**TAMPEREEN YLIOPISTO**
**Pro gradu -tutkielma**

**Päivikki Mäki**

# Kompleksinen Laplace-muunnos

**Informaatiotieteiden yksikkö**
**Matematiikka**
**Kesäkuu 2012**

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

MÄKI, PÄIVIKKI: Kompleksinen Laplace-muunnos

Pro gradu -tutkielma, 42 s.

Matematiikka

Kesäkuu 2012

---

## Tiivistelmä

Tämä tutkielma käsittelee Laplace-muunnosta ja sen käyttöä sovelluksissa, kuten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Laplace-muunnoksen takana on yksinkertainen idea: jos annettua ongelmaa ei pystytä ratkaisemaan, voidaan se muuntaa helpommaksi. Laplace-muunnosta käytetäänkin yleisesti esimerkiksi tiettyjen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Tutkielman alkuosassa määritellään Laplace-muunnos ja esitellään sen perusominaisuuksia sekä muutamia erityisiä Laplace-muunnoksia. Sovellusten kannalta on tärkeää osata ratkaista Laplace-muunnoksen käänteisfunktio. Tutkielman loppuosa keskittyykin Laplace-muunnoksen käänteisfunktion löytämiseen osamurtokehitelmien avulla. Lopuksi esitellään vielä konvoluution käsite ja muutamia sen sovelluksia.

Lukijalla oletetaan olevan perus- ja aineopintotasoiset tiedot analyysista ja algebrasta. Tarvittavia tietoja ovat muun muassa epäoleellinen integraali, paloittain jatkuva funktio, osittaisintegrointi, osamurtokehitelmä sekä differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen käyttämällä integroivaa tekijää. Tutkielman päälähteenä on käytetty teosta Mathews, J., Howell, R.: *Complex Analysis for Mathematics and Engineering.*

# Sisältö

# 1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee Laplace-muunnosta ja sen käyttöä sovelluksissa, kuten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Luvussa 3 määritellään Laplace-muunnos ja annetaan ehto sille, milloin muunnos on olemassa. Alaluvussa 3.2 esitellään tärkeimpiä Laplace-muunnoksen ominaisuuksia, kuten lineaarisuus ja yksikäsitteisyys. Luvussa 4 esitellään funktion $f(t)$ derivaatan ja integraalin Laplace-muunnokset. Laplace-muunnoksen hyödyllisyys differentiaaliyhtälöiden ratkaisussa perustuu derivaatan Laplace-muunnokseen, mistä on esimerkkejä alaluvussa 4.3.

Seuraavaksi luvussa 5 esitellään siirtymäteoria sekä funktion $f(t)$ jakaminen ja kertominen muuttujalla $t$, ja näiden vaikutukset Laplace-muunnokseen. Alaluvussa 5.4 ratkaistaan differentiaaliyhtälöitä, jotka sisältävät termejä kuten $ty'(t)$ tai $ty''(t)$. Laplace-muunnoksen käänteisfunktio voidaan löytää osamurtokehitelmien avulla. Luvussa 6 esitelläänkin yksi tapa löytää näitä osamurtokehitelmiä. Alaluvussa 6.2 esitellään lause, joka helpottaa käänteisfunktion löytämistä. Alaluvussa 6.3 todistetaan niin kutsuttu *Heavisiden kaava*. Viimeisenä luvussa 7 määritellään konvoluution käsite. Konvoluutio on hyödyllinen ja tärkeä apuväline monessa sovelluksessa. Sen avulla voidaan ratkaista myös niin kutsuttuja integraaliyhtälöitä, joita tarkastellaan tarkemmin alaluvussa 7.2.

Tutkielmassa esitellyt lauseet ja määritelmät seuraavat pääosin teoksia Mathews, J., Howell, R.: *Complex Analysis for Mathematics and Engineering* ja Schiff, J., *The Laplace Transform: Theory and Applications*. Tutkielman esimerkit pyrkivät selventämään lauseiden ja määritelmien sisältöä. Suurin osa tutkielmassa esiteltävistä esimerkeistä on päälähteen harjoitustehtäviä, jotka tekijä on itse ratkaissut. Tästä on erikseen maininta esimerkin yhteydessä.

# 2 Esitiedot

**Määritelmä 2.1.** (Vrt. [1, s. 543]). Funktion $f$ sanotaan olevan *eksponentiaalista kertalukua vakiolla* $K$, jos on olemassa sellaiset reaaliset vakiot $M > 0$ ja $K$, että

$$|f(t)| \leq Me^{Kt}$$

aina, kun $t \geq t_0 \geq 0$.

**Määritelmä 2.2.** (Vrt. [1, s. 157]). *Kompleksinen eksponenttifunktio* $e^z$ määritellään seuraavasti

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

missä $z = x + iy$ ja $x, y \in \mathbb{Z}$.

**Määritelmä 2.3.** (Vrt. [2, s. 81]). *Kompleksiset trigonometriset funktiot* $\sin z$ *ja* $\cos z$ sekä *kompleksiset hyperboliset funktiot* $\sinh z$ *ja* $\cosh z$ määritellään seuraavasti

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ ja } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \text{ ja } \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

kun $z \in \mathbb{C}$.

**Määritelmä 2.4.** (Vrt. [1, s. 554]). Olkoon $a \geq 0$. *Yksikköaskelfunktio* $U_a(t)$ määritellään tällöin seuraavasti

$$U_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{jos } t < a, \\ 1, & \text{jos } t > a. \end{cases}$$

**Määritelmä 2.5.** (Vrt. [1, s. 40]). Pisteen $z_0$ *$\epsilon$-ympäristö*, $D_\epsilon(z_0)$, määritellään seuraavasti

$$D_\epsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \epsilon\}.$$

**Määritelmä 2.6.** (Vrt. [1, s. 93]). Kompleksinen funktio $f(z)$ on *derivoituva pisteessä* $z_0$, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on olemassa.

**Määritelmä 2.7.** (Vrt. [1, s. 95]). Kompleksinen funktio $f$ on *analyyttinen pisteessä* $z_0$, jos on olemassa jokin $\epsilon > 0$ siten, että $f'(z)$ on olemassa, kun $z \in D_\epsilon(z_0)$.

**Lause 2.1.** (Leibnizin sääntö). *Olkoon $G$ avoin joukko ja olkoon $I$ reaalinen väli $\{t \in \mathbb{R} | a \leq t \leq b\}$. Olkoot $g(z,t)$ ja sen osittaisderivaatta $g_z(z,t)$ jatkuvia funktioita aina, kun $z \in G$ ja kun $t \in I$. Tällöin*

$$F(z) = \int_a^b g(z,t)\, dt$$

*on analyyttinen, kun $z \in G$, ja*

$$F'(z) = \int_a^b g_z(z,t)\, dt.$$

*Todistus.* (Ks. [1, s. 237]). □

**Lause 2.2.** *Olkoon funktio $f(x,t)$ jatkuva jokaisessa suorakulmiossa $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq T$, $T > 0$ lukuun ottamatta äärellistä määrää hyppäysepäjatkuvuuskohtia. Oletetaan myös, että $\int_0^\infty f(x,t)\,dt$ suppenee tasaisesti, kun $x \in [a,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b \int_0^\infty f(x,t)\,dt\,dx = \int_0^\infty \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt.$$

*Todistus.* (Ks. [3, s. 202]). □

**Määritelmä 2.8.** *(Taylorin sarja).* (Vrt. [3, s. 138]). Olkoon funktio $f(z)$ analyyttinen kiekossa $|z-z_0| < R$. Tällöin funktio $f(z)$ voidaan esittää suppenevana potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

jokaisessa kiekon pisteessä $z$. Kertoimet

$$a_n = \frac{f^{(n)} z_0}{n!}$$

ovat nimeltään *Taylorin kertoimia.*

**Määritelmä 2.9.** *(Laurentin sarja).* (Vrt. [3, s. 138]). Olkoon funktio $f(z)$ analyyttinen alueessa $A$, joka on kahden samankeskisen ympyrän, $C_1 = |z-z_0| = R_1$ ja $C_2 = |z-z_0| = R_2$, missä $0 < R_1 < R_2$, rajoittama. Tällöin funktio $f(z)$ voidaan esittää potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

missä

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{(\sigma - z_0)^{n+1}},\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

ja

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{(\sigma - z_0)^{-n+1}},\; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

**Määritelmä 2.10.** (Vrt. [1, s. 278]). Funktiolla $f$, joka on analyyttinen kiekossa $D_R(z_0)$, sanotaan olevan *$k$-kertainen nolla pisteessä* $z_0$, jos

$$f^{(n)}(z_0) = 0, \text{ kun } n = 0, 1, \ldots, k-1$$

ja

$$f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

**Määritelmä 2.11.** (Vrt. [3, s. 140]). Jos funktio $f$ on analyyttinen kiekossa $0 < |z - z_0| < R$ lukuun ottamatta pistettä $z_0$, sanotaan pistettä $z_0$ *eristetyksi erikoispisteeksi.* Tällöin $f(z)$ voidaan esittää Laurentin sarjana

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Jos $b_m \neq 0$ ja $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$ ja $m \geq 1$, niin tällöin funktio $f(z)$ voidaan esittää seuraavasti

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Pistettä $z_0$ sanotaan funktion $f(z)$ *m-kertaiseksi navaksi.* Jos $m = 1$, on piste $z_0$ funktion $f(z)$ *yksinkertainen napa.*

**Määritelmä 2.12.** (Vrt. [3, s. 142]). Oletetaan, että funktio $f(z)$ on analyyttinen pisteen $z_0$ ympäristössä ja että $f(z)$ voidaan esittää Laurentin sarjana

