TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Tiina Karjalainen

Eroja lukio- ja yliopistomatematiikassa erityisesti lukion differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssissa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Joulukuu 2011

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö, Matematiikka

KARJALAINEN, TIINA: Eroja lukio- ja yliopistomatematiikassa erityisesti lukion differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssissa

Pro gradu -tutkielma, 57 s.

Matematiikka

Joulukuu 2011

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan lukio- ja yliopistomatematiikan eroja sekä analysoidaan lukion *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin* oppikirjoja. Tutkielman aluksi luodaan katsaus lukion ja Tampereeen yliopiston matematiikan opetuksen tavoitteisiin ja keskeisiin sisältöihin. Matemaattisessa osuudessa tutustutaan tarkastelun kohteena olevan lukiokurssin matemaattisen sisällön yliopistotasoiseen esitykseen. Eroja tarkastellaan opetussuunnitelman perusteiden, matematiikan oppimisen ja opettajien näkymysten kautta. Analysoitavia oppikirjoja tarkastellaan erityisesti matemaattisen todistamisen näkökulmasta.

Tutkielman perusteella nähdään, että saavutettaessa lukion matematiikan tavoitteet, ovat erot yliopistotasoiseen matematiikkaan varsin pieniä. Tutkielmassa havaitaan kuitenkin, että tavoitteet on asetettu korkealle ja niiden saavuttamiseksi on useita esteitä. Todistamistehtävien analysoinnin tulokset osoittavat, että lukiossa todistamistehtävien määrä on melko vähäinen verrattuna yliopistokursseihin ja määrä vaihtelee runsaasti eri kustantajien oppikirjojen välillä.

Sisältö

1 Johdanto

Lukio- ja yliopistomatematiikan erot aiheuttavat pohdintaa niin opiskelijoiden kuin opettajienkin keskuudessa. On puhuttu paljon lukion ja yliopiston väliin jäävästä kuilusta. Kuilun aiheuttaa erityisesti matemaattinen todistaminen, jota lukiossa harjoitetaan melko vähän. Myös muita vaikuttavia tekijöitä on, yhtenä niistä oppikirjat. Vaikka opetussuunnitelman pitäisi ohjata lukio-opetusta, vaikuttaa siltä, että todellisuudessa opetusta ohjaa enemmänkin oppikirja. Oppikirjat laaditaan opetussuunnitelman pohjalta, mutta ne eivät välttämättä edesauta asetettujen tavoitteiden täyttymistä.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan lukion valtakunnallista opetussuunnitelmaa, Tampereen yliopiston matematiikan kurssien sisältöä sekä erilaisia tutkimuksia ja artikkeleja liittyen matematiikan opiskeluun ja oppimiseen. Näistä lähteistä pyritään löytämään eroja lukio- ja yliopistomatematiikassa sekä syitä näihin eroihin. Erityisesti tarkastellaan todistamista lukiomatematiikassa. Lisäksi tutkielmassa analysoidaan eri kustantajien oppikirjoja lukion pitkän matematiikan kurssille *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*. Kyseinen kurssi valittiin tarkastelun kohteeksi, koska se mitä luultavimmin on viimeinen matematiikan lukiokurssi, jonka yliopistossa matematiikan opiskelua jatkava opiskelija suorittaa. Näin ollen tämän kurssin käsittely on järkevää erojen ja mahdollisen kuilun olemassaolon selvittämiseksi.

Tutkielman aluksi luvussa 2 luodaan katsaus lukion opetussuunnitelmaan ja erityisesti pitkän matematiikan kurssirakenteeseen ja tutkielmassa tarkasteltavan kurssin tavoitteisiin ja sisältöön. Luvussa 3 tarkastellaan lyhyesti Tampereen yliopiston ensimmäisiä matematiikan kursseja ja niiden sisältöjä vertailukohdan saamiseksi. Tämän tutkielman luvussa 4 esitetään *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssilla* esiin tulevia määritelmiä ja lauseita sekä niiden todistuksia. Ensimmäiseksi luvussa 4.2 tarkastellaan funktion raja-arvoa. Luvussa 4.3 tarkastellaan funktion jatkuvuutta. Differentiaalilaskentaa tarkastellaan luvussa 4.4. Viimeiseksi käsitellään käänteisfunktioita luvussa 4.5.

Matemaattisen tarkastelun jälkeen luvussa 5 tutustutaan tarkemmin lukio- ja yliopistomatematiikan eroihin opetussuunnitelman perusteiden, oppimisen ja opettajien näkökulmasta. Luvussa 6 analysoinnin kohteena ovat *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin* oppikirjat *Pitkä matematiikka 13* (WSOY) [4] ja *Pyramidi 13* (Tammi) [6]. Analyysissa tarkastellaan oppikirjojen yleisilmettä, rakennetta, teoriaosuuksia, esimerkki- ja harjoitustehtäviä sekä havainnollistuksia. Luvussa 7 perehdytään lyhyesti todistamisen historiaan ja todistamisajatteluun. Tämän jälkeen tarkastellaan tutkielmassa analysoitavia lukion oppikirjoja todistamisen näkökulmasta luomalla katsaus todistusten laatuun ja todistamistehtävien määrään. Lopuksi luvussa 8 tehdään lyhyt yhteenveto tämän tutkielman sisällöstä.

Tutkielman lukijan oletetaan tuntevan funktion, paloittain määritellyn funktion ja rajoitetun funktion käsitteet, sekä ymmärtävän differentiaali- ja integraalilaskennan perusteita sekä sellaisia käsitteitä kuten injektio, surjektio, bijektio, pienin yläraja (supremum) ja suurin alaraja (infimum).

Matemaattisessa osuudessa lähdeteoksena käytetään kirjaa *Salas, Hille & Etgen: Calculus - One and Several Variables* [10].

2 Lukion opetussuunnitelma

Aluksi luvussa 2.1 tarkastellaan yleisesti lukion opetussuunnitelman perusteita. Tämän jälkeen luvussa 2.2 perehdytään tarkemmin lukion pitkän matematiikan opiskelun tavoitteisiin ja kursseihin sekä verrataan niitä lyhyeen matematiikkaan. Pitkän matematiikan kurssirakenteeseen tutustutaan luvussa 2.3. *Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin* tavoitteisiin ja keskeisiin sisältöihin tutustutaan luvussa 2.4.

2.1 Yleisesti

Suomen lukioissa toiminnan ja opetuksen perustana on *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003* [9]. Tämä valtakunnallinen opetussuunnitelma on säädöskokoelma, joka velvoittaa kuntia, kouluja ja opettajia toimimaan sen puitteissa. Jokainen lukio-opetusta antava kunta laatii oman kuntakohtaisen opetussuunnitelmansa opetussuunnitelman perusteiden pohjalta. Lopullinen, lukion toimintaa ohjaava opetussuunnitelma saadaan, kun lukiot täydentävät kuntakohtaista opetussuunnitelmaa. Nämä kunta- ja koulukohtaiset opetussuunnitelmat eivät saa olla ristiriidassa opetussuunnitelman perusteiden kanssa. Nuoriso- ja aikuiskoulutukselle on olemassa omat opetussuunnitelmansa.

Opetussuunnitelman perusteissa määritetään lukiokoulutuksen tehtävä ja arvoperusta sekä tavoitteet, jotka asetetaan lukion oppimäärän suorittajalle. Lisäksi annetaan viitekehys lukion opiskeluympäristölle ja opiskelumenetelmille sekä toimintakulttuurille. Valtakunnallisessa opetussuunnitelman perusteissa määrätään myös opintojen rakenteesta eli siitä, kuinka monta kurssia opiskelijan on käytävä suorittaakseen lukion oppimäärän ja miten nämä kurssin jakautuvat eri aineiden kesken. [9, s. 9]

Lukiokurssit jakautuvat kolmeen eri ryhmään: pakollisiin, syventäviin ja soveltaviin kursseihin. Pakolliset kurssit määritellään valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa ja niistä rakentuu lukion oppimäärän perusta. Jokainen lukion oppimäärän suorittaja opiskelee kaikki pakolliset kurssit. Matematiikassa suoritetaan kuitenkin vain valitun, joko lyhyen tai pitkän, matematiikan pakolliset kurssit. Lukion oppimäärään on sisällytettävä myös syventäviä kursseja, jotka joko syventävät pakollisten kurssien aihealueita tai käsittelevät kokonaan uusia aiheita. Valtakunnallinen opetussuunnitelma sisältää joissakin aineissa syventäviä kursseja, jotka järjestetään jokaisessa lukiossa. Kunnat ja lukiot voivat lisäksi sisällyttää omiin opetussuunnitelmiinsa syventäviä kursseja haluamistaan aiheista. Tällaisia ovat esimerkiksi kertauskurssit, joita ei ole määritelty opetussuunnitelman perusteissa. Kolmannessa ryhmässä ovat soveltavat kurssit, joiden tarkoituksena on oppiaineen tietojen ja taitojen soveltaminen erilaisissa tilanteissa. Soveltavia kursseja ei ole määritelty valtakunnallisesti vaan ne ovat kunta- ja koulukohtaisia. Soveltavat kurssit kurssit voivat olla esimerkiksi kielissä keskustelukursseja ja luonnontieteissä laborointikursseja. Soveltavilla kursseilla ylitetään usein myös oppiainerajoja. [9, s. 15]

2.2 Matematiikka

Lukion opetussuunnitelman perusteissa [9, s. 118] todetaan että pitkän matematiikan opetuksen tehtävänä on taata opiskelijalle sellaiset matemaattiset valmiudet, joita hän tarvitsee jatkaessaan lukion jälkeen ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opiskelu tarjoaa tilaisuuden omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä erityisesti oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Matematiikan opetuksessa on pyrkimyksenä antaa opiskelijalle selkeä käsitys matematiikan merkityksestä yhteiskunnassa ja sen kehityksessä. On tärkeää saada myös näkemystä matematiikan soveltamismahdollisuuksista niin arkielämässä kuin tieteessä ja tekniikassakin.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa [9, s. 118-119] annetaan matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteiksi seuraavat kohdat.

> *Opiskelija*
>
> – *tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa*
> – *rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin*
> – *ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä*
> – *oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena*
> – *kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan*
> – *harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä*
> – *harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita*
> – *osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.*

Vastaavasti opetussuunnitelman perusteissa [9, s. 125] määritellään lyhyen matematiikan opetuksen tehtäviksi valmiuksien tarjoaminen matemaattisen tiedon hankkimiseen, käsittelemiseen ja ymmärtämiseen sekä matematiikan käyttämiseen jokapäiväisessä elämässä ja jatko-opinnoissa. Opetuksen tavoitteet määritellään seuraavalla tavalla.

Opiskelija

- *osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä*
- *saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään ja oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa, rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen*
- *hankkii sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille*
- *sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä*
- *saa käsityksen matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta*
- *harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatioita ja arvioimaan sen luotettavuutta*
- *tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä*
- *oppii käyttämään kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna.*

Opetussuunnitelman perusteissa esitetyn perusteella huomataan, että pitkän ja lyhyen matematiikan tavoitteet ovat erilaiset. Pitkässä matematiikassa asiaa lähestytään teoreettisemmin: tavoitteena on lähinnä matemaattisen kielen hallinta, matemaattisten menetelmien oikeanlainen käyttö, päättely- ja ongelmaratkaisuprosessien kehittyminen. Lyhyessä matematiikassa painotetaan vastaavasti matematiikan käyttöä jokapäiväisessä elämässä sekä matematiikan merkitystä mallintamisen välineenä. Lukiomatematiikan lyhyestä ja pitkästä oppimäärästä on löydettävissä kuitenkin myös yhtäläisyyksiä. Molemmissa tavoitteena ovat myönteiset kokemukset matematiikasta, kokeileva ja tutkivat toiminta, näkemys matematiikasta loogisena rakenteena sekä kriittinen suhtautuminen saatuihin tuloksiin. Jatko-opinnot mainitaan oppimisen tavoitteissa lyhyen matematiikan kohdalla. Pitkässä matematiikassa jatko-opintokelpoisuus on jo opetuksen tehtävänä.

2.3 Pitkän matematiikan kurssirakenne

Lukion pitkän matematiikan oppimäärä koostuu kymmenestä pakollisesta kurssista, jotka ovat nimeltään:

– Funktiot ja yhtälöt (MAA1)
– Polynomifunktiot (MAA2)
– Geometria (MAA3)
– Analyyttinen geometria (MAA4)
– Vektorit (MAA5)
– Todennäköisyys ja tilastot (MAA6)
– Derivaatta (MAA7)
– Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8)
– Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9)
– Integraalilaskenta (MAA10).

Tämän lisäksi kaikissa lukioissa on tarjolla kolme valtakunnallista syventävää kurssia. Syventävien kurssien käyminen ei ole välttämätöntä lukion oppimäärän saavuttamiseksi mutta suositeltavaa matematiikan ylioppilaskokeen takia. Syventävät kurssit ovat nimeltään:

– Lukuteoria ja logiikka (MAA11)
– Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (MAA12)
– Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13).

Valtakunnallisessa lukion opetussuunnitelmassa olevien kurssien 1-13 lisäksi kunnat ja koulut voivat järjestää kuntakohtaisia ja koulukohtaisia syventäviä sekä soveltavia matematiikan kursseja. Kurssien suoritusjärjestys määrätään koulun opetussuunnitelmassa. [9]

2.4 Differentiaali- ja integraalilaskennen jatkokurssi

Tutkielmassa tarkasteltavalla *Differentiaali- ja integraalilaskennen jatkokurssilla* (jatkossa MAA13) syvennetään jo aikaisemmin pakollisilla kursseilla 7-10 opiskeltuja perusasioita derivoinnista ja integraalilaskennasta sekä lukujonoista. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [9, s. 124] mainitaankin MAA13-kurssin tavoitteiksi differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemuksen syventäminen ja erityisesti integraalilaskennan taitojen täydentäminen ja soveltaminen. Lisäksi kurssin tavoitteena on tutkia lukujonojen raja-arvoa sekä sarjoja ja niiden summia. Opetussuunnitelman mukaisesti kurssin keskeisiä sisältöjä ovat funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen sekä jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleiset ominaisuudet. Lisäksi kurssilla tulisi käsitellä funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä sekä epäoleelliset integraalit. Muilta osin oppikirjojen sisältö määräytyy kirjan tekijöiden omien näkemysten mukaan. Sisältöön vaikuttaa myös edellisissä kursseissa käsitellyt asiat, jolloin eri kirjasarjojen teoriasisällöt voivat erota toisistaan.

Haluttaessa tarkastella lukiomatematiikan ja yliopiston matemaattisten opintojen väliin jäävää kuilua, on järkevää perehtyä pitkän matematiikan oppimäärään lukiossa. Erityisesti tarkastellaan lukion todennäköisesti viimeistä suoritettavaa kurssia eli kurssia MAA13. Uraa matematiikan parissa suunnittelevat ovat melko varmasti valinneet jo lukiossa pitkän matematiikan ja suorittavat mahdollisimman paljon matematiikan kursseja. Suoritettaviin kursseihin sisältynee myös MAA13-kurssi, vaikka sen suorittaminen ei pakolliseen oppimäärään kuulukaan. Lyhyen matematiikan oppimäärän suorittaminen ei rajaa pois mahdollisuutta matematiikan opiskeluun yliopistossa, mutta tällöin opiskelijalta vaaditaan todellista halua matematiikan opiskeluun yliopistossa.

3 Matematiikan opetus yliopistossa

Yliopistomatematiikkaa tarkasteltaessa ei käytettävissä ole lukion opetussuunnitelman perusteiden kaltaista koko Suomen yliopistomatematiikan opetusta koskevaa tavoitekokoelmaa, vaan tavoitteet ovat kunkin yliopiston ja matematiikan laitoksen itse asettamia. Yliopistotasolla ei myöskään laadita yleistä tavoitetta koko matematiikan opetukselle, sillä opiskelijoiden valitsemat opintokokonaisuudet voivat vaihdella hyvin paljon. Yliopisto-opinnoissa tavoitteiden luominen jää siis hyvin pitkälti opiskelijan tehtäväksi. Yksittäisille kursseille tavoitteet kuitenkin asetetaan ja ne ovat luettavissa yliopiston opinto-oppaasta [1].

Tässä tutkielmassa keskitytään matematiikan yliopisto-opintojen kohdalla tarkastelemaan Tampereen yliopiston kursseja *Johdastus analyysiin* ja *Analyysi 1*. Nämä ovat ne analyysin kurssit, joista opiskelijat yleensä aloittavat matematiikan opintonsa yliopistossa.

Johdatus analyysiin -kurssin tavoitteena on valmentaa opiskelijaa myöhempiin matemaattisen analyysin opintoihin. Kurssilla kerrataan lukion pitkän matematiikan kurssien keskeisiä sisältöjä keskittymällä yhden muuttujan differentiaali- ja integraalilaskentaan. Kurssia suositellaan käytäväksi, jos opiskelija kokee, että hänellä on puutteelliset taidot lukiomatematiikassa tai opinnoista on jo pidemmän aikaa. Kurssi kuuluu matematiikan perusopintoihin, mutta sen käyminen ei ole pakollista eivätkä matematiikan pääaineopiskelijat voi sisällyttää sitä matematiikan opintoihinsa. [1]

Syksyllä 2011 kurssilla käsitellään kurssimateriaalin [2] perusteella muun muassa seuraavia aiheita:

- raja-arvon laskusäännöt
- jatkuvuus
- raja-arvo äärettömyydessä
- derivaatan määritelmä
- derivoimissäännöt
- funktion kulku
- yhdistetty funktio
- käänteisfunktio
- trigonometriset funktiot
- integraalifunktio
- määrätty integraali
- integraalifunktion ja määrätyn integraalin yhteys
- kahden muuttujan funktio

- osittaisderivaatta

Varsinainen matemaattisen analyysin opiskelu aloitetaan kurssista *Analyysi 1*. Tämän kurssin tavoitteiksi on asetettu, että opiskelija oppii tuntemaan reaalianalyysin peruskäsitteet täsmällisessä muodossa ja ymmärtää jo koulusta tuttujen laskurutiinien toimintaperiaatteet. Kurssilla käsiteltäviä aihealueita ovat opetussuunnitelman [1] mukaan:

- reaaliluvut ja epäyhtälöt
- alkeisfunktiot
- lukujoukon pienin yläraja ja suurin alaraja
- funktion jatkuvuus
- lukujonon suppeneminen
- raja-arvot
- ”epsilon-delta” -tekniikka
- Bolzanon lause
- derivaatta
- väliarvolause.

