PRO GRADU -TUTKIELMA

Satu Vahtera

0–1 lait äärellisissä malleissa

TAMPEREEN YLIOPISTO
Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka

Tammikuu 2012

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

VAHTERA, SATU: 0–1 lait äärellisissä malleissa

Pro gradu -tutkielma, 33 s.

Matematiikka

Tammikuu 2012

Tiivistelmä

Äärellisten mallien teoria on tietotekniikan kehityksen tarpeiden seurauksena kasvanut matemaattisen logiikan osa-alue. Teorian ensimmäisiä tuloksia oli Trakhtenbrotin tulos vuodelta 1950, jonka mukaan validius äärellisissä malleissa ei ole rekursiivisesti numeroituva. Nykyisin äärellisten mallien logiikat ovat usein perusta tietokantakyselyiden luomiseen ja äärellisten mallien teorian tekniikoiden avulla todistetaan hakujärjestelmien ilmaisuvoimaa ja monimuotoisuutta.

Äärellisissä malleissa, kuten suuntaamattomissa äärellisissä verkoissa, voidaan tutkia tietyn ominaisuuden toteutuvuuden todennäköisyyttä. Kun verkon solmujen määrä lähenee ääretöntä, saadaan ominaisuudelle asymptoottinen todennäköisyys. Matemaattisessa logiikassa hyvin mielenkiintoinen ilmiö on 0–1 lait, jotka käsittelevät ominaisuuksien asymptoottista todennäköisyyttä eri logiikoissa. Jos logiikalla on 0–1 laki, kaikkien siinä määriteltävien ominaisuuksien asymptoottinen todennäköisyys on 0 tai 1. Tässä tutkielmassa esitellään muutamia logiikoita ja tutkitaan onko niillä 0–1 laki.

Työssä tutustutaan aluksi verkkojen ominaisuuksiin ja määritellään kiintopisteen käsite, sekä muutama kiintopistelogiikka. Kiintopistelogiikoiden käsittelyä jatketaan määrittelemällä rajoitetun muuttujamäärän logiikat. Ehrenfeucht-Fraïssén peleistä esitellään helmipelit, joiden avulla saadaan todistettua tärkeitä tuloksia liittyen asymptoottisiin todennäköisyyksiin ja kyselyihin eri logiikoissa. Työn lopussa määritellään vielä laajennusaksioomat, jotka ovat tarpeellinen apuväline 0–1 lain todistamisessa.

Viitekirjoina työssä ovat Libkin, Leonid: *Elements of Finite Model Theory* ja Ebbinghaus, Heinz-Dieter & Flum, Jorg: *Finite Model Theory.*

Asiasanat: satunnaisverkko, asymptoottinen todennäköisyys, laajennusaksiooma

Sisältö

Johdanto

Tässä työssä käsitellään äärellisiä malleja ja eri logiikoita, sekä niiden ilmaisuvoimaa. Jos sen sijaan, että mietimme kaavan totuusarvon ratkeavuutta *kaikissa* äärellisissä malleissa, mietimme onko se tosi *lähes kaikissa* äärellisissä malleissa, saamme lisättyä logiikan ilmaisuvoimaa. Jotkin ominaisuudet voivat olla ratkeamattomia niiden totuusarvon suhteen kaikissa logiikan äärellisissä malleissa, mutta voidaan todistaa ominaisuuden olevan esimerkiksi tosi lähes kaikissa logiikan äärellisissä malleissa. Tähän mielenkiintoiseen tulokseen päädytään tutustumalla ominaisuuksien asymptoottiseen todennäköisyyteen. Lukijan oletetaan hallitsevan melko laajat logiikan perustiedot. Usein tutkittavia äärellisiä malleja ovat äärelliset verkot, äärelliset merkkijonot ja muut äärelliset relationaaliset mallit. Tässä työssä käsittelemme aiheita suuntaamattomien äärellisten verkkojen avulla.

Ensimmäisessä luvussa käydään läpi työn kannalta tärkeitä taustatietoja. Aluksi määritellään verkko ja siihen liittyvät työn kannalta olennaiset ominaisuudet. Seuraavaksi määritellään kiintopiste, sekä siihen liittyvät kiintopistelogiikat, jotka ovat keskeisessä asemassa tutkielmassa. Kiintopistelogiikoiden avulla saadaan määriteltyä rajoitetun muuttujamäärän logiikat, joista on apua tutkielman kannalta tärkeiden tulosten todistamisessa. Ensimmäisen luvun lopussa esitellään vielä helmipelit, joka on eräs Ehrenfeucht-Fraïssén pelien muoto.

Työn toinen ja kolmas luku käsittelee äärellisiä malleja ja aiemmin määriteltyjä logiikoita, tutkien millä todennäköisyydellä tietty ominaisuus mallissa toteutuu. Laajemmin, millä asymptoottisella todennäköisyydellä tietty ominaisuus toteutuu logiikan äärellisissä malleissa. Luvussa kaksi määriteltävien laajennusaksioomien avulla tutkielmassa todistetaan luvussa kolme, onko tutkielmassa esiin tuoduilla logiikoilla 0–1 laki. Kolmannen luvun lopussa määritellään vielä satunnaisverkko, jolla on mielenkiintoinen yhteys asymptoottiseen todennäköisyyteen.

1 Valmistelevia tarkasteluja

Määrittelemme aluksi aakkoston σ ensimmäisen kertaluvun logiikan termit ja kaavat seuraavasti:

- Jokainen muuttuja x on termi.
- Jokainen vakiosymboli c on termi.
- Jos $t_0, \ldots, t_{k-1}$ ovat termejä ja f on k-paikkainen funktiosymboli, niin $f(t_0, \ldots, t_{k-1})$ on termi.
- Jos t_0, t_1 ovat termejä, niin $t_0 = t_1$ on kaava.
- Jos $t_0, \ldots, t_{k-1}$ ovat termejä ja P on k-paikkainen relaatiosymboli, niin $P(t_0, \ldots, t_{k-1})$ on kaava.
- Jos φ_0, φ_1 ovat kaavoja, niin $\varphi_0 \wedge \varphi_1$, $\varphi_0 \vee \varphi_1$ ja $\neg\varphi_0$ ovat kaavoja.
- Jos φ on kaava, niin $\exists x\varphi$ ja $\forall x\varphi$ ovat kaavoja.

Käytämme yleiseen tapaan kaavasta $\neg\varphi \vee \psi$ lyhennemerkintää $\varphi \rightarrow \psi$ ja kaavasta $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ lyhennemerkintää $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Ensimmäisen kertaluvun logiikka FO $= L_{\omega\omega}$ on pienin logiikka, joka sisältää atomikaavat ja on suljettu negaation ($\neg$), konjunktion ($\wedge$) ja eksistenssikvantifionnin ($\exists$) suhteen. Käsittelemme myöhemmin ensimmäisen kertaluvun logiikan, sekä sen laajennuksien ominaisuuksia. Tutkittavissa äärellisissä malleissa aakkosto on aina relationaalinen, eli aakkosto ei sisällä funktiosymboleita.

Kun σ on relationaalinen aakkosto, merkitsemme kaikkien äärellisten σ-mallien joukkoa STRUCT$[\sigma]$.

Teoria on aakkoston σ lauseiden joukko. Löwenheimin ja Skolemin lause sanoo, että jos teorialla T on ääretön malli, sillä on myös numeroituva malli. Tähän lauseeseen viitataan sivulla 31 teorian **EA** täydellisyyden todistuksessa.

Trakhtenbrotin lause sanoo, että jokainen relationaalinen aakkosto σ, jossa on ainakin yksi kaksipaikkainen relaatiosymboli, on ratkeamaton sen ongelman suhteen onko aakkoston σ kaavalle Φ olemassa sellaista äärellistä mallia $\mathfrak{A} \in$ STRUCT$[\sigma]$, että $\mathfrak{A} \models \Phi$. Tähän tulokseen viitataan sivulla 12 operaattorin F_φ monotonisuus-ongelman ratkeamattomuuden todistuksessa. Lauseen todistus löytyy kirjasta Elements of Finite Model Theory.

Olkoon σ aakkosto, jossa ei ole funktiosymboleita. Aakkoston σ mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välinen *homomorfismi* on sellainen kuvaus $h : A \rightarrow B$, että jokaiselle aakkoston σ vakiolle pätee $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ ja jokaiselle k-paikkaiselle relaatiosymbolille

R ja jonolle $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in R^{\mathfrak{A}}$ pätee, että jono $(h(a_0), \ldots, h(a_{k-1}))$ kuuluu relaatioon $R^{\mathfrak{B}}$. Merkitään $h(R^{\mathfrak{A}}) = \{(h(x_0), \ldots, h(x_{k-1})) \in R^{\mathfrak{B}} \mid (x_0, \ldots, x_{k-1}) \in R^{\mathfrak{A}}\}$. Bijektiivista homomorfismia h, jonka käänteiskuvaus on myös homomorfismi, kutsutaan *isomorfismiksi*. Jos kahden mallin, $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$, välillä on isomorfismi, kutsumme malleja isomorfisiksi ja merkitsemme $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

σ-malleissa m-paikkainen *kysely* on sellainen kuvaus Q, joka yhdistää jokaiseen malliin $\mathfrak{A}$ universumin A^m osajoukon niin, että jos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ isomorfismilla $h : A \to B$, niin $Q(\mathfrak{B}) = h(Q(\mathfrak{A}))$. Sanomme, että kysely Q on määriteltävissä logiikassa L jos on olemassa logiikan L kaava $\varphi(x_0, \ldots, x_{m-1})$ aakkostolla σ siten, että jokaisella $\mathfrak{A}$

$$Q(\mathfrak{A}) = \{(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in A^m \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{m-1})\}.$$

1.1 Verkot

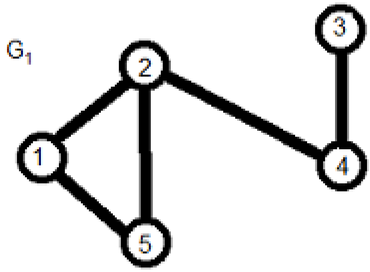
Verkko muodostuu joukosta objekteja, jossa jotkin objektiparit voivat olla yhdistetty toisiinsa. Kutsumme verkon G objekteja *solmuiksi* ja kahta solmua, u ja v, yhdistävää väylää *särmäksi*, $(u, v) \in E^G$. Käsittelemme suuntaamattomia verkkoja, joissa ei ole väliä särmän yhdistämien solmujen järjestyksellä. Verkko G on siis järjestetty pari $G = (V, E^G)$, missä V on joukko solmuja ja $E^G \subseteq V^2$ joukko särmiä. Verkon relaatio E^G on symmetrinen. *Yksinkertainen verkko* on suuntaamaton verkko, jossa ei ole särmiä solmusta itseensä, eikä enempää kuin yksi särmä kahden solmun välillä. Äärellinen verkko on sellainen verkko $G = (V, E^G)$, jossa joukot V ja E^G ovat äärelliset. Äärettömässä verkossa solmuja tai solmuja ja särmiä on ääretön määrä. Tässä tutkielmassa keskitymme käsittelemään yksinkertaisia äärellisiä verkkoja.

Olkoot $s, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ja u verkon G solmuja. Sanomme, että solmusta s solmuun u kulkee polku, jos $(s, a_0), (a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$, $(a_n, u) \in E^G$. Siispä jono solmujen välisiä särmiä muodostaa polun. Yksinkertainen polku ei kulje saman solmun kautta kahdesti. Silmukka on yksinkertainen polku, jonka alku- ja loppusolmut ovat samat. Suuntaamattomassa verkossa kahden solmun sanotaan olevan yhdistetyt, jos niiden välillä on polku. Yhtenäisessä verkossa jokaisesta solmusta on polku kaikkiin muihin solmuihin. Kuviossa 1.1 on yhtenäinen verkko $G_1 = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(1, 2), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\})$. Täydellisessä verkossa jokaisen solmuparin välissä on särmä. Kuviossa 1.2 on täydellinen verkko $G_2 = (\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\})$.