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Tällöin kerrointa $b_1$ kutsutaan *funktion* $f(z)$ *residyksi pisteessä* $z_0$, ja sitä merkitään

$$Res[f(z), z_0] = b_1.$$

**Lause 2.3.** *Oletetaan, että funktiolla $f(z)$ on yksinkertainen napa pisteessä $z_0$. Tällöin*

$$Res[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

*Tulos yleistyy myös funktioille, joilla on $k$-kertainen napa pisteessä $z_0$. Tällöin*

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z).$$

*Todistus.* (Ks. [1, s. 294]). □

**Lause 2.4.** (L' Hospitalin sääntö).*Oletetaan, että funktiot $f$ ja $g$ ovat analyyttisiä pisteessä $z_0$. Jos $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$ ja $g'(z_0) = 0$, niin tällöin*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

*Todistus.* (Ks. [1, s. 98]). □

**Lause 2.5.** *Olkoon*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

*missä* $p(z)$ *ja* $q(z)$ *ovat analyyttisiä pisteessä* $z_0$, $p(z_0) \neq 0$ *ja funktiolla* $q(z)$ *on yksinkertainen nolla pisteessä* $z_0$. *Tällöin*

$$Res[f(z), z_0] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

*Todistus.* (Ks.[3, s. 142]). □

Kompleksifunktioiden integraaleja lasketaan pitkin tietyntyyppisiä kompleksitason käyriä. Seuraavaksi määritellään yksi tällainen käyrä.

**Määritelmä 2.13.** (Vrt. [1, s. 199]). Käyrän $C$, jolla on parametriesitys

$$C : z(t) = x(t) + iy(t) \ , \ a \leq t \leq b,$$

missä $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jatkuvia, sanotaan olevan sileä, jos $z'$ on jatkuva ja $z'(t) \neq 0$, kun $a \leq t \leq b$ . Käyrää, joka muodostuu äärellisestä määrästä tällaisia käyriä, sanotaan *tieksi* tai *poluksi*.

**Lause 2.6.** *Kun* $z_1$, $z_2 \in \mathbb{C}$, *niin tällöin*

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \, .$$

*Todistus.* (Ks.[2, s. 7]). □

**Lause 2.7.** (Jordanin epäyhtälö). *Epäyhtälö*

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1,$$

*on voimassa aina, kun* $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$.

*Todistus.* (Ks.[2, s. 224]). □

# 3 Laplace-muunnos

## 3.1 Laplace-muunnoksen määrittely ja olemassaolo

**Määritelmä 3.1.** (Vrt. [1, s. 543]). Olkoon funktio $f$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla $K$ ja paloittain jatkuva. Tällöin sen Laplace-muunnos määritellään integraalina

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \, dt,$$

missä $s \in \mathbb{C}$.

Tässä tutkielmassa käytetään Laplace-muunnoksesta merkintää

$$F(s) = L(f(t))$$

päälähteen mukaisesti. Kun integraali $F(s)$ on olemassa, sanotaan, että se suppenee. Muutoin integraali hajaantuu ja Laplace-muunnosta ei ole olemassa. Riittävä ehto muunnoksen olemassaololle on, että funktion $f$ itseisarvo, $|f(t)|$, ei kasva liian nopeasti, kun $t \to +\infty$.

**Lause 3.1.** *Laplace-muunnos $F(s)$ on olemassa sellaisissa pisteissä, joissa $Re(s) > K$.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 543]). Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(\sigma+i\tau)t}\,dt,$$

kun $s = \sigma + i\tau$.
Laplace-muunnos $F(s) = L(f(t))$ voidaan kirjoittaa määritelmän 2.2 perusteella seuraavasti

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{(-\sigma+i\tau)t}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\left(\cos(-\tau t) + i\sin(-\tau t)\right) \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}(\cos\tau t - i\sin\tau t) \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\cos\tau t\,dt - i\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\sin\tau t\,dt. \end{aligned}$$

Koska funktio f on eksponentiaalista kertalukua vakiolla $K$, niin arvoilla $\sigma > K$ saadaan

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-\sigma t}\,|\cos\tau t|\,dt \leq M\int_0^\infty e^{Kt}e^{-\sigma t}\,dt \\ &= M\int_0^\infty e^{(K-\sigma)t}\,dt = M\frac{e^{(K-\sigma)t}}{K-\sigma} \leq \frac{M}{\sigma-K}. \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-\sigma t}\,|\sin\tau t|\,dt \leq M\int_0^\infty e^{Kt}e^{-\sigma t}\,dt \\ &= M\int_0^\infty e^{(K-\sigma)t}\,dt = M\frac{e^{(K-\sigma)t}}{K-\sigma} \leq \frac{M}{\sigma-K}. \end{aligned}$$

□

Laplace-muunnoksen $L(f(t)) = F(s)$ määrittelyalue näyttää siis rajoittuvan arvoille $Re(s) > K$. Kuitenkin saadulla funktiolla $F(s)$ voi olla laajempikin määrittelyalue, kuten seuraavassa esimerkissä nähdään.

**Esimerkki 3.1.** (Vrt. [1, s. 545]). Osoitetaan, että $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$, missä $a \in \mathbb{R}$ on vakio.
Määritelmän 3.1 mukaan

$$
\begin{aligned}
L(e^{at}) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,dt = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{(a-s)t}\,dt \\
&= \lim_{c\to+\infty}\Big/_{o}^{c} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\,dt = \lim_{c\to+\infty}\frac{e^{(a-s)c}}{a-s} - \frac{1}{a-s}.
\end{aligned}
$$

Nyt

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{e^{(a-s)c}}{a-s} = \lim_{c\to+\infty}\frac{e^{(a-(\sigma+i\tau))c}}{a-s} = 0,$$

sillä oletuksen mukaan $s = \sigma + i\tau$, missä $\sigma > a$, jolloin $a - \sigma < 0$ ja $a - \sigma \in \mathbb{R}$. Laplace-muunnokseksi saadaan

$$L(e^{at}) = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$

Laplace-muunnos $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ on yleisesti määritelty, kun $Re(s) > a$. Toisaalta tämän esimerkin rationaalifunktio $F(s) = \frac{1}{s-a}$ on määritelty, kun $s \neq a$. Laplace-muunnos voi siis olla olemassa laajemmassakin määrittelyalueessa.

Yleisimmät Laplace-muunnokset on taulukoitu laskemisen helpottamiseksi. Taulukossa 1 on annettu joidenkin funktioiden Laplace-muunnokset $F(s)$. Seuraavissa esimerkeissä johdetaan kuitenkin esimerkin vuoksi muutaman funktion Laplace-muunnos.

Taulukko 1: Joidenkin funktioiden Laplace-muunnoksia (vrt. [1, s. 547]).

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $e^{iat}$ | $\frac{1}{s-ia}$ |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| $\cos bt$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ |
| $\sin bt$ | $\frac{b}{(s^2+b^2)}$ |
| $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| $\sinh at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| $e^{at}\cos bt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ |
| $e^{at}\sin bt$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ |

**Esimerkki 3.2.** Osoitetaan, että $L(1) = \frac{1}{s}$.
Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$L(1) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt.$$

Ratkaisemalla integraali saadaan

$$\lim_{c\to+\infty} \Big/_0^c -\frac{1}{s}e^{-st} = \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-sc} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

**Esimerkki 3.3.** (Vrt. [1, s. 546]). Osoitetaan, että $L(t) = \frac{1}{s^2}$.
Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$L(t) = \int_0^\infty te^{-st}\,dt.$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned} L(t) &= \lim_{c\to+\infty} \Big/_0^c -\frac{1}{s}e^{-st}t + \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\,dt \\ &= \lim_{c\to+\infty} \Big/_0^c -\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}. \end{aligned}$$

Laplace-muunnokseksi saadaan

$$\begin{aligned} L(t) &= \lim_{c\to+\infty} \Big/_0^c -\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st} \\ &= \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{c}{s}e^{-sc} - \frac{1}{s^2}e^{-sc}\right) + \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Nyt

$$\lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{c}{s}e^{-sc} - \frac{1}{s^2}e^{-sc}\right) = 0,$$

kun $Re(s) > 0$, joten

$$L(t) = \frac{1}{s^2}.$$

## 3.2 Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

Tässä alaluvussa esitellään käytännön kannalta tärkeimpiä Laplace-muunnoksen ominaisuuksia. Ensiksi todistetaan Laplace-muunnoksen yksikäsitteisyys, johon tarvitaan seuraavaksi esiteltävää Laplace-muunnoksen käänteismuunnosta. Käänteismuunnokseen palataan vielä luvussa 6.

**Huomautus.** (Vrt. [1, s. 568]). Oletetaan, että funktio $f$ on eksponentiaalista kertalukua vakiolla $K$ ja että sillä on Laplace-muunnos $F(s)$. Tällöin funktion $F(s)$ käänteinen Laplace-muunnos $L^{-1}(F(s))$ saadaan yhtälöstä

$$L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2i} \int\limits_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} F(s) e^{st} ds, . \tag{3.1}$$

missä $\sigma_0$ on jokin riittävän suuri positiivinen vakio.

