TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Iiris Repo

Lineaarista projektiivista geometriaa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Marraskuu 2012

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

REPO, IIRIS: Lineaarista projektiivista geometriaa

Pro gradu -tutkielma, 34 s.

Matematiikka

Marraskuu 2012

Tiivistelmä

Tutkielmassa käsitellään lineaarista projektiivista geometriaa. Aihetta tarkastellaan lineaarialgebran pohjalta ja tutkielman aluksi käydään läpi tarvittavia lineaarialgebran määritelmiä ja lauseita. Kolmannessa luvussa määritellään projektiivinen avaruus sekä projektiivinen taso, projektiivinen suora ja projektiivisen avaruuden piste. Lisäksi tarkastellaan projektiivisen geometrian muita peruskäsitteitä ja -ominaisuuksia. Tutkielman neljännessä luvussa määritellään projektiivinen kuvaus sekä määritellään, milloin projektiivisen avaruuden pisteet ovat yleisessä asemassa. Viides luku keskittyy Desarguesin ja Pappoksen lauseiden tarkasteluun. Tutkielman viimeisessä luvussa käsitellään duaalisuutta projektiivisessa geometriassa ja lopuksi esitetään Desarguesin lauseen duaali. Päälähteenä tutkielmassa on käytetty Nigel Hitchinin monistetta Projective geometry.

Sisältö

1 Johdanto

Projektiivisen geometrian katsotaan saaneen alkunsa renesanssin ajan taiteilijoiden perspektiivisen piirtämisen opista. Perspektiivin avulla taiteilijat pystyivät kuvaamaan kolmiulotteisen kohteen kaksiulotteiseksi kuvaksi siten, että kuva antaa realistisen vaikutelman eri pisteiden välisistä etäisyyksistä. Euklidisen geometrian käsite etäisyyksistä ei siis tässä tapauksessa ollut toimiva, sillä etäisyys kahden piirretyn kohteen välillä ei vastannut todellisten kohteiden välistä etäisyyttä. Sen lisäksi, että projektiivinen geometria luo matemaattisen perustan perspektiiviselle piirtämiselle, sillä on merkitystä nykypäivänä esimerkiksi tietokonegrafiikassa. ([5, s. 2], [9, s. 88-89].)

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehdyttää lukija projektiivisen geometrian perusteisiin. Aksiomaattisen lähestymistavan sijaan tutkielmassa tarkastellaan projektiivista geometriaa lineaarialgebran lähtökohdista ja tarkasteluissa tähdätään Desarguesin ja Pappoksen lauseiden todistamiseen. Luvuissa 3 ja 4 tarkastellaan projektiivisen geometrian peruskäsitteitä sekä esitetään ja todistetaan näihin käsitteisiin liittyviä lauseita. Luvussa 5 puolestaan esitetään ja todistetaan Desarguesin ja Pappoksen lauseet ja lopuksi luvussa 6 tarkastellaan duaalisuutta projektiivisessa geometriassa sekä esitetään Desarguesin lauseen duaali.

Tutkielmassa oletetaan, että lukija tuntee lineaarialgebran perusteet sekä joukkojen ja funktioiden perusominaisuudet. Luvussa 2 esitetään kuitenkin tutkielman kannalta tärkeimpiä lineaarialgebran lauseita ja määritelmiä. Lisäksi pykälässä 6.1 esitetään sellaisia lineaarialgebraan liittyviä esitietoja, joita tarvitaan erityisesti luvussa 6.

Päälähteenä tutkielmassa on käytetty Nigel Hitchinin monistetta Projective geometry [5]. Muina lähteinä on käytetty mm. Miles Reidin ja Balázs Szendrőin kirjaa Geometry and Topology [8] ja Stephen H. Friedbergin, Arnold J. Inselin ja Lawrence E. Spencen kirjaa Linear Algebra [4].

