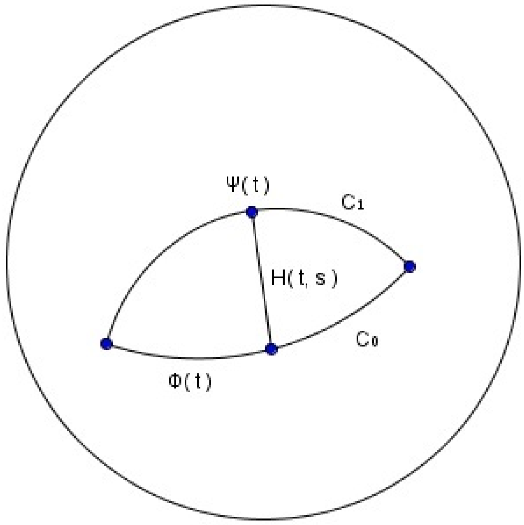
Olkoot C_0 ja C_1 käyriä alueella D. Yleistäen alue D on yhdesti yhtenäinen, kun on olemassa funktio $\boldsymbol{H}$, joka on jatkuva pisteessä S, kun $S = [0,1] \times [0,1]$, siten että $\boldsymbol{H}(t,s) \in D$ jos $(t,s) \in S$ ja funktiot

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{H}(t,0) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{H}(t,1), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{6.1}$$

ovat käyrien C_1 ja C_2 parametrisia esityksiä. Yhdesti yhtenäinen joukko on esimerkiksi konveksi joukko D eli siis joukko, jossa pätee että, kun X_0 ja X_1 ovat alueella D, niin tällöin on myös niitä yhdistävä jana. Tämä voidaan nähdä valitsemalla

$$\boldsymbol{H}(t,s) = (1-s)\boldsymbol{\Phi}(t) + s\boldsymbol{\Psi}(t),$$

missä $\boldsymbol{\Phi} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ja $\boldsymbol{\Psi} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ esittävät käyriä C_0 ja C_1. Kuva 3 selventää tilannetta. (On myös osoitettavissa, että yleistys pätee, vaikka oletetaan että käyrien C_0 ja C_1 parametrisoinnit on määritelty välillä $[0,1]$. Aiheen ymmärtämisen kannalta tällä ei ole merkitystä, joten se jätetään käsittelemättä.) [3, s. 645-647]



Kuva 3

Lause 6.1. *Jos jatkuvasti derivoituva vektorikenttä* $\boldsymbol{F}$ *toteuttaa ehdon* (5.7) *yhdesti yhtenäisessä määrittelyjoukossa* $D \in R^n$*, niin tällöin vektorikenttä* $\boldsymbol{F}$ *on konservatiivinen alueessa* D*. Siis vektorikentän* $\boldsymbol{F}$ *viivaintegraalit ovat riippumattomia polusta alueessa* D*.*

[3, s. 647]

Todistus. Todistus on vain osittainen. Tarkastelemme tapausta, jossa C_0 ja C_1 ovat sileitä käyriä, joilla on yhteinen alkupiste α ja päätepiste β ja niitä kuvaavat sileät parametriset funktiot $\boldsymbol{\Phi} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ja $\boldsymbol{\Psi} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Lisäksi oletamme että funktion $\boldsymbol{H} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ komponenteilla, jotka toteuttavat ehdon (6.1), on jatkuvat toiset osittaisderivaatat joukossa $[0,1] \times [0,1]$. Tällöin jokaiselle pisteellä $s \in [0,1]$, funktio $\boldsymbol{H}$ määrää parametrin t funktiona jatkuvasti derivoituvan käyrän $C_s \in D$, jolla on päätepisteet $\boldsymbol{\alpha}$ ja $\boldsymbol{\beta}$, joten voimme muodostaa viivaintegraalin

$$I(s) = \int_{C_s} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} f_j(\boldsymbol{H}(t,s)) \frac{\partial h_j(t,s)}{\partial t} \right] dt, \quad 0 \le s \le 1. \tag{6.2}$$