**Lause 3.2.** *Olkoot funktioilla $f$ ja $g$ Laplace-muunnokset $F(s)$ ja $G(s)$. Tällöin, jos $F(s) = G(s)$, niin*

$$f(t) = g(t),$$

*lukuun ottamatta mahdollisesti äärellistä määrää pisteitä.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 544]). Jos $\sigma$ on tarpeeksi suuri, voidaan käyttää Laplacen käänteismuunnosta. Yhtälön 3.1 avulla saadaan funktio $f(t)$ seuraavaan muotoon

$$f(t) = L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st}\, ds.$$

Koska oletuksen mukaan $F(s) = G(s)$, niin

$$f(t) = \frac{1}{2i} \int\limits_{s - i\infty}^{s + i\infty} G(s) e^{st}\, ds = L^{-1}(G(s)) = g(t).$$

$\square$

**Lause 3.3.** *Oletetaan, että funktio $f$ on paloittain jatkuva välillä $[0, \infty[$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $K$. Oletetaan myös, että funktion $f(t)$ Laplace-muunnos $F(s)$ on olemassa. Tällöin $F(s)$ suppenee itseisesti.*

*Todistus.* (Vrt.[3, s. 13]). Koska funktio $f$ on eksponentiaalista kertalukua, niin

$$|f(t)| \leq M_1 e^{Kt},$$

missä $K$ on reaalinen vakio ja $t \geq t_0$. Koska $f$ on paloittain jatkuva välillä $[0, t_0]$, se on myös rajoitettu tällä välillä, jolloin

$$|f(t)| \leq M_2,$$

kun $0 < t < t_0$. Koska funktiolla $e^{Kt}$ on positiivinen minimi samalla välillä $[0, t_0]$, voidaan vakio $M$ valita riittävän suureksi siten, että

$$|f(t)| \leq M e^{Kt},$$

kun $t > 0$. Täten

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\tau} \left| e^{-st} f(t) \right| \, dt &\leq M \int_0^{\tau} e^{-(k-K)t} \, dt \\
&= \Big/_{\!\!0}^{\tau} \frac{Me^{-(k-K)t}}{-(k-K)} \\
&= \frac{M}{k-K} - \frac{Me^{-(k-K)\tau}}{k-K}.
\end{aligned}
$$

Nyt lauseen 3.1 perusteella $Re(s) > K$. Kun $\tau \to \infty$, saadaan

$$
\int_0^{\infty} \left| e^{-st} f(t) \right| \, dt \leq \frac{M}{k-K}.
$$

Laplace-muunnos $L(f(t))$ suppenee siis itseisesti, kun $Re(s) > K$. $\square$

Seuraavassa lauseessa todistetaan, että Laplace-muunnos on lineaarinen funktio.

**Lause 3.4.** *Olkoot funktioilla $f$ ja $g$ olemassa Laplace-muunnokset $F$ ja $G$. Tällöin*

$$
L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s),
$$

*kun $a$ ja $b$ ovat vakioita ja $a, b \in \mathbb{C}$.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 544]). Valitaan $K$ siten, että funktiot $F(s)$ ja $G(s)$ ovat määriteltyjä, kun $Re(s) > K$. Nyt

$$
L(af(t) + bg(t)) = \int_0^{\infty} (af(t) + bg(t)) e^{-st} \, dt,
$$

josta edelleen integraalin ominaisuuksien perusteella

$$
Laf(t)) + bg(t)) = a \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt + b \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt = aF(s) + bG(s).
$$

$\square$

Laplace-muunnoksen lineaarisuus helpottaa uusien Laplace-muunnosten löytämistä, kuten seuraavasta esimerkistä nähdään.

**Esimerkki 3.4.** (Tekijän itse laatima). Osoitetaan, että $\cosh at = \frac{s}{s^2 - a^2}$. Koska määritelmän 2.3 mukaan $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, saadaan Laplace-muunnokseksi

$$
L(\cosh at) = L\left( \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \right) = \frac{1}{2} L(e^{at}) + \frac{1}{2} L(e^{-at}).
$$

Esimerkin 3.1 perusteella saadaan lopullinen muoto

$$L(\cosh at) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{2s}{a(s-a)(s+a)} = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

Seuraava esimerkki käsittelee funktion $\sin bt$ Laplace-muunnosta.

**Esimerkki 3.5.** (Tekijän itse laatima). Lasketaan funktion $\sin bt$ Laplace-muunnos.
Määritelmän 2.3 perusteella funktion $\sin bt$ Laplace-muunnos $L(\sin bt)$ saadaan muotoon

$$L(\sin bt) = L\left(\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}\right).$$

Laplace-muunnoksen lineaarisuuden perusteella saadaan

$$L(\sin bt) = L\left(\frac{e^{ibt}}{2i}\right) - L\left(\frac{e^{-ibt}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}L\left(e^{ibt}\right) - \frac{1}{2i}L\left(e^{-ibt}\right).$$

Taulukon 1 perusteella saadaan

$$L(\sin bt) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-bi} - \frac{1}{s+bi}\right) = \frac{-4b}{-4s^2-4b^2} = \frac{b}{s^2+b^2}.$$

# 4 Derivaatan ja integraalin Laplace-muunnos

## 4.1 Derivaatan Laplace-muunnos

**Lause 4.1.** *Olkoot funktiot $f(t)$ ja $f'(t)$ eksponentiaalista kertalukua ja jatkuvia, kun $t \geq 0$. Tällöin*

$$L(f'(t)) = sF(s) - f(0),$$

*missä*

$$F(s) = L(f(t)).$$

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 549]). Olkoon $K$ niin suuri, että sekä funktio $f(t)$ että funktio $f'(t)$ ovat eksponentiaalista kertalukua vakiolla K. Jos $Re(s) > K$, niin $L(f'(t))$ on Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$L(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt.$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$L(f'(t)) = \lim_{c\to+\infty} \Big/_0^c f(t)e^{-st} + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Koska funktio $f(t)$ on oletuksen mukaan eksponentiaalista kertalukua vakiolla $K$ ja $Re(s) > K$, saadaan

$$\lim_{c\to+\infty} \int_0^c f(t)e^{-st} = -f(0).$$

Määritelmää 3.1 käyttämällä saadaan (lähteessä virhe)

$$L(f'(t)) = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt - f(0) = sF(s) - f(0).$$

$\square$

Lause 4.1 helpottaa joidenkin Laplace-muunnosten löytämistä.

**Esimerkki 4.1.** (Tekijän itse laatima). Osoitetaan, että $L(\sin^2 t) = \frac{2}{s(s^2+4)}$. Olkoon funktio $f(t) = \sin^2 t$ . Tällöin $f(0) = 0$ ja $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$. Esimerkin 3.5 perusteella saadaan funktion $f'(t)$ Laplace-muunnokseksi

$$L(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}.$$

Lauseen 4.1 perusteella

$$L(\sin 2t) = sL(\sin^2 t) - f(0),$$

josta edelleen saadaan

$$L(\sin^2 t) = \frac{2}{s^2+4}\frac{1}{s} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

**Huomautus.** (Vrt. [2, s. 258]). Lause 4.1 yleistyy myös $n$. derivaatalle. Oletetaan, että funktio $f^{(n)}$ on jatkuva välillä $[0,\infty[$ ja että että derivaatat $f',\dots,f^{(n)}$ sekä niiden Laplace-muunnokset ovat olemassa. Oletetaan myös, ja että $f^{(n-1)}(t)e^{-st} \to 0$, kun $t \to \infty$. Tällöin

$$[L(f^{(n)}(t)) = s^nF(s) - \left(s^{n-1}f(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)\right), \tag{4.1}$$

missä $F(s) = L(f(t))$ ja $n = 1, 2, \dots$.

**Esimerkki 4.2.** (Vrt. [1, s. 550]). Johdetaan funktion $f(t)$ 2. derivaatan Laplace-muunnos $L(f''(t))$. Huomautuksen 4.1 perusteella

$$L(f''(t)) = s^2F(s) - (sf(0) + f'(0)),$$

josta edelleen

$$L((f''(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

## 4.2 Integraalin Laplace-muunnos

**Lause 4.2.** *Olkoon funktio $f(t)$ eksponentiaalista kertalukua ja jatkuva, kun $t \geq 0$. Olkoon funktiolla $f(t)$ myös Laplace-muunnos $L(f(t)) = F(s)$. Tällöin*

$$L\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}.$$

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 550]). Olkoon $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$. Tällöin funktio $f(t) = g'(t)$ ja $g(0) = 0$. Jotta funktiolla $g(t)$ olisi Laplace-muunnos, tulee sen olla eksponentiaalista kertalukua. Koska funktio $f$ on eksponentiaalista kertalukua, on olemassa positiiviset vakiot $M$ ja $K$ siten, että (lähteessä virhe)

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau \leq M\int_0^t e^{K\tau}\,d\tau = \frac{M}{K}(e^{Kt} - 1) \leq \frac{M}{K}e^{Kt}.$$

Siis myös funktio $g(t)$ on eksponentiaalista kertalukua, joten sillä on olemassa Laplace-muunnos. Lauseen 4.1 perusteella saadaan

$$L(f(t)) = L(g'(t)) = sL(g(t)) - g(0) = sL\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right).$$

$\square$

**Esimerkki 4.3.** (Vrt. [1, s. 551]). Osoitetaan, että $L(t^2) = \frac{2}{s^3}$.
Lauseen 4.2 perusteella saadaan

$$L(t^2) = L\left(\int_0^t 2\tau\,d\tau\right) = \frac{1}{s}L(2t).$$

Esimerkin 3.3 perusteella tiedetään, että $L(t) = \frac{1}{s^2}$, joten

$$L(t^2) = \frac{1}{s}\frac{2}{s^2} = \frac{2}{s^3}.$$

## 4.3 Vakiokertoimisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen

Yksi Laplace-muunnoksen tärkeimpiä käyttökohteita on differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen. Laplace-muunnoksen hyödyllisyys differentaailiyhtälöiden ratkaisussa perustuu derivaatan $f'(t)$ Laplace-muunnokseen, joka on todistettu lauseessa 4.1.Tässä kappaleessa käydään läpi menetelmä, jonka avulla voidaan ratkaista vakiokertoimisia lineaarisia differentiaaliyhtälöitä.
Tarkastellaan seuraavaa alkuarvoprobleemaa