2 Esitietoja

Tässä luvussa esitetään tutkielman kannalta oleellisimpia lineaarialgebran määritelmiä ja lauseita sekä tutkielmassa käytettäviä merkintöjä. Tämän luvun lauseiden todistukset pääsääntöisesti ohitetaan. Lukijan oletetaan tuntevan kunnan, vektoriavaruuden ja sen aliavaruuden, kannan ja järjestetyn kannan, dimension ja lineaarikuvauksen määritelmät sekä näihin käsitteisiin liittyvät perusominaisuudet. Lisäksi käsitteet lineaarikombinaatio sekä lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus oletetaan tunnetuiksi.

2.1 Kanta ja dimensio

Tarkastellaan aluksi tutkielmassa tarvittavia merkintöjä sekä esitetään lauseita liittyen kantaan ja dimensioon.

Vektoreille käytetään pääsääntöisesti merkintöjä $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}$ ja skalaareille merkintöjä a, b, c, λ, μ. Jos V on vektoriavaruus ja $\beta \subseteq V$ sen epätyhjä osajoukko, niin merkinnällä $\operatorname{span}(\beta)$ tarkoitetaan joukon β vektoreiden kaikkien lineaarikombinaatioiden joukkoa. Merkinnällä $\dim(V)$ tarkoitetaan puolestaan vektoriavaruuden V dimensiota. Merkinnän $\dim(V) = n$ sijaan voidaan myös sanoa, että vektoriavaruus V on n-ulotteinen. [4, s. 30, 46–47] Tutkielmassa vektoriavaruuteen liittyvä kunta jätetään pääosin mainitsematta.

Lause 2.1. *Olkoon U vektoriavaruuden V osajoukko. Tällöin* $\operatorname{span}(U)$ *on vektoriavaruuden V aliavaruus. Lisäksi vektoriavaruuden V aliavaruus, joka sisältää joukon U, sisältää myös joukon* $\operatorname{span}(U)$.

Todistus. Ks. [4, s. 30]. □

Lause 2.2. *Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ sen osajoukko. Tällöin β on vektoriavaruuden V kanta, jos ja vain jos jokainen vektori $\boldsymbol{v} \in V$ voidaan esittää yksikäsitteisesti joukon β vektoreiden lineaarikombinaationa eli toisin sanoen muodossa*

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n},$$

missä skalaarit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat yksikäsitteisiä.

Todistus. Ks. [4, s. 43–44]. □

Lause 2.3. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Tällöin lineaarisesti riippumaton vektoriavaruuden V osajoukko voidaan täydentää vektoriavaruuden V kannaksi.*

Todistus. Ks. [4, s. 47–48]. □

Lause 2.4. *Olkoon U äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruus. Tällöin U on äärellisulotteinen ja* $\dim(U) \leq \dim(V)$. *Lisäksi, jos* $\dim(U) = \dim(V)$, *niin $U = V$.*

Todistus. Ks. [4, s. 50]. □

Lause 2.5. *Jos U ja W ovat vektoriavaruuden V aliavaruuksia, niin*

(a) $U + W$ on vektoriavaruuden V aliavaruus,

(b) $U \cap W$ on vektoriavaruuden V aliavaruus.

Todistus. Ks. [7, s. 57–58]. □

Lause 2.6. *Jos U ja W ovat äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruuksia, niin*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Todistus. Ks. [7, s. 72]. □

2.2 Lineaarikuvaukset

Tarkastellaan seuraavaksi lineaarikuvauksiin liittyviä määritelmiä ja lauseita.

Määritelmä 2.1. [4, s. 67] Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja olkoon $T_0 \colon V \to W$ kuvaus. Tällöin T_0 on *nollakuvaus*, mikäli $T_0(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ kaikilla $\boldsymbol{v} \in V$.

Määritelmä 2.2. [4, s. 67] Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja olkoon $T \colon V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin kuvauksen T *nolla-avaruus* on joukko $\{\boldsymbol{v} \in V \colon T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$ ja *kuva-avaruus* on joukko $\{T(\boldsymbol{v}) \colon \boldsymbol{v} \in V\}$. Nolla-avaruudelle käytetään merkintää $N(T)$ ja kuva-avaruudelle merkintää $R(T)$.

Seuraavissa tässä luvussa esitetyissä lauseissa 2.7–2.18 oletetaan, että V ja W ovat vektoriavaruuksia.