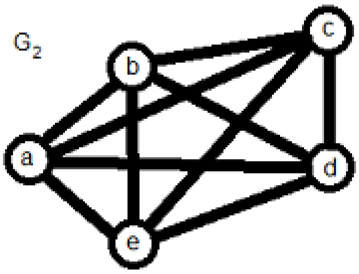
1.2 Kiintopistelogiikat

Olkoon $f : A \to A$ funktio. Kiintopiste on sellainen $x \in A$, jolle pätee $f(x) = x$. Graafisesti reaalilukuarvoisen funktion kiintopisteet $(x, f(x))$ sijaitsevat yhtälön $f(x) = x$ kuvaajalla, suoralla. Esimerkiksi funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

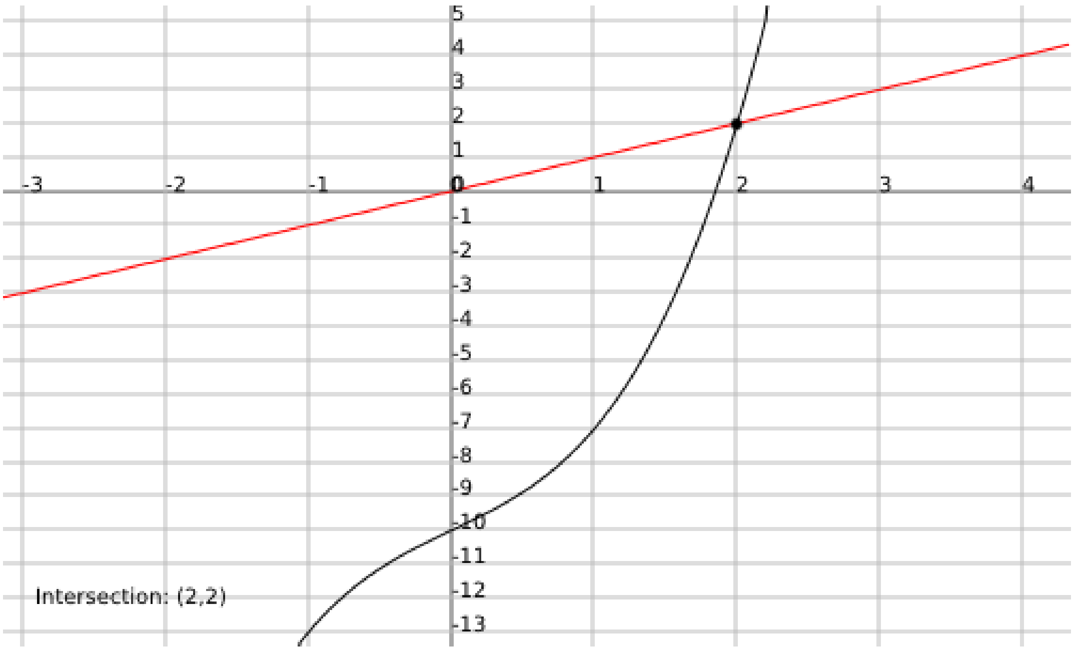
$$f(x) = x^3 + 2x - 10$$



Kuvio 1.1. Yhtenäinen verkko G_1



Kuvio 1.2. Täydellinen verkko G_2



Kuvio 1.3. Funktioiden $f(x) = x^3 + 2x - 10$ ja $f(x) = x$ kuvaajat ja kiintopiste $(2, 2)$

yksi kiintopiste on luku 2, koska $f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2 - 10 = 2$ (kuvio 1.3).

Joukon S potenssijoukko, $\wp(S)$, on joukon S kaikkien osajoukkojen joukko, johon kuuluvat myös tyhjä joukko ja joukko S itse.

Ensimmäisen kertaluvun logiikan lausein ei pystytä määrittelemään joitakin laskennallisesti tärkeitä verkon ominaisuuksia, kuten verkon yhtenäisyyttä. Logiikan FO ilmaisuvoiman riittämättömyys johtuu siitä, että sillä ei voi ilmaista kiintopisteitä. Käsittelemme seuraavaksi sellaisia logiikan FO laajennuksia, joilla pystymme ilmaisemaan kiintopisteongelmia.

Otetaan mielivaltainen joukko U. Joukon U operaattori on kuvaus $F : \wp(U) \to \wp(U)$. Kutsumme operaattoria F monotoniseksi jos

$$X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$$

ja inflatoriseksi jos

$$X \subseteq F(X)$$

kaikilla $X \in \wp(U)$.

Määritelmä 1.2.1. Olkoon operaattori $F : \wp(U) \to \wp(U)$. Joukko $X \subseteq U$ on operaattorin F *kiintopiste* jos $F(X) = X$. Joukko $X \subseteq U$ on operaattorin F *pienin kiintopiste* jos se on kiintopiste ja jos jokaiselle muulle operaattorin F kiintopisteelle Y pätee $X \subseteq Y$. Merkitsemme operaattorin F pienintä kiintopistettä $\mathrm{lfp}(F)$

Lause 1.2.1 (Tarskin ja Knasterin lause)**.** *Jokaisella monotonisella operaattorilla* $F : \wp(U) \to \wp(U)$ *on pienin kiintopiste,* $\mathrm{lfp}(F)$*, joka voidaan määritellä seuraavasti*

$$\mathrm{lfp}(F) = \bigcap\{Y \mid Y = F(Y)\}.$$

Todistus. Olkoon $W = \{Y \mid F(Y) \subseteq Y\}$. W ei ole tyhjä joukko, sillä $U \in W$. Osoitamme ensin, että $S = \bigcap W$ on operaattorin F kiintopiste. Jokaiselle joukolle $Y \in W$ pätee $S \subseteq Y$ ja siis $F(S) \subseteq F(Y) \subseteq Y$. Nyt siis $F(S) \subseteq \bigcap W = S$. Toisaalta, koska $F(S) \subseteq S$, pätee $F(F(S)) \subseteq F(S)$ ja siis $F(S) \in W$. Täten $S = \bigcap W \subseteq F(S)$, joka todistaa että $S = F(S)$. Olkoon $W' = \{Y \mid Y = F(Y)\}$ ja $S' = \bigcap W'$. Nyt $S \in W'$ ja siis $S' \subseteq S$. Toisaalta $W' \subseteq W$, joten $S = \bigcap W \subseteq \bigcap W' = S'$. Nyt siis $S = S'$. Täten $S = \bigcap\{Y \mid Y = F(Y)\}$ on operaattorin F kiintopiste. Koska se on operaattorin F kaikkien kiintopisteiden leikkaus, se on operaattorin F pienin kiintopiste. Tämä osoittaa, että

$$\mathrm{lfp}(F) = \bigcap\{Y \mid Y = F(Y)\} = \bigcap\{Y \mid F(Y) \subseteq Y\}.$$

$\square$

Kaikki operaattorit eivät ole monotonisia. Esittelemme seuraavaksi kuinka voimme etsiä kiintopisteen ei-monotoniselle operaattorille.

Oletetaan, että G on mielivaltainen operaattori. Operaattorin G *inflatorinen kiintopiste*, $\mathrm{ifp}(G)$, on kaikkien niiden joukkojen X^i yhdiste, missä $X^0 = \emptyset$ ja $X^{i+1} = X^i \cup G(X^i)$.

$$\mathrm{ifp}(G) = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^i \text{ , kun } X^0 = \emptyset \text{ ja } X^{i+1} = X^i \cup G(X^i).$$

Olkoon $F : \wp(U) \to \wp(U)$ mielivaltainen operaattori ja $X^0 = \emptyset$, $X^{i+1} = X^i \cup G(X^i)$. Jos jono $X^0 = \emptyset$, $X^{i+1} = X^i \cup G(X^i)$ saavuttaa kiintopisteen, niin jollain luvulla $n \in \mathbb{N}$ pätee $X^n = X^{n+1}$ ja siis kaikilla $m > n$, $X^m = X^n$. Koska joukolla U on vain $2^{|U|}$ osajoukkoa, $n \leq 2^{|U|}$. Voi myös olla, ettei tällaista lukua n ole, eikä jono saavuta kiintopistettä. Operaattorin F *osittainen kiintopiste* määritellään seuraavasti

$$\mathrm{pfp}(F) = \begin{cases} X^n & \text{jos } X^n = X^{n+1} \text{ jollakin } n \in \mathbb{N} \\ \emptyset & \text{jos } X^n \neq X^{n+1} \text{ kaikilla } n \leq 2^{|U|}. \end{cases}$$

Seuraavaksi näytämme kuinka kiintopiste-operaattoreita saadaan lisättyä logiikkaan FO. Inflatorisen kiintopisteen logiikka, IFP, ja osittaisen kiintopisteen logiikka, PFP, saadaan määriteltyä suoraan logiikan FO laajennuksina.

Sen sijaan pienimmän kiintopisteen logiikan, LFP, määrittelemistä varten täytyy ensin tutkia operaattorin monotonisuutta, sillä pienin kiintopiste on varmasti olemassa vain monotonisilla operaattoreilla.

Olkoon σ relationaalinen aakkosto ja lisäksi olkoon $R \notin \sigma$ paikkaluvun k relaatio. Olkoon $\varphi(R, x_0, \ldots, x_{k-1})$ aakkoston $\sigma \cup \{R\}$ kaava. Jokaiselle mallille $\mathfrak{A} \in \mathrm{STRUCT}[\sigma]$ kaavasta $\varphi(R, \vec{x})$ muodostuu operaattori $F_\varphi : \wp(A^k) \to \wp(A^k)$, joka määritellään seuraavasti:

$$F_\varphi(X) = \{\vec{a} \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi[X/R, \{\vec{a}\}/\{\vec{x}\}]\}.$$

Tässä merkintä X/R tarkoittaa, että relaatiosymboli R tulkitaan relaatioksi X kaavassa φ. Siis jos aakkoston $\sigma \cup \{R\}$ malli $\mathfrak{A}'$ on mallin $\mathfrak{A}$ ekspansio ja R tulkitaan relaatioksi X, niin $\mathfrak{A}' \vDash \varphi(\vec{a})$.

Merkitään kaavan φ vapaita muuttujia $\mathrm{Fv}(\varphi)$.

Määritelmä 1.2.2. Logiikat IFP ja PFP määritellään logiikan FO laajennuksina seuraavin säännöin:

- (IFP): Jos $\varphi(R, \vec{x})$ on kaava missä relaation R paikkaluku on k ja $\vec{t}$ on jono termejä ja $|\vec{x}| = \left|\vec{t}\right| = k$, niin

$$[\mathrm{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})](\vec{t})$$

  on kaava, jolla $\mathrm{Fv}([\mathrm{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})]) = \mathrm{Fv}(\vec{t}) \cup \mathrm{Fv}(\varphi) \setminus \{\vec{x}\}$.

- (PFP): Jos $\varphi(R, \vec{x})$ on kaava missä relaation R paikkaluku on k ja $\vec{t}$ on jono termejä ja $|\vec{x}| = \left|\vec{t}\right| = k$, niin

$$[\mathrm{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})](\vec{t})$$

  on kaava, jolla $\mathrm{Fv}([\mathrm{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})]) = \mathrm{Fv}(\vec{t}) \cup \mathrm{Fv}(\varphi) \setminus \{\vec{x}\}$.

Toteutuvuus määritellään seuraavasti:

- (IFP): $\mathfrak{A} \vDash [\mathrm{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})](\vec{a})$ jos ja vain jos $\vec{a} \in \mathrm{ifp}(F_\varphi)$.
- (PFP): $\mathfrak{A} \vDash [\mathrm{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})](\vec{a})$ jos ja vain jos $\vec{a} \in \mathrm{pfp}(F_\varphi)$.

Seuraavaksi lähdemme määrittelemään logiikkaa LFP. Operaattorin monotonisuuden toteaminen on kuitenkin hankalaa.