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t),$$

jonka alkuehdot ovat

$$y(0) = y_0 \text{ ja } y'(0) = d_0.$$

Ratkaisun löytämiseksi differentiaaliyhtälölle tehdään Laplace-muunnos

$$L\left(y''(t) + ay'(t) + by(t)\right) = L\left(f(t)\right),$$

josta saadaan edelleen Laplace-muunnoksen lineaarisuuden perusteella

$$L(y''(t)) + aL(y'(t)) + bL(y(t)) = L(f(t)).$$

Käytetään jatkossa seuraavia merkintöjä

$$L(y(t)) = Y(s) \text{ ja } L(f(t)) = F(s).$$

Lauseen 4.1 mukaan

$$L(y'(t)) = sY(s) - y(0),$$

ja esimerkin 4.2 perusteella

$$L(y''(t)) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0).$$

Näiden perusteella differentiaaliyhtälön Laplace-muunnos saadaan seuraavaan muotoon

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + a(sY(s) - y(0)) + bY(s) = F(s),$$

josta edelleen

$$s^2Y(s) + asY(s) + bY(s) = F(s) + sy(0) + y'(0) + ay(0).$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu $y(t)$ saadaan selville ratkaisemalla edellä saaduta yhtälöstä $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{F(s) + sy(0) + y'(0) + ay(0)}{s^2 + as + b}.$$

**Esimerkki 4.4.** ([1, s. 553, tehtävä 13]). Ratkaistaan seuraava alkuarvoprobleema

$$y'(t) - y(t) = -2, \text{ missä } y(0) = 3.$$

Tehdään differentiaaliyhtälölle Laplace-muunnos

$$L(y'(t) - y(t)) = L(-2),$$

josta saadaan edellä kuvatulla menetelmällä

$$sY(s) - 3 - Y(s) = L(-2),$$

ja edelleen esimerkin 3.2 perusteella

$$sY(s) - Y(s) = -\frac{2}{s} + 3.$$

Ratkaisemalla yhtälöstä $Y(s)$ saadaan

$$Y(s) = -\frac{2}{s(s-1)} + \frac{3}{s-1}.$$

Alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisu $y(t)$ saadaan ottamalla tästä käänteismuunnos ja käyttämällä esimerkkiä 3.1 saadaan

$$\begin{aligned} y(t) = L^{-1}(Y(s)) &= L\left(-\frac{2}{s(s-1)} + \frac{3}{s-1}\right) \\ &= L\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s-1}\right) = 2 + e^t. \end{aligned}$$

**Esimerkki 4.5.** ([1, s. 553, tehtävä 17]). Ratkaistaan seuraava alkuarvoprobleema

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0, \text{ missä } y(0) = 2 \text{ ja } y'(0) = -1.$$

Tehdään differentiaaliyhtälölle Laplace-muunnos

$$L(y''(t)) + L(y'(t)) - 2L(y(t)) = 0,$$

josta saadaan

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + s - Y(s) - y(0) - 2Y(s) = 0.$$

Ratkaisemalla yhtälöstä $Y(s)$ saadaan

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+s-2},$$

josta saadaan edelleen seuraava osamurtokehitelmä

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2},$$

Alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisu $y(t)$ saadaan ottamalla tästä käänteismuunnos

$$y(t) = L^{-1}(Y(s)) = L\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2}\right).$$

Käänteismuunnos voidaan ratkaista käyttämällä esimerkkiä 3.1. Saadaan

$$y(t) = e^t + e^{-2t}.$$

# 5 Erityisiä Laplace-muunnoksia

Tässä luvussa esitellään siirtymäteoria sekä funktion $f(t)$ jakaminen ja kertominen muuttujalla $t$ ja näiden vaikutukset Laplace-muunnokseen. Toisinaan ei-homogeenisten vakiokertoimisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisut sisältävät funktioita kuten $t\cos bt$, $t\sin bt$ tai $t^n eat$. Tässä luvussa etsitäänkin funktioiden $tf(t)$ ja $\frac{f(t)}{t}$ Laplace-muunnokset. [1, s. 559].

## 5.1 Siirtymäteoria

Edellä esiteltiin funktioiden $\cos at$ ja $\sin at$ Laplace-muunnokset. Seuraavaksi todistetaan, kuinka siirtämällä muuttujaa $s$ Laplace-muunnoksessa $F(s)$ saadaan nämä funktiot liittymään funktioiden $e^{at}\cos at$ ja $e^{at}\sin at$ Laplace-muunnoksiin. (Ks. [1, s. 553]).

**Lause 5.1.** *Olkoon $F(s)$ funktion $f(t)$ Laplace-muunnos. Tällöin*

$$L(e^{at}f(t)) = F(s-a),$$

*missä $a$ on reaalinen vakio ja $s \in \mathbb{C}$.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 554]). Koska Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,$$

niin

$$L(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\,dt = F(s-a).$$

□

Seuraavassa lauseessa todistetaan, kuinka funktion $f(t-a)$ Laplace-muunnos saadaan kertomalla $F(s)$ termillä $e^{-as}$. (Ks. [1, s. 553]).

**Lause 5.2.** *Olkoon $F(s)$ funktion $f(t)$ Laplace-muunnos ja olkoon $a \geq 0$. Tällöin*

$$L(U_a(t)f(t-a)) = e^{-as}F(s),$$

*missä $U_a(t)$ on yksikköaskelfunktio.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 554]).Laplace-muunnoksen määritelmän perusteella

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(a+\tau)}\,d\tau.$$

Merkitsemällä $t = a + \tau$, jolloin $dt = d\tau$, saadaan

$$e^{-as}F(s) = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt.$$

Määritelmän 2.4 perusteella $U_{at}(t) = 0$, kun $t < a$, ja $U_a(t) = 1$, kun $t > a$, joten Laplace-muunnos saadaan seuraavaan muotoon

$$\begin{aligned} e^{-as}F(s) &= \int_0^\infty U_a(t)f(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= L(U_a(t)f(t-a)). \end{aligned}$$

$\square$

**Esimerkki 5.1.** ([1, s. 557, tehtävä 3]). Osoitetaan, että

$$L(e^{at}\cos bt) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}.$$

Oletetaan, että $f(t) = \cos bt$. Tällöin taulukon 1 mukaan

$$F(s) = L(\cos bt) = \frac{s}{s^2 + b^2}.$$

Nyt lauseen 5.1 perusteella saadaan

$$L(e^{at}\cos bt) = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}.$$

**Esimerkki 5.2.** ([1, s. 557, tehtävä 9]). Etsitään funktion $f(t) = U_2(t)(t-2)^2$ Laplace-muunnos $L(f(t))$.
Taulukon 1 mukaan $L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, joten tällöin $L(t^2) = \frac{2!}{s^3}$. Lauseen 5.2 perusteella saadaan

$$\begin{aligned} L(f(t)) &= L\left(U_2(t)(t-2)^2\right) \\ &= e^{-2s}L(t^2) = e^{-2s}\frac{2!}{s^3} \\ &= \frac{2e^{-2s}}{s^3}. \end{aligned}$$

## 5.2 Kertominen muuttujalla $t$

**Lause 5.3.** *Olkoon funktio $f$ paloittain jatkuva välillä $[0, \infty[$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $K$. Olkoon $F(s)$ funktion $f(t)$ Laplace-muunnos. Tällöin*

$$L(tf(t)) = -F'(s).$$

*Todistus.* (Vrt.[1, s. 559]). Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ . Leibnizin säännön eli lauseen 2.1 perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
F'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(f(t)e^{-st})\,dt \\
&= \int\limits_0^\infty -tf(t)e^{-st}\,dt = -\int\limits_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= -L(tf(t)).
\end{aligned}$$

**Esimerkki 5.3.** ([1, s. 562, tehtävä 9]). Etsitään funktion $f(t) = t\sin bt$ Laplace-muunnos.
Nyt $f(t) = \sin bt$, joten esimerkin 3.5 perusteella $F(s) = L(\sin bt) = L(\frac{b}{s^2+b^2})$.
Lauseen 5.3 perusteella

$$L(t\sin bt) = -F'(s) = -\left(-\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}\right) = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}.$$

Siis

$$Lt(\sin bt) = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}.$$

**Esimerkki 5.4.** (Vrt. [3, s. 32]). Etsitään funktio $f(t)$, kun $f(t) = L^{-1}\left(\log\frac{s+a}{s+b}\right)$.
Nyt

$$F'(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\log\frac{s+a}{s+b}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\log(s+a) - \log(s+b)\right) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}.$$

Nyt koska lauseen 5.3 perusteella $L(tf(t)) = -F'(s)$, funktio $f(t)$ saadaan ratkaistua seuraavasti

$$f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right).$$

Esimerkin 3.1 perusteella saadaan

$$f(t) = \frac{1}{t}(e^{-bt} - e^{-at}).$$

## 5.3 Jakaminen muuttujalla $t$

**Lause 5.4.** *Oletetaan, että funktioilla $f(t)$ ja $\frac{f(t)}{t}$ on Laplace-muunnokset ja että $F(s)$ on funktion $f(t)$ Laplace-muunnos. Tällöin, jos raja-arvo*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$$

*on olemassa, niin*

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int\limits_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma.$$

*Todistus.* (Vrt.[1, s. 559]). Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$F(\sigma) = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\,dt,$$

joten (lähteessä virhe)

$$\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma = \int_s^\infty \left(\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\,dt\right)\,d\sigma$$