Lause 2.7. *Olkoon $T \colon V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin $N(T)$ on vektoriavaruuden V aliavaruus ja $R(T)$ on vektoriavaruuden W aliavaruus.*

Todistus. Ks. [4, s. 68]. □

Lause 2.8. *Olkoon V_1 vektoriavaruuden V aliavaruus ja W_1 vektoriavaruuden W aliavaruus. Jos $T \colon V \to W$ on lineaarikuvaus, niin $T(V_1)$ on vektoriavaruuden W aliavaruus ja $\{\boldsymbol{v} \in V \colon T(\boldsymbol{v}) \in W_1\}$ on vektoriavaruuden V aliavaruus.*

Todistus. Ks. [7, s. 182–183]. □

Lause 2.9. *Olkoon $T \colon V \to W$ lineaarikuvaus. Jos $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ on vektoriavaruuden V kanta, niin*

$$R(T) = \operatorname{span}(T(\beta)) = \operatorname{span}(\{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n})\}).$$

Todistus [4, s. 68]. Kuva-avaruuden määritelmän mukaan $T(\boldsymbol{v_i}) \in R(T)$, kun $i = 1, \ldots, n$. Lisäksi lauseen 2.7 perusteella $R(T)$ on aliavaruus. Siten lauseen 2.1 mukaan $\operatorname{span}(\{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n})\}) = \operatorname{span}(T(\beta)) \subseteq R(T)$.

Osoitetaan vielä, että $R(T) \subseteq \operatorname{span}(T(\beta))$. Valitaan mielivaltainen $\boldsymbol{w} \in R(T)$, jolloin $\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v})$ jollakin vektorilla $\boldsymbol{v} \in V$. Koska β on kanta, niin on olemassa sellaiset skalaarit $a_1, \ldots, a_n$, että

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v_i}.$$

Nyt, koska T on lineaarikuvaus, niin

$$\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\boldsymbol{v_i}) \in \operatorname{span}(T(\beta)).$$

Siis $R(T) \subseteq \operatorname{span}(T(\beta))$, joten $R(T) = \operatorname{span}(T(\beta))$. □

Olkoon nyt $T\colon V \to W$ lineaarikuvaus, jossa V ja W ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia. Tällöin nolla-avaruuden dimensiolle käytetään merkintää $\mathrm{nullity}(T)$ ja kuva-avaruuden dimensiolle merkintää $\mathrm{rank}(T)$. [4, s. 69] Seuraava lause kertoo yhteyden vektoriavaruuden V dimension sekä nolla- ja kuva-avaruuden dimension välillä.

Lause 2.10. *Olkoon $T\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Jos V on äärellisulotteinen, niin*

$$\mathrm{nullity}(T) + \mathrm{rank}(T) = \dim(V).$$

Todistus. Ks. [4, s. 70]. □

Lauseet 2.11 ja 2.12 osoittautuvat tärkeiksi, kun todistetaan kahden lineaarikuvauksen olevan samoja. Erityisesti lause 2.12 osoittaa, että riittää tarkastella, kuinka kuvaukset käyttäytyvät kannan vektoreiden suhteen.

Lause 2.11. *Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja olkoon $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ vektoriavaruuden V kanta. Olkoot lisäksi $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_n} \in W$ vektoreita. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen lineaarikuvaus $T\colon V \to W$, että $T(\boldsymbol{v_i}) = \boldsymbol{w_i}$, kun $i = 1, 2, \dots, n$.*

Todistus. Ks. [4, s. 72–73]. □

Lause 2.12. *Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja olkoon V äärellisulotteinen kantanaan $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$. Jos $T_1\colon V \to W$ ja $T_2\colon V \to W$ ovat lineaarikuvauksia ja $T_1(\boldsymbol{v_i}) = T_2(\boldsymbol{v_i})$, kun $i = 1, 2, \dots, n$, niin tällöin $T_1 = T_2$.*

Todistus. Lause seuraa lauseesta 2.11. (Ks. [4, s. 73].) □

Seuraavat kaksi lausetta liittyvät käsitteisiin injektio ja surjektio.