Lemma 1.2.2. *Ongelma operaattorin F_φ monotonisuudesta äärellisten mallien luokassa on ratkeamaton.*

Todistus. Olkoon Φ mielivaltainen lause ja $\varphi(S, x) \equiv (S(x) \to \Phi)$. Oletetaan, että lause Φ on validi. Nyt $\varphi(S, x)$ on aina tosi ja siten operaattori F_φ monotoninen jokaisessa mallissa. Oletetaan sitten, että $\mathfrak{A} \vDash \neg\Phi$ jossakin epätyhjässä mallissa $\mathfrak{A}$. Nyt $\varphi(S, x)$ ja $\neg S(x)$ ovat ekvivalentit mallissa $\mathfrak{A}$ joten operaattori F_φ ei ole monotoninen. Täten F_φ on monotoninen jos ja vain jos lause Φ on tosi jokaisessa epätyhjässä mallissa. Tämä lauseen totuusarvo-ongelma on Trakhtenbrotin lauseen mukaan ratkeamaton. □

Jotta ongelma monotonisuudesta vältetään, rajoitamme kaavoja seuraavasti. Otetaan kaava φ, joka saattaa sisältää relaatiosymbolin R. Sanomme relaation R esiintymää kaavassa *negatiiviseksi* jos siihen vaikuttaa pariton määrä negaatioita ja *positiiviseksi* jos siihen vaikuttaa parillinen määrä negaatioita. Esimerkiksi kaavassa $\neg\forall x \forall y(\neg R(x) \wedge R(y)) \vee \exists z \neg R(z)$ relaation R ensimmäinen esiintymä, $R(x)$, on positiivinen koska se on kahden negaation vaikutusalueella. Esiintymät $R(y)$ ja $R(z)$ ovat negatiiviset. Kaavassa $R(x) \to R(y)$ relaation ensimmäinen esiintymä, $R(x)$, on negatiivinen ja toinen, $R(y)$, positiivinen, sillä kaava $R(x) \to R(y)$ on lyhennemerkintä kaavasta $\neg R(x) \vee R(y)$. Kaavassa $R(x) \leftrightarrow R(y)$ relaation R neljästä esiintymästä kaksi on positiivisia ja kaksi negatiivisia, sillä kaava $R(x) \leftrightarrow R(y)$ on lyhennemerkintä kaavasta $R(x) \to R(y) \wedge R(y) \to R(x)$. Jos jossakin kaavassa kaikki relaation R esiintymät ovat positiivisia, tai esiintymiä ei ole, sanomme kaavan olevan *positiivinen relaation R suhteen.*

Lemma 1.2.3. *Jos $\varphi(R, \vec{x})$ on positiivinen relaation R suhteen, niin F_φ on monotoninen.*

Todistus. Todistetaan samanaikaisella induktiolla positiivisille ja negatiivisille kaavoille. Negatiivisilla kaavoilla väite on, että jos $X \subseteq Y$, niin $F_\varphi(Y) \subseteq F_\varphi(X)$. Olkoot X ja Y joukot siten, että $X \subseteq Y$.

Olkoon $\varphi(R, \vec{x})$ atomikaava. Kaikki mahdolliset relaation R esiintymät ovat positiivisia. Nyt mille tahansa alkiojonolle $\vec{a} \in X$ pätee myös $\vec{a} \in Y$ ja mille tahansa vakiolle $c \in X$ pätee myös $c \in Y$, joten $F_\varphi(X) \subseteq F_\varphi(Y)$.

Olkoon kaava φ sitten muotoa $\varphi = \neg\psi$, jossa $\psi(R, \vec{x})$ on positiivinen relaation R suhteen. Nyt kaavassa $\psi(R, \vec{x})$ kaikki relaation R mahdolliset esiintymät ovat positiivisia. Jos relaatiolla R on siis esiintymiä kaavassa $\psi(R, \vec{x})$, ovat ne kaavassa $\varphi(R, \vec{x})$ negatiivisia ja kaava $\varphi(R, \vec{x})$ on siis negatiivinen relaation R suhteen. Tällöin, koska pätee $F_\psi(X) \subseteq F_\psi(Y)$, niin $F_\varphi(Y) \subseteq F_\varphi(X)$. Jos $\psi(R, \vec{x})$ on negatiivinen relaation R suhteen, on kaavan $\varphi(R, \vec{x})$ esiintymät positiivisia, sillä $\neg\neg\sigma = \sigma$. Näin ollen $F_\varphi(X) \subseteq F_\varphi(Y)$.

Olkoon kaava φ sitten muotoa $\sigma \wedge \psi$. Nyt jos kaavat $\sigma(R, \vec{x})$ ja $\psi(R, \vec{x})$ ovat positiivisia relaation R suhteen, on myös kaava $\varphi(R, \vec{x})$ positiivinen relaation R suhteen. Tällöin pätee $F_\sigma(X) \subseteq F_\sigma(Y)$ ja $F_\psi(X) \subseteq F_\psi(Y)$ ja siis myös $F_\varphi(X) \subseteq F_\varphi(Y)$, sillä $F_\sigma(X) \cup F_\psi(X) = F_\varphi(X)$ ja $F_\sigma(Y) \cup F_\psi(Y) = F_\varphi(Y)$. Jos taas kaavat $\sigma(R, \vec{x})$ ja $\psi(R, \vec{x})$ ovat negatiivisia relaation R suhteen, on myös kaava $\varphi(R, \vec{x})$ negatiivinen relaation R suhteen. Tällöin pätee $F_\sigma(Y) \subseteq F_\sigma(X)$ ja $F_\psi(Y) \subseteq F_\psi(X)$ ja siis myös $F_\varphi(Y) \subseteq F_\varphi(X)$.

Viimeiseksi, olkoon kaava φ muotoa $\exists x\psi$. Jos kaava $\psi(R, \vec{x})$ on positiivinen relaation R suhteen, kaikki relaation R esiintymät ovat positiivisia. Tällöin jos relaatiolla R ei ole esiintymiä, jolloin myöskään kaavassa $\exists x\psi$ ei ole relaatiolla R esiintymiä ja $F_\varphi(X) \subseteq F_\varphi(Y)$. Jos esiintymiä on, on kaava $\exists x\psi(R, \vec{x})$ positiivinen ja $\vec{a} \in F_\varphi(X) \to \vec{a} \in F_\varphi(Y)$. Siis $F_\varphi(X) \subseteq F_\varphi(Y)$. Jos taas $\psi(R, \vec{x})$ on negatiivinen relaation R suhteen, kaikki relaation R esiintymät ovat negatiivisia. Nyt kaikki ne $\vec{a}$, joilla $\mathfrak{A} \vDash \exists x\psi[Y/R, \{\vec{a}\}/\{\vec{x}\}]$, pätee myös $\mathfrak{A} \vDash \exists x\psi[X/R, \{\vec{a}\}/\{\vec{x}\}]$, joten $F_\sigma(Y) \subseteq F_\sigma(X)$.

Siispä F_φ on monotoninen jos $\varphi(R, \vec{x})$ on positiivinen relaation R suhteen. $\square$

Määritelmä 1.2.3. Logiikka LFP määritellään logiikan FO laajennuksena seuraavalla muodostussäännöllä:

- Jos $\varphi(R, \vec{x})$ on kaava, joka on positiivinen relaation R suhteen, missä relaation R paikkaluku on k ja $\vec{t}$ on jono termejä ja $|\vec{x}| = |\vec{t}| = k$, niin

$$[\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})](\vec{t})$$

on kaava, jolla $\mathrm{Fv}([\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})]) = \mathrm{Fv}(\vec{t}) \cup \mathrm{Fv}(\varphi) \setminus \{\vec{x}\}$.

Toteutuvuus määritellään seuraavasti:

$$\mathfrak{A} \models [\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi(R, \vec{x})](\vec{a}) \text{ jos ja vain jos } \vec{a} \in \mathrm{lfp}(F_\varphi).$$

Ongelmia jaotellaan sen mukaan, kuinka nopeasti ratkeavia ne ovat. Merkitsemme polynomisessa ajassa ratkeavien ongelmien luokkaa PTIME. Seuraavassa lauseessa todetaan logiikoiden LFP ja IFP olevan äärellisten, järjestettyjen mallien osalta yhtäläiset luokan PTIME kanssa. Lauseen todistus pohjautuu yhdistettyihin kiintopisteisiin, joiden käsittely jää tämän tutkielman ulkopuolelle [1 s.192].

Lause 1.2.4 (Immermanin ja Vardin lause)**.**

$$\mathrm{LFP}_< \equiv \mathrm{IFP}_< \equiv \textsc{Ptime}.$$

1.3 Rajoitetun muuttujamäärän logiikat

Tässä luvussa esitetään logiikka, jossa rajoitetaan kaavoissa käytettyjen muuttujien määrää. Osoitamme, että kiintopistelogiikat LFP, IFP ja PFP voidaan sisällyttää tällaiseen rajoitetun muuttujamäärän logiikkaan. Tästä on hyötyä kiintopistelogiikoiden myöhemmässä käsittelyssä.

Logiikan FO kaavan $\varphi_n(x, y)$, joka sanoo verkossa G olevan n pituisen polun solmusta x solmuun y, voi ilmaista monella tavalla. Kaava $\varphi_1(x, y)$ sanoo, että $(x, y) \in E^G$. Pidempää polkua $\exists x_1 \ldots \exists x_{n-1}((x, x_1) \in E^G \wedge \ldots \wedge (x_{n-1}, y) \in E^G)$ vastaava kaava on $\varphi_n(x, y)$, $n > 1$. Voimme myös ilmaista kaavan induktiivisesti:

$$\varphi_1(x, y) \equiv (x, y) \in E^G, \qquad \varphi_{n+1}(x, y) \equiv \exists z_n((x, z_n) \in E^G \wedge \varphi_n(z_n, y)),$$

jossa z_n on uusi muuttuja. Molemmissa ilmaisutavoissa on käytössä suuri määrä muuttujia. Voimme kuitenkin muuttaa induktiolla määritellyn jonon muotoon, jossa muuttujien määrä saadaan rajoitettua kolmeen:

$$\varphi_1(x, y) \equiv (x, y) \in E^G, \qquad \varphi_{n+1}(x, y) \equiv \exists z((x, z) \in E^G \wedge \exists x(z = x \wedge \varphi_n(x, y))).$$

Nyt muuttuja, jota ei enää tarvita, otetaan käyttöön uudestaan ja saamme kaavan muuttujamäärän rajattua.

$L_{\infty\omega}$ laajentaa logiikan FO äärettömällä konjunktiolla $\bigwedge$ ja disjunktiolla $\bigvee$.

Määritelmä 1.3.1. Niiden logiikan FO kaavojen, joissa muuttujat ovat $x_0, \ldots, x_{k-1}$, joukkoa merkitään FO^k. Samoin niiden $L_{\infty\omega}$-kaavojen, joissa muuttujat ovat $x_0, \ldots, x_{k-1}$, joukkoa merkitään $L^k_{\infty\omega}$. Lopuksi määrittelemme rajoitetun muuttujamäärän äärettömän logiikan $L^\omega_{\infty\omega}$ seuraavasti

$$L^\omega_{\infty\omega} \quad = \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k_{\infty\omega}$$

Näin ollen $L^\omega_{\infty\omega}$ koostuu niistä $L_{\infty\omega}$-kaavoista, joissa on käytössä äärellinen määrä muuttujia.

$L^\omega_{\infty\omega}$-kaavan φ *kvanttoriaste* $\mathrm{qr}(\varphi)$ määritellään induktiolla kaavan rakenteen suhteen:

1. $\mathrm{qr}(\varphi) = 0$, kun φ on atomikaava.
2. Kun $\varphi = \neg\psi$, niin $\mathrm{qr}(\varphi) = \mathrm{qr}(\psi)$.
3. Kun φ on muotoa $\sigma \wedge \psi$, niin $\mathrm{qr}(\varphi) = \max\{\mathrm{qr}(\sigma), \mathrm{qr}(\psi)\}$.
4. Kun φ on muotoa $\exists x\psi$, niin $\mathrm{qr}(\varphi) = \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Äärettömille konnektiiveille määrittelemme

$$\mathrm{qr}(\bigvee_{i \in I} \varphi_i) \quad = \quad \mathrm{qr}(\bigwedge_{i \in I} \varphi_i) \quad = \quad \sup_{i \in I} \mathrm{qr}(\varphi_i),$$

jossa merkintä $\sup_{i \in I} \mathrm{qr}(\varphi_i)$ tarkoittaa kvanttoriasteiden $\mathrm{qr}(\varphi_i)$, $i \in I$ pienintä ylärajaa.