Näytämme, että ehto (5.7) johtaa siihen, että $I'(s) = 0$ välillä $0 \le s \le 1$. Tästä puolestaan seuraa, että

$$\int_{C_0} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX},$$

mikä on haluttu lopputulos. Derivoimalla lauseke (6.2) saadaan (ks. [3, s. 576])

$$I'(s) = \int_0^1 \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_j(\boldsymbol{H}(t,s))}{\partial x_i} \frac{\partial h_i(t,s)}{\partial s} \frac{\partial h_j(t,s)}{\partial t} \right] dt + \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} f_j(\boldsymbol{H}(t,s)) \frac{\partial^2 h_j(t,s)}{\partial s \partial t} \right] dt. \tag{6.3}$$

Ehto

$$\frac{\partial^2 h_j}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 h_j}{\partial t \partial s}$$

on voimassa, koska oletimme komponenentin h_j toisen osittaisderivaatan olevan jatkuva (ks. [3, s. 339]). Näin voimme kirjoittaa toisen integraalilausekkeen yhtälössä (6.3) eri muotoon ja osittaisintegroida saadaksemme

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} f_j(\boldsymbol{H}(t,s)) \frac{\partial^2 h_j(t,s)}{\partial t \partial s} \right] dt \\ &= \Big/_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} f_j(\boldsymbol{H}(t,s)) \frac{\partial h_j(t,s)}{\partial s} \right] \\ &- \int_0^1 \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_j(\boldsymbol{H}(t,s))}{\partial x_i} \frac{\partial h_i(t,s)}{\partial t} \frac{\partial h_j(t,s)}{\partial s} \right] dt. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Koska

$$\boldsymbol{H}(0,s) = \boldsymbol{\alpha} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{H}(1,s) = \boldsymbol{\beta}, \quad 0 \le s \le 1,$$

niin tästä seuraa, että

$$\frac{\partial h_j(1,s)}{\partial s} = \frac{h_j(0,s)}{\partial s} = 0, \quad 0 \le s \le 1,$$

joten ensimmäinen summa oikealta lausekkeessa (6.4) häviää. Vaihdamme indeksit i ja j toisessa summassa ja kirjoitamme lausekkeen (6.4) muotoon

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} f_j(\boldsymbol{H}(t,s)) \frac{\partial^2 h_j(t,s)}{\partial t \partial s} \right] dt = \\ &- \int_0^1 \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{H}(t,s))}{\partial x_j} \frac{\partial h_j(t,s)}{\partial t} \frac{\partial h_i(t,s)}{\partial s} \right] dt. \end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä lausekkeeseen (6.3) ja keräämällä lausekkeen termit yhdeksi summaksi päästään muotoon

$$I'(s) = \int_0^1 \left[\sum_{i,j=1} \left(\frac{\partial f_j(\boldsymbol{H}(t,s))}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i(\boldsymbol{H}(t,s))}{\partial x_j} \right) \frac{\partial h_i(t,s)}{\partial s} \frac{\partial h_j(t,s)}{\partial t} \right] dt,$$

mikä häviää ehdon (5.7) perusteella ja näin ollen todistaa osittain lauseen 6.1. [3, s. 647-648] $\square$

7 Potentiaalifunktion etsiminen

Jos $\boldsymbol{F} = \nabla f$ alueessa D, niin merkintä $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$ voidaan samaistaa merkintään df,(millä tarkoitetaan siis funktion f differentiaalia, joka on määritelty esimerkiksi [3, s. 342]) koska tässä tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} &= f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n \\
&= f_{x_1}\,dx_1 + f_{x_2}\,dx_2 + \cdots + f_{x_n}\,dx_n \\
&= df
\end{aligned}$$

Siten sanotaan, että $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$ on *eksakti differentiaali* (ks. [3, s. 343]), ja kirjoitetaan

$$\int\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX} = \int\limits_C df.$$

Voi olla mahdollista löytää f pelkästään tutkimalla. Ei ole esimerkiksi kovin vaikeaa huomata, että

$$\begin{aligned}
(x+y)\,dx + (x-y)\,dy &= x\,dx - y\,dy + (x\,dy + y\,dx) \\
&= d(\frac{x^2}{2}) - d(\frac{y^2}{2}) + d(xy) \\
&= d\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy\right),
\end{aligned}$$

ja tällöin voimme kirjoittaa siis

$$\int\limits_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = \int\limits_C d\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy\right).$$