Lause 2.13. *Olkoon $T\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin T on injektio, jos ja vain jos $N(T) = \{\boldsymbol{0}\}$.*

Todistus [4, s. 71]. Oletetaan ensin, että T on injektio. Lineaarikuvausten ominaisuuksien perusteella on selvää, että $\{\boldsymbol{0}\} \subseteq N(T)$, joten näytetään vielä, että $N(T) \subseteq \{\boldsymbol{0}\}$. Valitaan mielivaltainen $\boldsymbol{v} \in N(T)$. Tällöin $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} = T(\boldsymbol{0})$, joten injektion määritelmän mukaan $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Siis $\boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{0}\}$, joten $N(T) \subseteq \{\boldsymbol{0}\}$. Nyt siis $N(T) = \{\boldsymbol{0}\}$.

Oletetaan nyt, että $N(T) = \{\boldsymbol{0}\}$. Oletetaan lisäksi, että $T(\boldsymbol{v_1}) = T(\boldsymbol{v_2})$. Nyt lineaarikuvauksen määritelmän perusteella voidaan kirjoittaa

$$\boldsymbol{0} = T(\boldsymbol{v_1}) - T(\boldsymbol{v_2}) = T(\boldsymbol{v_1}) + T(-\boldsymbol{v_2}) = T(\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2}).$$

Siten $\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2} \in N(T) = \{\boldsymbol{0}\}$, joten $\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0}$. Siis $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_2}$, joten injektion määritelmän mukaan T on injektio. □

Lause 2.14. *Olkoot V ja W äärellisulotteisia vektoriavaruuksia, joiden dimensio on sama, ja olkoon lisäksi $T\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat väitteet ovat keskenään ekvivalentteja.*

(a) Kuvaus T on injektio.

(b) Kuvaus T on surjektio.

(c) On voimassa, että $\operatorname{rank}(T) = \dim(V)$.

Todistus. Ks. [4, s. 71]. □

Esimerkki 2.1. Tarkastellaan lineaarikuvausta $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ säännöllä

$$T(x, y, z) = (2x - z, y, x + y)$$

ja näytetään, että T on bijektio eli injektio ja surjektio. Lauseen 2.14 mukaan riittää näyttää, että T on injektio. Hyödynnetään nyt lauseen 2.13 tulosta. Koska $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, niin $\{\mathbf{0}\} \subseteq N(T)$. Valitaan nyt mielivaltainen vektori $(x, y, z) \in N(T)$. Tällöin nolla-avaruuden määritelmän mukaan $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$, joten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ \qquad\;\; y = 0 \\ \;\; x + y = 0. \end{cases}$$

Tästä saadaan ratkaisuksi, että $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Siis $(x, y, z) \in \{\mathbf{0}\}$, joten $N(T) \subseteq \{\mathbf{0}\}$. Nyt siis $N(T) = \{\mathbf{0}\}$, joten T on injektio ja siten myös surjektio.

Kuvausta, jolle on olemassa käänteiskuvaus, sanotaan *kääntyväksi* [4, s. 99]. Siten esimerkin 2.1 lineaarikuvaus on kääntyvä. Seuraavat lauseet liittyvät kääntyviin lineaarikuvauksiin.

Lause 2.15. *Olkoon $T\colon V \to W$ kääntyvä lineaarikuvaus. Tällöin V on äärellisulotteinen, jos ja vain jos W on äärellisulotteinen. Lisäksi äärellisulotteisessa tapauksessa* $\dim(V) = \dim(W)$.

Todistus. Ks. [4, s. 101]. □

Määritelmä 2.3. [4, s. 102] Vektoriavaruudet V ja W ovat *isomorfisia*, jos on olemassa kääntyvä lineaarikuvaus $T\colon V \to W$. Tällainen kuvaus T on *isomorfismi*.

Lause 2.16. [4, s. 108 harj. 17] *Olkoot V ja W äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja olkoon $T\colon V \to W$ isomorfismi. Jos $V_1 \subseteq V$ on aliavaruus, niin tällöin* $\dim(V_1) = \dim(T(V_1))$.