Ordinaaliluku tai lyhyemmin *ordinaali* on joukko α, jonka jokaiselle alkiolle $\beta \in \alpha$ pätee $\beta \subset \alpha$ ja alkiorelaatio $\in$ on joukon α hyvinjärjestys. Ordinaalien ja luonnollisten lukujen erona on, että ordinaaleissa on seuraajalukujen lisäksi niin sanottuja rajaordinaaleja. Ensimmäinen rajaordinaali on luonnollisten lukujen mahtavuutta vastaava ω, jonka alkioita ovat kaikki luonnolliset luvut. Tälle on jälleen seuraajaordinaaleja, kunnes saavutetaan seuraava rajaordinaali $\omega \cdot 2$. Äärettömän kaavan kvanttoriaste voi olla rajaordinaali. Esimerkiksi jos kaavat φ_n ovat sellaisia logiikan FO kaavoja joille $\mathrm{qr}(\varphi_n) = n$, niin $\mathrm{qr}(\bigvee_{n<\omega} \varphi_n) = \omega$ ja $\mathrm{qr}(\exists x \bigvee_{n<\omega} \varphi_n) = \omega + 1$.

Malliluokka on kokoelma äärellisiä malleja. Merkinnällä $L \leq L^*$ tarkoitetaan, että kaikki malliluokat jotka voidaan määritellä logiikassa L, voidaan määritellä myös logiikassa L^*. Käytämme merkintää $\vec{x} = \vec{y}$ lyhenteenä kaavalle $((x_0 = y_0) \wedge \ldots \wedge (x_{k-1} = y_{k-1}))$.

Oletetaan, että logiikan FO kaava $\varphi(R, \vec{x})$ on joko monotoninen relaatiossa R, tai kiintopiste on inflatorinen. Oletetaan, että kaava φ muuttujien $\vec{x} = (x_0, \ldots, x_{k-1})$ lisäksi käyttää muuttujia $z_0, \ldots, z_l$. Otamme käyttöön lisämuuttujat $\vec{y} = (y_0, \ldots, y_{k-1})$ ja määrittelemme *epätoden* kaavan $\varphi^0(\vec{x}) = \neg(x_0 = x_0)$, sekä induktiivisesti $\varphi^{n+1}(\vec{x})$ sellaisena kaavana $\varphi(R, \vec{x})$, missä jokainen relaation esiintymä $R(u_0, \ldots, u_{k-1})$, missä $u_0, \ldots, u_{k-1}$ ovat muuttujia joukoista $\vec{x}$ ja $\vec{z}$, korvataan kaavalla

$$\exists\vec{y}((\vec{y} = \vec{u}) \wedge (\exists\vec{x}((\vec{x} = \vec{y}) \wedge \varphi^n(\vec{x})))).$$

Huomaamme, että saadussa kaavassa joukon $\vec{y}$ muuttujat eivät voi esiintyä missään muotoa $R(\cdot)$ olevassa kaavan osassa. Nyt koska relaation R esiintymät kaavassa φ^{n+1} on ilmaistu käyttäen kaavaa φ^n, niin $\bigvee_n \varphi^n(\vec{x})$ määrittää kiintopisteen. Koska enimmillään kaksinkertaistimme kaavan φ muuttujien määrän, niin jos $\varphi \in \mathrm{FO}^m$, niin molemmat $\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi$ ja $\mathrm{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi$ ovat ilmaistavissa logiikassa $L^{2m}_{\infty\omega}$. Koska kiintopistettä määritettäessä muuttujien määrä korkeintaan kaksinkertaistuu, jokaiselle logiikan LFP tai IFP kaavalle on olemassa ekvivalentti logiikan $L^{\omega}_{\infty\omega}$ kaava. Nyt siis LFP $\leq L^{\omega}_{\infty\omega}$ ja IFP $\leq L^{\omega}_{\infty\omega}$.

Lause 1.3.1. PFP $\leq L^{\omega}_{\infty\omega}$.

Todistus. Logiikalle PFP muutamme kaavan rakennetta hieman. Sen sijaan, että ottaisimme disjunktion kaikista kaavoista φ^n, määrittelemme merkinnän kp_n lauseelle $\forall \vec{x}(\varphi^n(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^{n+1}(\vec{x}))$ osoittamaan, että kiintopiste on saavutettu. Nyt $[\mathrm{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{y})$ voidaan ilmaista kaavalla

$$\psi(\vec{y}) \equiv \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (kp_n \wedge \varphi^n(\vec{x})).$$

Jos ei ole olemassa lukua n jolla kp_n pätee, niin osittainen kiintopiste on tyhjä joukko ja kaava $\psi(\vec{y})$ on ekvivalentti *epätoden* kaavan kanssa. Muussa tapauksessa, olkoon n_0 se pienin luonnollinen luku n jolla kp_n on tosi. Nyt, kaikilla $m \geq n_0$ pätee $\forall \vec{x}(\varphi^{n_0}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^m(\vec{x}))$ ja siis $\psi(\vec{y})$ määrittää osittaisen kiintopisteen. Täten kaava ψ määrittää kiintopisteen $\mathrm{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi$ ja se enimmillään kaksinkertaistaa muuttujien määrän. Käyttäen tätä määritelmää induktiivisesti näemme, että PFP $\leq L^{\omega}_{\infty\omega}$. □

1.4 Helmipelit

Tässä luvussa esittelemme helmipelin, joka on eräs Ehrenfeucht-Fraïssé-pelin muunnelma. Tässä pelissä pelaajilla, spoilerilla ja duplikaattorilla, on käytössään joukko helmipareja. Jokaisella vuorolla helmi joko asetetaan mallin jollekin alkiolle, tai siirretään alkiolta toiselle. Helmipelin voittaja voidaan määritellä siitä huolimatta, ettei pelin tarvitse päättyä tietyn siirtomäärän jälkeen.

Määritelmä 1.4.1. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ saman relationaalisen aakkoston σ malleja ja jonot $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{A}$ ja $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathfrak{B}$. Nyt $(\vec{a}, \vec{b})$ määrittää *osittaisen isomorfismin* mallista $\mathfrak{A}$ malliin $\mathfrak{B}$ jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- Jokaiselle lukuparille $i, j \leq n$ pätee

$$a_i = a_j \text{ jos ja vain jos } b_i = b_j.$$

- Jokaiselle aakkoston σ vakiosymbolille c ja jokaiselle luvulle $i \leq n$ pätee

$$a_i = c^{\mathfrak{A}} \text{ jos ja vain jos } b_i = c^{\mathfrak{B}}.$$

- Jokaiselle aakkoston σ k-paikkaiselle relaatiosymbolille R ja jokaiselle jonolle (ei välttämättä toisistaan eroavia) numeroita $(i_1, \ldots, i_k)$, $i_m \leq n$ kaikilla m, pätee

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ jos ja vain jos } (b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Määritelmä 1.4.2. Olkoot $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathrm{STRUCT}[\sigma]$. Spoileri ja duplikaattori pelaavat k-helmipelin malleilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ seuraavalla tavalla. Pelaajilla on joukko helmipareja $(p^1_{\mathfrak{A}}, p^1_{\mathfrak{B}}), \ldots, (p^k_{\mathfrak{A}}, p^k_{\mathfrak{B}})$. Siirrot tehdään seuraavasti:

- Spoileri valitsee mallin, $\mathfrak{A}$ tai $\mathfrak{B}$, ja numeron $1 \leq i \leq k$.

Oletamme spoilerin valitsevan mallin $\mathfrak{A}$. Tapaus, jossa spoileri valitsee mallin $\mathfrak{B}$, on täysin symmetrinen.

- Spoileri sijoittaa helmen $p^i_{\mathfrak{A}}$ jollekin mallin $\mathfrak{A}$ alkiolle. Jos $p^i_{\mathfrak{A}}$ on jo sijoitettuna malliin $\mathfrak{A}$, voi spoileri jättää sen paikoilleen tai siirtää sen mallin $\mathfrak{A}$ toiselle alkiolle. Jos helmeä $p^i_{\mathfrak{A}}$ ei ole vielä käytetty, ottaa spoileri sen käyttöön ja sijoittaa mallin $\mathfrak{A}$ alkiolle.
- Duplikaattori vastaa tähän sijoittamalla helmen $p^i_{\mathfrak{B}}$ jollekin mallin $\mathfrak{B}$ alkiolle.

Käytämme n:n kierroksen pituisesta helmipelistä merkintää $\mathrm{PG}^n_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ja äärettömän monen kierroksen helmipelistä merkintää $\mathrm{PG}^\infty_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Jokaisen kierroksen jälkeen malleille $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ sijoitetut helmet määrittävät relaation $F \subseteq A \times B$: pari (a, b) kuuluu relaatioon F jos ja vain jos helmi $p^i_{\mathfrak{A}}$, jollakin $i \leq k$, on sijoitettu alkiolle $a \in A$ ja helmi $p^i_{\mathfrak{B}}$ on sijoitettu alkiolle $b \in B$.

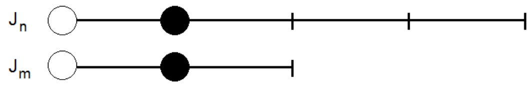
Duplikaattorilla on voittostrategia pelissä $\mathrm{PG}^n_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ jos hän pystyy varmistamaan, että jokaisen kierroksen, $j \leq n$, jälkeen relaatio F määrittää osittaisen isomorfismin. Tällöin kirjoitamme $\mathfrak{A} \simeq^{k,n}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$.

Duplikaattorilla on voittostrategia pelissä $\mathrm{PG}^\infty_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ jos hän pystyy varmistamaan, että jokaisen kierroksen jälkeen relaatio F määrittää osittaisen isomorfismin. Siispä mille tahansa spoilerin siirtojonolle on löydyttävä vastaava duplikaattorin siirtojono niin, että kun helmet on sijoitettu mallien alkioille, relaatio F määrittää osittaisen isomorfismin ja mihin tahansa spoilerin helmien asetteluun mallien alkioilla on mahdollista vastata duplikaattorin helmien asettelulla, joka säilyttää isomorfismin. Tällöin kirjoitamme $\mathfrak{A} \simeq^k_{\infty\omega} \mathfrak{B}$.

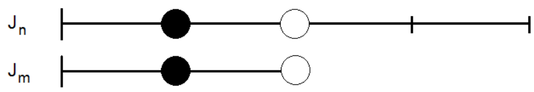
Esimerkki 1.4.1. Olkoot J_n ja J_m kaksi mielivaltaista lineaarijärjestystä, joiden pituudet ovat (vastaavasti) n ja m, $n \neq m$. Voimme osoittaa, että spoileri voittaa 2-helmipelin $\mathrm{PG}^\infty_2(J_n, J_m)$.

Spoileri valitsee pidemmän lineaarijärjestyksen ja asettaa helmen ensimmäisestä helmiparista tämän järjestyksen ensimmäiselle alkiolle. Jotta spoileri ei voita peliä, täytyy duplikaattorin tehdä samoin ja asettaa vastaava helmi lyhyemmän lineaarijärjestyksen ensimmäiselle alkiolle. Seuraavaksi spoileri asettaa toisen helmiparin helmen pidemmän järjestyksen seuraavalle alkiolle.

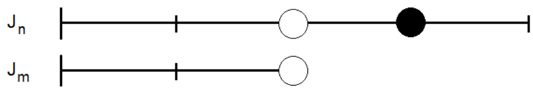
Duplikaattorin on jälleen tehtävä samoin (duplikaattorin asettaessa toisen helmen jollekin muulle alkiolle peli etenee vastaavasti, mutta spoileri voittaa nopeammin).



Nyt spoileri siirtää ensimmäisen helmiparin helmen pidemmässä lineaarijärjestyksessä kolmannelle alkiolle. Duplikaattorin täytyy tehdä samoin, jotta järjestysrelaatio säilyy. Näin jatkuu spoilerin siirtäen aina järjestyksessä aiempana olevan helmen kaksi alkiota eteenpäin ja duplikaattorin tehden samoin.



Lopulta, kun duplikaattori on asettanut helmet lyhyemmän lineaarijärjestyksen kahteen viimeiseen alkioon, hän häviää pelin seuraavalla kierroksella.



Kun spoileri siirtää helmen kaksi alkiota eteenpäin, duplikaattorilla ei ole vastaavaa paikkaa helmelle.