Lauseen 2.2 perusteella integrointijärjestys voidaan vaihtaa

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma &= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty f(t)e^{-\sigma t}\,d\sigma\right)\,dt \\
&= \int_0^\infty \left(\lim_{c\to\infty} \Big/_s^c \frac{-f(t)}{t}e^{-\sigma t}\right)\,dt \\
&= \int_0^\infty \left(\lim_{c\to\infty} -\frac{f(t)}{t}e^{-ct} + \frac{f(t)}{t}e^{-st}\right)\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt \\
&= L\left(\frac{f(t)}{t}\right).
\end{aligned}$$

**Esimerkki 5.5.** ([1, s. 562, tehtävä 7]). Osoitetaan, että $L(\frac{e^t-1}{t}) = \ln\frac{s^2}{s^2+1}$. Olkoon $f(t) = e^t - 1$, jolloin esimerkkien 3.1 ja 3.2 perusteella $F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$. Koska

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t-1}{t} = 1,$$

niin Laplace-muunnos voidaan ratkaista käyttämällä lausetta 5.4

$$\begin{aligned}
L\left(\frac{e^t-1}{t}\right) &= \int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma} \\
&= \lim_{c\to\infty} \Big/_s^c \ln(\sigma-1) - \ln(\sigma) \\
&= \lim_{c\to\infty} \Big/_s^c \ln\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right) \\
&= \lim_{c\to\infty} \ln\left(\frac{c-1}{c}\right) - \ln\left(\frac{s-1}{s}\right).
\end{aligned}$$

Koska

$$\lim_{c\to\infty} \ln\left(\frac{c-1}{c}\right) = 0,$$

niin tulokseksi saadaan

$$L\left(\frac{e^t-1}{t}\right) = -\ln\left(\frac{s-1}{s}\right).$$

## 5.4 Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen

Osa differentiaaliyhtälöistä voi sisältää termejä kuten $ty'(t)$ tai $ty''(t)$. Tässä alaluvussa esitellään tapa, jolla tällaisia lineaarisia differentiaaliyhtälöitä voidaan ratkaista lauseen 5.4 avulla. (Vrt. [3, s. 70]).
Käytetään tässäkin alaluvussa seuraavia merkintöjä

$$L(y(t)) = Y(s) \text{ ja } L(f(t)) = F(s).$$

Nyt lauseen 5.3 mukaan

$$L(ty(t)) = F'(s),$$

kun funktio $y(t)$ on paloittain jatkuva välillä $[0,\infty]$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $K$. Oletetaan sitten, että funktio $y'(t)$ toteuttaa nämä oletukset. Tällöin

$$L(ty'(t)) = -\frac{\partial}{\partial s}L(y'(t)).$$

Lauseen 4.1 perusteella

$$L(y'(t)) = sY(s) - y(0),$$

joten

$$\begin{aligned} L(ty'(t)) &= -\frac{\partial}{\partial s}(sY(s) - y(0)) \\ &= -sY'(s) - Y(s). \end{aligned}$$

Samoin, jos oletetaan, että funktio $y''(t)$ toteuttaa lauseen 5.3 alkuoletukset, saadaan

$$L(ty''(t)) = -\frac{\partial}{\partial s}L(y''(t)).$$

Esimerkin 4.2 perusteella

$$L(y''(t)) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0),$$

joten

$$\begin{aligned} L(ty''(t)) &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) \\ &= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0). \end{aligned}$$

**Esimerkki 5.6.** ([1, s. 562, tehtävä 17]). Ratkaistaan seuraava alkuarvoprobleema

$$ty''(t) + ty'(t) - y(t) = 0, \text{ missä } y(0) = 0.$$

Tehdään differentiaaliyhtälölle Laplace-muunnos

$$L(ty''(t)) + L(ty'(t)) - L(y(t)) = 0,$$

josta saadaan edellä kuvatulla menetelmällä

$$-s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0) - sY'(s) - Y(s) - Y(s) = 0.$$

Tämä yhtälö sisältää tekijän $Y'(s)$, joten yhtälö voidaan ratkaista ensimmäisen kertaluvun lineaarisena differentiaaliyhtälönä

$$Y'(s) + \frac{2s+2}{s^2+s}Y(s) = 0,$$

josta edelleen saadaan

$$Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) = 0.$$

Integroiva tekijä tälle 1. kertaluvun differentiaaliyhtälölle on

$$\rho = e^{H(s)},$$

missä

$$H(s) = \int \frac{2}{s}\, ds = 2\ln s.$$

Siis integroivaksi tekijäksi saadaan

$$\rho = e^{2\ln s} = s^2.$$

Kertomalla differentiaaliyhtälö integroivalla tekijällä saadaan

$$s^2Y'(s) + \frac{2s^2}{s}Y(s) = \frac{d}{ds}(s^2Y(s)) = 0.$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu saadaan integroimalla tämä yhtälö, josta saadaan

$$s^2Y(s) = C$$

ja josta edelleen saadaan

$$Y(s) = \frac{C}{s^2}.$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan

$$y(t) = L^{-1}(Y(s)) = Ct.$$

# 6 Laplace-muunnoksen käänteisfunktion löytäminen

Suurin osa tähän asti läpi käydyistä Laplace-muunnoksista ovat olleet muotoa

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \tag{6.1}$$

missä $P$ ja $Q$ ovat polynomeja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Funktion $Y(s)$ käänteisfunktio on löydetty käyttämällä osamurtokehitelmiä. Tässä luvussa esitellään yksi tapa löytää näitä osamurtokehitelmiä, mikä helpottaa käänteisfunktion löytämistä. (Vrt. [1, s. 562]).

## 6.1 Osamurtokehitelmän löytäminen

Tarkastellaan ensin reaalisia rationaalifunktioita. Seuraavan lauseen avulla voidaan löytää osamurtokehitelmä sellaisille rationaalifunktioille $\frac{P(s)}{Q(s)}$, joilla on yksinkertaisia reaalisia napoja pisteessä $a$.

**Lause 6.1.** *Olkoon $Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $P(s)$ on polynomi, jonka aste on korkeintaan $n-1$. Oletetaan, että polynomin $Q(s)$ aste on $n$ ja että funktiolla $Y(s)$ on vain yksinkertaisia reaalisia napoja $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tällöin*

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Res(Y, a_k)}{s-a_k}.$$

*Todistus.* (Vrt. [3, s. 38]). Nyt $Y(s)$ voidaan esittää osamurtokehitelmänä Laurentin sarjan määritelmän perusteella seuraavasti

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-a_n}.$$

Kertomalla molemmat puolet termillä $s - a_k$ ja antamalla $s \to a_k$ saadaan

$$A_k = \lim_{s \to a_k} (s-a_k) Y(s),$$

missä $k = 1, \ldots, n$. Täten

$$\begin{aligned} Y(s) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{s-a_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{Res(Y, a_k)}{s-a_k}. \end{aligned}$$

□

Seuraavan lauseen avulla voidaan löytää osamurtokehitelmä sellaisille rationaalifunktioille $\frac{P(s)}{Q(s)}$, joilla on $m$-kertaisia reaalisia napoja pisteessä $a$.

**Lause 6.2.** *Olkoon $Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $P(s)$ ja $Q(s)$ ovat polynomeja, joiden asteet ovat $\mu$ ja $v$. Olkoon myös $\mu < v + n$ ja $Q(a) \neq 0$. Tällöin*

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-a)^n Q(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(s-a)^k} + R(s),$$

*missä $R(s)$ on kaikkien niiden osamurtokehitelmien summa, jotka eivät sisällä tekijää $(s-a)^j$. Kertoimet $A_k$ voidaan ratkaista seuraavasti*

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} \lim_{s \to a} \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \frac{P(s)}{Q(s)},$$

*kun $k = 1, 2, \ldots, n$.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 563]). Polynomi $Y(s)$ voidaan esittää osamurtokehitelmänä Laurentin sarjan määritelmän perusteella. Kerrotaan aluksi yhtälön

$$Y(s) = \frac{P(s)}{(s-a)^n Q(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(s-a)^k} + R(s)$$

molemmat puolet termilla $(s-a)^n$, mistä saadaan

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{j=1}^{n} A_j (s-a)^{n-j} + R(s)(s-a)^n.$$

Derivoimalla tämä yhtälö $n-k$ kertaa saadaan

$$\frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{j=1}^{k} A_j \frac{(n-j)!}{(k-j)!}(s-a)^{k-j} + \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \left(R(s)(s-a)^n\right).$$

josta saadaan

$$\lim_{s \to a} \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \frac{P(s)}{Q(s)} = (n-k)! A_k.$$

□

Seuraavan lauseen avulla voidaan löytää osamurtokehitelmä sellaisille rationaalifunktioille $\frac{P(s)}{Q(s)}$, joilla on yksinkertaisia kompleksisia napoja pisteessä $a$.