Todistus. Olkoon $\beta_1 = \{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}$ aliavaruuden V_1 kanta. Tällöin lauseen 2.3 perusteella kanta β_1 voidaan laajentaa vektoriavaruuden V kannaksi $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m}, \boldsymbol{v_{m+1}}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$. Isomorfismin määritelmän mukaan T on kääntyvä, joten lauseiden 2.15 ja 2.14 perusteella $\operatorname{rank}(T) = \dim(V) = \dim(W)$. Siten lauseen 2.9 perusteella vektorit $T(\boldsymbol{v_1}), \dots, T(\boldsymbol{v_n})$ ovat lineaarisesti riippumattomat, joten myös $T(\beta_1) = \{T(\boldsymbol{v_1}), \dots, T(\boldsymbol{v_m})\}$ on lineaarisesti riippumaton. Osoitetaan vielä, että $T(\beta_1)$ virittää aliavaruuden $T(V_1)$ eli toisin sanoen, että

$$\operatorname{span}(T(\beta_1)) = \operatorname{span}(\{T(\boldsymbol{v_1}), \dots, T(\boldsymbol{v_m})\}) = T(V_1).$$

Koska nyt $T(\boldsymbol{v_i}) \in T(V_1)$, kun $i = 1, \dots, m$, niin lauseen 2.1 perusteella $\operatorname{span}(T(\beta_1)) \subseteq T(V_1)$. Näytetään vielä, että $T(V_1) \subseteq \operatorname{span}(T(\beta_1))$. Valitaan mielivaltainen $\boldsymbol{w} \in T(V_1)$. Tällöin $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ jollakin vektorilla $\boldsymbol{v} \in V_1$. Vektori $\boldsymbol{v}$ voidaan esittää skalaarien $a_1, \dots, a_m$ avulla muodossa

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + \dots + a_m\boldsymbol{v_m},$$

joten koska T on lineaarikuvaus, niin

$$\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v}) = T(a_1\boldsymbol{v_1} + \dots + a_m\boldsymbol{v_m}) = a_1T(\boldsymbol{v_1}) + \dots + a_mT(\boldsymbol{v_m}).$$

Siis $\boldsymbol{w} \in \operatorname{span}(T(\beta_1))$, joten $T(\beta_1)$ virittää aliavaruuden $T(V_1)$. Koska $T(\beta_1)$ on lisäksi lineaarisesti riippumaton, niin se on aliavaruuden $T(V_1)$ kanta. Nyt siis $\dim(V_1) = \dim(T(V_1))$. □

Esitetään tämän luvun lopuksi vielä kaksi lausetta, jotka liittyvät lineaarikuvausten kokoelmiin.

Lause 2.17. *Olkoot V ja W vektoriavaruuksia yli saman kunnan F. Tällöin kaikkien lineaarikuvausten $T\colon V \to W$ kokoelma on vektoriavaruus yli kunnan F.*

Todistus. Ks. [4, s. 82]. □

Lauseen 2.17 mukaisessa vektoriavaruudessa nollakuvaus T_0 on nollavektori [4, s. 82]. Seuraava lause puolestaan kertoo tämän vektoriavaruuden dimension.

Lause 2.18. *Olkoot V ja W äärellisulotteisia vektoriavaruuksia yli saman kunnan F ja olkoon lisäksi $\dim(V) = n$ ja $\dim(W) = m$. Tällöin kaikkien lineaarikuvausten $T\colon V \to W$ muodostama vektoriavaruus on äärellisulotteinen ja sen dimensio on nm.*

Todistus. Ks. [4, s. 104]. □

3 Projektiivinen avaruus

Tässä luvussa käsitellään projektiivisen geometrian peruskäsitteitä ja -ominaisuuksia. Tutkielman luvuissa 3, 4 ja 5 sekä pykälässä 6.2 oletetaan, että tarkasteltavat vektoriavaruudet ovat äärellisulotteisia.

3.1 Projektiivisen avaruuden määritelmiä

Määritelmä 3.1. [5, s. 4] Vektoriavaruuden V *projektiivinen avaruus* $P(V)$ on vektoriavaruuden V yksiulotteisten aliavaruuksien joukko.

Määritelmä 3.2. [5, s. 4] Jos vektoriavaruuden V dimensio on $n+1$, niin projektiivisen avaruuden $P(V)$ *dimensio* on n.