Vaikka vektorikenttä $\boldsymbol{F}$ ei olisi konservatiivinen, voi olla mahdollista yksinkertaistaa viivaintegraalin $\int_c \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dX}$ arvioimista kirjoittamalla vektorikenttä $\boldsymbol{F}$ summana konservatiivisista ja ei-konservatiivisista kentistä. Esimerkiksi, jos C on mielivaltainen suljettu käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^3$, niin

$$\int\limits_C (x + \sin y)\,dx + (y + e^x)\,dy = \int\limits_C \sin y\,dx + e^x\,dy + \int\limits_C x\,dx + y\,dy,$$

jossa jälkimmäinen integraali häviää ehdon 5.2 nojalla, koska

$$x\,dx + y\,dy = d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right).$$

Lauseen 5.1 todistuksessa on esitetty keino löytää potentiaalifunktio konservatiiviselle vektorikentälle, kun sen löytäminen tutkimalla olisi liian työlästä. Valitaan sopiva piste $\boldsymbol{X_0}$ alueesta D ja arvioidaan

$$f(\boldsymbol{X}) = \int\limits_{\boldsymbol{X}_0}^{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dY} \tag{7.1}$$

pisteen $\boldsymbol{X}$ funktiona pitkin jotakin sopivaa käyrää alueessa D pisteestä $\boldsymbol{X}_0$ pisteeseen $\boldsymbol{X}$. Jos alue D on konveksi, integraali voidaan tehdä pitkin viivasegmenttiä pisteestä $\boldsymbol{X}_0$ pisteeseen $\boldsymbol{X}$, parametrisesti ilmaistuna

$$\boldsymbol{Y} = t\boldsymbol{X} + (1-t)\boldsymbol{X}_0, \qquad 0 \le t \le 1,$$

joten ehto (7.1) saadaan muotoon

$$f(\boldsymbol{X}) = \int\limits_0^1 \boldsymbol{F}[t\boldsymbol{X} + (1-t)\boldsymbol{X}_0] \cdot (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0)\,dt. \tag{7.2}$$

[3, s. 648-649]

Esimerkki 7.1. Jos

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3y^4 + x \\ x^4y^3 + y \end{bmatrix},$$

niin tällöin

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 4x^3y^3,$$

joten $\boldsymbol{F}$ on konservatiivinen tasossa $\mathbb{R}^2$ lauseen 6.1 nojalla. Kun $\boldsymbol{X}_0 = (0,0)$, saadaan

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 [P(tx,ty)x + Q(tx,ty)y]\,dt \\ &= \int_0^1 [(t^7x^3y^4 + tx)x + (t^7x^4y^3 + ty)y]\,dt \\ &= 2x^4y^4 \int_0^1 t^7\,dt + (x^2+y^2)\int_0^1 t\,dt \\ &= \frac{x^4y^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

Voimme nyt käyttää funktiota f arvioidaksemme viivaintegraaleja vektorikentälle $\boldsymbol{F}$. Voimme esimerkiksi todeta, että

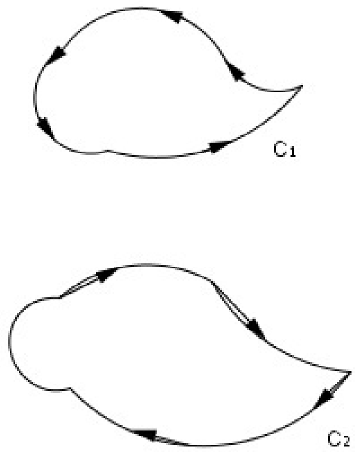
$$\int_{(1,1)}^{(2,0)} (x^3y^4 + x)dx + (x^4y^3 + y)dy = f(2,0) - f(1,1) = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

[3, s. 649-650]

8 Greenin lause avaruudessa $\mathbb{R}^2$

Jordanin käyrälauseen mukaan jos C on yksinkertainen suljettu käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^2$, niin tällöin jäljen $tr(C)$ komplementti sisältää kaksi avointa aluetta: yhden rajoitetun ja yhden rajoittamattoman. (Vaikka tämä on intuitiivisesti selvää, se on todella vaikea todistaa, joten oletamme sen suoraan pitävän paikkansa.) Edellinen on käyrän C sisäpuolella ja jälkimmäinen käyrän C ulkopuolella, kuten kuvassa 4 on kuvattu. Yhdistettä jäljestä $tr(C)$ ja käyrän C sisäpuolesta kutsutaan käyrän C rajoittamaksi alueeksi. Käyrän C sanotaan olevan *positiivisesti suunnattu*, jos tasossa käyrää pitkin kulkeva tarkkailija näkee käyrän C sisäpuolen aina vasemmalla puolellaan. Vastaavasti käyrä C on negatiivisesti suunnattu, jos $-C$ on positiivisesti suunnattu. Kuvassa 5 käyrä C_1 on positiivisesti suunnattu ja käyrä C_2 negatiivisesti suunnattu.