**Lause 6.3.** *Olkoon $Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $P(s)$ ja $Q(s)$ ovat polynomeja, joilla on reaaliset kertoimet siten, että polynomin $Q(s)$ on aste on $n$ ja polynomin $P(s)$ aste on enintään $n+1$. Olkoon $Q(s) = ((s-a)^2 + b^2)T(s)$, missä funktiolla $T(s)$ ei ole muotoa $(s-a)^2 + b^2$ olevia tekijöitä. Tällöin*

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{((s-a)^2 + b^2)T(s)} = \frac{2A(s-a) - 2Bb}{(s-a)^2 + b^2} + R(s),$$

*missä*

$$A + iB = \frac{P(a+ib)}{Q'(a+ib)}$$

*ja $R(s)$ on lauseen 6.2 mukaisesti määritelty.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 565]). Koska polynomeilla $P$, $Q$ ja $Q'$ on reaaliset kertoimet, niin tällöin

$$P(a-ib) = \overline{P(a+ib)}$$

ja

$$Q'(a-ib) = \overline{Q'(a+ib)}$$

Polynomilla $Q(s)$ on yksinkertainen nolla, kun $s = a \pm ib$, joten $Q'(a \pm ib) \neq 0$. Tällöin $Res[Y, a \pm ib]$ voidaan laskea lauseen 2.5 avulla

$$Res[Y, a \pm ib] = \frac{P(a \pm ib)}{Q'(a \pm ib)}.$$

Koska polynomit $P$ ja $Q$ olivat reaalikertoimisia, niin

$$Res[Y, a-ib] = \overline{Res[Y, a-ib]}.$$

Olkoon sitten

$$A + iB = Res[Y, a-ib].$$

Koska lauseen 6.1 perusteella

$$Y(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Res(Y, a_k)}{s - a_k},$$

niin

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A+iB}{s-a-ib} + \frac{A-iB}{s-a+ib} + R(s) \\ &= \frac{(A+iB)(s-a+ib) + (A-iB)(s-a-ib)}{(s-a+ib)(s-a-ib)} + R(s) \\ &= \frac{2A(s-a) - 2Bb}{(s-a)^2 + b^2} + R(s). \end{aligned}$$

□

**Esimerkki 6.1.** ([1, s. 570, tehtävä 1]). Olkoon $Y(s) = \frac{2s+1}{s(s-1)}$. Etsitään käänteinen Laplace-muunnos $L^{-1}(Y(s))$.
Nyt $P(s) = 2s + 1$ ja $Q(s) = s(s-1)$. Polynomin $Q(s)$ nollat ovat $s_1 = 0$ ja $s_2 = 1$. Nollat ovat reaalisia ja yksinkertaisia, joten osamurtokehitelmä saadaan lauseen 6.1 avulla. Nyt

$$Res[Y, 0] = \lim_{s \to 0} (s-0) \frac{2s+1}{s(s-1)} = \lim_{s \to 0} \frac{2s+1}{(s-1)} = -1$$

ja

$$Res[Y,1] = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{2s+1}{s(s-1)} = \lim_{s\to 1}\frac{2s+1}{s} = 3.$$

Lauseen 6.1 perusteella

$$Y(s) = \sum_{k=1}^{n}\frac{Res(Y,a_k)}{s-a_k} = \frac{-1}{s-0} + \frac{3}{s-1} = \frac{-1}{s} + \frac{3}{s}.$$

Tehtävän ratkaisu saadaan ottamalla käänteismuunnos taulukon 1 avulla

$$L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}\left(\frac{-1}{s} + \frac{3}{s}\right) = -1 + 3e^t.$$

**Esimerkki 6.2.** ([1, s. 570, tehtävä 5]). Olkoon $Y(s) = \frac{2s^2+s+3}{(s+2)(s-1)^2}$. Etsitään käänteinen Laplace-muunnos $L^{-1}(Y(s))$.
Nyt $P(s) = 2s^2+s+3$ ja $Q(s) = (s+1)(s-1)^2$. Polynomin $Q(s)$ juuret ovat $s_1 = -2$ ja $s_2 = 1$, ja $s_1$ on yksinkertainen ja $s_2$ kaksinkertainen napa. Etsittävä osamurtokehitelmä on muotoa

$$Y(s) = \frac{A_2}{(s-1)^2} + \frac{A_1}{s-1} + \frac{B_1}{s+2}.$$

Kerroin $B_1$ saadaan lauseen 6.1 avulla

$$Res[Y,-2] = \lim_{s\to -2}(s+2)\frac{2s^2+s+3}{(s+2)(s-1)^2} = \lim_{s\to -2}\frac{2s^2+s+3}{(s-1)^2} = 1.$$

Kertoimet $A_1$ ja $A_2$ saadaan lauseen 6.2 avulla. Nyt $n=2$ ja $a=1$, joten

$$A_2 = \lim_{s\to 1}\frac{2s^2+s+3}{s+2} = 2$$

ja

$$A_1 = \frac{1}{1!}\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s^2+s+3}{s+2}\right) = \lim_{s\to 1}\frac{2s^2+8s-1}{(s+2)^2} = 1.$$

Nyt

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}.$$

Tehtävän ratkaisu saadaan ottamalla käänteismuunnos taulukon 1 avulla

$$L^{-1}(Y(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}\right) = 2te^t + e^t + e^{-2t}.$$

**Esimerkki 6.3.** (Vrt. [1, s. 566]). Olkoon $Y(s) = \frac{s^3+3s^2-s+1}{s(s+1)^2(s^2+1)}$. Etsitään käänteinen Laplace-muunnos $L^{-1}(Y(s))$.
Nyt $P(s) = s^3+3s^2-s+1$ ja $Q(s) = s(s+1)^2(s^2+1)$. Polynomin $Q(s)$

nollat ovat $s_1 = 0$, $s_2 = -1$ ja $s_3 = \pm i$, ja $s_1$ on yksinkertainen reaalinen, $s_2$ kaksinkertainen reaalinen ja $s_3$ yksinkertainen kompleksinen napa. Etsittävä osamurtokehitelmä on siis muotoa

$$Y(s) = \frac{D}{s} + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{(s+1)^2} + \frac{2A(s-0) - 2B(1)}{(s-0)^2 + 1^2}.$$

Kerroin $D$ saadaan lauseen 6.1 avulla

$$D = Res[Y(s), 0] = \lim_{s\to 0}(s-0)\frac{s^3+3s^2-s+1}{s(s+1)^2(s^2+1)} = \lim_{s\to 0}\frac{s^3+3s^2-s+1}{(s+1)^2(s^2+1)} = 1.$$

Kertoimet $C_1$ ja $C_2$ saadaan lauseen 6.2 avulla

$$C_1 = \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\frac{s^3+3s^2-s+1}{s(s^2+1)} = \lim_{s\to -1}\frac{-3s^4+4s^3-1}{(s^3+s)^2} = -2$$

ja

$$C_2 = \lim_{s\to -1}\frac{s^3+3s^2-s+1}{s(s^2+1)} = -2.$$

Termi $A + iB$ saadaan ratkaistua lauseen 6.3 avulla. Termillä $s^2$ on kaksinkertainen kompeksinen nolla $s_3 = \pm i$, joten

$$\begin{aligned} A + iB = Res[Y, i] &= \lim_{s\to i}(s-i)\frac{s^3+3s^2-s+1}{s(s+1)^2(s^2+1)} \\ &= \lim_{s\to i}\frac{s^3+3s^2-s+1}{s(s+1)^2(s+i} \\ &= \frac{1-i}{2}, \end{aligned}$$

joten $A = \frac{1}{2}$ ja $B = -\frac{1}{2}$. Täten

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2(\frac{1}{2})(s-0) - 2(-\frac{1}{2})(1)}{(s-0)^2+1^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{s+1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Tehtävän ratkaisu saadaan ottamalla käänteismuunnos taulukon 1 avulla

$$\begin{aligned} L^{-1}(Y(s)) &= L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{s+1}{s^2+1}\right) \\ &= 1 - 2e^{-t} - 2te^{-t} + \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

## 6.2 Käänteisfunktion löytäminen

Alaluvussa 4.1 todettiin, että käänteinen Laplace-muunnos voidaan löytää seuraavan integraalin avulla

$$L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} F(s)e^{st}ds,$$

missä $\sigma_0$ on jokin riittävän suuri positiivinen vakio. Tämä integraali on tieintegraali, missä integroimistie kulkee pitkin kompleksitason $s = \sigma + i\tau$ vertikaalista suoraa $s = \sigma_0 + i\tau$. Tätä integraalia voidaan arvioida residy-teorian avulla seuraavan lauseen esittämällä tavalla.

**Lause 6.4.** *Olkoon Laplace-muunnos $F(s)$ muotoa $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $P(s)$ ja $Q(s)$ ovat polynomeja. Olkoon polynomi $P(s)$ astetta $m$ ja polynomi $Q(s)$ astetta $n$ siten, että $n > m$. Käänteinen Laplace-muunnos $f(t)$ saadaan tällöin seuraavasta yhtälöstä*

$$f(t) = L^{-1}(F(s)) = \sum Res[F(s)e^{st}, s_k],$$

*missä summaus tapahtuu kompleksifunktion $F(s)e^{st}$ kaikkien residyjen yli.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 568] ja [2, s. 262]). Valitaan $\sigma_0$ siten, että kaikki funktion $F(s)e^{st}$ navat sijaitsevat suoran $s = \sigma_0 + i\tau$ vasemmalla puolella. Olkoon $\Gamma_R$ integroimistie, joka muodostuu pisteiden $\sigma_0 \pm iR$ välissä olevasta vertikaalisesta suorasta ja vasemmanpuoleisesta puoliympyrästä $C_R : s = \sigma_0 + Re^{i\theta}$, missä $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$. Integroimistie näkyy kuvassa 1.