Matematiikan opetus yliopistossa on kurssimuotoista, mutta kurssien rakenne voi olla hyvinkin erilainen kuin lukiossa. Yleensä matematiikan kurssit koostuvat luennoista, joilla käydään läpi opiskeltavaan aiheeseen liittyviä määritelmiä, lauseita, näiden todistuksia ja esimerkkejä sekä laskuharjoituksista, joissa tarkastellaan annettujen laskutehtävien ratkaisut.

4 Matemaattinen tausta

Tässä luvussa luodaan katsaus niihin määritelmiin ja lauseisiin, joille kurssin MAA13 aineisto rakentuu. Luvussa 4.2 määritellään funktion raja-arvo kahdella eri tavalla ja tarkastellaan muun muassa toispuolisia raja-arvoja. Seuraavassa luvussa 4.3 tarkastellaan funktion jatkuvuutta ja esitetään muun muassa *Bolzanon lause*, *jatkuvien funktioiden väliarvolause* sekä *suurimman ja pienimmän arvon olemassaololause*. Luvussa 4.4 määritellään derivaatta sekä esitetään derivoituvuuteen liittyviä määritelmiä ja lauseita. Viimeiseksi luvussa 4.5 käsitellään käänteisfunktioita ja niiden derivoituvuutta.

Kurssin MAA13 rakenne ja käsiteltävät asiat eroavat toisistaan hyvinkin paljon kirjasarjasta riippuen. Tämän takia matemaattisen taustan tarkastelussa seurataan pitkälti WSOY:n *Pitkä matematiikka* -sarjan kurssikirjaa [4]. Tutkielmassa esitellään ne määritelmät ja lauseet, jotka ovat tässä oppikirjassa esitetyn matemaattisen teorian taustalla. Toisissa kirjasarjoissa osa tässä esityksessä käsiteltävistä asioista on kuulunut jo pakollisten kurssien 7-10 sisältöön ja MAA13-kurssilla ne yleensä kerrataan lyhyesti. Kurssiin kuuluvan aihepiirin laajuuden vuoksi on keskitytty tarkastelemaan lähinnä funktioiden raja-arvoa ja jatkuvuutta sekä differentiaalilaskentaa. Integraalilaskenta ja trigonometristen funktioiden käsittely on tässä tutkielmassa kokonaan sivuutettu. Lähdeteoksena käytetään kirjaa *Salas, Hille & Etgen: Calculus - One and Several Variables* [10].

4.1 Alustavia huomioita

Esityksessä ei tehdä varsinaisesti eroa sen suhteen, mitkä käsiteltävistä asioista kurssilla kerrataan ja mitkä ovat täysin uutta teoriaa. On kuitenkin pyritty siihen, että aikaisempien kurssien oppimäärään kuuluvat asiat vain esitellään ilman todistuksia ja esimerkkejä. Varsinaisesti uusista, tarkasteltavan kurssin oppimäärään kuuluvista matemaattisista aiheista esitetään todistukset sekä esimerkkejä.

Matemaattisen taustan tarkastelu aloitetaan funktion raja-arvon käsitteestä. Vaikka asioiden käsittely differentiaalilaskennan kohdalla aloitetaankin perusteista, tulee tutkielman lukijan tuntea funktion, paloittain määritellyn funktion ja rajoitetun funktion käsitteet. Matemaattisen taustan käsittelyssä lukijan oletetaan tuntevan myös differentiaali- ja integraalilaskennan perusteet sekä sellaisia käsitteitä kuten injektio, surjektio, bijektio, pienin yläraja (supremum) ja suurin alaraja (infimum).

Lukiotasolla funktioiden matemaattiset tarkastelut rajoittuvat reaalilukujen joukkoon. Tästä johtuen jatkossa tarkastellaan vain funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Erikoistapauksissa, joissa tarkasteltavan funktion lähtö- ja maalijoukko eroavat edellä esitetystä, asiasta mainitaan erikseen.

4.2 Funktion raja-arvo

Aloitetaan määrittelemällä funktion raja-arvo kahdella eri tavalla. Ensimmäiseksi esitetään se tapa, jolla funktion raja-arvo *Pitkä matematiikka*-kirjassa [4, s. 19] määritellään.

Määritelmä 4.1. Olkoon f funktio, joka on määritelty pisteen a ympäristössä, mutta ei välttämättä pisteessä a. Funktiolla f on *raja-arvo b kohdassa a*, jos muuttujan arvojen lähestyessä arvoa a funktion arvot lähestyvät lukua b. Jos funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b, niin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Huomautus 4.1. Oppikirjassa [4, s. 19] lähestyminen selitetään seuraavalla tavalla: *Lähestymisen tulee olla sellaista, että tulemalla tarpeeksi lähelle lukua a saadaan funktion f arvot niin lähelle lukua b, kuin suinkin on mahdollista.*

Huomautus 4.2. Merkintä

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

voidaan korvata merkinnällä

$$f(x) \to b, \text{ kun } x \to a.$$

Yliopistotasolla käytetään funktion raja-arvolle täsmällisempää, niin kutsuttua *epsilon-delta -määritelmää.*

Määritelmä 4.2. Olkoon funktio f määritelty ainakin pisteen a ympäristössä muotoa

$$]a - c, a[\cup]a, a + c[, \quad \text{missä } c > 0.$$

Tällöin

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos $0 < |x - a| < \delta$, niin $|f(x) - b| < \epsilon$.

Määritelmän 4.2 käsittely lukiotasolla on riippuvainen opettajasta ja käytettävästä kirjasarjasta. Esimerkiksi *Pitkä matematiikka*-oppikirjassa määritelmää ei esitetä teoriaosuudessa, vaan siihen tutustutaan tehtävän avulla [4, s. 28, tehtävä 49]. Tämän tehtävän a-kohta esitetään seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 4.1. Osoitetaan raja-arvon epsilon-delta -määritelmän mukaisesti, että

$$\lim_{x \to 2} 5x = 10.$$

Olkoon $\epsilon > 0$, jolloin on löydettävä $\delta > 0$ siten, että jos $0 < |x-2| < \delta$, niin $|5x-10| < \epsilon$.

Koska $|5x-10| = 5|x-2|$, niin $|5x-10| < \epsilon$, kun $|x-2| < \frac{\epsilon}{5}$. Tällöin valitaan $\delta = \frac{\epsilon}{5}$. Siis $|f(x)-10| < \epsilon$, kun $0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{5}$, joten luvuksi δ käy mikä tahansa positiivinen luku $\delta \leq \frac{\epsilon}{5}$.

Esimerkiksi paloittain määriteltyjen funktioiden yhteydessä voidaan kohdata tilanne, jossa pistettä lähestyttäessä raja-arvo saa eri arvoja riippuen siitä kummalta puolelta tarkasteltavaa pistettä lähestytään. Tällaisissa tilanteissa raja-arvon määritelmän 4.1 epätäsmällisyys tulee esille. Määritellään seuraavaksi *toispuoleiset raja-arvot*, jotka antavat keinon paloittain määriteltyjen funktioiden raja-arvon olemassaolon tutkimiseen.

Määritelmä 4.3. Olkoon funktio f määritelty ainakin välillä $]a-c, a[$, missä $c > 0$. Tällöin

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos $a - \delta < x < a$, niin $|f(x)-b| < \epsilon$. Tällöin lukua b kutsutaan funktion f *vasemmanpuoleiseksi raja-arvoksi.*

Määritelmä 4.4. Olkoon funktio f määritelty ainakin välillä $]a, a+c[$, missä $c > 0$. Tällöin

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos $a < x < a + \delta$, niin $|f(x) - b| < \epsilon$. Tällöin lukua b kutsutaan funktion f *oikeanpuoleiseksi raja-arvoksi.*

Toispuolisten raja-arvojen avulla voidaan tutkia yleisen raja-arvon olemassaoloa kuten seuraavassa lauseessa todetaan.

Lause 4.1. *Olkoon funktio f määritelty pisteen a molemmille puolilla. Tällöin*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b.$$

Todistus. Sivuutetaan.

Huomautus 4.3. Lauseen 4.1 mukaan funktiolla f on raja-arvo b pisteessä a, jos ja vain jos sillä on pisteessä a sekä vasemman- että oikeanpuolinen raja-arvo ja nämä raja-arvot ovat yhtä suuret.

4.3 Funktion jatkuvuus

Edellisessä luvussa 4.2 määriteltyä raja-arvon käsitettä tarvitaan myös tarkasteltaessa funktion jatkuvuutta. Ensiksi tarkastellaan funktion jatkuvuutta yhdessä pisteessä. Jäljempänä laajennetaan jatkuvuus koskemaan erilaisia joukkoja ja välejä.

Määritelmä 4.5. Olkoon funktio f määritelty välillä $]a-c, a+c[$, missä $c > 0$. Tällöin funktio f on *jatkuva* pisteessä a, jos ja vain jos

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Jos funktio ei ole jatkuva pisteessä a, se on *epäjatkuva* pisteessä a.

Huomautus 4.4. Funktion raja-arvon määritelmässä 4.2 ei vaadita, että funktio f olisi määritelty tarkasteltavassa pisteessä a. Määritelmän 4.5 mukaisesti on kuitenkin voitu määrittää $f(a)$, joten tällöin funktion f on oltava määritelty pisteessä a.

Jatkuvuuden määritelmän voidaan katsoa rakentuvan kolmesta ehdosta, jolloin saadaan funktion jatkuvuudelle seuraava määritelmä.

Määritelmä 4.6. Funktio f on jatkuva pisteessä a, jos yhtäaikaa ovat voimassa seuraavat ehdot

(i) funktio f on määritelty pisteessä a

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ on olemassa

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Huomautus 4.5. Määritelmä 4.6 antaa hyvän keinon jatkuvuuden tutkimiseen. Haluttaessa osoittaa funktio jatkuvaksi, tulee näyttää, että kaikki kolme ehtoa pätevät. Todistettaessa funktiota epäjatkuvaksi riittää osoittaa, ettei yksi ehdoista päde.

Kuten aikaisemmin luvussa 4.2 todettiin, raja-arvoa voidaan tarkastella toispuolisesti. Samoin voidaan tarkastella jatkuvuutta sekä vasemmanpuolisesti että oikeanpuolisesti.

Määritelmä 4.7. Olkoon funktio f määritelty välillä $]a-c, a+c[$, missä $c > 0$. Funktiota f kutsutaan *vasemmanpuolisesti jatkuvaksi* pisteessä a, jos ja vain jos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

Vastaavasti funktiota f kutsutaan *oikeanpuolisesti jatkuvaksi* pisteessä a, jos ja vain jos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Toispuolisten jatkuvuuksien avulla saadaan lause erityisesti paloittain määriteltyjen funktioiden jatkuvuuden tutkimiseen.

Lause 4.2. *Funktio f on jatkuva pisteessä a, jos ja vain jos*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Todistus. Sivuutetaan.

Laajennetaan seuraavaksi jatkuvuuden määritelmä käsittämään avoimia ja suljettuja välejä.

Määritelmä 4.8. Olkoon funktio f määritelty avoimella välillä $]a, b[$. Tällöin funktio f on *jatkuva välillä* $]a, b[$, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in]a, b[$.

Määritelmä 4.9. Olkoon funktio f määritelty suljetulla välillä $[a, b]$. Tällöin funktio f on *jatkuva välillä* $[a, b]$, jos funktio on

(i) jatkuva välillä $]a, b[$

(ii) oikeanpuolisesti jatkuva välin päätepisteessä a

(iii) vasemmanpuolisesti jatkuva välin päätepisteessä b.

Huomautus 4.6. Määritelmän 4.9 tapaan voidaan tarkastella jatkuvuutta myös puoliavoimella ja rajoittamattomalla välillä.

Seuraavaa lausetta tarvitaan jatkossa esitettävien lauseiden todistamiseen, mutta siinä esitetään myös yksi jatkuuvuuden perusominaisuuksista.

Lause 4.3. *Jos funktio f on jatkuva suljetulla välillä* $[a, b]$*, niin se on rajoitettu suljetulla välillä* $[a, b]$.

Todistus. Olkoon

$$A = \{\, x \mid x \in [a, b], f \text{ rajoitettu välillä } [a, x]\}.$$

Selvästi nähdään, että joukko A on epätyhjä, koska $a \in A$. Lisäksi joukko A on ylhäältä rajoitettu, ylärajana b. Tällöin pienimmän ylärajan aksiooman (Kts. [10, s. 586]) perusteella voidaan asettaa $c = \sup A$.

Osoitetaan sitten, että $c = b$. Oletetaan ensin, että $c < b$. Funktio f on jatkuva kohdassa c, joten f on rajoitettu jollakin välillä $[c - k, c + k]$, missä $k > 0$. Koska f on rajoitettu väleillä $[a, c-k]$ ja $[c-k, c+k]$, on se rajoitettu myös välillä $[a, c+k]$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $c = \sup A$. Tällöin on oltava $c = b$.

Nyt funktio f on rajoitettu välillä $[a, x]$ kaikilla $x < b$. Funktion f jatkuvuudesta seuraa, että f on rajoitettu jollakin välillä $[b-k, b]$. Koska $b-k < b$, edellä osoitetun perusteella tiedetään, että f on rajoitettu välillä $[a, b - k]$. Koska funktio f on rajoitettu välillä $[a, b - k]$ ja $[b - k, b]$, on se rajoitettu koko välillä $[a, b]$. On siis todistettu lauseen 4.3 paikkansa pitävyys.

Jatkuvien funktioiden ominaisuudet mahdollistavat muun muassa funktioiden nollakohtien etsinnän, sillä jatkuva funktio ei voi vaihtaa merkkiään saamatta välillä arvoa 0. Tämä on muotoiltu suraavaksi lauseeksi eli niin kutsutuksi *Bolzanon lauseeksi.*

Lause 4.4 (Bolzanon lause)**.** *Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja saakoon se välin päätepisteissä erimerkkiset arvot (eli $f(a)f(b) < 0$). Tällöin avoimella välillä $]a, b[$ on ainakin yksi sellainen piste c, että $f(c) = 0$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $f(a) < 0 < f(b)$. Vastaavasti voidaan todistaa tapaus $f(a) > 0 > f(b)$.

Olkoon

$$A = \{\, x \in [a, b] \mid f(x) < 0 \,\}.$$

Nyt joukko A on epätyhjä, sillä $f(a) < 0$, joten $a \in A$. Lisäksi b on joukon A yläraja, joten joukko A on ylhäältä rajoitettu. Tällöin pienimmän ylärajan aksiooman (Kts. [10, s. 586]) mukaan on olemassa $\sup A = c$. Nyt selvästi $c \in [a, b]$.

Osoitetaan, että $f(c) = 0$, näyttämällä oletuksien $f(c) > 0$ ja $f(c) < 0$ johtavan ristiriitaan.

Oletetaan ensin, että $f(c) > 0$. Koska funktio f on jatkuva, niin tällöin on olemassa väli $]c - k, c + k[\subset [a, b]$, missä $f(x) > 0$. Olkoon $m = c - \frac{k}{2}$. Tällöin $m < c$, $m \in]c - k, c + k[$ ja $f(m) > 0$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $c = \sup A$. Siis ei voi olla $f(c) > 0$.

Oletetaan sitten, että $f(c) < 0$. Koska funktio f on jatkuva, niin on olemassa väli $]c - k, c + k[\subset [a, b]$, missä $f(x) < 0$. Olkoon $n = c + \frac{k}{2}$. Tällöin $n > c$, $n \in]c - k, c + k[$ ja $f(n) < 0$. Tämä on ristiriidassa oletuksen $c = \sup A$ kanssa. Siis ei voi olla myöskään $f(c) < 0$.

On siis osoitettu, että ei voi olla $f(c) > 0$ ja $f(c) < 0$, joten on oltava $f(c) = 0$.

Vastaavasti voidaan käsitellä tilanne $f(a) > 0 > f(b)$. Näin on todistettu lause 4.4.

Huomautus 4.7. Lause 4.4 kertoo siis, että muuttuja arvojen a ja b välillä on ainakin yksi funktion f nollakohta.

Oppikirjassa [4, s. 36] Bolzanon lause esitetään, mutta sitä ei todisteta, koska todistuksessa tarvitaan lukiokurssien sisällön ylittäviä tietoja eli supremumin käsitettä.

Lukiotasolla jatkuva funktio kuvaillaan katkeamattomaksi käyräksi. Tämän kuvailun perusta on seuraavassa lauseessa.