Otetaan kaksi mallia $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{STRUCT}[\sigma]$, jotka ovat ekvivalentit niiden logiikan $L^k_{\infty\omega}$ kaavojen suhteen, joiden kvanttoriaste on korkeintaan n. Nyt jokaisen logiikassa $L^k_{\infty\omega}$ määriteltävän kaavan, jonka kvanttoriaste on korkeintaan n, totuusarvo mallissa $\mathfrak{A}$ on sama, kuin mallissa $\mathfrak{B}$. Merkitsemme tällöin $\mathfrak{A} \equiv^{k,n}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$.

Vastaavasti, jos kaksi mallia $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{STRUCT}[\sigma]$ ovat ekvivalentit kaikkien logiikan $L^k_{\infty\omega}$ lauseiden suhteen, merkitsemme tällöin $\mathfrak{A} \equiv^k_{\infty\omega} \mathfrak{B}$. Jos kaksi mallia $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{STRUCT}[\sigma]$ ovat ekvivalentit kaikkien logiikan FO^k lauseiden suhteen, merkitsemme tällöin $\mathfrak{A} \equiv^k \mathfrak{B}$.

Lause 1.4.1. (a) $\mathfrak{A} \equiv^{k,n}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$ *jos ja vain jos* $\mathfrak{A} \simeq^{k,n}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$.

(b) $\mathfrak{A} \equiv^{k}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$ *jos ja vain jos* $\mathfrak{A} \simeq^{k}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$.

Lauseen todistusta varten tutkimme kahden mallin välistä ekvivalenssia lisää ja määritämme tietyn osittaisten isomorfismien edestakais-ominaisuuden todistusta varten.

Esimerkissä 1.4.1 saatu tulos on edellisen lauseen nojalla luonnollinen, sillä kaikki äärellisiä lineaarijärjestyksiä koskevat kyselyt ovat ilmaistavissa logiikassa $L^2_{\infty\omega}$. Duplikaattorin ei siis tulisi voittaa 2-helmipeliä $\mathrm{PG}^{\infty}_2(J_n, J_m)$ paitsi jos $n = m$.

Esimerkki 1.4.2. Otetaan kaksi mielivaltaista tyhjän aakkoston mallia (puhtaita joukkoja), A ja B ja luku k. Jos $|A|, |B| \geq k$, niin duplikaattori voittaa k-helmipelin $\mathrm{PG}_k^\infty(A, B)$.

Duplikaattorin täytyy säilyttää sellainen asetelma, että millä tahansa luvuilla i ja j, helmet p_A^i ja p_A^j ovat asetettu samalle alkiolle jos ja vain jos helmet p_B^i ja p_B^j ovat asetettu samalle alkiolle. Tämä on helppo toteuttaa, sillä kummassakin mallissa on vähintään k alkiota ja helmet mahtuvat tarvittaessa jokainen omalle alkiollensa. Duplikaattori voittaa siis päättymättömän pelin.

Eräs mielenkiintoinen ominaisuus äärellisissä malleissa on universumin mahtavuuden parillisuus. Määritämme tämän selvittämiseen kyselyn EVEN seuraavasti:

$$\mathrm{EVEN}(\mathfrak{A}) \text{ on tosi} \quad \text{jos ja vain jos} \quad |A| \equiv 0 \pmod 2.$$

Esimerkistä 1.4.2 saamme seuraavaksi esitellyn tuloksen.

Seuraus 1.4.2. Kysely EVEN ei ole määriteltävissä logiikassa $L_{\infty\omega}^\omega$.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että kysely EVEN on ilmaistavissa logiikan $L_{\infty\omega}^\omega$ lauseella Φ. Olkoon k sellainen luku, että $\Phi \in L_{\infty\omega}^k$. Valitaan malli A, jonka mahtavuus on k, ja malli B, jonka mahtavuus on $k+1$. Esimerkin 1.4.2 perusteella $A \simeq_{\infty\omega}^k B$ ja edelleen lauseen 1.4.1 perusteella $A \equiv_{\infty\omega}^k B$. Nyt $A \models \Phi$ ja $B \models \Phi$, joka on ristiriidassa oletuksen kanssa, että lause Φ määrittää kyselyn EVEN, koska vain toinen mallien mahtavuuksista, k ja $k+1$, on parillinen. $\square$

Olkoon φ ääretön disjunktio $\varphi \equiv \bigvee_{i \in I} \varphi_i$, jossa kaikki kaavat φ_i ovat logiikan FO kaavoja, ja oletetaan että $\mathrm{qr}(\varphi) \leq n$. Tämä tarkoittaa, että $\mathrm{qr}(\varphi_i) \leq n$ kaikilla $i \in I$. Kun aakkosto on kiinnitetty ja äärellinen, on olemassa vain äärellinen määrä ei-ekvivalentteja logiikan FO kaavoja, joiden kvanttoriaste on n. Siispä on olemassa sellainen äärellinen osajoukko $I_0 \subset I$, että $\varphi \equiv \bigvee_{i \in I_0} \varphi_i$, eli siis ekvivalentti jonkin logiikan FO kaavan kanssa. Käyttäen tätä tulosta induktiivisesti logiikan $L_{\infty\omega}^\omega$ kaavojen rakenteelle, voimme todeta että jokaisella luvulla k jokainen logiikan $L_{\infty\omega}^k$ kvanttoriasteen n kaava on ekvivalentti logiikan FO^k saman kvanttoriasteen kaavan kanssa. Siispä jos mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat ekvivalentit kaikkien logiikan FO^k lauseiden, joiden kvanttoriaste on enintään n, totuusarvojen suhteen, niin $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega}^{k,n} \mathfrak{B}$.

Lemma 1.4.3. *Jokaiselle malliparille* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

1. $\mathfrak{A} \equiv^k \mathfrak{B}$.
2. $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega}^k \mathfrak{B}$.

Todistus. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ sellaiset mallit, jotka ovat ekvivalentit kaikkien logiikan FO^k kaavojen totuusarvojen suhteen. Siispä jokaisella luvulla n pätee $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega}^{k,n} \mathfrak{B}$. Koska mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat äärelliset, on äärellinen määrä kuvauksia joukolta A^k joukolle B^k. Täten jokainen ääretön strategia k-helmipelissä $\mathrm{PG}_k^\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ on täydellisesti määritelty äärellisen strategian perusteella, jossa luku n on riittävän suuri, eli sellainen jolla kaikki mahdolliset pelin tilanteet tulevat esiin. Täten, tarpeeksi suurella luvulla n (riippuu malleista $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$), k-helmipelin $\mathrm{PG}_k^n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ voittaminen johtaa k-helmipelin $\mathrm{PG}_k^\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ voittamiseen. $\square$

Seuraavaksi käsittelemme kaavoja, joissa on vapaita muuttujia. Jos duplikaattori voittaa k-helmipelin $\mathrm{PG}_k^n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ asetelmasta, jossa ensimmäiset m helmeä on asetettu jonojen $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, jossa $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = m \leq k$, alkioille, niin merkitsemme $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{\infty\omega}^{k,n} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ vastaavasti. Samalla tavoin merkitsemme $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{\infty\omega}^{k} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ koskien peliä $\mathrm{PG}_k^\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Seuraus 1.4.4. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ kaksi mallia ja $\vec{a} \in A^m, \vec{b} \in B^m, m \leq k$. Tällöin

(a) $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{\infty\omega}^{k,n} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}]$ kaikilla $\varphi(\vec{x}) \in L_{\infty\omega}^k$ joilla $qr(\varphi) \leq n$.

(b) $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{\infty\omega}^{k} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}]$ kaikilla $\varphi(\vec{x}) \in L_{\infty\omega}^k$.

Esittelemme seuraavaksi ominaisuuden, jonka avulla saamme todistettua lauseen 1.4.1. Tarvitsemme aluksi muutaman määritelmän.

Olkoon $f : A \to B$ osittainen kuvaus. Sen lähtöjoukkoa merkitään $\mathrm{dom}(f)$ ja maalijoukkoa $\mathrm{rg}(f)$. Osittainen kuvaus f on siis määritelty joukossa $\mathrm{dom}(f) \subseteq A$ ja $f(\mathrm{dom}(f)) = \mathrm{rg}(f) \subseteq B$.

Merkitsemme symbolein α ja β lukuja, jotka voivat olla äärellisiä tai äärettömiä ordinaaleja. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ kaksi mallia ja β ordinaali. Olkoon I_β joukko osittaisia isomorfismeja joukkojen $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä ja olkoon $\mathfrak{I}_\alpha = \{I_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Sanomme, että joukolla $\mathfrak{I}_\alpha$ on *k-edestakais-ominaisuus* jos seuraavat ehdot täyttyvät:

- Jokainen joukko I_β on epätyhjä.
- $I_{\beta'} \subseteq I_\beta$, kun $\beta < \beta' < \alpha$.
- Jokainen joukko I_β on alaspäin suljettu, eli jos $g \in I_\beta$ ja $f \subseteq g$ ($\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ ja $g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$), niin $f \in I_\beta$.
- Jos $f \in I_{\beta+1}$ ja $|\mathrm{dom}(f)| < k$, niin
  eteen: jokaiselle alkiolle $a \in A$ on olemassa sellainen $g \in I_\beta$, että $f \subseteq g$ ja $a \in \mathrm{dom}(g)$;
  taakse: jokaiselle alkiolle $b \in B$ on olemassa sellainen $g \in I_\beta$, että $f \subseteq g$ ja $b \in \mathrm{rg}(g)$.

Kuten aiemmin huomasimme, ekvivalenssista $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega}^{k,n} \mathfrak{B}$ seuraa ekvivalenssi $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega}^{k} \mathfrak{B}$ millä tahansa malliparilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ja tarpeeksi suurella luvulla n. Jos meillä siis on tarpeeksi pitkä äärellinen jono $\mathfrak{I}_\alpha$, jotkin joukot I_β toistuvat, sillä on vain äärellinen määrä osittaisia isomorfismeja mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä. Siispä tällainen jono voidaan laajentaa mielivaltaisen ordinaalin pituiseksi.

Lemma 1.4.5. *Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ kaksi mallia. Mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat ekvivalentit kaikkien logiikan $L^k_{\infty\omega}$ lauseiden suhteen, joiden kvanttoriaste on pienempi kuin α jos ja vain jos on olemassa joukko $\mathfrak{I}_\alpha = \{I_\beta \mid \beta < \alpha\}$ osittaisia isomorfismeja mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä, joilla on k-edestakais-ominaisuus.*

Todistus. Oletetaan, että mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat ekvivalentit kaikkien logiikan $L^k_{\infty\omega}$ lauseiden suhteen, joiden kvanttoriaste on pienempi kuin α. Olkoon $\beta < \alpha$. Määritellään I_β siten, että se on niiden osittaisten isomorfismien f joukko, joille pätee $|\mathrm{dom}(f)| \leq k$ ja jokaiselle kaavalle $\varphi \in L^k_{\infty\omega}$, jolla $\mathrm{qr}(\varphi) \leq \beta$ ja jokaiselle jonolle $\vec{a}$ joukossa $\mathrm{dom}(f)$ pätee

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(\vec{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \vDash \varphi(f(\vec{a})).$$

Osoitamme, että joukolla $\mathfrak{I}_\alpha = \{I_\beta \mid \beta < \alpha\}$ on k-edestakais-ominaisuus.

Koska mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat ekvivalentit kaikkien logiikan $L^k_{\infty\omega}$ lauseiden suhteen, joiden kvanttoriaste on pienempi kuin α, niin jokainen joukko I_β on epätyhjä, sisältäen ainakin tyhjän osittaisen isomorfismin. Ehto $I_{\beta'} \subseteq I_\beta$, kun $\beta < \beta'$ seuraa suoraan määritelmästä, kuten myös alaspäin sulkeutuvuus. Todistettavaksi jää edestakais-ominaisuus.

Tehdään vastaoletus, että löytyy sellainen $f \in I_{\beta+1}$, $\beta + 1 < \alpha$, jolle pätee $|\mathrm{dom}(f)| = m < k$ ja joka ei toteuta ehtoa *eteen.* Nyt siis on olemassa sellainen alkio $a \in A$, että ei ole olemassa osittaista isomorfismia $g \in I_\beta$, joka laajentaa osittaisen isomorfismin f alkiolla $a \in \mathrm{dom}(g)$. Näin ollen, joukon I_β määritelmän mukaan, jokaiselle alkiolle $b \in B$ voimme löytää sellaisen kaavan $\varphi_b(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, jonka kvanttoriaste on enintään β ja että jollekin alkiojoukolle $a_1, \ldots, a_m \in \mathrm{dom}(f)$ pätee $\mathfrak{A} \vDash \varphi_b(a, a_1, \ldots, a_m)$ ja $\mathfrak{B} \vDash \neg\varphi_b(b, f(a_1), \ldots, f(a_m))$.