Kun $R$ on tarpeeksi suuri, niin

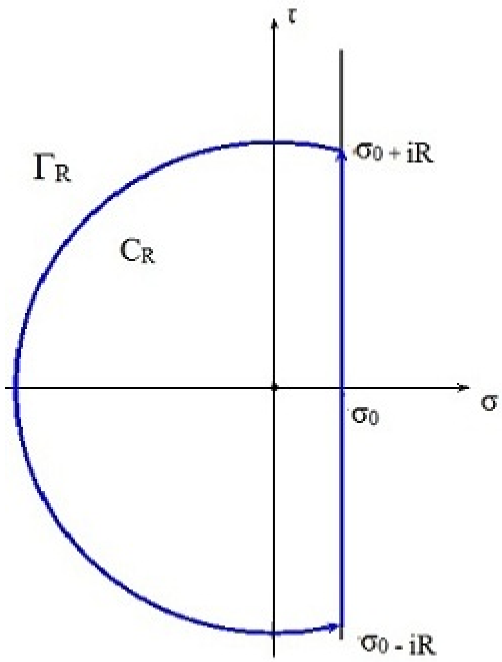
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\, ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} \frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\, ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\, ds.\\ &= \sum Res\left[\frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}, s_k\right].\end{aligned}$$

Todistetaan sitten, että

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\, ds = 0.$$

Kun $R$ on tarpeeksi suuri, niin lauseen 2.6 perusteella

$$|s| = \left|\sigma_0 + Re^{i\theta}\right| \geq \left||\sigma_0| - \left|Re^{i\theta}\right|\right| = R - \sigma_0.$$




Kuva 1: Lauseen 6.4 integroimistie (vrt.[1, s. 569]).

Nyt

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_R} F(s)e^{st}\,ds &\leq \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} M\,|R-\sigma|^{-k}\left|e^{(\sigma+iRe^{i\theta})t}Rie^{i\theta}\right|\,d\theta\\ &\leq \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} M\,|R-\sigma|^{-k}\,e^{\sigma t - tR\cos\theta}R\,d\theta\\ &= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} M\,|R-\sigma|^{-k}\,e^{\sigma t - tR\sin\varphi}R\,d\varphi,\end{aligned}$$

missä $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$. Kun $k > 1$, niin tällöin

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} M\,|R-\sigma|^{-k}\,e^{\sigma t - tR\sin\varphi}R\,d\varphi = 0,$$

joten myös

$$\lim_{R\to\infty} 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} M\,|R-\sigma|^{-k}\,e^{\sigma t - tR\sin\varphi}R\,d\varphi = 0.$$

Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa, kun $0 < k \leq 1$, joten tarkastellaankin tätä tilannetta lauseen 2.7 avulla. Jordanin epäyhtälön mukaan

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin\varphi}{\varphi} \le 1,$$

kun$0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Siis tällöin

$$\frac{2\varphi}{\pi} \le \sin\varphi,$$

ja

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} M\,|R-\sigma|^{-k}\,e^{\sigma t - tR\sin\varphi} R\,d\varphi \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} M\,|R-\sigma|^{-k}\,e^{\sigma t - \frac{2tR\varphi}{\pi}} R\,d\varphi,$$

joka lähestyy nollaa, kun $R \to \infty$. □

Tämä lause helpottaa joissakin tapauksissa käänteisfunktion löytämistä. Lasketaan uudelleen esimerkki 6.1, missä tämä näkyy käytännössä.

**Esimerkki 6.4.** ([1, s. 570, tehtävä 1]). Olkoon $Y(s) = \frac{2s+1}{s(s-1)}$. Etsitään käänteinen Laplace-muunnos $L^{-1}(Y(s))$.
Funktio on muotoa $\frac{P(s)}{Q(s)}$, missä polynomin $Q(s)$ aste on korkeampi kuin polynomin $P(s)$ aste. Funktiolla $Y(s)$ on yksinkertaiset navat pisteissä $s_1 = 0$ ja $s_2 = 1$ Nyt lauseen 6.4 mukaan

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(Y(s)) = \sum Res[Y(s)e^{st}, s_k] \\ &= Res[Y(s), 0] + Res[Y(s), 1] \\ &= \lim_{s\to 0}(s-0)\frac{(2s+1)e^{st}}{s(s-1)} + \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{(2s+1)e^{st}}{s(s-1)} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{(2s+1)e^{st}}{s-1} + \lim_{s\to 1}\frac{(2s+1)e^{st}}{s} \\ &= -1 + 3e^t. \end{aligned}$$

Ratkaisuksi saatiin sama tulos kuin esimerkissä 6.1.

## 6.3 Heavisiden kaava

**Lause 6.5.** *(Heavisiden kaava). Olkoon $Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä polynomi $P(s)$ on astetta $m$ ja polynomi $Q(s)$ astetta $n$ siten, että $n > m$. Oletetaan, että polynomilla $Q(s)$ on $n$ kappaletta yksinkertaisia nollia pisteissä $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Tällöin funktio $f(t)$ saadaan funktion $Y(s)$ Laplace-muunnoksen avulla seuraavasti*

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}.$$

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 569]). Koska $P(s)$ ja $Q(s)$ ovat polynomeja ja $s_k$ on yksinkertainen napa, niin lauseen 2.5 perusteella

$$Res[F(s)e^{st}, s_k] = \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t}.$$

Lauseen 6.4 perusteella

$$L^{-1}(Y(s)) = \sum Res[F(s)e^{st}, s_k],$$

joten

$$L^{-1}(Y(s)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t}.$$

□

Lasketaan vielä Heavisiden kaavalla esimerkki 6.1 vertailun vuoksi.

**Esimerkki 6.5.** ([1, s. 570, tehtävä 1]).Olkoon $Y(s) = \frac{2s+1}{s(-1)}$. Etsitään käänteinen Laplace-muunnos $L^{-1}(Y(s))$.
Nyt $P(s) = 2s+1$ ja $Q(s) = s(s-1)$,ja funktiolla $Y(s)$ on vain yksinkertaisia napoja pisteissä $s_1 = 0$ ja $s_2 = 1$, joten lauseen 6.5 alkuehdot ovat voimassa. Heavisiden kaavan mukaan

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t},$$

missä

$$Q'(s_k) = 2s_k - 1.$$

Nyt

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{2} \frac{(2s+1)e^{s_k t}}{(2s-1)} \\ &= -1 + 3e^{t}. \end{aligned}$$

Ratkaisuksi saatiin sama tulos kuin esimerkeissä 6.1 ja 6.4.

**Esimerkki 6.6.** ([1, s. 570, tehtävä 3]).Olkoon $Y(s) = \frac{4s^2-6s-12}{s(s+2)(s-2)}$. Etsitään käänteinen Laplace-muunnos $L^{-1}(Y(s))$.
Nyt $P(s) = 4s^2 - 6s - 12$ ja $Q(s) = s(s+2)(s-2)$,ja funktiolla $Y(s)$ on vain yksinkertaisia napoja pisteissä $s_1 = 0$, $s_2 = -2$ ja $s_3 = 3$, joten lauseen 6.5 alkuehdot ovat voimassa. Heavisiden kaavan mukaan

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t},$$

missä

$$Q'(s_k) = (2s_k + 2)(s_k - 2) + (s_k^2 + 2s_k).$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=1}^{3} \frac{(4s_k^2 - 6s_k - 12)e^{s_k t}}{(2s_k + 2)(s_k - 2) + (s_k^2 + 2s_k)} \\
&= 3 + 2e^{-2t} - e^{2t}.
\end{aligned}
$$

# 7 Konvoluutio

Kahden funktion, $f(t)$ ja $g(t)$, konvoluutio on hyödyllinen ja tärkeä apuväline monessa sovelluksessa, esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Sen avulla voidaan ratkaista myös niin kutsuttuja integraaliyhtälöitä, joita tarkastellaan tarkemmin alaluvussa 7.2.

## 7.1 Määritelmä ja ominaisuuksia

**Määritelmä 7.1.** (Vrt.[3, s. 91]). Kahden paloittain jatkuvan funktion $f(t)$ ja $g(t)$ *konvoluutio* määritellään integraalina

$$
h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,
$$

missä $t > 0$.

Yksi tärkeä konvoluution ominaisuus on sen kytkös Laplace-muunnokseen. Jos $F(t)$ ja $G(t)$ ovat funktioiden $f(t)$ ja $g(t)$ Laplace-muunnokset, niin tällöin tulon $F(s)G(s)$ käänteismuunnos saadaan funktiosta $h(t) = (f * g)(t)$.

**Lause 7.1.** *Olkoot funktiolla $f(t)$ ja $g(t)$ Laplace-muunnokset $F(s)$ ja $G(s)$. Tällöin funktioiden $f$ ja $g$ konvoluution Laplace-muunnos saadaan funktioiden $F(s)$ ja $G(s)$ tulon avulla seuraavsti*

$$
L((f * g)(t)) = L(f(t))L(g(t)).
$$

*Todistus.* (Vrt.[3, s. 92]). Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$
\begin{aligned}
F(s) = L(f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \text{ ja} \\
G(s) = L(g(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
L(f(t))L(g(t)) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-su} g(u)\,du\right) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u} f(\tau)g(u)\,du\right)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $t = \tau + u$, jolloin $dt = du$, sillä $\tau$ on kiinnitetty sisemmssä integraalissa. Tällöin saadaan

$$L(f(t))L(g(t)) = \int_0^\infty \left( \int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, dt \right) d\tau.$$

Jos oletetaan, että $g(t) = 0$, kun $t < 0$, niin tällöin $g(t-\tau) = 0$, kun $t < \tau$, jolloin saadaan

$$L(f(t))L(g(t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, dt\, d\tau$$

Lauseen 3.3 perusteella $L(f(t))$ ja $L(g(t))$ suppenevat itseisesti, joten

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) \right| \, dt\, d\tau$$

suppenee. Tällöin lauseen 2.2 perusteella voidaan integrointijärjestys vaihtaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} L(f(t))L(g(t)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt \\ &= L(f * g). \end{aligned}$$

□

Seuraavassa lauseessa todistetaan muutama konvoluution ominaisuus.