Lause 4.5 (Jatkuvien funktioiden väliarvolause)**.** *Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja olkoon K mikä tahansa luku arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä (eli $f(a) < K < f(b)$ tai $f(a) < K < f(b)$). Tällöin on olemassa ainakin yksi luku $c \in]a, b[$ siten, että $f(c) = K$.*

Todistus. Olkoon $f(a) < K < f(b)$. Muodostetaan funktio

$$g(x) = f(x) - K.$$

Funktio g on tällöin jatkuva välillä $[a, b]$, sillä funktio f on jatkuva tällä välillä ja K on vakiofunktio.
Nyt $g(a) = f(a) - K < 0$, sillä oletuksen mukaan $f(a) < K$. Lisäksi $g(b) = f(b) - K > 0$, sillä oletuksen mukaan $f(b) > K$. Tiedetään siis, että $g(a) < 0 < g(b)$. Tällöin lauseen 4.4 perusteella on olemassa luku $c \in]a, b[$ siten, että $g(c) = 0$. Tällöin $f(c) - K = 0$ eli $f(c) = K$.
Vastaavasti käsitellään tapaus $f(a) > K > f(b)$. Näiden kohtien perusteella on todistettu lause 4.5.

Oppikirjassa [4, s. 36] jatkuvien funktioiden väliarvolause esitetään, mutta todistus jätetään harjoitustehtäväksi [4, s. 41, tehtävä 74].

Lauseen 4.5 lisäksi jatkuvien funktioiden käsittelyssä suuri merkitys on suurimman ja pienimmän arvon olemassaololla, jonka tutkimisessa auttaa seuraava lause.

Lause 4.6 (Suurimman ja pienimmän arvon olemassaololause)**.** *Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Tällöin funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa tällä välillä $[a, b]$.*

Toisin sanoen on olemassa $x_1, x_2 \in [a, b]$ siten, että $f(x_1) = m$ ja $f(x_2) = M$, missä $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Todistus. Todistetaan ensin, että funktio saa suurimman arvonsa välillä $[a, b]$. Oletuksen mukaan funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, joten lauseen 4.3 perusteella se on myös rajoitettu välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa pienin yläraja (sup) pienimmän ylärajan aksiooman perusteella (Kts. [10, s. 586]).

Olkoon

$$M = \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \}.$$

Osoitetaan, että on olemassa sellainen luku $x_1 \in [a, b]$, että $f(x_1) = M$. Tehdään tämä vastaoletuksen avulla eli oletetaan, että $f(x) \neq M$ kaikilla $x \in [a, b]$. Muodostetaan funktio

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - M}.$$

Nyt funktio g on vastaoletuksen perusteella määritelty ja siten jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin funktio g on myös rajoitettu lauseen 4.3 perusteella. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tarkastelemalla funktion g määritelmää nähdään, ettei se rationaalifunktiona voi olla rajoitettu välillä $[a, b]$. Vastaoletus, että $f(x) \neq M$ kaikilla $x \in [a, b]$ on johtanut ristiriitaan, joten on olemassa sellainen luku $x_1 \in [a, b]$, että $f(x_1) = M$.

Vastaavasti voidaan osoittaa, että funktio f saa pienimmän arvonsa

$$m = \inf \{ f(x) : x \in [a, b] \}.$$

Näiden kohtien perusteella on siis osoitettu, että funktiolla f on pienin ja suurin arvo välillä $[a, b]$, joten lause 4.6 on todistettu.

Lause 4.6 esitellään lukion oppikirjassa [4, s. 37], mutta todistus sivuutetaan jälleen, koska siihen tarvittavat tiedot ylittävät lukiokurssien vaatimukset.

Seuraava esimerkki esittelee Bolzanon lauseen (lause 4.4) käyttämistä lukiotasoisessa todistustehtävässä [4, s. 40, tehtävä 67].

Esimerkki 4.2. Osoita, että jos a on mikä tahansa reaaliluku, niin kolmannen asteen yhtälöllä $2x^3+ax^2+a^2x+1 = 0$ on ainakin yksi juuri välillä $]-1, 0[$.
Ratkaisu:
Kolmannen asteen yhtälön $2x^3 + ax^2 + a^2x + 1 = 0$ ratkaisut ovat polynomifunktion $P(x) = 2x^3 + ax^2 + a^2x + 1$ nollakohtia. Polynomifunktio $P(x)$ on kaikkialla jatkuva, joten riittää osoittaa, että funktion arvot ovat erimerkkiset välin päätepisteissä -1 ja 0.
Nyt

$$P(0) = 1 > 0$$

ja

$$P(-1) = -a^2 + a + 1,$$

joten on osoitettava, että $-a^2 + a + 1 < 0$. Yhtälöllä $-a^2 + a + 1 = 0$ ei ole reaalijuuria ja lausekkeen $a-a^2+a+1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten lauseke $-a^2 + a + 1$ saa vain negatiivisia arvoja. Tällöin $P(-1) < 0 < P(0)$, joten lauseen 4.4 perusteella yhtälöllä $2x^3+ax^2+a^2x+1 = 0$ on ainakin yksi nollakohta välillä $] - 1, 0[$.

4.4 Differentiaalilaskenta

Tässä luvussa tarkastellaan derivaatan määritelmää ja siihen liittyviä lauseita. Vaikka tutkielman alussa on lukijan oletettu ymmärtävän derivaatan käsitteen, aloitetaan derivaattaan tutustuminen kuitenkin määrittelemällä derivaatta.

Pitkä matematiikka -kirjassa [4, s. 42] annetaan derivaatalle seuraava kuvaileva määritelmä:

> Funktio f on derivoituva kohdassa a, jos funktion f kuvaajalle voidaan piirtää muuttujan arvon a kohdalle yksikäsitteinen tangentti, joka ei ole pystysuora. Funktion f derivaatta $f'(a)$ kohdassa a on tangentin kulmakerroin.

Täsmällisesti derivaattamääritellään erotusosamäärän avulla ja näin tehdään myös lukiomatematiikassa [4, s. 44].

Määritelmä 4.10. Funktio f on derivoituva kohdassa x, jos ja vain jos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on olemassa.
Jos raja-arvo on olemassa, sitä kutsutaan funktion f *derivaataksi kohdassa* x ja merkitään $f'(x)$.

Huomautus 4.8. Erotusosamäärän lausekkeessa voidaan merkitä $h = x-a$, jolloin kun $h \to 0$, niin $x \to a$ ja erotusosamäärän lauseke tulee muotoon

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Lukiossa käytetään yleensä tätä muotoa.

Derivoituvuuden ja jatkuvuuden välillä on seuraava yhteys.

Lause 4.7. *Jos funktio f on derivoituva kohdassa x, niin se on jatkuva kohdassa x.*

Todistus. Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa x. Tällöin erotusosamäärällä on raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Kun $h \neq 0$ ja $x+h$ kuuluun funktion f määrittelyjoukkoon, voidaan kirjoittaa

$$f(x+h)-f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h$$

eli

$$f(x+h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h + f(x).$$

Nyt oletuksen perusteella ja kun tiedetään, että $\lim_{h\to 0} h = 0$, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(x+h) &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h + f(x)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h + \lim_{h\to 0} f(x) \\
&= f'(x) \cdot 0 + f(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x),$$

joten määritelmän 4.5 perusteella, funktio f on jatkuva kohdassa x. Näin on näytetty todeksi lause 4.7.

Huomautus 4.9. Lause 4.7 pätee myös tarkasteltaessa funktiota f välillä I. Tulee huomata, että lause 4.7 ei kuitenkaan päde kääntäen, eli kaikki jatkuvat funktiot eivät ole derivoituvia.

Kuten aiemmin tarkasteltiin toispuolisia raja-arvoja ja toispuolista jatkuvuutta, on usein tarpeen tarkastella myös toispuolisia derivaattoja.

Määritelmä 4.11. Funktion f *vasemmanpuolinen derivaatta* kohdassa x on

$$f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vastaavasti *oikeanpuolinen derivaatta* kohdassa x on

$$f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Lause 4.8. *Funktio f on derivoituva kohdassa x, jos ja vain jos*

$$f'_{-}(x) = f'_{+}(x)$$

eli

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Todistus. Sivuutetaan.

Derivoimissääntöjä ei tässä yhteydessä esitetä, vaan ne oletetaan tunnetuiksi.

Seuraava lause on yksi differentiaalilaskennan peruslauseista ja sitä käytetään monien muiden lauseiden todistamiseen. Tämä lause ylittää lukiokurssin vaatimukset, mutta se toimii hyvänä perusteluna aiemmin esitellylle derivaatan kuvailevalle määrittelylle.

Lause 4.9 (Differentiaalilaskennan väliarvolause)**.** *Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä $]a, b[$ ja jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$.*
Tällöin on olemassa ainakin yksi sellainen luku $c \in]a, b[$, että

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

eli

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Todistus. Sivuutetaan tässä tutkielmassa. Todistuksessa tarvitaan niin kutsuttua *Rollen lausetta*, joka ei kuulu lukiokurssien vaatimuksiin. Kts. [10, s. 198]

Huomautus 4.10. Lauseke $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ on pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan suoran l kulmakerroin. Tällöin pisteeseen $(c, f(c))$ piirretyn funktion f tangentin on oltava suoran l kanssa yhdensuuntainen, sillä yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat ja aiemmin on todettu, että tangentin kulmakerroin on derivaatta kohdassa c.

Differentiaalilaskentaan tarvitaan tietoa myös *monotonisista* eli *kasvavista* ja *vähenevistä* funktioista. Lukion oppimäärässä monotonisuus sisältyy jo kurssiin 7 (*Derivaatta*). Matemaattinen tausta esitetään myös tässä, sillä monotonisuudella on niin suuri merkitys tutkittavalla kurssilla MAA13.

Määritelmä 4.12. Funktion f sanotaan olevan *aidosti kasvava* välillä I, jos ja vain jos kaikilla luvuilla $x_1, x_2 \in I$ on voimassa

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Vastaavasti funktion f sanotaan olevan *aidosti vähenevä* välillä I, jos ja vain jos kaikilla luvuilla $x_1, x_2 \in I$ on voimassa

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Huomautus 4.11. Monotonisuus ei ole aitoa, jos sallitaan määritelmässä 4.12 myös yhtäsuuruus. Siis funktio f on *kasvava*, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

ja *vähenevä*, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funktion derivaatan tutkiminen antaa keinon monotonisuuden selvittämiseen.

Lause 4.10. *Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä I. Tällöin*

(i) Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in I$, niin f on aidosti kasvava välillä I.

(ii) Jos $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in I$, niin f on aidosti vähenevä välillä I.

Todistus. Osoitetaan väitteet tosiksi lauseen 4.9 avulla. Valitaan sellaiset mielivaltaiset pisteet $x_1, x_2 \in I$, joilla pätee $x_1 < x_2$. Oletuksen perusteella f on derivoituva välillä I, joten lauseen 4.7 perusteella funktio f on myös jatkuva välillä I. Tällöin f on derivoituva välillä $]x_1, x_2[$ ja jatkuva välillä $[x_1, x_2]$.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen (lause 4.9) oletukset ovat nyt kunnossa, joten on oltava sellainen luku $c \in]x_1, x_2[$, että

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Todistetaan ensin kohta (i). Oletetaan, että $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in I$. Tällöin $f'(c) > 0$, joten voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &> 0 \\ \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) &> 0 \\ \Rightarrow f(x_2) &> f(x_1).\end{aligned}$$

Siis $f(x_1) < f(x_2)$, kun $x_1 < x_2$, joten määritelmän 4.12 perusteella funktio f on aidosti kasvava.

Kohta (ii) voidaan todistaa vastaavalla tavalla aidosti väheneväksi. Kohtien (i) ja (ii) todistusten perusteella lause 4.10 on osoitettu todeksi.

Huomautus 4.12. Aidosti monotonisen funktion derivaattafunktio voi saada arvon 0 yksittäisissä välin pisteissä, kunhan ehto

$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{tai} \qquad x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)$$

täyttyy.

Jos ehto ei täyty, eli

$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq \ f(x_2) \qquad \text{tai} \qquad x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geq \ f(x_2)$$

kyseessä on niin kutsuttu funktion *terassikohta* ja funktio on monotoninen.

Lause 4.11. *Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä I. Tällöin on olemassa vakio k, jolla $f(x) = k$ kaikilla $x \in I$, jos ja vain jos $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in I$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $f(x) = k$ kaikilla $x \in I$. Tällöin derivaatan määritelmän 4.10 perusteella

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Siis jos $f(x) = k$ kaikilla $x \in I$, niin $f'(x) = 0$.

Oletetaan sitten, että $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in I$. Tällöin, jos $c \in I$, niin $f'(c) = 0$. Osoitetaan väite todeksi lauseen 4.9 avulla. Valitaan mielivaltainen piste $a \in I$. Olkoon $k = f(a)$. Valitaan lisäksi sellaiset mielivaltaiset pisteet $x_1, x_2 \in I$, joilla pätee $x_1 < x_2$. Oletuksen perusteella f on derivoituva välillä I, joten lauseen 4.7 perusteella f on myös jatkuva välillä I. Tällöin f on derivoituva välillä $]x_1, x_2[$ ja jatkuva välillä $[x_1, x_2]$.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen (lause 4.9) oletukset ovat nyt kunnossa, joten on oltava sellainen luku $c \in]x_1, x_2[$, että

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

Siis

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= 0 \\ f(x_2) &= f(x_1). \end{aligned}$$

Koska $f(x_1) = f(x_2)$, kaikilla $x_1, x_2 \in I$, niin on oltava $f(x) = k$. Siis jos $f'(x)$ kaikilla $x \in I$, niin $f(x) = k$ kaikilla $x \in I$.

On siis osoitettu, että lause pätee molempiin suuntiin, joten lause 4.11 on todistettu.

Lauseen 4.11 suunta "*jos* $f'(x) = 0$, *niin* $f(x) = k$" esitellään lukion oppikirjassa [4, s. 49] nimellä integraalilaskennan peruslause. Lausetta ei lukiotasolla todisteta johtuen todistuksessa käytettävästä lauseesta 4.9 eli differentiaalilaskennan väliarvolauseesta, jota ei lukiokurssin puitteissa esitetä.

4.5 Käänteisfunktio

Tässä luvussa määritellään käänteisfunktio ja tutustutaan sen ominaisuuksiin erityisesti differentiaalilaskennan kannalta.

Funktioille, jotka ovat bijektioita, voidaan muodostaa käänteisfunktio. Jatkossa rajoitutaan siis tarkastelemaan joukkoja $X, Y \subset \mathbb{R}$, missä joukko Y on joukon X kuvajoukko.

Määritelmä 4.13. Olkoon funktio $f : X \to Y$ bijektio ja joukko Y on joukon X kuvajoukko. Tällöin funktion f *käänteisfunktio* $f^{-1} : Y \to X$ on yksikäsitteinen funktio, joka on määritelty joukossa Y ja joka toteutttaa yhtälön

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{kaikilla } x \in Y.$$

Funktion aito monotonisuus takaa käänteisfunktion olemassaolon.

Lause 4.12. *Jos funktio $f : X \to Y$, missä joukko Y on joukon X kuvajoukko, on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, niin funktio f on bijektio ja sillä on käänteisfunktio $f^{-1} : Y \to X$.*

Todistus. Oletetaan, että funktio $f : X \to Y$ on aidosti kasvava. Olkoon $x_1, x_2 \in X$ sellaiset, että $x_1 \neq x_2$.

Jos $x_1 < x_2$, niin oletuksen ja määritelmän 4.12 perusteella $f(x_1) < f(x_2)$. Vastaavasti, jos $x_1 > x_2$, niin $f(x_1) > f(x_2)$. Näiden kohtien perusteella selvästi, kun $x_1 \neq x_2$, niin $f(x_1) \neq f(x_2)$, joten f on injektio. Koska joukko Y

on joukon X kuvajoukko, on jokaisella joukon Y alkiolla alkukuva. Tällöin funktio f on myös surjektio. Koska f on injektio ja surjektio, on se bijektio.

Vastaavasti voidaan osoittaa että, jos funktio f on aidosti vähenevä, niin se on bijektio. On siis osoitettu, että funktion f aidosta monotonisuudesta seuraa bijektiivisyys. Tällöin määritelmästä 4.13 seuraa, että funktiolla f on käänteisfunktio. On siis osoitettu lause 4.12 todeksi.

Huomautus 4.13. Oppikirjassa [4, s. 73] lause 4.12 esitetään ilman bijektiivisyyttä sääntönä käänteisfunktion olemassaololle. Bijektiivisyys ei kuulu lukion oppimäärään.

Lukiotasolla kuvaajat auttavat hahmottamaan teoriaa ja niin on varmasti myös käänteisfunktion tapauksessa. Käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja on funktion f kuvaajan peilaus suoran $y = x$ suhteen. Tämä ajatus auttanee ymmärtämään ominaisuuksien, kuten jatkuvuuden säilymisen, jota tarkastellaan seuraavaksi.

Lause 4.13. *Olkoon funktio $f : X \to Y$, missä joukko Y on joukon X kuvajoukko, bijektio ja määritelty välillä I. Jos funktio f on jatkuva, niin myös sen käänteisfunktio $f^{-1} : Y \to X$ on jatkuva.*

Todistus. Sivuutetaan.

Myös käänteisfunktiolle voidaan määrittää derivaattafunktio, kuten seuraavassa lauseessa todetaan.

Lause 4.14. *Olkoon derivoituvalla funktiolla $f : X \to Y$ käänteisfunktio $f^{-1} : Y \to X$, missä joukko Y on joukon X kuvajoukko. Olkoot a ja b sellaiset luvut, että $a \in X$ ja $b = f(a)$.*
Jos $f'(a) \neq 0$, niin $(f^{-1})'(b)$ on olemassa ja saadaan kaavasta

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Todistus. Sivuutetaan.