Olkoon nyt

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) \quad \equiv \quad \exists x_0 \bigwedge_{b \in B} \varphi_b(x_0, x_1, \ldots, x_m).$$

Selvästi, $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_m)$, mutta $\mathfrak{B} \vDash \neg\varphi(f(a_1), \ldots, f(a_m))$, joka on ristiriidassa oletuksen $f \in I_{\beta+1}$ kanssa koska $\mathrm{qr}(\varphi) \leq \beta + 1$. Tapaus, jossa osittainen isomorfismi f ei toteuta ehtoa *taakse* saadaan vastaavasti.

Oletetaan sitten, että on olemassa joukko $\mathfrak{I}_\alpha$, jolla on k-edestakais-ominaisuus. Osoitamme induktiolla ordinaalin β suhteen, että kaikilla $\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in L^k_{\infty\omega}$, $m \leq k$, joiden $\mathrm{qr}(\varphi) \leq \beta < \alpha$,

$$\begin{aligned} &\text{kaikilla } f \in I_\beta,\ a_1, \ldots, a_m \in \mathrm{dom}(f): \\ &\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_m) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \vDash \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_m)). \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Tämän todistaminen riittää, sillä kaavasta (1.4.1) seuraa, että mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat ekvivalentit kaikkien logiikan $L^k_{\infty\omega}$ lauseiden suhteen, joiden kvanttoriaste on pienempi kuin α.

Perusaskel: $\beta = 0$ pätee, sillä tällöin φ on Boolen kombinaatio atomikaavoja. Koska f on osittainen isomorfismi, $\mathfrak{A} \vDash a_i \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash f(a_i)$, kaikilla $a_1, \ldots, a_m \in \mathrm{dom}(f)$, joten kaava (1.4.1) pätee.

Induktioaskel: Jos $\varphi \equiv \bigvee_i \varphi_i$, missä $\mathrm{qr}(\varphi) > \mathrm{qr}(\varphi_i)$ kaikilla i, niin β on rajaordinaali. Nyt käyttäen oletusta jokaiseen φ_i, huomaamme, että kaava (1.4.1) pätee lauseelle φ.

Jää tutkittavaksi tapaus $\varphi(x_1, \dots, x_m) \equiv \exists x_0 \psi(x_0, \dots, x_m)$, jossa $\mathrm{qr}(\varphi) = \beta + 1$ ja $\mathrm{qr}(\psi) = \beta$ jollakin ordinaalilla β, jolla $\beta + 1 < \alpha$. Yleisyyttä rajoittamatta voimme olettaa, että x_0 ei kuulu muuttujajoukkoon $\{x_1, \dots, x_m\}$ ja siis $m < k$.

Olkoon $f \in I_{\beta+1}$ ja $a_1, \dots, a_m \in \mathrm{dom}(f)$. Oletetaan, että $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$, siis että jollakin alkiolla $a_0 \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi(a_0, a_1, \dots, a_m)$. Koska joukko $I_{\beta+1}$ on alaspäin suljettu, voimme olettaa jatkossa että $\mathrm{dom}(f) = \{a_1, \dots, a_m\}$. Koska $|\mathrm{dom}(f)| = m < k$, on k-edestakais-ominaisuuden perusteella olemassa $g \in I_\beta$ joka on osittaisen isomorfismin f sellainen laajennus, että $a_0 \in \mathrm{dom}(g)$. Käyttämällä kaavaa (1.4.1) induktiivisesti lauseeseen ψ, saamme $\mathfrak{B} \models \psi(g(a_0), g(a_1), \dots, g(a_m))$. Koska f ja g ovat ekvivalentit alkioiden $a_1, \dots, a_m$ suhteen, $\mathfrak{B} \models \psi(g(a_0), f(a_1), \dots, f(a_m))$ ja siis $\mathfrak{B} \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_m))$.

Suunta, jossa toteutuvuudesta $\mathfrak{B} \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_m))$ seuraa $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$, on täysin vastaava. Tämä päättää kaavan (1.4.1), lemman 1.4.5, sekä lauseen 1.4.1 todistuksen. $\square$

2 Asymptoottinen todennäköisyys ja laajennusaksioomat

Asymptootti on se suora, jota käyrä lähestyy jatkuessaan äärettömyyksiin. Sana asymptootti tulee kreikankielen sanasta *asymptotos*. Asymptotos tarkoittaa ”ei yhteen kaatumista” (Oxford English Dictionary, second edition, 1989). Termin esitteli Apollonius Pergalainen kartioleikkauksiin liittyvien töidensä yhteydessä. Verraten sanan nykyiseen merkitykseen, hän kuitenkin tarkoitti sillä mitä tahansa suoraa, joka ei leikkaa annettua käyrää (D.E. Smith, History of Mathematics, vol 2 Dover (1958) p. 318).

Käsittelemme tässä luvussa suuntaamattomien verkkojen ominaisuuksien asymptoottista todennäköisyyttä. Samoin, kuin käyrä joka jatkuessaan äärettömyyksiin lähestyy raja-arvoa, asymptoottia, saadaan joillekin verkon ominaisuuksille asymptoottinen todennäköisyys kun solmujen määrää kasvatetaan rajatta.

2.1 Asymptoottinen todennäköisyys

Kun tarkastelemme äärellisten mallien ominaisuuksien asymptoottista todennäköisyyttä, mallin $\mathfrak{A}$, jossa $|A| = n$, universumi on joukko $\{0, \ldots, n-1\}$. Aloitetaan käsittelemällä suuntaamattomia verkkoja. Merkitsemme n:n solmun verkkojen joukkoa $\mathrm{G}\textsc{r}_n = \{G = (V, E^G) \mid |V| = n\}$. Suuntaamattomien verkkojen määrä solmuilla $\{0, \ldots, n-1\}$ on

$$|\mathrm{G}\textsc{r}_n| \quad = \quad 2^{\binom{n}{2}}.$$

Olkoon $\mathcal{P}$ verkkojen ominaisuus. Todennäköisyys sille, että satunnaisesti valitulla solmujen $\{0, \ldots, n-1\}$ verkolla on ominaisuus $\mathcal{P}$, $\mu_n(\mathcal{P})$, määritellään seuraavasti:

$$\mu_n(\mathcal{P}) \quad = \quad \frac{|\{G \in \mathrm{G}\textsc{r}_n \mid \text{verkolla } G \text{ on ominaisuus } \mathcal{P}\}|}{|\mathrm{G}\textsc{r}_n|}.$$

Satunnaisesti valittu tarkoittaa tässä sitä, että verkoista otetaan tasainen jakauma.

Määrittelemme ominaisuuden $\mathcal{P}$ *asymptoottisen todennäköisyyden*

$$\mu(\mathcal{P}) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \mu_n(\mathcal{P}), \tag{2.1.1}$$

jos raja-arvo on olemassa. Jos ominaisuus $\mathcal{P}$ on määritelty jonkin logiikan lauseella Φ, niin käytämme merkintöjä $\mu_n(\Phi)$ ja $\mu(\Phi)$.

Voimme yleistää tarkastelun mielivaltaisiin σ-malleihin. Tällöin merkitsemme universumin $\{0, \ldots, n-1\}$ erilaisten σ-mallien määrää s^n_σ, ja universumin $\{0, \ldots, n-1\}$ erilaisten σ-mallien, joilla ominaisuus $\mathcal{P}$, määrää $s^n_\sigma(\mathcal{P})$. Osamäärällä saamme todennäköisyyden

$$\mu_n(\mathcal{P}) \quad = \quad \frac{s^n_\sigma(\mathcal{P})}{s^n_\sigma}.$$

Asymptoottisen todennäköisyyden saamme taas kaavalla (2.1.1).

Esimerkki 2.1.1. Olkoon $\mathcal{P}$ ominaisuus ”verkossa ei ole eristettyjä solmuja”. Väitämme, että $\mu(\mathcal{P}) = 1$. Yhtäläisesti, osoitamme että $\mu(\bar{\mathcal{P}}) = 0$, missä $\bar{\mathcal{P}}$ on: ”on olemassa eristetty solmu”. Laskeaksemme todennäköisyyden $\mu_n(\bar{\mathcal{P}})$, huomaamme olevan n tapaa valita eristetty solmu ja $2^{\binom{n-1}{2}}$ tapaa asettaa särmät jäljellä oleviin solmuihin. Verkko, jossa on enemmän kuin yksi eristetty solmu, toteuttaa useamman kuin yhden tällaisen tilanteen. Nyt

$$\mu_n(\bar{\mathcal{P}}) \quad \leq \quad \frac{n \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{n \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}}{2^{(n-1)+\binom{n-1}{2}}} = \frac{n \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}}{2^{n-1} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

ja siis asymptoottinen todennäköisyys $\mu(\bar{\mathcal{P}}) = 0$.

Esimerkki 2.1.2. Olkoon ominaisuus $\mathcal{P}$ verkon yhtenäisyys. Osoitamme jälleen, että $\mu(\bar{\mathcal{P}}) = 0$ ja siten verkon yhtenäisyyden asymptoottinen todennäköisyys on 1. Laskeaksemme asymptoottisen todennäköisyyden $\mu(\bar{\mathcal{P}})$, täytyy tietää niiden verkkojen määrä, joissa on ainakin kaksi yhtenäistä osaa. Olettaen yhden osan kooksi k,

- on $\binom{n}{k}$ tapaa valita osajoukko $X \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$,
- on $2^{\binom{k}{2}}$ tapaa asettaa särmät osajoukkoon X ja
- on $2^{\binom{n-k}{2}}$ tapaa asettaa särmät osajoukon X komplementtijoukkoon.

Nyt

$$\begin{aligned}\mu_n(\bar{\mathcal{P}}) \quad \leq \quad & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2}} \cdot 2^{\binom{n-k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}-\binom{n}{2}} \\ = & \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot 2^{k^2-kn} \to 0, \text{ kun } n \text{ kasvaa rajatta.}\end{aligned}$$

Eksponenttien yhdistäminen ja sievennys saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} - \binom{n}{2} &= \frac{k!}{2(k-2)!} + \frac{(n-k)!}{2(n-k-2)!} - \frac{n!}{2(n-2)!} \\ &= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = k^2 - kn\end{aligned}$$

Verkon yhtenäisyyden asymptoottinen todennäköisyys on siis 1.

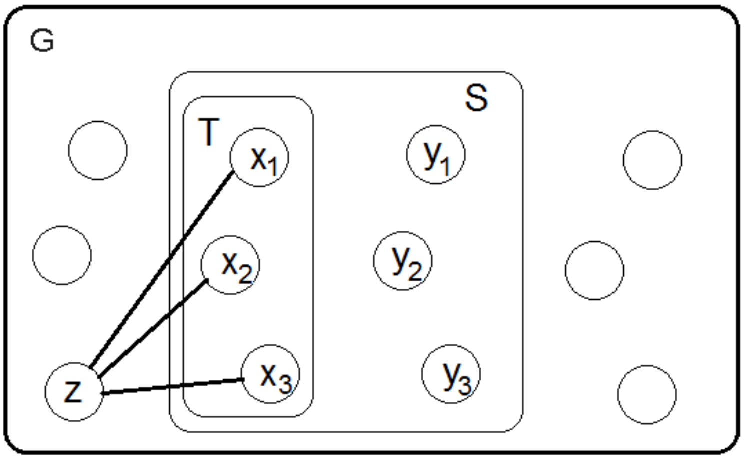
Esimerkki 2.1.3. Tarkastellaan kyselyä EVEN. Nyt

$$\mu_n(\text{EVEN}) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \\ 0, & \text{kun } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Näin ollen asymptoottista todennäköisyyttä $\mu(\text{EVEN})$ ei ole olemassa.