**Lause 7.2.** *Konvoluution ominaisuuksia ovat*

1. $(f * g)(t) = (g * f)(t)$
2. $c(f * g) = cf * g = f * cg$, *missä* $c$ *on vakio,*
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$ *ja*
4. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

*Todistus. Kohta 1.*(Vrt.[3, s. 91]). Konvoluution määritelmän mukaan

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\,\tau.$$

Sijoittamalla $u = t - \tau$ saadaan

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(u)f(t-u)\,du = (g * f)(t.)$$

*Kohta 2.* (Tekijän itse laatima). Määritelmän mukaan

$$c(f * g)(t) = c\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\,\tau,$$

ja koska $c$ on vakio

$$\begin{aligned} c\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\,\tau &= \int_0^t cf(\tau)g(t-\tau)d\,\tau \\ &= cf * g. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} c(f * g)(t) &= c\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\,\tau \\ &= \int_0^t f(\tau)cg(t-\tau)d\,\tau \\ &= f * cg. \end{aligned}$$

*Kohta 3.* (Vrt.[3, s. 91]). Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} f * (g * h)(t) &= \int_0^t f(\tau)(g * h)(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t f(\tau)\left(\int_0^{t-\tau} g(x)h(t-\tau-x)\,dx\right)\,d\tau \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = u - \tau$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \left(\int_\tau^t f(\tau)g(u-\tau)h(t-u)\,du\right)\,d\tau \\ &= \int_0^t \left(\int_0^u f(\tau)g(u-\tau)\,d\tau\right)h(t-u)\,du \\ &= ((f * g) * h)(t). \end{aligned}$$

*Kohta 4.* (Tekijän itse laatima). Konvoluution määritelmän mukaan

$$f*(g+h)=\int_0^t f(\tau)(g+h)(t-\tau)\,d\tau,$$

mistä saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^t f(\tau)(g+h)(t-\tau)\,d\tau &= \int_0^t f(\tau)\left(g(t-\tau)+h(t-\tau)\right)\,d\tau \\ &= \int_0^t (f(\tau)g(t-\tau)+f(\tau)h(t-\tau))\,d\tau \\ &= (f*g)+(f*h).\end{aligned}$$

□

**Esimerkki 7.1.** ([1, s. 578, tehtävä 3]).Lasketaan konvoluutio $e^t * e^{2t}$. Olkoon $f(t)=e^t$ ja $g(t)=e^{2t}$. Konvoluution määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\,\tau = h(t) = \int_0^t e^{\tau}e^{2(t-\tau)}d\,\tau \\ &= \int_0^t e^{-\tau}e^{2t}\,d\tau \\ &= -\Big/_0^t e^{-\tau}e^{2t} \\ &= -e^{-t}e^{2t}+e^0e^{2t} \\ &= -e^t+e^{2t}.\end{aligned}$$

**Esimerkki 7.2.** ([1, s. 578, tehtävä 7]). Etsitään konvoluution avulla $L^{-1}=\frac{1}{s(s^2+1)}$.
Olkoon $F(s)=\frac{1}{s}$ ja $G(s)=\frac{1}{s^2+1}$. Tällöin taulukon 1 mukaan $f(t)=1$ ja $g(t)=\sin t$. Nyt konvoluution määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}(L^{-1}(F(s)G(s)) &= \int_0^t \sin t\,d\tau \\ &= \Big/_0^t -\cos\tau \\ &= -\cos t+\cos 0 \\ &= 1-\cos t.\end{aligned}$$

## 7.2 Integraaliyhtälöiden ratkaiseminen

Yhtälöitä, jotka ovat muotoa

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \text{ ja } g(t) = \int_0^t k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{7.1}$$

sanotaan *integraaliyhtälöiksi*, joissa $f(t)$ on tuntematon funktio. Kun funktio $k(t,\tau)$ on muotoa $k(t-\tau)$, edustavat nämä integraalit konvoluutioita. Tässä tapauksessa Laplace-muunnosta käytetään yhtälöiden ratkaisussa. Jos funktiot $g$ ja $k$ ovat tunnettuja, niin lauseen 7.1 perusteella

$$L(f) = L(g) + L(f)L(k), \tag{7.2}$$

josta edelleen

$$L(f) = \frac{L(g)}{1 - L(k)}. \tag{7.3}$$

Useimmiten yhtälöstä (7.3) on helppo ratkaista $f(t)$, kuten seuraavasta esimerkistä nähdään. (Vrt.[3, s. 99]).

**Esimerkki 7.3.** ([1, s. 579, tehtävä 19]). Ratkaistaan integraaliyhtälö $f(t) = e^t + \int_0^t e^{t-\tau} f(\tau)\,\tau$.
Otetaan yhtälön molemmin puolin Laplace-muunnos, jolloin saadaan konvoluution määritelmän avulla seuraavaaa

$$L(f(t)) = L(e^t) + L(e^t)L(f(t)).$$

Ratkaistaan yhtälöstä $L(f(t))$, jolloin saadaan

$$L(f(t)) = \frac{L(e^t)}{1 - L(e^t)}.$$

Nyt Laplace-muunnostaulukon 1 avulla saadaan

$$\begin{aligned} L(f(t)) &= \frac{\frac{1}{s-1}}{1 - \frac{1}{s-1}} \\ &= \frac{1}{s-2}. \end{aligned}$$

Siis $F(s) = \frac{1}{s-2}$, jolloin

$$f(t) = e^{2t}.$$

## 7.3 Alkuarvoprobleemien ratkaiseminen

Konvoluutiota voidaan käyttää myös alkuarvoprobleemien ratkaisemiseen. Seuraavassa lauseessa todistetaan yleinen ratkaisu alkuarvoprobleemille, jotka ovat lineaarisia, ei-homogeenisiä ja 2. kertalukua.

**Lause 7.3.** *Olkoon ratkaistavana alkuarvoprobleema*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t),$$

*missä*

$$y(0) = y_0 \text{ ja } y'(0) = y_1.$$

*Sen yksikäsitteinen ratkaisu on*

$$y(t) = u(t) + (h * g)(t),$$

*missä*

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$$

*ja* $u(0) = y_0$ *ja* $u'(0) = y_1$. *Funktion* $h(t)$ *Laplace-muunnos* $H(s)$ *on*

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}.$$

*Todistus.* (Vrt.[1, s. 576 ]). Ratkaisu löydetään ratkaisemalla seuraava yhtälö

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = g(t),$$

missä $v(0) = 0$ ja $v'(0) = 0$. Kun yhtälön molemmilta puolilta otetaan Laplace-muunnokset, saadaan

$$aL(v''(t)) + bL(v'(t)) + cL(v(t)) = L(g(t)).$$

Nyt lauseen 4.1 ja esimerkin 4.2 perusteella

$$as^2V(s) - asv(0) - av'(0) + bsV(s) - bv(0) + cV(s) = G(s),$$

josta saadaan

$$as^2V(s) + bsV(s) + cV(s) = G(s),$$

missä $L(v(t)) = V(s)$ ja $L(g(t)) = G(s)$. Kun tästä yhtälöstä ratkaistaan $V(s)$, saadaan

$$V(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}G(s).$$

Merkitään

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c},$$

jolloin

$$V(s) = H(s)G(s),$$

ja ratkaisu saadaan konvoluution avulla seuraavasti

$$v(t) = (h * g)(t).$$

Annetun alkuarvoprobleeman yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(t) = u(t) + v(t) = u(t) + (h * g)(t),$$

missä

$$\begin{aligned} y(0) &= u(0) + v(0) = y_0 + 0 = y_0 \text{ ja} \\ y'(0) &= u'(0) + v'(0) = y_1 + 0 = y_1. \end{aligned}$$

□

**Esimerkki 7.4.** ([1, s. 562, tehtävä 13]. Ratkaistaan seuraava alkuarvoprobleema

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2e^{-t}, \text{ missä } y(0) = 0 \text{ ja } y'(0) = 1,$$

konvoluution avulla.
Ratkaistaan ensin homogeeninen yhtälö

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 0,$$

missä $u(0) = 0$ja $u'(0) = 1$. Otetaan yhtälön molemmin puolin Laplace-muunnokset, jolloin saadaan

$$L(u''(t)) + 2L(u'(t)) + L(u(t)) = 0.$$

Merkitään sitten

$$L(u(t)) = U(s),$$

jolloin saadaan

$$s^2U(s) + 2sU(s) + U(s) = su(0) + u'(0) + 2u(0)$$

Ratkaistaan tästä $U(s)$, jolloin saadaan

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Nyt taulukon 1 perusteella

$$u(t) = L^{-1}(U(s)) = te^{-t}.$$

Ratkaistaan sitten funktio $h(t)$. Nyt

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1},$$

joten

$$h(t) = L^{-1}(H(s)) = te^{-t}.$$

Koska

$$y(t) = u(t) + (h * g)(t) = u(t) + v(t),$$

niin ratkaistaan vielä $v(t)$. Nyt $g(t) = 2e^{-t}$, joten

$$\begin{aligned} v(t) &= (h * g)(t) = (g * h)(t) \\ &= \int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}2e^{-\tau}\, d\tau \\ &= \int_0^t 2(t-\tau)e^{-t}\, d\tau \\ &= \Big/_0^t\, 2te^{-t}\tau - e^{-t}\tau^2 \\ &= 2e^{-t}t^2 - e^{-t}t^2 \\ &= e^{-t}t^2. \end{aligned}$$

Lopullinen ratkaisu $y(t)$ on

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) + (h * g)(t) \\ &= te^{-t} + e^{-t}t^2. \end{aligned}$$

# Viitteet


[1] Mathews J., Howell R. *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*, 5th ed., Jones and Bartlett Publishers Inc., USA, 2006.

[2] Priestley H.A. *Introduction to Complex Analysis*, 2nd ed., Oxford University Press, Great Britain, 2003.

[3] Schiff, J. *The Laplace Transform : Theory  Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.