Huomautus 4.14. Oletuksesta $b = f(a)$ ja käänteisfunktion määritelmästä seuraa, että $a = f^{-1}(b)$, jolloin

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Tästä muodosta voidaan päätellä selvemmin, että käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva, kun se saa arvon, joka on derivaattafunktion f' nollakohta. Tällöin $f'(f^{-1}(b)) = 0$ ja lauseke ei ole määritelty.

Käänteisfunktion derivaatta esitetään lukiotasolla yleensä huomautuksessa 4.14 kuvatulla tavalla.

Esitetään esimerkkinä jälleen lukiotasoinen todistustehtävä käänteisfunktioon liittyen.

Esimerkki 4.3. Osoita, että funktiolla $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$ on käänteisfunktio. Määritä $(f^{-1})'(1)$. Missä kohdissa käänteisfunktio ei ole derivoituva? [4, s. 91, tehtävä 157]
Ratkaisu:
Osoitetaan ensin käänteisfunktion olemassaolo.

Funktion $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$ derivaattafunktio on

$$f'(x) = (-x^2+2x-1)e^{-x} = -(x-1)^2e^{-x}.$$

Koska $(x-1)^2 \geq 0$ ja $e^{-x} > 0$ kaikilla arvoilla x, niin $f'(x) \leq 0$ aina. Lisäksi derivaattafunktion $f'(x)$ ainoa nollakohta on $x = 1$, joten $f'(x) = 0$ vain yksittäisessä pisteessä. Tällöin funktio f on kaikkialla aidosti vähenevä lauseen 4.10 perusteella. Lauseen 4.12 perusteella funktiolla f on tällöin käänteisfunktio f^{-1}.

Määritetään sitten $(f^{-1})'(1)$. Lauseen 4.14 mukaan käänteisfunktion f^{-1} derivaatta kohdassa 1 on

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(a)},$$

missä $f'(x) = -(x-1)^2e^{-x}$ ja $a = f^{-1}(1)$. Huomataan, että $f(0) = 1$, joten $f^{-1}(1) = 0$. Siis on oltava, että $a = 0$. Tällöin

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{-(-1)^2 \cdot e^0} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Tarkastellaan sitten kohtia, joissa käänteisfunktio ei ole derivoituva. Kuten lauseesta 4.14 voitiin päätellä, käänteisfunktio ei ole derivoituva, kun $f'(a) = 0$ eli $f'(f^{-1}(b)) = 0$. Kuten jo aiemmin todettiin derivaattafunktion $f'(x)$ ainoa nollakohta on $x = 1$. Edelleen

$$f(1) = (1^2+1)e^{-1} = 2e^{-1}.$$

Koska $f(1) = 2e^{-1}$, niin $f^{-1}(2e^{-1}) = 1$, joten $f'(1) = 0$.

Edellä esitetyn perusteella käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva kohdassa $x = 2e^{-1}$.

5 Lukio- ja yliopistomatematiikan eroja

Luvussa 5.1 tarkastellaan aiemmin (Katso luku 2) esitellyssä lukion opetussuunnitelman perusteissa asetettuja tavoitteita matematiikan opiskelulle. Niiden pohjalta saadaan kuva siitä tasosta, jolla opiskelijoiden tulisi olla yliopisto-opintojensa alkaessa. Luvussa 5.2 perehdytään matematiikan oppimiseen vaikuttaviin tekijöihin Jorma Joutsenlahden väitöskirjaan perustuvan artikkelin [3] pohjalta. Opintonsa aloittavien opiskelijoiden todellisista taidoista ja tiedoista saadaan kuva Jouni Välijärven tutkimuksen [11] pohjalta luvussa 5.3. Luvussa 5.4 tarkastellaan eroja lukion ja yliopiston opiskelukäytänteissä sekä yleisesti matematiikassa. Tämän jälkeen luodaan yhteenveto lukio- ja yliopistomatematiikan eroista luvussa 5.5.

5.1 Lukion opetussuunnitelman perusteiden tavoitteiden tarkastelua

Lukioon tulevien opiskelijoiden lähtötaso saattaa olla hyvinkin erilainen, mikä voi aiheuttaa ongelmia heti lukio-opintojen alusta lähtien. Vaikka kaikki opiskelijat ovat käyneet peruskoulun, jonka tulisi antaa kaikille samat valmiudet lukio-opintoihin, saattaa todellinen tilanne olla toisenlainen. Perusopetuksen matematiikan kansallisten oppimistulosten [8] perusteella lukion pitkän matematiikan opiskelua suunnittelevilla taidot ovat erinomaisia tai kiitettäviä. Vastaavasti lyhyen matematiikan opiskelua suunnittelevilla taidot ovat vastaavasti hyvät tai tyydyttävät. Parhaiten peruskoulun päättävät nuoret hallitsevat luvut ja laskutoimitukset. Heikointa osaaminen on geometriassa. Eniten tasoeroa opiskelijoiden välillä ilmenee algebran ja funktiolaskennan hallitsemisessa.

Tutkimuksessa [8] ei ole tarkemmin tarkasteltu peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden toteutumista. Yleisen keskustelun perusteella voidaan kuitenkin olettaa, että peruskoululle opetussuunnitelmassa asetetut tavoitteet eivät täyty kaikilla lukion aloittavilla opiskelijoilla. Tähän vaikuttavat monet tekijät, niin opettaja, opiskeluympäristö, ajanpuute kuin sekin, ettei opiskelijalla yksinkertaisesti ole valmiuksia tai tarvetta ja sitä kautta halua ymmärtää matematiikkaa. Opiskelijan jatko-opintojen kannalta on ikävää, että peruskoulussa alkaneet ongelmat yleensä vain syvenevät lukiossa.

Lukion opetussuunnitelma asettaa opetukselle luvussa 2 kuvattuja tavoitteita ja keskeisiä sisältöjä. Yleisesti ottaen lukion opetussuunnitelmien perusteiden tavoitteet ovat sopusoinnussa matematiikan perusluonteen kanssa ja lisäksi ne korostavat korkeakouluissa tarvittavia olennaisia valmiuksia. Tavoitteet on selvästi asetettu korkealle. Tämä saa pohtimaan, onko niiden täyttyminen kaikkien opiskelijoiden kohdalla edes mahdollista. Jos kaikki nämä asetetut tavoitteet täyttyisivät, ei yliopistotasolla varmastikaan olisi ongelmia opiskelijoiden tietojen ja taitojen takia. Oletettavissa kuitenkin on, etteivät nämä kaikki tavoitteet täyty jokaisen opiskelijan kohdalla. Samoin kuin peruskoulussa, tavoitteiden täyttyminen on kiinni monesta asiasta, kuten opettajasta, käytettävissä olevasta ajasta ja tietysti opiskelijasta itsestään ja hänen kyvystään sekä halustaan oppia. Myös käytettävällä kirjasarjalla on vaikutusta asiaan. Huonoimmassa tapauksessa oppikirja ohjaa täysin opettajan valintoja ja jopa koulun omaa opetussuunnitelmaa. Tilanteen tulisi kuitenkin olla täysin päinvastainen. Opettajan toimintaa pitäisi ohjata opetussuunnitelma, eikä käytettävä oppikirja.

Tarkastellaan seuraavaksi muutamia opetussuunnitelmasta nousevia erityisosa-alueita. Opetussuunnitelma asettaa yhdeksi tavoitteeksi lukion pitkän matematiikan opetuksessa matemaattisen ajattelutaidon. Matemaattisen ajattelun opettaminen itsessään on haastavaa, joidenkin opiskelijoiden kohdalla lähes mahdotonta. Matemaattinen ajattelutaito rakentuu samalla, kun muut matemaattiset valmiudet kasvavat. Tämä vaatii usealla opiskelijalla asiaan keskittymistä ja pohdiskelua, johon hektisessä koulumaailmassa ei välttämättä ole mahdollisuutta.

Lisäksi opetussuunnitelman tavoitteista voidaan nostaa esille asioiden täsmällinen perusteleminen ja sisäistäminen. Matematiikka ei siis saisi olla kaavojen ja laskutapojen ulkoa opettelua. Opiskelijoilla ei välttämättä ole vielä lukioiässä sitä pitkäjänteisyyttä, jota tarvitaan asioiden täsmälliseen perustelemiseen. Tähän tulisi kuitenkin kiinnittää huomiota, sillä perusteluiden hallinta on jatko-opinnoissa tärkeässä osassa. Asioiden sisäistämistä vaikeuttavat kiire, mahdolliset väärät käsitykset ja heikot tiedot perusopetuksesta.

Jos opiskelijalta jää matematiikan tärkeitä osa-alueita ja taitoja oppimatta, se aiheuttaa todennäköisesti ongelmia jatko-opinnoissa, joissa matematiikkaa tarvitaan. Vaikka pitkän matematiikan opetuksen tavoitteissa matemaattista todistamista ei erityisesti mainitakaan, on se oleellinen osa matematiikkaa ja sen merkitys erityisesti yliopistomatematiikassa on suuri. Siksi onkin harmillista, että todistamista harjoitellaan lukiotasolla melko vähän.

Lukion historiallinen merkitys on ollut valmentaa nuoria korkeakouluopintoihin, ja monelle sen merkitys on edelleen sama. Tulisi kuitenkin muistaa myös lukion yleissivistävä merkitys. Matematiikasta ei ole hyötyä ainoastaan matematiikan ja tekniikan alan opiskeljoille, vaan myös esimerkiksi kauppa- ja hallintotieteitä sekä psykologiaa opiskelevat hyötyvät matemaattisista taidoista ja tarvitsevat niitä opinnoissaan. Myöskään matematiikan opiskelija ei pärjää pelkällä matemaattisella taidolla. Jatko-opinnoissa vaaditaan myös muun muassa äidinkielen, englannin ja tietotekniikan hallintaa sekä tietysti viestintä- ja ryhmätyöskentelytaitoja.

5.2 Matematiikan oppimiseen vaikuttavia tekijöitä

Edellä luvussa 5.1 tarkasteltiin opetussuunnitelman asettamia tavoitteita lukio-opetukselle. On syytä tarkastella myös matematiikan oppimiseen vaikuttavia tekijöitä ja tätä kautta löytää mahdollisuuksia tavoitteiden parempaan saavuttamiseen.

Pitkän matematiikan sujuvan opiskelun takaamiseksi opiskelijan tulisi hallita erilaiset matematiikan opiskeluun liittyvät proseduurit, pystyä työskentelemään tavoitteellisesti ja pitkäjänteisesti sekä ymmärtää erilaisia asiakokonaisuuksia ja asioiden välisiä yhteyksiä. Erilaiset matemaattiset proseduurit tulisi hallita ilman laskimen ja taulukkokirjan käyttöä, jotta oppimista todella tapahtuisi. Hallinnan opetteleminen on aikaa vievää, sillä se vaatii muistamista ja harjoitusta. Tällä tavoin saavutetaan kuitenkin hyviä tuloksia, sillä proseduurit hallitsemalla opiskelijalta onnistuu paremmin kaikentyyppiset tehtävät. [3]

Nykyajan kiireisessä yhteiskunnassa pitkäjänteinen työskentely voi tuottaa opiskelijoille vaikeuksia. Opiskelijat tulisi saada ymmärtämään, että oppiminen vaatii tavoitteiden asettamista ja pitkäjänteistä työskentelyä näiden tavoitteiden saavuttamiseksi. Asiakokonaisuuksien ja eri asioiden välisien yhteyksien ymmärtämistä vaikeuttaa osaltaan nykyinen kurssimuotoinen lukioopetus. Kurssit on rakennettu tiettyjen aihealueiden ympärille. Tällöin mahdollisesti vasta kertauskurssilla opiskelija kohtaa tilanteen, jossa hänen on itse tunnistettava mihin aihealueeseen tehtävä liittyy ja mitä ratkaisutapaa on paras käyttää. Monen opiskelijan kohdalla tämä tilanne tulee vastaan liian myöhäisessä vaiheessa ylioppilaskirjoituksia silmällä pitäen. [3]

Toisaalta sama ongelma on nähtävissä jo kurssien sisällä. Opiskelijat osaavat laskea tehtäviä hyvin, kun he tietävät, mihin kurssin osa-alueeseen ne liittyvät. Kokeessa kohdataan kuitenkin tilanne, jossa kaikkien osa-alueiden tehtävät ovat sekaisin ja opiskelijan on itse osattava yhdistää asia oikeaan aihealueeseen ja valittava oikea ratkaisutapa. Jos tämä tuottaa ongelmia, nähdään, että opiskelija ei ole ymmärtänyt asiaa vaan ennemminkin opiskellut ulkoa eri asioihin liittyviä ratkaisumenetelmiä.

Edellä esitetyn lisäksi yhdeksi oppimista vaikeuttavaksi tekijäksi voidaan nostaa ajan puute. Kursseilla on ainainen kiire, kun kaikki opetussuunnitelmassa määritetyt asiat pyritään opettamaan ja oppimaan. Tällöin on aikaa keskittyä ainoastaan peruskäsitteiden ja yleisimpien ratkaisumenetelmien opetteluun eikä aikaa asian sisäistämiseen ole tarpeeksi. Usein myös sovellustehtävät joudutaan jättämään vähemmälle käsittelylle, mikä matematiikan luonteen ja käytön ymmärtämisen kannalta ei ole hyvä asia. Opettaja joutuu tekemään rohkeita ratkaisuja keskittyä tiettyihin aihealueisiin, jos haluaa, että opiskelijat ehtivät sisäistää tärkeimmät asiat kunnolla. Erityisesti aloitteville ja opettajauraltaan nuorille opettajille tämä voi olla haaste. [3]

Aikaisempien opintojen vaikutukset ja puutteelliset taidot näkyvät matematiikan yliopisto-opinnoissa. Lukiosta tulevat opiskelijat eivät ole tottuneita todistamiseen, he eivät tunne erilaisia todistamismenetelmiä ja ylipäätänsä todistamisajattelu ei ole päässyt kehittymään. Todistamiseen on tutustuttu yleensä vasta lukiossa ja sitä ehditään harjoitella kovin vähän. Tämä on valitettavaa, sillä todistamisajattelu on hyvin keskeinen osa matematiikan yliopisto-opintoja. [3]

Myös matematiikan kielentäminen eli taito tuoda ilmi omaa matemaattista ajatteluaan, tuottaa ongelmia lukiolaisille. Usein osataan käyttää oikeita menetelmiä mutta ei osata perustella, miksi käytetty menetelmä on valittu. Myös asioiden selittäminen matemaattisesti oikein niin ääneen kuin kirjoittamallakin tuottaa ongelmia. Yliopistotasolla on tärkeää pystyä perustelemaan matemaattisia valintojaan ja selittämään harjoitustehtävien ratkaisuja. Erityisesti opettajalinjalla opiskeleville matematiikan kielentäminen on tärkeä taitoa tulevaisuutta ajatellen. [3]

Lukiolaisilla ylioppilaskirjoituksissakin tarvittavat metakognitiiviset taidot ovat usein puutteellisia. Kurssimuotoinen ja tiettyyn aihepiiriin sidottu opetus ei näitä taitoja kehitä. Ylipäätänsäkään ongelmanratkaisutaidot eivät pääse kehittymään tarvittavalle tasolle. Tällä tasolla opiskelija pystyisi itse määrittämään ongelman, muokkaamaan sen ratkaistavaan muotoon ja lopulta valitsemaan ongelmaan soveltuvan ratkaisumenetelmän. [3]

Mihin lukio-opetuksessa sitten tulisi pyrkiä, jotta voitaisiin korjata edellä esitettyjä ongelmakohtia? Ensinnäkin matematiikan kielentämistä tulisi harjoitella jo mielellään peruskoulusta lähtien. Tätä voitaisiin tehdä esimerkiksi selittämällä tehtävien ratkaisuja ääneen työparille tai koko luokalle. Lisäksi opettajien olisi hyvä kiinnittää huomiota ratkaisujen rakenteeseen jo aikaisesta vaiheesta alkaen. Eri aihealueiden välisiä yhteyksiä ja aihealueet yhdistäviä tehtäviä olisi syytä harjoitella laajemminkin jo ennen kertauskurssia. Lisäksi lukio-opetukseen kaivattaisiin enemmän todistamista sekä avoimia tehtäviä. [3]

Tässä kohdataan taas aiemmin mainittu ongelma, aika. Jos jo nyt opetussuunnitelmassa tuntuu olevan liian paljon asiaa käytettävissä olevaan aikaan nähden, miten saadaan edellä mainitut asiat mahdutettua mukaan. Näitä asioita ei pitäisi kuitenkaan nähdä pakollisena lisätyönä vaan enemminkin asioina, jotka opettajan ammattitaidolla saadaan luontevaksi osaksi opetusta. Esimerkiksi matematiikan kielentämistä ei tarvitse varsinaisesti opettaa, kun opettaja itse käyttää asioista oikeita termejä ja rohkaisee opiskelijoita puhumaan matematiikan kielellä. Olisi toivottavaa, että opettaja uskaltaisi tehdä opetuksessaan sellaisia valintoja, että matematiikan oppiminen saisi parhaat mahdolliset lähtökohdat.