Myös projektiivisen avaruuden $P(V)$ dimensiolle voidaan käyttää merkintää $\dim(P(V))$.

Tarkastellaan nyt esimerkiksi vektoriavaruutta $\mathbb{R}^3$. Tiedetään, että tämän vektoriavaruuden aliavaruuksia ovat nollavektorin muodostama joukko, origon kautta kulkevat suorat, origon kautta kulkevat tasot sekä joukko $\mathbb{R}^3$ [6, s. 45]. Näistä aliavaruuksista origon kautta kulkevat suorat ovat dimensioltaan 1, joten projektiivinen avaruus $P(\mathbb{R}^3)$ on kolmiulotteisen reaalilukuavaruuden origon kautta kulkevien suorien joukko.

Tämä ajatus voidaan myös yleistää koskemaan muitakin reaalilukuavaruuksia. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ projektiivinen avaruus $P(\mathbb{R}^{n+1})$ on reaalilukuavaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ origon kautta kulkevien suorien joukko. Tällöin voidaan projektiiviselle avaruudelle käyttää myös merkintää $P^n(\mathbb{R})$. ([5, s. 5], [8, s. 75].)

Määritelmä 3.3. [5, s. 6] Olkoon V vektoriavaruus ja $U \subseteq V$ sen aliavaruus. Projektiivisen avaruuden $P(V)$ *lineaarinen aliavaruus* on aliavaruuden U yksiulotteisten aliavaruuksien joukko.

Lineaarialgebrasta tunnetaan, että vektoriavaruuden aliavaruus on myös vektoriavaruus [4, s. 16]. Siten määritelmän 3.1 mukaan projektiivisen avaruuden lineaarinen aliavaruus on myös projektiivinen avaruus.

Määritelmä 3.4. [8, s. 76] Dimensioltaan 0 oleva lineaarinen aliavaruus on projektiivisen avaruuden *piste*. Dimensioltaan 1 oleva lineaarinen aliavaruus on puolestaan *projektiivinen suora* ja dimensioltaan 2 oleva on *projektiivinen taso*.

Määritelmä 3.5. [5, s. 18] Olkoon $P(V)$ projektiivinen avaruus, jonka dimensio on n. Tällöin projektiivisen avaruuden $P(V)$ *hypertaso* on sen lineaarinen aliavaruus, jonka dimensio on $n-1$.

Esimerkki 3.1. Olkoon $V = \mathbb{R}^3$ ja olkoot $U_1, U_2 \subseteq V$ sellaisia aliavaruuksia, että $U_1 = \operatorname{span}(\{(1, 2, 1)\})$ ja $U_2 = \operatorname{span}(\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\})$.

Nyt $P(\mathbb{R}^3)$ on määritelmien 3.3 ja 3.4 mukaan projektiivinen taso. Aliavaruus U_1 on kolmiulotteisen reaalilukuavaruuden origon kautta kulkeva suora ja sen dimensio on 1, joten $P(U_1)$ on piste projektiivisessa tasossa $P(\mathbb{R}^3)$. Aliavaruus U_2 vastaa puolestaan yz-tasoa ja sen dimensio on 2. Nyt siis $P(U_2)$ on projektiivinen suora. Toisaalta $P(U_2)$ on myös tason $P(\mathbb{R}^3)$ hypertaso.

Esimerkissä 3.1 lineaarinen aliavaruus $P(U_1)$ on projektiivisen avaruuden piste ja aliavaruuden U_1 virittää vektori $(1, 2, 1)$. Toisaalta saman aliavaruuden U_1 virittää myös esimerkiksi vektori $(2, 4, 2)$ tai vektori $(-1, -2, -1)$. Tarkastellaan seuraavaksi tätä ajatusta hieman yleisemmin.