2.2 Laajennusaksioomat

Olkoon $G = (V, E^G)$ suuntaamaton verkko, $S \subseteq G$ äärellinen osajoukko, jonka mahtavuus on n ja olkoon osajoukon $T \subseteq S$ mahtavuus m. Tällöin laajennusaksiooma $\text{EA}_{n,m}$ sanoo että on olemassa solmu $z \notin S$ siten, että $(x, z) \in E^G$ kaikilla alkioilla $x \in T$ ja (y, z) ei ole särmä yhdelläkään alkiolla $y \in S - T$.



Laajennusaksioomat voidaan ilmaista ensimmäisen kertaluvun logiikassa. Laajennusaksiooma $\text{EA}_{n,m}$ on seuraava lause:

$$\forall x_1 \dots x_n \left(\begin{array}{l} (\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j) \rightarrow \\ \qquad\qquad \exists z (\bigwedge_{i=1}^{n} z \neq x_i \wedge \bigwedge_{i \leq m} (z, x_i) \in E^G \wedge \bigwedge_{i > m} \neg (z, x_i) \in E^G) \end{array} \right)$$

Ei ole mielekästä tutkia laajennusaksioomaa $\text{EA}_{n,m}$ verkoissa joissa on vähemmän kuin n solmua ja laajennusaksiooma siis triviaalisti tosi. Oletamme jatkossa yleisesti, että verkoissa on vähintään n solmua.

Tulemme käyttämään laajennusaksioomien erikoistapauksia kun $n = 2k$ ja $m = k$. Merkitsemme tällaista laajennusaksioomaa EA_k. Tällöin jos osajoukoilla $X, Y \subseteq A$ $X \cap Y = \emptyset$ ja $|X| = |Y| = k$, niin on olemassa sellainen solmu z, että on särmä (x, z) kaikilla $x \in X$, mutta ei ole särmää (y, z) yhdellekään $y \in Y$.

Lemma 2.2.1. $\mu(\text{EA}_k) = 1$ *kaikilla arvoilla* k.

Todistus. Osoitamme vastaavasti, että $\mu(\neg \mathrm{EA}_k) = 0$. Olkoon $n > 2k$. Jotta laajennusaksiooma EA_k ei toteutuisi, täytyy olla olemassa erilliset osajoukot X ja Y, joiden mahtavuus on k siten, että ei ole olemassa solmua $z \notin X \cup Y$, jolle pätee $(x, z) \in E^G$ kaikille $x \in X$ ja $\neg(y, z) \in E^G$ kaikille $y \in Y$. Laskemme seuraavaksi todennäköisyyden $\mu_n(\neg \mathrm{EA}_k)$, kun $n > 2k$.

- On $\binom{n}{k}$ tapaa valita osajoukko X.
- On $\binom{n-k}{k}$ tapaa valita osajoukko Y. On siis enintään $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{k} \leq n^{2k}$ tapaa valita osajoukot X ja Y.
- Koska yhdisteen $X \cup Y$ sisäisiä särmiä ei ole mitenkään rajattu, on $2^{\binom{2k}{2}}$ tapaa asettaa särmät yhdisteeseen $X \cup Y$.
- Koska yhdisteen $X \cup Y$ ulkopuolisia särmiä ei ole mitenkään rajattu, on $2^{\binom{n-2k}{2}}$ tapaa asettaa särmät yhdisteen $X \cup Y$ ulkopuolelle.
- Ainoa rajoitus koskee yhdisteen $X \cup Y$ ja sen komplementin $\overline{X \cup Y}$ välisiä särmiä: jokaiselle $n - 2k$ solmulle $z \in \overline{X \cup Y}$ voimme asettaa särmät solmun z ja $2k$ kappaleen joukon $X \cup Y$ solmuja välille kaikilla muilla paitsi yhdellä tavalla, missä solmusta z on särmä jokaiseen osajoukon X solmuun, mutta ei särmää yhteenkään osajoukon Y solmuun. Täten jokaiselle solmulle z on $2^{2k} - 1$ tapaa asettaa särmät solmun z ja joukon $X \cup Y$ välille ja siten $(2^{2k} - 1)^{n-2k}$ tapaa asettaa särmät joukkojen $X \cup Y$ ja $\overline{X \cup Y}$ välille.

Näin ollen

$$\mu_n(\neg \mathrm{EA}_k) \quad \leq \quad \frac{n^{2k} \cdot 2^{\binom{2k}{2}} \cdot 2^{\binom{n-2k}{2}} \cdot (2^{2k} - 1)^{n-2k}}{2^{\binom{n}{2}}}$$

Nyt koska

$$\begin{aligned} \frac{2^{\binom{2k}{2}} \cdot 2^{\binom{n-2k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} &= \frac{2^{\frac{(2k)!}{2\cdot(2k-2)!}} \cdot 2^{\frac{(n-2k)!}{2\cdot(n-2k-2)!}}}{2^{\frac{(n)!}{2\cdot(n-2)!}}} = \frac{2^{\frac{2k(2k-1)}{2}} \cdot 2^{\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2}}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \\ &= 2^{\frac{8k^2-4kn}{2}} = 2^{-2k(n-2k)} = \frac{1}{2^{2k(n-2k)}}, \end{aligned}$$

niin

$$\mu_n(\neg \mathrm{EA}_k) \quad \leq \quad n^{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)^{n-2k} \quad \to \quad 0.$$

Tämä todistaa, että $\mu(\neg \mathrm{EA}_k) = 0$ ja $\mu(\mathrm{EA}_k) = 1$. □

Koska solmumäärää $2n$ suuremmissa verkoissa laajennusaksiooman EA_n toteutumisesta seuraa laajennusaksiooman $\mathrm{EA}_{n,m}$ toteutuminen, kaikilla $m \leq n$, saamme seuraavan tuloksen.

Seuraus 2.2.2. $\mu(\mathrm{EA}_{n,m}) = 1$ millä tahansa arvoilla n ja $m \leq n$.

Seuraus 2.2.3. Jokaisella laajennusaksioomalla EA_k on mielivaltaisen suuria äärellisiä malleja.

Lemma 2.2.4. *Olkoot G_1 ja G_2 sellaiset äärelliset verkot, että $G_1, G_2 \models \mathrm{EA}_{n,m}$ kaikilla $m \leq n \leq k$. Tällöin $G_1 \equiv^k_{\infty\omega} G_2$.*

Todistus. Käytämme helmipeliä apuna todistamiseen. Alussa, kun kaikkia helmiä ei ole sijoitettu, pystyy duplikaattori vastaamaan spoilerin siirtoihin, sillä molemmat verkot toteuttavat laajennusaksiooman $\mathrm{EA}_{n,m}$ millä tahansa luvuilla $m \leq n \leq k$. Oletetaan että olemme sellaisessa kohdassa peliä, jossa solmut $(a_1, \ldots, a_k)$ on pelattu verkossa G_1 ja solmut $(b_1, \ldots, b_k)$ pelattu verkossa G_2. Siirtäköön spoileri $i$nnen helmen solmulta a_i jollekin solmulle a. Olkoot $I \subseteq \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$ kaikki sellaiset indeksit, että on olemassa särmä solmusta a solmuun a_j kaikilla $j \in I$. Nyt on laajennusaksioomien perusteella olemassa sellainen solmu $b \in G_2$, että solmusta b on särmä jokaiseen solmuun b_j, $j \in I$, mutta solmusta b ei ole särmiä yhteenkään solmuun b_l, $l \notin I$. Täten duplikaattori voi vastata solmuun a solmulla b ja peli jatkuu ikuisesti, joten $G_1 \equiv^k_{\infty\omega} G_2$. $\square$

Palaamme nyt tarkastelemaan esimerkkiä verkkojen yhtenäisyydestä, jolle saatiin asymptoottinen todennäköisyys 1. Jos katsomme laajennusaksioomaa EA_2, niin vähintään neljän solmun verkoille tämä implikoi, että mille tahansa alkioille $x \neq y$ on olemassa sellainen z, että $(x, z), (y, z) \in E^G$. Näin ollen mikä tahansa vähintään neljän solmun verkko, joka toteuttaa laajennusaksiooman EA_2, on yhtenäinen. Nyt koska $\mu(\mathrm{EA}_2) = 1$, niin $\mu(\text{yhtenäisyys}) = 1$.

Toisena esimerkkinä käyttäen laajennusaksioomia laskiessa asymptoottista todennäköisyyttä, tarkastelemme laajennusaksioomaa EA_2 ja särmää $(x, y) \in E^G$. Nyt voimme löytää sellaisen solmun z, että $(x, z) \in E^G$ ja $(y, z) \in E^G$. Näin ollen verkolla, joka toteuttaa laajennusaksiooman EA_2, on silmukka (x, y, z). Nyt siis $\mu(\text{silmukattomuus}) = 0$.

Lopuksi selvitämme, kuinka määritellä laajennusaksioomat mielivaltaiselle aakkostolle σ, joka sisältää vain relaatiosymboleita. Olkoot $x_i, \ldots, x_n$ muuttujia ja olkoon $A_\sigma(x_i, \ldots x_n)$ kaikkien muotoa $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ olevien σ-atomikaavojen kokoelma, missä R kattaa aakkoston σ relaatiot ja m on relaation R paikkaluku. Kutsumme kaavaa $\chi_F(x_i, \ldots, x_n)$, $F \subseteq A_\sigma(x_i, \ldots x_n)$ *täydelliseksi kuvaukseksi*, joka saadaan seuraavasti:

$$\bigwedge_{\varphi \in F} \varphi \quad \wedge \quad \bigwedge_{\psi \in A_\sigma(x_i, \ldots, x_n) \setminus F} \neg \psi.$$

Täydellinen kuvaus siis kertoo tarkalleen, mitkä atomikaavat muuttujilla $x_i, \ldots, x_n$ ovat totta ja mitkä eivät.

Olkoon F sitten kokoelman $A_\sigma(x_i, \ldots, x_n)$ osajoukko ja olkoon G kokoelman $A_\sigma(x_i, \ldots, x_n, x_{n+1})$ osajoukko siten, että $F \subseteq G$. Tällöin laajennusaksiooma $\mathrm{EA}_{F,G}$ on lause

$$\forall x_1 \ldots x_n \left(\begin{array}{l} \Big((\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j) \wedge \chi_F(x_i, \ldots, x_n) \Big) \rightarrow \\ \qquad\qquad\qquad \exists x_{n+1} \Big(\bigwedge_{i \leq n} (x_{n+1} \neq x_i) \wedge \chi_G(x_i, \ldots, x_n) \Big) \end{array} \right)$$

joka sanoo, että jokainen n muuttujan täydellinen kuvailu voidaan laajentaa jokaiseksi vastaavaksi $n+1$ muuttujan täydelliseksi kuvailuksi. Aiempia tämän luvun todistuksia mukaillen saamme seuraavan tuloksen.

Lemma 2.2.5. $\mu(\mathrm{EA}_{F,G}) = 1.$

3 0–1 lait

Joillekin ominaisuuksille $\mathcal{P}$ asymptoottinen todennäköisyys $\mu(\mathcal{P})$ on 0 tai 1. Se voi olla myös luku nollan ja yhden välillä, ja voi myös olla niin ettei asymptoottista todennäköisyyttä ole olemassa. Tässä luvussa osoitamme, että tietyissä kiintopistelogiikoissa kaikki ilmaistavat ominaisuudet ovat joko lähes varmasti tosia, tai lähes varmasti epätosia.

3.1 0–1 lakeja eri logiikoille

Määritelmä 3.1.1 (0–1 laki)**.** Olkoon $\mathcal{L}$ logiikka. Sanomme, että logiikalla $\mathcal{L}$ on 0–1 *laki* jos jokaisella logiikassa $\mathcal{L}$ määriteltävällä ominaisuudella $\mathcal{P}$, joko $\mu(\mathcal{P}) = 0$ tai $\mu(\mathcal{P}) = 1$.

Aiemmin todistimme, että ominaisuuden ”verkossa ei ole eristettyjä solmuja” asymptoottinen todennäköisyys on 1. Tämä ominaisuus on ilmaistavissa logiikassa FO. Verkon yhtenäisyys, jonka asymptoottinen todennäköisyys on myös 1, ei ole ilmaistavissa logiikassa FO. Se on ilmaistavissa logiikassa LFP ja siten myös logiikassa $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$. Kyselyä EVEN, jonka asymptoottista todennäköisyyttä ei ole olemassa, ei voida ilmaista logiikassa $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$. Osoittautuu, että $\mu(\mathcal{P})$ on 0 tai 1 *jokaisella* logiikassa $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ määriteltävällä ominaisuudella $\mathcal{P}$.