5.3 Lukion vaikutus yliopisto-opintoihin

Suomessa lukio-opetuksen pääasiallinen tehtävä on ollut ja on edelleen valmistaa nuoria jatko-opintoihin, erityisesti korkeakouluopintoihin. Vuosien saatossa yliopiston ja lukion välinen ero on pienentynyt ja yliopisto on muuttunut entistä enemmän koulumaisemmaksi. Opettajien odotukset yliopisto-opintonsa aloittavien opiskelijoiden valmiuksista vaihtelevat alasta riippuen. Yhtäläisyyksinä on kuitenkin havaittavissa odotukset opiskelijoiden kiinnostuksesta ja positiivisesta asenteesta opiskeltavaa ainetta kohtaan. Opettajat haluaisivat myös huomioida opiskelijan yksilöllisyyden. Tämä on haasteellista varsinkin oppiaineissa ja kursseilla, joilla opetus keskittyy massaluentoihin. Matemaattisten aineiden opiskelijoiden lukiotaustan todetaan olevan muita aloja kirjavampaa, mikä johtuu osittain mahdollisuudesta päästä sisään yliopistoon pelkällä hyvällä pitkän matematiikan ylioppilaskokeen arvosanalla. [11]

Lukio-opetuksessa tulisi korostaa tietoaineksen laatua määrän sijaan. Olisi parempi, että se mikä on opittu, olisi opittu oikein ja sisäistetty kunnolla. Usein lukio-opetuksessa kuitenkin pyritään opettamaan kaikki mahdollinen, jolloin opiskelija ei välttämättä ehdi sisäistää kunnolla mitään opetetuista asioista. Lisäksi opittu tieto koetaan hyvin pirstoutuneeksi ja pinnalliseksi. [11]

Mahdollisuudet menestyä yliopisto-opinnoissa heikentyvät, jos lukiossa matematiikan opiskelu on ollut pelkkää kaavojen ulkoa opettelua ja opittujen kaavojen käyttöä esimerkkejä seuraten. Tämä ei johda todelliseen matematiikan oppimiseen ja matemaattisen ajattelun kehittymiseen. Matematiikan tärkein tehtävä on juuri matemaattisen ajattelun opettaminen. Opiskelijan pitäisi pystyä sisäistämään opetettu tietomäärä niin, että hän pystyy yhdistelemään, käyttämään ja soveltamaan oppimiaan asioita. Ongelmia saattaa aiheuttaa myös jatkuva ja etenkin virheellinen laskimen käyttö. Jo laskinta käyttääkseen on ymmärrettävä matematiikan perusteet kuten laskujärjestys eikä matematiikkaa siis ole mahdollista oppia laskimen kautta. [11]

Yliopistossa matematiikan opinnoissa korostuvia asioita ovat oikea käsitys matematiikan luonteesta, struktuureista ja eksaktin päättelyn menetelmistä. Lisäksi systemaattisella todistamisella on suuri rooli matematiikan yliopisto-opinnoissa. Korkeakouluissa matematiikan opetus rakentuu eksaktille todistamisella ja opiskelijan oletetaan tuntevan matemaattisen tiedon perusteet. Opiskelijoille saattaakin aiheuttaa ongelmia liikkuminen abstraktin ajattelun tasolla. Vielä lukiosta tuttu asioiden jatkuva konkretisointi ei ole enää mahdollista. [11]

Yliopiston opettajat kokevat matematiikan opiskelijoiden perustiedot korkeintaan kohtalaisiksi; tietysti joukkoon mahtuu myös huippuosaajia, mutta toisaalta myös heikompia osaajia. Osaaminen on laaja-alaista, mutta yleensä kovin pinnallista, sillä opiskelu lukiossa on ollut ulkolukua selkeän ajatteluprosessin sijaan. Opiskelijoilla puutteita esiintyy jo laskurutiineissa ja matematiikan perusrakenteissa. Aihealueista ongelmia aiheuttaa erityisesti geometria. Syinä pidetään matematiikan vähäisiä tuntimääriä peruskoulussa ja alakoulun opettajien puutteellisia valmiuksia opettaa matematiikkaa. Matematiikkaa opetetaan määrällisesti hyvinkin paljon. Kun aikaa tähän sisältömäärään nähden on vähän, ei mihinkään asiaan ehditä paneutua kunnolla. Seurauksena on, että syvällistä oppimista ei tapahdu kaikkien kohdalla. Myös matematiikan oppien yhdistäminen luonnontieteen sovelluksiin koetaan puutteelliseksi. Tämä on valitettavaa, sillä juuri yhdistämällä opittuja asioita konkreettisiin luonnontieteen sovelluksiin olisi mahdollisuus saavuttaa syventää ymmärrystä myös asian matemaattisesta puolesta. Kohtalaisilla ja heikommilla opiskelijoilla ongelmat esiintyvät todennäköisesti juuri matematiikkaan liittyvissä asioissa. Matematiikan huippuosaajienkin kohdalla ongelmia saattaa ilmetä. Voi olla, että heille lukiomatematiikka on ollut helppoa eikä ole tarjonnut riittävästi haasteita. Tällöin he ovat saattaneet omaksua vääriä opiskelutapoja, joista poisoppiminen yliopistossa saattaa olla haasteellista. Lahjakkaiden opiskelijoiden kohdalla opettajan merkitys onkin suurempi kuin ehkä osataan ajatella. [11]

5.4 Eroja lukion ja yliopiston opiskelukäytänteissä sekä matematiikan opiskelussa

Yleisesti opiskelu yliopistossa eroaa opiskelusta lukiossa vaadittavan pitkäjänteisyyden takia. Myös oma-aloitteisuutta vaaditaan selvästi enemmän kuin lukiossa, sillä opiskelijan vaikutusmahdollisuudet omiin opintoihinsa ovat suuremmat. Sivuainevalinnoilla aikaansaadaan hyvinkin erilaisia opintokokonaisuuksia. Jokainen opiskelija voi valita itselleen parhaiten sopivat opiskelumenetelmät. Lukiossa kurssin aikana valinnat on yleensä tehnyt opettaja, jolloin opiskelija ei ole harjaantunut itsenäisten valintojen tekemiseen opiskelussaan ja oppimisessaan. On tärkeää, että opiskelija ymmärtää liikkuvansa oman ymmärryksensä äärirajoilla ja uskaltaa kysyä itseään mietityttävistä asioista niin luennoilla kuin ryhmätyötilanteissakin. Tätä ei kuitenkaan aina uskalleta tehdä tyhmäksi leimaantumisen pelossa. Tällaisesta ajattelusta olisi pyrittävä pääsemään irti, sillä yliopistossa opiskelijalta ei kysytä, onko hän ymmärtänyt, kuten opettaja vielä lukiossa on voinut tehdä. Opiskelussa tarvitaan myös kykyä hankkia tietoa ja käsitellä sitä sopivalla tavalla, taitoa tehdä muistiinpanoja ja rakentaa pienistä osista kokonaiskuvaa sekä erityisesti taitoa kommunikoida erilaisten ihmisten kanssa. Yksi parhaiten hallinnassa oleva taito saattaakin olla juuri taito työskennellä ryhmässä. Opiskelijat ovat yleensä innokkaita tekemään ryhmätöitä ja ryhmässä yksilöt täydentävät toistensa puutteita. [11]

Lukiossa opiskelijat mieltävät matematiikan herkästi pelkiksi peräkkäisiksi mekaanisiksi laskutoimituksiksi. He eivät osaa riittävällä tarkkuudella esittää perusteluja sille, kuinka he pääsevät siirtymään esimerkiksi yhtälöketjussa eteenpäin. Niinpä yliopisto-opintonsa aloittavat opiskelijat eivät välttämättä osaa esittää perusteluja vaan kirjoittavat pelkkiä lausekkeita. Myös tunnettuihin määritelmiin ja lauseisiin viittaaminen koetaan vieraaksi, sillä siihen ei ole lukiossa opittu. Suurimman ongelman yliopisto-opintojen alkaessa aiheuttanee kuitenkin todistusajattelu. Myöskään siihen ei ole lukio-opinnoissa harjaannuttu. Opiskelijat mieltävät, että todistukseksi riittää yhden esimerkkitapauksen käsittely. Lukiossa todistaminen on tällä tavalla asia voitukin opettaa. Todistamisen ymmärtämista saattaa vaikeuttaa opiskelijan vaikeudet erottaa oletus ja väite toisistaan. Myös muiden käsitteiden puuttellinen ymmärtäminen vaikeuttaa asiaa. Peruskoulussa ja vielä lukiossakin opetettava matematiikka antaa menetelmiä ongelmien ratkaisemiseen mutta ei niinkään opeta näiden menetelmien taustoja. Yliopistossa matematiikka on sen sijaan erilaisia teorioita, jotka rakentuvat määritelmien ja lauseiden avulla. Pääpaino on lauseiden eksaktilla todistamisella. [11]

Välijärvi esittää tutkimuksessaan [11] mielenkiintoisen ajatuksen lukiomatematiikan uudistamiseksi. Lukio-opintojen loppuvaiheessa pitkän matematiikan opiskelijat voitaisiin jakaa kahteen erilailla suuntautuneeseen ryhmään. Toisessa ryhmässä opiskeltaisiin teoreettisemmin tavoitteena juuri matematiikan jatko-opinnot. Toisessa ryhmässä keskityttäisiin enemmän matematiikan sovelluksiin, jolloin tästä hyötyisivät ne, jotka eivät suunnittele opintoja matematiikan parissa mutta tarvitsevat matematiikkaa jollakin tavalla omissa opinnoissaan. Välijärven ajatus vaikuttaa kokeilunarvoiselta, mutta sen toteuttaminen ei onnistuisi kaikissa lukioissa. Pienissä lukioissa matematiikan opintoja suunnittelevia on todennäköisesti vain muutama ja tällöin painotusryhmien muodostaminen ei ole resurssien puitteissa mahdollista. Suuremmissa lukioissa tämä voisi onnistua ja tuottaakin teorian ja työtavat paremmin hallitsevia matematiikan opiskelijoita. Yliopistot voisivat hyödyntää enemmän opintojensa kehittämisessä entisten opiskelijoidensa eli nykyisten peruskoulu- ja lukio-opettajien kokemuksia yliopisto-opinnoista sekä lukio- ja yliopisto-opiskelun välisestä kuilusta.

5.5 Yhteenveto eroista

Yleisesti ottaen yliopisto-opinnot eroavat lukio-opinnoista opiskelijalta vaadittavan pitkäjänteisyyden takia. Yliopistoon siirryttäessä opiskelija joutuu ottamaan entistä enemmän vastuuta omasta opiskelustaan. Tavoitteet on opiskelijan asetettava itse ja niiden saavuttamiseksi tehtävä työ on kiinni hänestä itsestään. Opettaja on kuitenkin yleensä kaukaisempi opiskelijalle yliopistotasolla kuin lukiossa. Tällöin kynnys kysyä apua saattaa nousta kovinkin suureksi yliopisto-opinnoissa. Lukiossa opettaja on enemmän läsnä opiskelijan elämässä, jolloin apua on usein helpompi kysyä.

Tarkasteltaessa luvuissa 2 ja 3 esiteltyjen MAA13-kurssin ja yliopisto-opinnot aloittavan *Analyysi 1* -kurssin sisältöjä havaitaan, että lukiossa opiskeltuja asioita tullaan käsittelemään myös yliopistossa. Tällaisia asioita ovat muun muassa raja-arvot, funktion jatkuvuus ja lukujonon suppeneminen. Jos opiskelija lisäksi käy *Johdatus analyysiin* -kurssin, tulee hän kerranneeksi koko MAA13-kurssin sisällön. Käsiteltävien asioiden suhteen ei siis suurta eroa ole lukio- ja yliopistomatematiikassa. Eron aiheuttaa ennemminkin käsittelyn taso. Yliopistotasolla syvennetään lukiossa opittujen asioiden perusteita ja toisaalta käytetään näitä tietoja itselle uuden matemaattisen tiedon rakentamiseen. Lisäksi asiaan vaikuttaa se, etteivät lukion opetussuunnitelman perusteissa esitetyt tavoitteet täyty kaikkien opiskelijoiden kohdalla. Kaikki yliopistoon tulevat opiskelijat eivät siis ole taidoiltaan ja tiedoiltaan niin eteviä kuin asetetut tavoitteet antaisivat olettaa.

Matematiikan luonteen ja opiskelun näkökulmasta eroja on myös havaittavissa. Lukiotasolla matematiikan opiskelu on useiden opiskelijoiden kohdalla hyvin pitkälti kaavojen ja taulukkokirjan käytön opiskelua. Yliopistotasolla taas opetellaan taulukkokirjassa olevien kaavojen taustoja, jolloin on mahdollista itse johtaa nämä kaavat ja ymmärtää paremmin niiden merkitys. Eroja ilmenee myös perusteluiden tarkkuudessa. Lukiomatematiikassa perusteluna käytetään yleensä lauseke- ja yhtälöketjuja, kun taas yliopistotasolla pyritään selittämään päättely tarkemmin. Suurimmat erot ovat varmastikin todistamisajattelussa, jonka asema lukiomatematiikassa on kovin heikko. Yliopistomatematiikka sen sijaan rakentuu hyvin pitkälti matemaattisen todistamisen varaan.

6 Oppikirja-analyysi

Tässä luvussa analysoidaan oppikirjoja kurssille MAA13. Aluksi tarkastellaan erikseen kummankin kirjan yleisilmettä, rakennetta, teorian esitystapaa, esimerkki- ja harjoitustehtäviä sekä havainnollistuksia. Luvussa 6.1 tarkastelun kohteena on WSOY:n oppikirja *Pitkä matematiikka*. Tammen *Pyramidi*-kirjaa tarkastellaan luvussa 6.2. Tämän jälkeen luvussa 6.3 luodaan katsaus kirjojen välisiin eroavaisuuksuuksiin.

Oppikirjat eroavat toisistaan osittain myös opetussisältönsä takia, vaikkakin kurssin sisällöstä on osaltaan määrätty lukion opetussuunnitelman perusteissa. Kun opetussuunnitelman perusteissa asetetut keskeiset sisällöt on käsitelty, on kirjan laatijoilla vapaus lisämateriaalin suhteen. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan tulla tarkastelemaan yksityiskohtaisesti millaisia valintoja opetussisällön suhteen eri oppikirjoissa on tehty. Tämä vaatisi myös aiempien kurssien oppikirjojen analysointia, sillä ne vaikuttavat suuresti kurssin MAA13 sisältöihin. Tässä tutkielmassa kirjoja analysoidaan ennemminkin käytettävyyden näkökulmasta, kuin sisällön suhteen.

6.1 Pitkä matematiikka

Ensimmäiseksi tarkastellaan WSOY:n julkaisemaa *Pitkä matematiikka* -sarjan kurssin MAA13 oppikirjaa.

6.1.1 Yleisilme ja ulkoasu

Oppikirja on yleisilmeeltään hyvin selkeä ja yksinkertainen. Väritykseltään kirja on lähinnä mustavalkoinen, tehostevärinä on sinivihreä. Tehosteväriä käytetään otsikoiden ja teoriaosuuksien pohjavärinä, kuvaajien taustana sekä esimerkkitehtävien ratkaisuissa lavennuksia, supistuksia ja muita vastaavanlaisia toimenpiteitä korostettaessa. Yleisilmeeltään kirjan voidaan sanoa muistuttavan yliopistotasoisia matematiikan kirjoja.

6.1.2 Kirjojen rakenne

Kirjan rakenne on selkeä ja samanlainen kuin kirjasarjan aikaisempien kurssien oppikirjoissa. Käsiteltävät asiat on jaolteltu 11 kappaleeseen. Osa kappaleista liittyy läheisesti toisiinsa, mutta tätä yhteyttä ei korosteta. Kappalenumerointia ei käytetä kirjassa.

Kirjan kappaleen aloittaa joko kertausesimerkki tai ongelmatehtävä. Kertausesimerkin tarkoitus on palauttaa mieleen aiemmilta kursseilta tuttu asia. Vastaavasti ongelmatehtävä herättelee mielenkiintoa ja saa pohtimaan seuraavaksi opiskeltavaa asiaa. Tämän jälkeen esitetään teoriaosuudessa aiheeseen liittyvät määritelmät, lauseet ja mahdollisesti niiden todistukset sekä tehdään selventäviä tarkennuksia aiheeseen liittyen. Esimerkkitehtäviä esitetään teoriaosuuden lomassa sekä sen jälkeen. Esimerkkien määrä vaihtelee aiheesta riippuen, mutta yleisesti ottaen niitä on runsaasti ja ne ovat erityyppisiä.

Kirjan harjoitustehtävät on jaettu kahteen tehtäväsarjaan: perustehtäviin ja vaativampiin tehtäviin. Varsinkin perustehtäviin on löydettävissä vastaava esimerkkitehtävä. Kaikkiin tehtäviin on kirjan lopussa vastaukset.

Varsinaisten aihealueiden käsittelyn jälkeen on 23-sivuinen kertausosio, jossa on tiivistetyssä muodossa kirjassa esitetty matemaattinen teoria sekä jokaiseen aiheeseen liittyvä esimerkkitehtävä. Kertausosion jälkeen on sekä kertaustehtäviä jaoteltuna aihepiireittäin että tehtäväsarjoja, jotka sisältävät tehtäviä eri aihealuista. Erityisesti tehtäväsarjat soveltuvat hyvin kertaamiseen, sillä tällöin opiskelijan on itse ymmärrettävä mihin käsiteltyyn aiheeseen tehtävä liittyy ja kuinka hän ryhtyy tehtävää ratkomaan. Tehtäväsarjat ovat hyviä, mutta ikävä kyllä ne ovat kirjan ainoa mahdollisuus harjoitella aihealueen tunnistamista ennen koetta.

6.1.3 Teoriaosuuden rakenne ja sisältö

Teoriaosuudessa on huomioitu, että kaikki opiskelijat eivät välttämättä vielä ymmärrä täysin matemaattista tekstiä. Tarkasteltavia määritelmiä pyritään esittämään myös havainnollisesti selittäen. Esimerkiksi *jatkuvuus* kuvaillaan havainnollisesti *katkeamattomaksi käyräksi* [4, s. 30]. Havainnollisten määritelmien lisäksi esitetään tietysti täsmälliset määritelmät. Havainnollisten määritelmien käyttö voi helpottaa asian ymmärtämistä, mutta saattaa aiheuttaa myös väärinkäsityksiä. Esimerkiksi, jos opiskelija tarkastelee funktiota vain origon läheisyydessä, saattaa epäjatkuvuuskohta jäädä tämän tarkastelun ulkopuolelle. Tällöin hän havainnollisen määritelmän perusteella päättelee funktion jatkuvaksi ja päätyy näin väärään lopputulokseen.