Kuva 4



Kuva 5

Seuraavaksi esitetään ja todistetaan rajallinen tapaus Greenin lauseesta. Käsittelemme vain tapauksen jossa lauseessa mainittava alue D on hyvin yksinkertaisen muotoinen.

Lause 8.1. *Oletetaan, että tasossa $\mathbb{R}^2$ on alue D, jota rajaa yksinkertainen suljettu käyrä C. Olkoon P ja Q jatkuvia ja derivoituvia avoimessa joukossa, johon alue D kuuluu. Tällöin*

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d(x,y) \tag{8.1}$$

jos C on positiivisesti suunnattu.

[3, s. 652]

Todistus. Todistus on osittainen. Jotta lauseessa mainitut väitteet pätisivät, tarkastellaan ensin tapausta, jossa D voidaan kirjoittaa muodoissa

$$D = \{(x,y)|u(x) \leq y \leq v(x), a \leq x \leq b\} \tag{8.2}$$

ja

$$D = \{(x,y)|U(y) \leq x \leq V(y), c \leq y \leq d\}. \tag{8.3}$$

Kuvat 6 ja 7 hahmottavat tilannetta. Esimerkin 4.1 nojalla voidaan kirjoittaa, että

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_C P\,dx + \int\limits_C Q\,dy$$

ja arvioida oikealla puolella olevia integraaleja käyrän C eri parametrisoinneilla. Kuvan 6 mukaisesti voidaan nyt kirjoittaa $C = C_1 - C_2$, missä C_1 ja C_2 on annettu muodossa

$$y = u(x) \quad \text{ja} \quad y = v(x), \qquad a \le x \le b.$$

Ottamalla parametriksi muuttujan x saadaan

$$\begin{aligned}
\int_C P\,dx &= \int_{C_1} P\,dx - \int_{C_2} P\,dx \\
&= \int_a^b P(x,u(x))\,dx - \int_a^b P(x,v(x))\,dx \qquad (8.4)\\
&= -\int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy,
\end{aligned}$$

missä viimeinen lauseke seuraa lauseesta 2.2 sovellettuna parametriin P muuttujan y funktiona jokaisella arvolla $x \in [a,b]$. Lauseesta 2.1 saadaan

$$\int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_D \frac{\partial P}{\partial y}\,d(x,y),$$