Lause 3.1.1. *Logiikalla $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ on* 0–1 *laki.*

Todistus. Olkoon Φ logiikan $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$ lause. Oletetaan, että on olemassa laajennusaksiooman EA_k malli G, joka on vähintään kokoa $2k$ ja toteuttaa lauseen Φ. Oletetaan, että G' on verkko joka toteuttaa laajennusaksiooman EA_k ja jossa on vähintään $2k$ alkiota. Nyt, lemman 2.2.4 mukaan $G' \equiv^{k}_{\infty\omega} G$ ja siis $G' \models \Phi$. Oletuksesta siis seuraa, että jokainen laajennusaksiooman EA_k malli G', joka on vähintään kokoa $2k$ ja toteuttaa lauseen Φ. Siksi $\mu(\Phi) \geq \mu(\mathrm{EA}_k) = 1$. Oletamme sitten vastakkaisesti, että yksikään laajennusaksiooman EA_k malli, joka on kokoa $\geq 2k$, ei toteuta lausetta Φ. Nyt $\mu(\Phi) \leq \mu(\neg\,\mathrm{EA}_k) = 0$. $\square$

Kappaleessa 1.3 todistimme, että FO, LFP, IFP, PFP $\leq \mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$.

Seuraus 3.1.2. Logiikoilla FO, LFP, IFP ja PFP on 0–1 laki.

0–1 laeista seuraa välittömästi, että logiikalla ei voi ilmaista epätriviaalia laskentaa. Esimerkiksi jos logiikalla $\mathcal{L}$ on 0–1 laki, niin EVEN ei ole ilmaistavissa siinä. Myöskään ilmaistavissa eivät ole minkäänlaiset jaollisuusominaisuudet, kuten esimerkiksi jonkin tietyn joukon koon kongruenssi luvun q kanssa modulo p.

Huomattavaa on myöskin, että vaikka logiikoilla LFP, IFP, PFP ja $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ on kaikilla 0–1 laki, niin jos tarkastellaan vain malleja, joissa lineaarijärjestys, niin sellaisella mallijoukolla ei ole 0–1 lakia, koska $\text{LFP}_{<}$ määrittelee kyselyn EVEN ja luokan PTIME lauseet.

Jo lineaarisen järjestyksen (tai vain seuraajarelaation) läsnäolo estää 0–1 lain logiikassa FO. Näemme tämän lauseesta

$$\forall x \forall y \left(\forall z \left(\neg S(z,x) \wedge \neg S(y,z)\right) \to (x,y) \in E^G\right),$$

jossa S seuraajarelaatio. Lauseen mukaan jos x on ensimmäinen ja y viimeinen seuraajarelaation solmu, on näiden välillä särmä. Koska lause määrittelee yhden tietyn särmän olemassaolon, on sen asymptoottinen todennäköisyys $\frac{1}{2}$.

Edellisen luvun lopussa saimme lauseelle $\text{EA}_{F,G}$ asymptoottisen todennäköisyyden 1. Tästä seuraa, että 0–1 laki pätee mielivaltaisissa äärellisissä malleissa, ei ainoastaan verkoissa.

3.2 Satunnaisverkko

Käsittelemme seuraavaksi tiettyä ääretöntä mallia. Tällä mallilla, jota kutsutaan *satunnaisverkoksi*, on kiinnostava FO-teoria (joukko logiikan FO lauseita). Se koostuu täsmälleen niistä lauseista Φ, joille $\mu(\Phi) = 1$. Tutkiessamme satunnaisverkkoa todistamme että ongelma siitä, onko logiikan FO lauseen asymptoottinen todennäköisyys 1, on ratkeava.

Tarvitsemme jatkossa BIT-predikaattia. $\text{BIT}(i,j)$ on tosi jos ja vain jos luvun i binäärimuodossa j:s numero on 1.

Määritelmä 3.2.1. *Satunnaisverkko* määritellään äärettömäksi (suuntaamattomaksi) verkoksi $\mathcal{RG} = (\mathbb{N}, E^{\mathcal{RG}})$, jossa solmujen i ja j, $i < j$, välillä on särmä jos ja vain jos $\text{BIT}(i,j)$ on tosi.

Ymmärtääksemme satunnaisverkon rakennetta, oletetaan että rakennamme satunnaisen numeroituvan verkon, jonka solmut ovat luonnollisia lukuja. Lisäämme verkkoon solmuja yksi kerrallaan ja selvitämme särmien olemassaolon jokaiseen aiempaan solmuun yksitellen heittämällä kolikkoa. Tällä tavalla rakennettu numeroituva verkko on todennäköisyydellä 1 isomorfinen verkon $\mathcal{RG}$ kanssa.

Mielenkiintoisen ja erilaisten sovellusten kannalta tärkeän satunnaisverkosta tekee se, että se toteuttaa kaikki laajennusaksioomat. Olkoon $S \subset \mathbb{N}$ kooltaan n ja $T \subseteq S$ kooltaan m. Olkoon l sellainen luku, jolla annettuna binäärimuodossa on ykkösiä joukon T paikoissa ja nollia joukon $S - T$ paikoissa. Oletetaan edelleen, että luvulla l on ykkönen sellaisella paikalla, jonka numero on korkeampi kuin suurin numero joukossa S. Nyt solmusta l on särmät kaikkiin joukon T solmuihin, muttei yhteenkään joukon S solmuun, joten verkko toteuttaa laajennusaksiooman $\text{EA}_{n,m}$. Esimerkiksi jos $S = \{0,1,2,3,4,5\}$ ja $T = \{0,3,4\}$, niin $S - T = \{1,2,5\}$. Nyt luku $l = 77$, jonka binäärimuoto on 1001101, osoittaa joukkojen laajennuksen.

Seuraavaksi määrittelemme teorian

$$\mathbf{EA} = \{\mathrm{EA}_k \mid k \in \mathbb{N}\}. \tag{3.2.1}$$

Kutsumme teoriaa T (aakkoston σ lauseiden joukko) *täydelliseksi* jos jokaiselle lauseelle Φ joko $T \vDash \Phi$, tai $T \vDash \neg\Phi$. T on *ω-kategorinen teoria* jos, isomorfiaa vaille, sillä on vain yksi numeroituva malli. Teoria T on *ratkeava* jos lauseiden joukko $\{\Phi \mid T \vDash \Phi\}$ on ratkeava.

Lause 3.2.1. ***EA*** *on täydellinen, ω-kategorinen ja ratkeava teoria.*

Todistus. 1. ω-kategorisuus: Väitämme, että isomorfiaa vaille, $\mathcal{RG}$ on ainoa teorian $\mathbf{EA}$ numeroituva malli. Oletetaan, että $\mathcal{G}$ on toinen teorian $\mathbf{EA}$ malli (ja näin ollen toteuttaa kaikki laajennusaksioomat $\mathrm{EA}_{n,m}$). Väitämme, että $\mathcal{RG} \equiv_\omega \mathcal{G}$, eli että duplikaattori voi pelata ω siirtoa Ehrenfeucht-Fraïssén pelissä, malleilla $\mathcal{RG}$ ja $\mathcal{G}$. Itse asiassa, oletetaan että kierroksen r jälkeen meillä on osittaisen isomorfian määrittelevä tilanne $((a_1, \ldots, a_r), (b_1, \ldots, b_r))$ ja oletetaan, että spoileri pelaa alkion a_{r+1} mallissa $\mathcal{RG}$. Olkoon $I = \{i \leq r \mid (a_{r+1}, a_i) \in E^{\mathcal{RG}}\}$. Koska $\mathcal{G} \vDash \mathbf{EA}$, niin sopivan laajennusaksiooman mukaan voimme löytää sellaisen alkion b_{r+1}, että $(b_{r+1}, b_i) \in E^{\mathcal{G}}$ jos ja vain jos $i \in I$. Näin ollen myös siirroista seurannut asetelma $((a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}), (b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}))$ määrittelee osittaisen isomorfian. Jos meillä on kaksi numeroituvaa mallia siten, että $\mathfrak{A} \equiv_\omega \mathfrak{B}$, niin $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Itse asiassa, jos $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ja $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, pelatkoon spoileri jokaisella parillisella kierroksella pienimmän käyttämättömän alkion joukosta A ja jokaisella parittomalla kierroksella pienimmän käyttämättömän alkion joukosta B. Nyt tässä pelissä rakentuneiden osittaisten isomorfismien sarjan yhdiste on isomorfismi mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä. Näin olemme osoittaneet, että $\mathcal{G} \vDash \mathbf{EA}$ implikoi isomorfismin $\mathcal{G} \cong \mathcal{RG}$ ja siten $\mathbf{EA}$ on ω-kategorinen.
2. Täydellisyys: Oletetaan, että meillä on sellainen lause Φ jolle kumpikaan, $\mathbf{EA} \vDash \Phi$ tai $\mathbf{EA} \vDash \neg\Phi$, ei päde. Näin ollen teoriat $\mathbf{EA} \cup \{\Phi\}$ ja $\mathbf{EA} \cup \{\neg\Phi\}$ ovat konsistentteja. Löwenheimin ja Skolemin lauseen perusteella saamme kaksi teorian $\mathbf{EA}$ numeroituvaa mallia $\mathcal{G}'$ ja $\mathcal{G}''$, joille $\mathcal{G}' \vDash \Phi$ ja $\mathcal{G}'' \vDash \neg\Phi$. Kuitenkin, ω-kategorisuuden perusteella, tämä tarkoittaa, että $\mathcal{G}' \cong \mathcal{G}'' \cong \mathcal{RG}$, joten $\mathcal{G}' \equiv \mathcal{G}''$. Tämä ristiriita osoittaa, että teoria $\mathbf{EA}$ on täydellinen.
3. Ratkeavuus: Malliteoriassa tunnetaan tulos (esim. B. Kim, s. 18), joka sanoo että rekursiivisesti aksiomatisoituva täydellinen teoria on ratkeava. Koska seuraus 2.2.2 antaa rekursiivisen aksiomatisoinnin, on teoria $\mathbf{EA}$ ratkeava. $\square$

Seuraus 3.2.2. Jos Φ on logiikan FO lause, niin $\mathcal{RG} \vDash \Phi$ jos ja vain jos $\mu(\Phi) = 1$.

Todistus. Olkoon $\mathcal{RG} \vDash \Phi$. Koska $\mathbf{EA}$ on täydellinen teoria niin $\mathbf{EA} \vDash \Phi$ ja näin ollen, kompaktisuuden perusteella, jollakin luvulla $k > 0$, $\{\mathrm{EA}_i \mid i \leq k\} \vDash \Phi$. Täten $\mathrm{EA}_k \vDash \Phi$ ja siis $\mu(\Phi) \geq \mu(\mathrm{EA}_k) = 1$. Kääntäen jos $\mathcal{RG} \vDash \neg\Phi$, niin $\mu(\neg\Phi) = 1$ ja $\mu(\Phi) = 0$. Näinollen $\mathcal{RG} \vDash \Phi$ millä tahansa lauseella Φ, jolle $\mu(\Phi) = 1$. $\square$

Yhdistämällä seurauksen 3.2.2 ja teorian **EA** ratkeavuuden, saamme seuraavan tuloksen.

Seuraus 3.2.3. Logiikan FO lauseille Φ, joukko $\{\Phi \mid \mu(\Phi) = 1\}$ on ratkeava.

Trakhtenbrotin lause sanoo, että ongelma siitä onko kaava tosi kaikissa äärellisissä malleissa on ratkeamaton. Nyt näemme, että kaava on ratkeava sen suhteen, onko se tosi lähes kaikissa äärellisissä malleissa.

Lähdeluettelo

Libkin, Leonid. *Elements of Finite Model Theory.* Springer Verlag 2004. s. 211–248.

Ebbinghaus, Heinz-dieter & Flum, Jorg. *Finite Model Theory.* Springer Verlag 2005. s. 46–94.

Kim, B. *Complete Proofs of Gödel's Incompleteness Theorems.* Luentomoniste. Saatavilla Internetistä: `http://math.yonsei.ac.kr/bkim/goedel.pdf`.