Osa määritelmistä on nimetty yleisen tavan mukaan määritelmiksi kuten *jatkuvuuden määritelmä* ja *derivaatan määritelmä*. Osa määritelmiksi luokiteltavista asioista esitetään vain nimettynä ilman sanaa määritelmää kuten *toispuolinen jatkuvuus*. Tämä voi vaikeuttaa opiskelijan kykyä erottaa määritelmät ja lauseet toisistaan. Lisäksi varsinaisen määritelmän jälkeen asiaa on usein selitetty yksityiskohtaisemmin. Tämä teksti ei eroa määritelmästä muuten kuin yhden rivinvaihdon verran. Tällöin opiskelijan voi olla vaikea ymmärtää, mikä osa tekstistä kuuluu todella määritelmään. Erilaiset epäjohdonmukaisuudet määritelmien esitystavoissa voivat saada käsityksen määritelmien merkityksestä sumentumaan.

Lauseet on pyritty esittämään täsmällisesti ja erottamaan muusta tekstistä selvemmin kuin määritelmät. Lauseiden esitystapa kuitenkin vaihtelee läpi kirjan. Kun lauseella on erityinen nimi, on lause nimetty ja se esitetään muusta tekstistä ja taustasta erottuvassa laatikossa. Esimerkkinä tällaisesta mainittakoon *suurimman ja pienimmän arvon olemassaololause* [4, s. 37].

Toinen kirjassa käytetty tapa esittää lauseita on antaa ensin otsikko aiheelle ja sen jälkeen esittää itse lause laatikossa kuten *derivoituvuus ja jatkuvuus* [4, s. 46]. Kolmas tapa esittää lauseita on korostaa laatikolla ainoastaan lauseessa annettavaa kaavaa esimerkiksi derivaattafunktiota. Käyttämällä yhtenäistä esitystapaa läpi kirjan olisi helpompi erottaa lauseet määritelmistä, ja se saattaisi auttaa opiskelijoita myös ymmärtämään lauseiden merkityksen.

Oppikirjassa varsinainen todistus esitetään vain yhdelle lauseelle, derivoituvuuden ja jatkuvuuden väliselle yhteydelle (lause 4.7). Joitakin lauseita perustellaan lyhyesti yleensä yhtälöketjujen avulla, mutta nämä perustelut eivät ole täydellisiä, joten niitä ei voida pitää todistuksina. Lisäksi esimerkiksi jatkuvan funktion väliarvolauseen (lause 4.5) todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Useiden lauseiden todistukset sivuutetaan lukiokurssien mahdollisuudet ylittävinä. Lyhyet perustelut todistuksien sijaan, vähäinen todistusten läpikäynti ja tekniikan harjoittelu ei ainakaan valmista opiskelijoita yliopiston todistamiskulttuuriin ja saattaa jopa johtaa väärään ajattelumalliin.

6.1.4 Esimerkkitehtävät

Esimerkkitehtävät ovat monipuolisia ja niitä on runsaasti, vähintään neljä esimerkkiä aihealuetta kohden. Esimerkkitehtävien välivaiheet on selitetty tarkasti ja tämän lisäksi on tehty vielä tarkennuksia ja täsmennyksiä. Esimerkkitehtävien esitystapa on samanlainen läpi kirjan. Tehtävänannon jälkeen esitetään ratkaisu, tämän jälkeen suoritetaan ratkaisun tarkastelu ja lopuksi esitetään selkeä vastaus. Esimerkkien rakenne on juuri sellainen, jollaisia vastauksia toivotaan ylioppilaskokeessa nähtävän ja esimerkkien tehtävänä onkin osaltaan opettaa selkeiden ratkaisujen kirjoittamiseen.

6.1.5 Harjoitustehtävät

Tehtävät on jaettu kahteen eri sarjaan, mikä on tyypillistä lähes kaikille matematiikan oppikirjoille. Ensimmäinen sarja sisältää perustehtäviä, joita vastaavia esimerkkejä kirjassa on runsaasti. Toinen sarja sisältää perustehtäviä mutta myös vaativampia tehtäviä. Vaativampien tehtävien ratkaiseminen ei onnistu enää pelkästään esimerkkien avulla, vaan tällöin vaaditaan todellista ymmärrystä käsiteltävästä asiasta. Erilaisilla tehtäväsarjoilla on huomioitu erilaiset oppijat sekä opiskelijoiden erilaiset tavoitteet opintojensa suhteen. Tehtäviä on niin runsaasti, että niistä riittää myös tehtäviä kotiin annettavaksi.

Tehtävät vaikuttavat monipuolisilta ja joukkoon on mahdutettu hieman soveltavampia tehtäviä. Joidenkin tehtävien sisältö on aiheeseen liittyvän teoriaosuuden ylittävää, jolloin itse tehtävänanto sisältää asiaan liittyvää teoriaa. Nämä tehtävät mahdollistavat opiskelijoiden laajan eriyttämisen ryhmässä, kun matematiikkaa hyvin hallitsevat voivat opiskella omatoimisesti uusia asioita tehtävien avulla. Tällä tavoin voidaan motivoida niitä opiskelijoita, joille tavallinen lukiomatematiikka ei tarjoa haasteita.

Kirjan lopussa on vastaukset kaikkiin kirjan tehtäviin. Osaan tehtävistä annetaan vain pelkkä vastaus. Suuressa osassa tehtävien vastauksista kuitenkin selvennetään tarkemmin, miten ratkaisuun on päädytty. Ratkaisujen ansiosta kirja soveltuu myös hyvin itseopiskeluun.

6.1.6 Havainnollistukset

Kurssin luonteesta johtuen kirjassa graafisina havainnollistuksena käytetään lähes yksinomaan funktioiden kuvaajia. Näitä kuvaajia on kuitenkin runsaasti ja esimerkiksi esimerkkitehtävissä funktion kuvaaja on usein piirretty näkyviin, vaikka tehtävänanto ei tätä vaatisi. Kuvaajissa tarkastelut tapahtuvat lähes aina origon läheisyydessä, mikä voi osaltaan johtaa harhaan.

6.2 Pyramidi

Seuraavaksi tutustutaan Tammen *Pyramidi*-oppikirjasarjan kurssin MAA13 oppikirjaan.

6.2.1 Yleisilme ja ulkoasu

Pyramidi -sarjan kirja on yleisilmeeltään selvästi värikkäämpi kuin luvussa 6.1 esitelty *Pitkä matematiikka*. Vaikka perusväritys on edelleen mustavalkoinen, on tehostevärejä käytetty runsaammin. Eri asioita korostavat jälleen sinivihreä sekä keltainen, harmaa ja purppura. Esimerkiksi otsikot ovat väriltään sinivihreitä ja niitä on korostettu vielä keltaisella taustalla. Keltaista väriä on käytetty myös määritelmien ja lauseiden pohjavärinä sekä tehtäväsivujen marginaaleissa. Purppuranpunaista väriä on käytetty kappalenumeroinnissa, esimerkkiteksteissä sekä esimerkkejä toisistaan ja tekstistä erottavissa palkeissa. Harmaata väriä käytetään lähinnä kuvaajien pohjavärinä sekä lisätietosivujen taustavärinä. Yleisilmeeltään kirja on yliopistotasoisia matematiikan oppikirjoja värikkäämpi, mutta liika värikkyys voi saada kirjan vaikuttamaan myös hieman sekavalta.

6.2.2 Kirjan rakenne

Oppikirjan rakennne on varsin selkeä ja tuttu kirjasarjan aiemmista osista. Sisältö on jaoteltu seitsemään päälukuun, joista jokainen sisältää useita alaotsikoin jaettuja lyhyempiä kokonaisuuksia eli alalukuja. Alaluvun voi aloittaa käsiteltävän asian esittely sanallisesti, esimerkki tai jopa asiaan liittyvä lause. Teoriaosuutta ei ole selkeästi erotettu muusta tekstistä, mutta määritelmät ja lauseet erottuvat selvästi keltaisissa laatikoissaan. Esimerkit on erotettu teoriaosuudesta ja toisistaan punaisin vaakapalkein. Esimerkkejä on yleisesti ottaen runsaasti, mutta määrä vaihtelee aiheesta riippuen. Kirjassa on pyritty siihen, että varsinkin perustehtäviin olisi saatavilla vastaava esimerkki. Tehtäviä ei ole jaoteltu yleisen trendin mukaisesti tehtäväsarjoihin, mutta voidaan havaita, että tehtävät on asetettu vaikeusjärjestykseen. Lähes kaikkiin tehtäviin on kirjan lopussa vastaus.

Kurssiin kuuluvien aiheiden käsittelyn jälkeen kirjassa on lisätietoa-osio, johon on kerätty kurssin aiheisiin liittyvää lisätietoa kuten perusteluja erilaisille kaavoille sekä täsmällisempi määritelmiä kirjassa käytetyille kuvaileville määritelmille. Osiossa on myös aiheeseen liittyviä lisätehtäviä. Kirjassa ei ole kertausosiota eikä näin ollen myöskään kertaustehtäviä, joten opettajan on laadittava itse kertaustehtäviä. Myöskään tehtäväsarjoja, joiden avulla voisi harjoitella eri aihealueisiin liittyvien tehtävien tunnistamista, ei kirjassa ole.

6.2.3 Teoriaosuuden rakenne ja sisältö

Kirjassa otetaan selvästi huomioon se, että perusasioiden ja matemaattisen kielen tulisi olla tuttua jo aiemmilta kursseilta. Teoriaosuudessa asiat esitetään lyhyesti ja matemaattisia merkintöjä käytetään runsaasti, joten tältä osin teoriasisältö vastaa hyvin pitkälti yliopistotasoista esitystä.

Lauseet ja määritelmät erottuvat selvästi muusta tekstistä jo keltaisen taustavärinsä takia. Lisäksi suurin osa niistä on nimetty joko määritelmäksi tai lauseeksi. Poikkeuksena mainittakoon toispuoliset derivaatat. Vaikka sanotaankin, että määritellään funktion toispuoliset derivaatat, on itse määritelmät nimetty termeillä *vasemmanpuolinen derivaatta* ja *oikeanpuolinen derivaatta* [6, s. 18-19]. Keltaisella taustavärillä muusta tekstistä on erotettu myös esimerkiksi integrointikaavoja sekä muita laskukaavataulukoita. Määritelmät ja lauseet on kuitenkin selkeä erottaa nimeämisen takia, joten opiskelijoille ei pitäisi jäädä epäselväksi mikä on määritelmä ja mikä on lause. Määritelmissä ja lauseissa tärkeät sanat on lisäksi korostettu lihavoimalla. Esitystapa pysyy yhtenäisenä läpi kirjan.

Kirjan lauseet todistetaan tai vähintään perustellaan hyvin tosin yksi epäoleelliseen raja-arvoon liittyvä lause [6, s. 44] sivuutetaan. Osa todistuksista esitetään lisäosiossa. Lisäksi jotkin todistukset perustuvat osittain aiempien kurssien todistuksiin. Integrointikaavat osittaisintegrointiin sekä integrointiin sijoitusmenetelmällä johdetaan. Myös geometrisen lukujonon ja sarjan suppenemiseen liittyvät lauseet perustellaan hyvin yksityiskohtaisesti. Todistusten rakenne on selkeä, *oletus-väitös-todistus* -mallin mukainen. Joihinkin todistuksiin esitetään myös vaihtoehtoinen tapa. On hyvä, että yhtä lukuun ottamatta kaikki kirjaan otetut lauseet voidaan lukiokurssitietojen pohjalta. Lauseita ei kuitenkaan ole montaa, ja erityyppiset todistustavat jäävät mahdollisesti läpikäymättä. On kuitenkin hyvä, että opiskelija tottuu jo lukiokurssien aikana todistamiskulttuurin edes vähäisessä määrin.

Määritelmien ja lauseiden lisäksi teoriaosuudessa tehdään runsaasti huomautuksia, jotka tarjoavat lisätietoa käsiteltyyn asiaan ja tarkentavat määritelmien ja lauseiden sisältöä. Yksittäisenä asiana mainittakoon kirjassa käytetyt sanojen selitykset, jotka osaltaan auttavat asian ymmärtämistä. Esimerkiksi sana *numeerinen* on selitetty *luvuilla ilmaistavana.*

6.2.4 Esimerkkitehtävät

Esimerkkitehtäviä on kirjassa runsaasti. Alaluvussa käsitellystä aiheesta riippuen kahdesta seitsemään, kuitenkin niin, että suurimmassa osassa alalukuja esimerkkitehtäviä on vähintään neljä kappaletta. Esimerkkitehtävät käsittelevät monipuolisesti aihetta ja toimivat hyvinä apuneuvoina alettaessa ratkoa tehtäviä. Jotkut esimerkit tuntuvat kuitenkin olevan jopa liian samanlaisia kirjan tehtävien kanssa, jolloin tehtävän saa periaatteessa tehtyä pelkällä lukujen vaihtamisella. Tällöin varsinaista oppimista ei välttämättä tapahdu. Esimerkkitehtävien esitystapa on samantapainen läpi kirjan: tehtävänanto, ratkaisu, selkeä vastaus ja useassa esimerkissä vielä lopuksi ratkaisun graafinen tarkastus. Välivaiheet on selitetty tarkasti ja myös yhtälöketjuissa on viittaukset kussakin vaiheessa käytettyyn sääntöön. Esimerkkien rakenne on samanlainen kuin mitä ylioppilaskoetehtävän ratkaisuksi toivotaan saatavan. Esimerkkien tehtävänä onkin osaltaan opettaa selkeiden ratkaisujen kirjoittamiseen.

Joissakin esimerkeissä esitetään useita eri tapoja ratkaisun saamiseksi, mikä on osaltaan erittäin hyvä. Tällöin opiskelijat ymmärtävät, ettei heidän oma ratkaisunsa välttämättä ole ainoa oikea ratkaisu, ja toisaalta, jos toinen opiskelija on ratkaissut asian eri tavalla, voi hänkin olla oikeassa. Esimerkeissä käytetään selkeyttäjänä myös jaottelua tarkasteltaviin kohtiin, mitä selvennetään esimerkissä 6.1.

Esimerkki 6.1. Piirrettäessä murtofunktion kuvaajaa [6, s. 51] on tehtävän suoritus jaettu viiteen kohtaan, jotka ovat

1. Määrittelyjoukon tutkiminen
2. Nollakohtien määrittäminen
3. Kulkukaavion laatiminen ja ääriarvopisteiden määrittäminen
4. Asymptoottien tutkiminen
5. Muutamien käyrän pisteiden laskeminen ja käyrän piirtäminen.

Kirjassa totutetaan opiskelijoita myös yliopistomatematiikassa tärkeään ajatukseen siitä, että tehtävän ratkaisuksi ei välttämättä riitä pelkkä kysymykseen vastaaminen, vaan vastaus pitää myös todistaa. Tähän tutustutaan esimerkissä 6.2

Esimerkki 6.2. Tehtävänä [6, s. 22] on: *Anna esimerkki funktiosta, joka on kasvava ja jatkuva kaikkialla, mutta ei derivoituva origossa.*
Kun sopiva funktio on löydetty, todistetaan, että

1. funktio on kasvava
2. funktio on jatkuva
3. funktio ei ole derivoituva origossa.

Usean lukiolaisen ajattelussa esimerkkiin 6.2 ratkaisuksi riittäisi löytää funktio, joka toteuttaa annetut ehdot. Esimerkissä kuitenkin halutaan, että ehtojen paikkansa pitävyys todistetaan.

6.2.5 Harjoitustehtävät

Harjoitustehtäviä ei ole jaettu sarjoihin kuten yleinen tapa on. Tehtävät on kuitenkin sijoitettu aina yhden alaluvun jälkeen, jolloin opiskelija tietää selvästi, mihin aiheeseen tehtävät liittyvät. Tämä ei ole pelkästään hyväksi, sillä tällöin opiskelija ei opi omatoimisesti tunnistamaan tehtävän aihepiiriä. Harjoitteluvaiheessa tämä kuitenkin sallittaneen.

Tehtävät on lisäksi asetettu likimain vaikeusjärjestykseen. Tällöin helpoimmat, esimerkkitehtävien kaltaiset tehtävät ovat ensimmäisenä ja viimeiset tehtävät ovat haastavimpia ja eniten soveltamista vaativia. Mekaanisia laskutehtäviä on joukossa kuitenkin paljon. Tehtäviä on runsaasti, peräti 340 kappaletta, joten niistä riittää kotitehtäviksikin. Kuitenkaan kirja ei sisällä monille kirjasarjoille tyypillisiä kertaustehtäviä, joten tämä huomioon ottaen tehtävämäärä ei ole normaalia suurempi.

Kaikkiin tehtäviin, paitsi todistamista vaativiin tehtäviin, on kirjan lopussa lyhyt vastaus. Vastauksissa ei ole esitetty välivaiheita vaan pelkkä vastaus. Tällöin kirja ei kovin hyvin palvele itseopiskelijaa tai opiskelijaa, joka ei pääse tehtävässä eteenpäin.