ja tämän vuoksi lausekkeesta (8.4) seuraa, että

$$\int_C P\,dx = -\int_D \frac{\partial P}{\partial y}\,d(x,y). \qquad (8.5)$$

Kuvan 7 mukaisesti voidaan nyt kirjoittaa

$$C = C_3 - C_4,$$

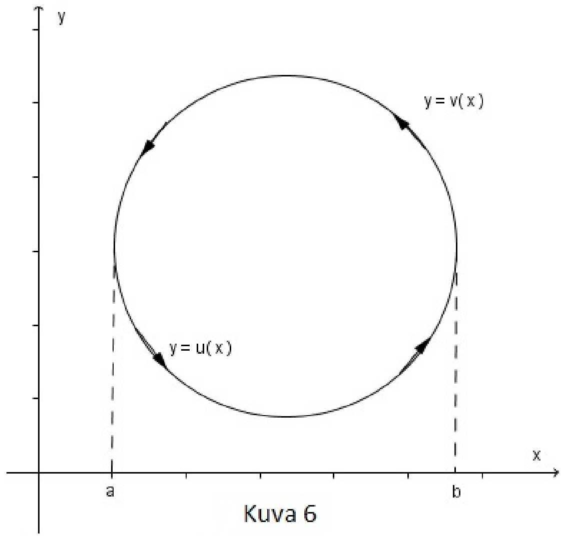
missä C_3 ja C_4 on annettu muodossa

$$x = V(y) \quad \text{ja} \quad x = U(y), \qquad c \le y \le d.$$

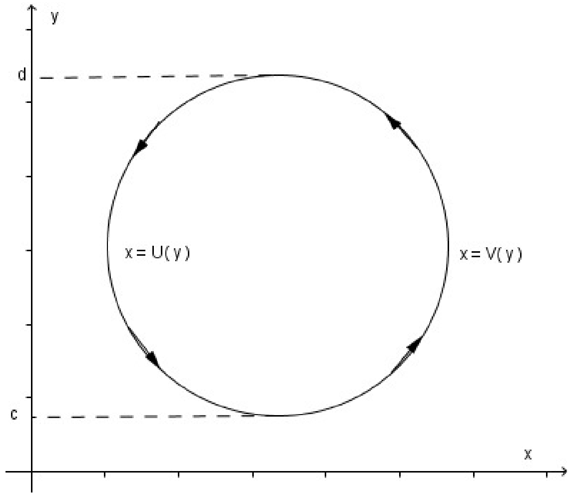
Vastaavalla tavalla voidaan nyt määrittää, että

$$\int_C Q\,dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,d(x,y).$$

Tästä ja yhtälöstä (8.5) seuraa ehto (8.1) alueilla, jotka toteuttavat ehdot (8.2) ja (8.3).



Kuva 6



Kuva 7

Joitakin alueita ei kuitenkaan voida kirjoittaa ehtojen (8.2) ja (8.3) muodoissa. Alueet ovat kuitenkin jaettavissa äärelliseen määrään pienempiä alueita, jotka voidaan kirjoittaa kyseisessä muodossa. Yleisen tapauksen todistamiseksikin löytyy alan kirjallisuudesta neuvoja (ks.[1, s. 288-289]). Kuitenkaan emme vie todistusta tämän pitemmälle. [3, s. 653-655] $\square$

Esimerkki 8.1. Jos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

niin lauseen 8.1 oletusten ollessa voimassa kohdasta 8.1 seuraa, että

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Tämä on yhtäpitävää lauseen 6.1 kanssa. Integraali on tällöin siis polusta riippumaton. [3, s. 656]

Esimerkki 8.2. Integraali

$$\int 2x^2y^2\,dx + \frac{4}{3}x^3y\,dy$$

on riippumaton polusta, koska

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^2y - 4x^2y = 0.$$

Esimerkki 8.3. Osoitetaan, että integraali

$$\int_C (x^2 - 2y^3)\, dx + (x + 5y)\, dy$$

ei ole polusta riippumaton. Nyt $P = x^2 - 2y^3$ ja $Q = x + 5y$, joten saamme

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Siis $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, joten viivaintegraali ei ole polusta riippumaton. [2, s. 125]

Esimerkki 8.4. Olkoon

$$I = \int_C (x^2 - y^3)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy,$$

missä käyrä C on yksikköympyrä

$$x^2 + y^2 = 1$$

kierrettynä vastapäivään. Lasketaan ensin osittaisderivaatat

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x + 3y^2$$

ja sijoitetaan tämä kohtaan 8.1, jolloin saadaan

$$I = \int_D (2x + 3y^2)\, d(x,y),$$

missä $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Tulevaa integrointia helpottaaksemme siirrytään käyttämään napakoordinaatteja (katso [3, s. 416-418]), jolloin siis

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

Saamme lausekkeen muotoon

$$I = \int_S (2r\cos\theta + 3r^2\sin^2\theta) r\, d(r,\theta),$$

missä

$$S = \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Nyt integroimalla saadaan

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 r^2\,dr \int_0^{2\pi} (2\cos\theta + 3r\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^1 r^2\,dr \Big/_0^{2\pi} (2\sin\theta + 3r(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta))) \\
&= \int_0^1 r^2\,dr \cdot ((2\sin 2\pi + 3r(\frac{1}{2}\cdot 2\pi - \frac{1}{4}sin(4\pi))) \\
&- (2\sin 0 + 3r(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\sin(2\cdot 0))) \\
&= \int_0^1 r^2\,dr \cdot 3r\pi \\
&= 3\pi \int_0^1 r^3\,dr \\
&= 3\pi \Big/_0^1 \frac{1}{4}r^4 = 3\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

[3, s. 656]

Viitteet

[1] Kaplan Wilfred. *Advanced calculus Third edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.*

[2] Rahman Matiur, Mulolani Isaac. *Applied vector analysis, CRC Press, 2001.*

[3] Trench William F. *Advanced calculus, Harper & Row, 1980.*