6.2.6 Havainnollistukset

Kurssin luonteesta johtuen havainnollistuksia on melko vähän ja ne ovat ainoastaan funktioiden kuvaajia. Usealle tehtävälle tehdään kuvaajan avulla graafinen tarkistus, mikä on hyvä asia, sillä tällöin oppitaan hahmottamaan hyvin erilaisia funktioita. Kuvaajia käytetään erilaisissa yhteyksissä mutta lähinnä määritelmien ja lauseiden idean keksimiseen ja perustelemiseen.

6.3 Eroavaisuudet oppikirjoissa

Tarkastellaan millaisia eroavaisuuksia luvuissa 6.1 ja 6.2 esitellyistä kirjoista on löydettävissä.

Ensimmäinen eroavaisuus *Pitkä matematiikka* ja *Pyramidi* oppikirjojen välillä havaitaan ulkoasussa ja yleisilmeessä. *Pyramidi* on värikkäämpi ja muistuttaa enemmän peruskoulun oppikirjoja kuin *Pitkä matematiikka*, jossa värien käyttö on hillitympää. Yleisilmeeltään *Pitkä matematiikka* muistuttaa enemmän yliopistotasoisia matematiikan oppikirjoja.

Kirjoissa käytettävä asioiden jaottelu lukuihin eroaa myös suuresti. *Pyramidissa* käytetty jaottelu päälukuihin ja niiden alalukuihin auttanee opiskelijaa ymmärtämään asioiden välisiä yhteyksiä paremmin kuin *Pitkä matematiikka* -kirjassa käytetty portaaton kappalejako. *Pitkä matematiikka* -kirjan jaottelu sopii hyvin lukion tuntijakoon, sillä yhden kappaleen käsittely vienee noin yhden 75 minuutin oppitunnin. Vastaavasti *Pyramidi*-kirjassa alalukujen takia lukuja on enemmän eikä yhden alaluvun käsittelyyn voida käyttää koko oppituntia, mutta tällöin opettaja voi ryhmitellä asioita järkeviksi ja sopivan mittaisiksi kokonaisuuksiksi. Pää- ja alalukuihin jaottelu tukee myös paremmin pyrkimystä asiayhteyksien löytämiseen.

Yksi oppikirjojen suurimmista eroista on nähtävissä määritelmien ja lauseiden esittämisessä. *Pyramidi*-kirjan tapa erottaa määritelmät ja lauseet muusta tekstistä laatikoilla on selkeämpi ja jatkuu johdonmukaisesti läpi koko kirjan. Lisäksi määritelmien ja lauseiden nimeäminen on samankaltaista koko ajan. *Pitkä matematiikka* -kirjassa taas selkeää ja yhtenäistä esitystapaa ei ole. Määritelmien ja lauseiden erottaminen muusta teoriaosuudesta on ajoittain vaikeaa. *Pyramidi*-kirjan perusteella opiskelija saa selkeämmän kuvan määritelmistä ja lauseista. Kummassakin kirjassa on kuitenkin useita lauseita ja määritelmiä, joiden tunnistaminen jää opiskelijan omalle vastuulle. *Pitkä matematiikka* -kirjassa esitellään useampia lauseita, mutta useat niistä ovat lukiokurssin tiedot ylittäviä. Lisäksi kirjassa käytetään kuvailevia määritelmiä, jotka voivat niiden opiskelua, joilla on ongelmia matemaattisten merkintöjen kanssa. Toisaalta teoriaosuuden epäjohdonmukaisuus vaatii opiskelijalta hyvää matemaattista ymmärrystä.

Myös kertaustehtävät ja ylipäätänsä niiden olemassaolo luovat eron kirjojen välille. *Pyramidi* toisin kuin *Pitkä matematiikka* ei sisällä lainkaan kertausosiota tai kertaustehtäviä. Kun kyse on viimeisistä lukiomatematiikan kursseista, ei kertaustehtävien tarve välttämättä ole niin suuri. Olisi kuitenkin hyvä, että opiskelijalla olisi mahdollisuus omatoimiseen harjoitteluun erityyppisten tehtävien parissa, niin ettei aihepiiri selviä otsikon perusteella. Tällaista koetilannetta imitoivaa mahdollisuutta ei *Pyramidi*-kirjassa tarjota. *Pitkä matematiikka* -kirjassa on vastaavasti kertaustehtävien yhteydessä myös hyvin kokeeseen kertaamiseen soveltuvia tehtäväsarjoja.

Nykyään yleisen tavan mukaan molemmissa oppikirjoissa on ratkaisut kirjan tehtäviin. Ratkaisujen esitystapa kuitenkin eroaa toisistaan. *Pitkä matematiikka* -kirjassa usean tehtävän ratkaisuun annetaan lopputuloksen lisäksi myös joitakin välivaiheita ja lisäksi todistustehtävien ratkaisu on esitetty lyhyesti. *Pyramidissa* tehtäviin annetaan vain lyhyt, lopullinen ratkaisu eikä lainkaan välivaiheita. Todistustehtävien ratkaisuja ei ole esitetty millään tavalla. Yleisesti ottaen suhtautuminen ratkaisujen julkaisemiseen oppikirjoissa on kaksijakoinen. Hyvässä tapauksessa ratkaisut, erityisesti silloin, kun ne sisältävät myös välivaiheita, voivat auttaa opiskelijaa ymmärtämään tehtävän ratkaisua ja pääsemään eteenpäin tehtävässä ongelman kohdattuaan. Lisäksi tällaiset ratkaisut tukevat itseopiskelijaa. Negatiivisesti ratkaisut vaikuttavat silloin, kun opiskelijat kopioivat ratkaisunsa suoraan vastauksista tai pyrkivät annettuun vastaukseen keinolla millä tahansa ilman asian todellista ymmärtämistä. *Pitkä matematiikka* -kirjan ratkaisut soveltunevat paremmin MAA13-kurssin luonteeseen ja suorittamiseen viimeisimpänä matematiikan lukiokurssina. Tällä tavalla voidaan tukea paremmin oma-aloitteista harjoittelua.

Kaikki ominaisuudet huomioiden *Pyramidi* -oppikirja soveltunee paremmin perusopiskelijalle. Kirjan selkeän rakenteen ja johdonmukaisen esitystavan ansiosta opiskelu onnistunee hyvin, vaikka differentiaali- ja integraalilaskenta ei olisikaan täydellisesti hallinnassa eikä käsitys määritelmien sekä lauseiden erosta täysin selvä. Tehtävät ja erityisesti niiden ratkaisut soveltuvat opettajajohtoiseen tuntityöskentelyyn. Toisaalta *Pitkä matematiikka* -kirjan tehtävien ratkaisut sekä kertausosio mahdollistavat paremmin itse opiskelun. Kirjan rakenne ja esitystapa on kuitenkin sellainen, että se vaatii opiskelijalta hyvää asiantuntemusta omatoimisessa opiskelussa. Tulee kuitenkin muistaa, että tarkastelun kohteena oli vain kaksi oppikirjaa laajasta pitkän matematiikan oppikirjatarjonnasta. Saattaa siis olla, että on jo olemassa kirja, jossa näiden kirjojen hyvät puolet on yhdistetty.

7 Todistaminen lukion oppikirjoissa

Tässä luvussa tutustutaan lyhyesti todistamisen historiaan luvussa 7.1 ja todistamisajatteluun luvussa 7.2. Luvussa 7.3 tarkastellaan ja analysoidaan tarkemmin luvuissa 6.1 ja 6.2 esitetyltyjen lukion oppikirjojen todistamistehtäviä laadullisesti. Määrällisesti todistamistehtäviä tarkastellaan luvussa 7.4.

Yksi suurimmista eroista lukio- ja yliopistomatematiikan välillä on todistamisajattelun ja todistamistehtävien roolilla. Lukio-opetuksessa todistaminen on menettänyt asemaansa aikojen saatossa ja nykypäivänä todistamistehtävien määrä lukion oppikirjoissa on vähäinen. Yliopistossa matematiikan opiskelussa todistamisella on sen sijaan keskeinen rooli.

7.1 Todistamisen historiaa

Lähdetään tarkastelemaan todistamista ensin historiallisessa mielessä eli klassisen todistamisen kautta. Todistamisen juuret juontavat Eukleideen Alkeisiin ja sitä kautta antiikin Kreikkaan. Eukleideen aikaista ongelmanratkaisuprosessin osia olivat julkituominen, asetelma, määrittely tai täsmennys, konstruointi, todistaminen ja johtopäätös. Prosessia on aikojen saatossa yksinkertaistettu. Lopulta on päädytty rakenteeseen: oletus, väitös, todistus. Päättelyprosessin päättää latinankielinen toteamus "q.e.d", jonka suomenkielinen vastine on "mikä oli todistettava" eli "m.o.t.". Todistamismalleiksi hyväksyttiin muun muassa epäsuora todistaminen sekä algebrallinen ja geometrinen todistaminen. Vaikka Eukleideen geometrista järjestelmää pidettäisiinkin jo aikansa eläneenä, on matematiikan keskiössä vielä useita häneltä lähtöisin olevia käsitteitä ja rakenteita kuten aksiooma ja lemma. Jo Eukleideen alkeet ovat sisältäneet nykyaikana hyvin suosittua konstruktiivista ajattelua, jossa teoriaa rakennetaan havainnoista lähtien. Voidaankin todeta, että klassinen todistaminen on tärkeä osa tiedon strukturointia. [7]

Kouluopetuksessa todistamisajattelun muutos on alkanut 1950-luvulla, jolloin klassisen todistamisen sijaan on todistamiseen pyritty käyttämään logiikan päättelysääntöjä. Huomattiin, että pelkästään logiikan päättelysääntöjen käyttö johti monimutkaisiin ja epähavainnollisiin todistuksiin. Ajatusta logiikasta osana todistamisajattelua ei kuitenkaan hylätty, vaan se otettiin todistamisajattelun tueksi. Tarkoituksena oli täsmentää ja monipuolistaa todistusajattelua sekä liittää se ongelmanratkaisuprosesseihin. Tästäkin huolimatta kiinnostus todistamiseen on koulumatematiikassa vähentynyt. Todistamistehtävät ovat lähes hävinneet lukion oppikirjoista 1970-luvulla alkaneen matematiikan modernisoinnin seurauksena. Siten todistamisajattelu on ollut helppo sivuuttaa myös opetuksessa. [7]

7.2 Todistamisajattelusta

On syytä selventää, mitä tarkoitetaan todistusajattelulla, sillä se ei ole sama asia kuin matemaattinen todistaminen. Loogista ajattelua ja todistamista voidaan lähestyä kahdesta eri näkökulmasta. Tradionaaliseksi malliksi kutsutaan systemaattista todistamista loogisten päättelysääntöjen ja matematiikassa hyväksyttyjen metodien mukaisesti. Ongelmanratkaisun malliin on liitettävissä ajatuksia todistamisesta, mutta päättelyprosessi itsessään ei ole matemaattisen todistamismallin mukainen. Ennemminkin kyse on ”yritys-erehdys” -tyyppisestä oppimisesta, jossa kokeilut ja arvaukset varmistetaan tai näytetään tosiksi. Tämän prosessin päämääränä on ongelman ratkaisu. Traditionaalisessa mallissa kyse on juuri todistamisesta, sillä tässä mallissa todistaminen on oma kokonaisuutensa. [7]

Todistamisajattelu liittyy läheisemmin ongelmanratkaisun malliin, jossa todistaminen on osa päättelyprosessia. Matematiikan todistusmallit, kuten suora todistus, epäsuora todistus, olemassaolotodistus, täydellinen induktio ja vastaesimerkkitodistus, ovat käytettävissä myös yleisessä ongelmanratkaisuprosessissa päättelyn jäsentämiseen. Näiden mallien käyttö kouluopetuksessa rajoittunee kuitenkin matemaattiseen todistamiseen, eikä varsinaisen todistamisajattelun tasolle päästä ongelmanratkaisuprosesseissa kuin harvoin. Toisaalta todistamisajatteluksi mielletään jo se, että ongelmanratkaisuun tarvittavat päättelyprosessit kuvataan. Päättelyprosessien tarkoituksena on ongelmien ratkaiseminen ja ratkaisujen luotettavuuden sekä yleisyyden arviointi. [7]

Erilaisia päättelyprosesseja sekä todistamisajattelua olisi syytä opettaa jo lapsille eikä koulumatematiikka saisi syrjiä todistamista. Todistamisajattelusta ei ole hyötyä ainoastaan matematiikassa ja todistamisten esittämisessä, vaan se auttaa oppilaita itsenäisen ja kriittisen ajattelun kehittämisessä. Huolimatta todistamistehtävien vähenemisestä lukiomatematiikassa, on opettajan syytä hallita päättelyn ja todistamisen erilaiset tekniikat. Vain ne hallitsemalla opettaja pystyy ohjaamaan oppilasta tilanteen mukaan. [7]

7.3 Todistusten laatu

Tarkastellaan lukion oppikirjoissa esitettyjen todistusten laatua kirjoissa esitettyjen lauseiden todistusten sekä esimerkkitehtävien todistusten kautta.

Pitkä matematiikka -oppikirjassa kunnollinen todistus esitetään vain yhdelle lauseelle, derivoituvuuden ja jatkuvuuden väliselle yhteydelle (lause 4.7). Tämä todistus [4, s. 46] on hyvin lähellä tässä tutkielmassa lauseelle 4.7 esitettyä todistusta. Todistuksessa on selkeästi esitetty, mitä oletuksesta seuraa. Lisäksi selvästi kerrotaan mihin lopputulokseen tulisi päästä. Todistus perustuu suurelta osin lausekkeiden muodostamaan päättelyketjuun, kuten myös yliopistotasoinen esitys. Välivaiheet, kuten lavennukset ja viittaukset oletukseen, on merkitty näkyviin huomautuksina marginaaliin. Yliopistotasoisessa esityksessä ne sisällytetään itse todistukseen. Myös *Pyramidi*-kirjassa esitetään vastaava todistus [6, s. 17]. Tosin tässä kirjassa tarkastelua ei ole kiinnitetty tiettyyn pisteeseen. Lause todistetaan tapauksessa, jossa funktion määrittelyjoukko on avoin väli. Muutoin todistus on hyvin samankaltainen kuin *Pitkä matematiikka* -kirjassa. Oletuksesta seuraava raja-arvon olemassaolo on selvästi kirjattu näkyviin. Lisäksi kerrotaan, mitä tulee osoittaa. Todistus on periaatteessa lausekeketju, jonka välivaiheisiin perustelut on merkitty näkyviin huomautuksina marginaaliin. Perustelut ja johtopäätökset on esitetty selkeästi.

Muutoin *Pitkä matematiikka* -oppikirjassa lauseisiin ei esitetä kunnollisia todistuksia vaan perusteluiksi nimettyjä lyhyitä todistuksia. Perustelut ovat yleensä lyhyitä lausekeketjuja, joiden välivaiheita ei ole tarkemmin selvennetty. Perustelutkin päätetään todistuksen päättävään neliö-merkintään, joten niitä voitaneen pitää lukiotasoisina todistuksina. Useiden esitettyjen lauseiden todistukset sivuutetaan. Näiden lauseiden todistamiseen tarvittavia tietoja, kuten *supremum*-käsitettä, ei käsitellä lukion valtakunnallisilla kursseilla. Tällaiset lyhyet todistuksen tyyppiset perustelut saattavat johtaa opiskelijoita harhaan varsinaisesta todistamisen ideasta mutta voivat auttaa opiskelijoita myös kuvaamaan ajatusprosessiaan. Opettajan tulisi painottaa, ettei tällöin ole kyse varsinaisesta matemaattisesta todistamisesta. Ajatusprosessin kuvaaminen voidaan kuitenkin mieltää jo eräänlaiseksi todistamisajatteluksi.

Myöskään *Pyramidi*-kirjassa ei esitetä täydellistä todistusta lauseille kovinkaan montaa kertaa. Tähän vaikuttaa kuitenkin myös se, ettei kirjassa esitetä kovin montaa lausettakaan. Todistuksien ulkoasu on selkeä, sillä näkyviin on kirjoitettu oletus, väite ja todistus. Itse todistukset ovat kuitenkin kovin lyhyitä ja välivaiheita jätetään selvittämättä. Yliopistotasoissa todistuksessa nämä välivaiheet voitaisiin olettaa täysin lukijalle selviksi. Lukiotasolla olisi toivottavaa, että ne olisi selvitetty tarkemmin. Tällöin opiskelijan olisi helpompi ymmärtää miten todistuksessa on edetty. Muutoin käy helposti niin, ettei opiskelija ymmärrä koko todistuksen ideaa. Joidenkin lauseiden todistuksena on esitetty lyhyt lausekeketju, joka *Pitkä matematiikka* -kirjassa on nimetty vain perusteluksi. Onneksi kirja sisälää myös todistuksia, joissa asia on kirjoitettu lähes kokonaan ilman matemaattisia merkintöjä. Tällaiset todistukset auttavat toivottavasti todistamisen idean ymmärtämistä entisestään.

Molemmissa kirjoissa esitetään esimerkkejä, jotka sisältävät todistamista. Nämä esimerkkien todistukset ovat useassa tapauksessa hyvin samankaltaisia kuin edellä mainitut lyhyet todistukset perustelemalla. Todistus on tietysti aina aiheesta riippuvainen ja joitakin asioita pystytään todistamaan hyvinkin lyhyesti. *Pyramidi*-kirjassa esimerkkitehtävien todistuksista voidaan huomata, että joissakin välivaiheita on perusteltu selvästi paremmin kuin lauseiden todistuksissa. Hyvänä puolena mainittakoon myös se, että todistukselle on esitetty vaihtoehtoisia tekotapoja. Lisäksi, kuten esimerkissä 6.2 huomattiin, todistus on esitetty myös tilanteessa, jossa sitä ei tehtävänannossa suoraan pyydetä. Tämä totuttaa opiskelijoita yliopistomatematiikkaan, sillä yliopistotasolla todistus tulee usein esittää, vaikka sitä ei tehtävänannossa pyydetäkään. Myös esimerkkitodistukset päätetään todistuksen päättävään neliömerkkiin. *Pitkä matematiikka* -oppikirjan esimerkkitehtävissä todistukset ovat yleensä lyhyitä perusteluja, joissa ei ole selkeää todistuksen rakennetta. Näitä todistuksia ei myöskään päätetä neliö-merkkiin. Välivaiheita on kuitenkin selvitetty hyvin eivätkä todistukset ole pelkkiä lausekeketjuja.

Laadullisesti todistukset vaikuttavat olevan parempia *Pyramidi*-kirjassa. Tässä kirjassa on kiinnitetty enemmän huomiota todistusten rakenteeseen, vaikkakin lukiotasolla tarvittavia välivaiheita on jätetty kirjoittamatta näkyviin. Molemmat kirjat luovat kuitenkin hieman väärää kuvaa siitä, että todistus on pelkkä lausekeketju.

7.4 Todistamistehtävät

Tarkastellaan seuraavaksi aiemmin luvussa 7.1 mainittua todistamistehtävien määrää lukion oppikirjoissa sekä yliopiston matematiikan kurssilla. Todistustehtäviä oppikirjoissa vertaillaan määrällisesti laskemalla todistustehtävien prosenttiosuudet kaikista tehtävistä.

7.4.1 Todistamistehtävät lukion oppikirjoissa

Tässä tutkielmassa todistustehtäviksi lukion oppikirjoissa luokitellaan sellaiset tehtävät, joiden tehtävänannon mukaan tulee *todistaa*, *osoittaa* tai *näyttää (todeksi)*. Useampia kohtia sisältävä tehtävä luokitellaan todistustehtäväksi, jos vähintään yksi sen kohdista voidaan luokitella todistustehtäväksi. Toisaalta monikohtaisessa tehtävässä saattaa olla useampia kohtia, joissa vaaditaan esitettäväksi todistus. Näitä kohtia ei kuitenkaan luokitella erillisiksi todistustehtäviksi, sillä tällaiset tehtävät ovat yksittäisiä ja kokonaisten tehtävien käsittely luokittelussa on selkeämpää. Tehtäväluokittelu suoritetaan vain varsinaisille tehtävillä eli kertaus- ja lisätehtäviä ei luokitella.

Tulkintaongelmia luokittelussa aiheuttavat tehtävänannot, joihin ei sisälly suoraa ohjetta todistaa. Tälläisiä tehtävänantoja on esitetty esimerkeissä 7.1 ja 7.2

Esimerkki 7.1. Tutki, onko neliöjuurifunktio $f(x) = \sqrt{x}$ oikealta derivoituva origossa? [6, s. 28, tehtävä 241]

Esimerkki 7.2. Onko funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -2e^x & \text{, kun } x \leq 0 \\ \frac{3x^2-12x}{6x} & \text{, kun } x > 0 \end{cases}$$

kaikkialla jatkuva? [4, s. 40, tehtävä 65]

Yliopistotasolla tämän tyyppisten tehtävien ratkaisut esitettäisiin todistusmuodossa, mutta lukiolaiselta tätä ei voida odottaa. Suurin osa lukiolaisista ymmärtänee esittää ratkaisun todistusmuodossa vain silloin, kun sitä häneltä erityisesti pyydetään. Tästä syystä esimerkkien 7.1 ja 7.2 kaltaisia tehtäviä ei luokitella todistustehtäviksi tässä tutkielmassa. Harjoitustehtävien lisäksi tarkastellaan todistamista vaativien esimerkkitehtävien määrää oppikirjoissa.

Pitkä matematiikka -kirjassa tehtäviä on kaiken kaikkiaan 311. Näistä todistustehtäviä on 69, joten todistustehtävien osuus kaikista tehtävistä on 22,2 prosenttia. Vastaavasti *Pyramidi*-kirjassa tehtäviä on yhteensä 340, joista todistustehtäviä on 36. Prosenttiosuutena tämä on 10,6. Analysoitujen oppikirjojen välillä on siis 11,6 prosenttiyksikön ero todistustehtävien määrässä. Kun yleisesti ottaen todistustehtävien määrä on näin vähäinen, on ero kirjojen välillä suuri.

Myös esimerkkitehtävien välillä on eroa mutta ei yhtä suurta. *Pitkä matematiikka* -kirjassa todistetaan yhdeksässä esimerkissä kaikenkaikkiaan 58 esimerkistä eli esimerkeistä 15,5 prosentissa käytetään todistamista. *Pyramidi*-kirjassa esimerkkejä on yhteensä 68, joista seitsemässä tulee todistaa. Tällöin todistamisesimerkkien prosenttiosuus on lähes sama kuin tehtävien, 10,3 prosenttia.

Tarkasteltaessa todistamistehtävien määrää on otettava huomioon se, että opetus on aina lopulta opettajasta riippuvaista. On siis opettajan päätettävissä, kuinka paljon todistamista lukiokursseilla käsitellään. Yleensä opettaja valikoi tehtävät opiskelijoiden laskettavaksi ja samoin opettajalla on suuri merkitys siihen, mihin esimerkkitehtäviin opiskelija perehtyy. Lisäksi suurin osa todistamistehtävistä on tasoltaan haastavampia tehtäviä, joten todennäköisesti niistä vain pieni osa valikoituu opiskelijoiden ratkaistavaksi. Opetussuunnitelman perusteiden [9] mukaan todistamisen periaatteet ja harjoittelu kuuluvat kurssin 11 eli logiikan ja lukuteorian syventävän erikoiskurssin sisältöön. Voi siis hyvin olla, että opiskelija opiskelee läpi lukion pitkän matematiikan perehtymättä tarkemmin todistamistekniikoihin tai tekemättä itse yhtään todistustehtävää.

7.4.2 Todistamistehtävät yliopiston matematiikan kursseilla

Vertailun vuoksi tarkastellaan todistustehtävien määrää myös yliopistotasolla. Tarkastelun kohteena on kurssin *Analyysi 1* harjoitustehtävät syksyltä 2010 [5]. Näitä tehtäviä tarkasteltaessa on luokittelu haastavampaa eikä sitä voida tehdä samalla tavalla kuin lukiotasoisille tehtäville. On huomioitava, että yliopistomatematiikassa opiskelijan odotetaan esittävän todistuksen, vaikka tehtävänannossa tätä ei varsinaisesti pyydetä. Esimerkiksi, jos pyydetään *määrittämään täsmällisesti*, tarkoittaa tämä todistuksen esittämistä. Lisäksi esimerkin 6.2 kaltaisissa tehtävissä yliopistotasolla ratkaisuksi vaaditaan yleensä todistus.

Luokittelun hankaluuden takia, *Analyysi 1* -kurssin tehtävät luokitellaan kahdella eri tavalla. Molempia tuloksia verrataan lukion oppikirjoihin. Ensimmäinen luokittelu tehdäään kuten lukion oppikirjojen tapauksessa. Tällöin todistamistehtäviksi lasketaan kaikki sellaiset tehtävät, joiden tehtävänannon mukaan tulee *todistaa*, *osoittaa* tai *näyttää (todeksi)*. Useampia kohtia sisältävä tehtävä luokitellaan todistustehtäväksi, jos vähintään yksi sen kohdista voidaan luokitella todistustehtäväksi. Toisaalta monikohtaisessa tehtävässä saattaa olla useampia kohtia, joissa vaaditaan esitettäväksi todistus. Näitä kohtia ei kuitenkaan luokitella erillisiksi todistustehtäviksi. Toisessa luokittelussa huomioidaan myös tehtävänannot, joissa todistamisesta ei suoraan mainita. Koska oikeita ratkaisuja ei ole saatavilla, luokittelu perustuu tutkielman tekijän omaan mielipiteeseen tehtävistä, joissa todistus tarvitaan.

Analyysi 1 -kurssilla syksyllä 2010 pidettiin laskuharjoitus 14 kertaa. Näissä laskuharjoituksissa tehtäviä oli yhteensä 101. Ensimmäisen luokittelun mukaan todistustehtäviä on yhteensä 48 eli 47,5 prosenttia kaikista tehtävistä. Toisen luokittelun mukaan todistustehtäviä on 63, joka on siis 62,4 prosenttia kaikista tehtävistä. Tulos on varmasti normaali yliopiston ensimmäisille matematiikan kursseille. Jatkokursseilla todistustehtävien määrä nousee ja joillakin kursseilla se voi olla jopa 90 prosenttia.

7.4.3 Vertailua

Lukion oppikirjojen välillä on selvästi eroa todistamistehtävien määrässä. *Pitkä matematiikka* -kirjassa, jonka todettiin aiemmin yleisilmeeltään muistuttavan yliopistotasoisia matematiikan kirjoja, on todistamistehtäviä selvästi enemmän. Eroa *Pyramidi*-kirjaan on jopa 11,6 prosenttiyksikköä. Kun todistamistehtävien määrä ylipäätänsäkin on vähäinen, on ero eri oppikirjojen välillä suuri.

Verrattaessa lukion oppikirjojen todistustehtävien määrää yliopiston kursseihin, ero on vielä huomattavampi. Ero *Pitkä matematiikka* -oppikirjan ja *Analyysi 1* -kurssin laskuharjoitusten välillä on peräti 25,3 prosenttiyksikköä, vaikka vertailtaisiin vain tehtäviä, joissa suoraan pyydetään todistamaan. Eroa korostaa vielä tehtävien valinta. *Analyysi 1* -kurssin tehtävien kohdalla opettaja on jo valinnut sopivat harjoitustehtävät. Lukion oppikirjojen kohdalla on taas todistamistehtävien määrää laskettaessa huomioitu kaikki tehtävät. Todellisuudessa opiskelija ei kurssin aikana tule kaikkia tehtäviä tekemään. Saattaa siis olla, että opiskelijan kurssin aikana tekemien todistamistehtävien määrä suhteessa kaikkiin tehtäviin on vielä alhaisempi kuin mitä edellä on laskettu. Toisaalta opettaja sopivalla tehtävien valikoinnilla voi kasvattaa todistamistehtävien osuutta kurssilla.

8 Lopuksi

Tutkielman tekoa aloittaessani vaikutti siltä, että kuilu lukio- ja yliopistomatematiikan välillä olisi kovinkin suuri. Tutkielman teon aikana olen perehtynyt lukion opetussuunnitelman perusteisiin ja niihin tavoitteisiin, joita lukion pitkän matematiikan opiskelulle asetetaan. Jos nämä tavoitteet toteutuvat opiskelijan kohdalla, ei matematiikan opiskelun yliopistotasolla tulisi tuottaa kovinkaan paljon vaikeuksia. Kun tarkastellaan MAA13-kurssin ja yliopisto-opinnot aloittavien kurssien sisältöjä huomataan, että ne ovat hyvin samankaltaisia. Sisältöjen puolesta suuria eroja ei siis pitäisi olla. Tavoitteet ovat kuitenkin niin suuret ja sisällöt niin laajat, että kaikki opiskelijat eivät niitä täytä ja hallitse. Eroja on siis olemassa ja joidenkin opiskelijoiden kohdalla ne voivat olla hyvinkin suuria.

Ennakkokäsitykseni oli, että *Pitkä matematiikka* -oppikirja soveltuisi paremmin lukio-opetukseen. Kun kirjoihin on tutustunut kokonaisvaltaisesti ja analysoinut kaikkia osa-alueita, on mielipiteeni osittain muuttunut. Vaikka *Pitkä matematiikka* muistuttaa yleisilmeeltään yliopistotasoisia matematiikan kirjoja, on sisällöltään *Pyramidi* lähempänä yliopistotasoa. *Pyramidi* on yleisilmeeltään kyllä värikkäämpi ja siten peruskoulumaisempi, mutta sisällön esitystapa on selkeä ja johdonmukainen. Tavalliseen kouluopiskeluun *Pyramidi* soveltuu oikein hyvin. Itseopiskeluun *Pitkä matematiikka* saattaisi olla parempi tehtävien ratkaisujen esitystavan ja kertausosion takia. Kummastakin oppikirjasta oli selvästi löydettävissä hyviä ja huonoja puolia.

Todistamistehtävien määrä lukion oppikirjoissa aiheutti ehkä suurimman yllätyksen. Oppikirjoissa todistamistehtävien välillä oli yli 10 prosenttiyksikön ero ja suurimmillaankin todistamistehtävien osuus kaikista tehtävistä oli vain hieman yli 22 prosenttia. Todistamistehtävien laatu vaihteli kirjoissa ja jälleen molemmissa kirjoissa oli sekä hyviä että huonoja puolia.

Kaiken kaikkiaan lukio- ja yliopistomatematiikan eroja tarkasteltaessa tulee muistaa opettajan mahdollisuus vaikuttaa asiaan. Lukio-opetuksessa on kuitenkin vielä hyvin pitkälti opettajasta kiinni kurssin sisältö ja aikataulu, tietysti opetussuunnitelman suomissa rajoissa. Opettajan on kuitenkin mahdollista tehdä päätös esimerkiksi keskittymisestä matemaattisen kielentämisen harjoitteluun tai asiayhteyksien tarkempaan käsittelyyn. Opettaja voi myös päättää olla käyttämättä taulukkokirjaa. Tällöin opiskelijat voisivat innokkaammin pyrkiä ymmärtämään kaavojen todellista sisältöä. Opettaja pystyy myös helposti vaikuttamaan kursseilla käsiteltävien todistusten määrään valitsemalla tarkasteltavat esimerkkitehtävät ja harjoitustehtävät huolella.

Tulevana matematiikan opettajana ja yliopistomatematiikan haasteet tuntevana todistamistehtävien määrä lukion oppikirjoissa tuntuu todella vähäiseltä. Kun viimeisellä matematiikan lukiokurssilla todistamistehtäviä on näin vähän, niin mikä on tilanne aiemmilla kursseilla. Omalta osaltani pyrin vaikuttamaan lukio- ja yliopistomatematiikan väliseen kuiluun korostamallaa todistamisajattelun ja matemaattisen todistamisen merkitystä omassa opetuksessani. Uskon kuitenkin, että vaaditaan Jouni Välijärven ajatuksien kaltaisia muutoksia matematiikan lukio-opetuksessa, jotta todistaminen lukiossa saadaan sille tasolle, millä sen tulisi olla.

Tutkielmaa tehdessä olen oppinut tarkastelemaan oppikirjoja kriittisesti, mikä tulee varmasti auttamaan minua tulevaisuudessa. Olen myös ymmärtänyt selvemmin sen, että oppikirja ei missään tapauksessa saa ohjata kurssin kulkua vaan ohjenuorana tulee olla lukion opetussuunnitelma. Jälkeenpäin ajatellen kirja-analyysin tekeminen lukion pitkän matematiikan pakollisesta kurssista olisi ollut selvempää. Tutkielman näkökulmasta johtuen kirjan valinta oli kuitenkin perusteltua. Olisi ollut myös mielenkiintoista tarkastella todistustehtävien määrää kaikissa lukion kursseissa.

Viitteet

[1] Informaatiotieteiden tiedekunta: *Opinto-opas 2010-2012*. Tampere: Tampereen yliopisto, 2010. Kurssikuvauksilla täydennettynä osoitteessa: http://www.uta.fi/opiskelu/opinto-oppaat, viitattu 1.9.2011.

[2] *Johdatus analyysiin - kurssimateriaali*. Tampere: Tampereen yliopisto, 2011. Saatavilla pdf-muodossa: http://mtl.uta.fi/matematiikka/johdatus-analyysiin/johdatus-analyysiin.pdf, viitattu 8.9.2011.

[3] Joutsenlahti, J.: *Pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen piirteitä*. Teoksessa Jalonen L., Keranto T., Kaila K. (toim.) *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.-26.11.2004. Matemaattisten aineiden opettajan taitotieto - haaste vai mahdollisuus?*. Oulu: Oulun yliopisto, 2005. Saatavilla pdf-muodossa: http://herkules.oulu.fi/isbn9514278879/isbn9514278879.pdf, viitattu 2.10.2011.

[4] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen J., Paasonen, J., Salmela, M. ja Tahvanainen J.: *Pitkä matematiikka 13 - Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy, 2008.

[5] Koivisto, P.: *Analyysi 1-kurssin viikkoharjoitustehtävät*. Tampere: Tampereen yliopisto, 2010. Saatavilla pdf-muodossa: http://mtl.uta.fi/matematiikka/analyysi-1/harjoitukset2010/harjoitukset.html, viitattu 30.9.2011.

[6] Kontkanen, P., Lehtonen, J. ja Luosto, K.: *Pyramidi 13 - Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2007.

[7] Malinen, P.: *Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun*. Teoksessa *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos, 1997.

[8] Mattila, L.: *Perusopetuksen matematiikan kansalliset oppimistulokset 9. vuosiluokalla 2004 - Yhteenveto keskeisistä tuloksista*. Opetushallitus, 2005. Saatavilla pdf-muodossa: http://www.oph.fi/download/115539_perusopetuksen_matematiikan_kansalliset_oppimistulokset_9_vuosiluokalla_2004.pdf, viitattu 31.10.2011.

[9] *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Opetushallitus, 2003. Saatavilla pdf-muodossa: http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf, viitattu 1.9.2011.

[10] Salas, Hille and Etgen: *Calculus - One and several variables, Eight edition*. USA: John Wiley & Sons, 1999.

[11] Välijärvi, J.: *Millä eväillä lukiosta yliopistoon? Lukiolaisten opiskeluvalmiudet korkeakoulujen opettajien arvioimina*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitoksen julkaisusarja A, Tutkimuksia 68, 1997.