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $\{\boldsymbol{v_0}, \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ sen kanta. Olkoon lisäksi U tämän vektoriavaruuden aliavaruus, jonka dimensio on 1. Tällöin $X = P(U)$ on projektiivisen avaruuden piste. Olkoon nyt $\boldsymbol{v} \in V$ vektori, joka virittää aliavaruuden U. Tällöin $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Nyt vektoria $\boldsymbol{v}$ sanotaan *pistettä X edustavaksi vektoriksi* ja tällöin merkitään, että $[\boldsymbol{v}] = X$. Jos $\lambda \neq 0$ on skalaari, niin myös $\lambda\boldsymbol{v}$ virittää saman aliavaruuden U. Tällöin $\lambda\boldsymbol{v}$ on siis myös pistettä X edustava vektori ja

$$[\boldsymbol{v}] = [\lambda\boldsymbol{v}].$$

Vektori $\boldsymbol{v}$ voidaan esittää kannan vektoreiden lineaarikombinaationa muodossa

$$\boldsymbol{v} = x_0\boldsymbol{v_0} + x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n},$$

missä $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ovat skalaareja. Nyt $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ vastaa vektorin $\boldsymbol{v}$ koordinaatteja tarkasteltavan kannan suhteen. Tällöin voidaan merkitä, että $X = [\boldsymbol{v}] = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$, ja näitä koordinaatteja sanotaan pisteen X *homogeenisiksi koordinaateiksi*. Jos edelleen $\lambda \neq 0$, niin

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = [\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n].$$

Nyt nollavektori ei ole edustava vektori millekään projektiivisen avaruuden pisteelle, joten pistettä $[0, \ldots, 0]$ ei ole projektiivisessa avaruudessa. ([5, s. 5], [1, s. 78].)

Esimerkki 3.2. Olkoot V ja U_1 kuten esimerkissä 3.1 ja merkitään, että $X = P(U_1)$. Nyt

$$X = [1, 2, 1] = [2, 4, 2] = [-1, -2, -1].$$

3.2 Pisteitä ja suoria koskevat lauseet

Tässä pykälässä esitetään ja todistetaan kaksi projektiivisen avaruuden pisteitä ja projektiivisia suoria koskevaa lausetta.

Lause 3.1. *Projektiivisen avaruuden kahden eri pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi projektiivinen suora.*

Todistus [5, s. 7]. Olkoon $P(V)$ projektiivinen avaruus. Valitaan nyt sellaiset mielivaltaiset pisteet $X, Y \in P(V)$, että $X \neq Y$, ja olkoot $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{u}$ näitä pisteitä edustavat vektorit. Nyt $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{u}$ ovat lineaarisesti riippumattomat, sillä muutoin olisi voimassa ehto $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u}$ jollakin skalaarilla λ. Tällöin

$$X = [\boldsymbol{v}] = [\lambda \boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}] = Y,$$

mikä on ristiriidassa ehdon $X \neq Y$ kanssa.

Olkoon nyt U se vektoriavaruus, jonka vektorit $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{u}$ virittävät. Nyt U on vektoriavaruuden V aliavaruus ja $\dim(U) = 2$, joten $P(U) \subseteq P(V)$ on dimensioltaan 1 oleva lineaarinen aliavaruus eli projektiivinen suora. Koska $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in U$, niin $X, Y \in P(U)$ eli projektiivinen suora $P(U)$ kulkee pisteiden X ja Y kautta.

Osoitetaan vielä, että $P(U)$ on yksikäsitteinen. Oletetaan, että $P(U')$ on toinen projektiivinen suora, joka kulkee pisteiden X ja Y kautta. Tällöin siis myös $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in U'$, joten koska U' on vektoriavaruus, niin lauseen 2.1 mukaan $\operatorname{span}(\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}) \subseteq U'$. Toisaalta, koska $\operatorname{span}(\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}) = U$, niin $U \subseteq U'$. Kuitenkin $\dim(U) = \dim(U') = 2$, joten lauseen 2.4 perusteella $U = U'$. Siis kahden pisteen kautta kulkeva projektiivinen suora on yksikäsitteinen. □

Esimerkki 3.3. Tarkastellaan projektiivista avaruutta $P(\mathbb{R}^3)$. Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aliavaruus, jonka vektorit $(1, 1, 0)$ ja $(5, 1, 2)$ virittävät. Määritetään nyt, onko projektiivisen avaruuden pisteet

$$X = [0, -4, 2] \qquad \text{ja} \qquad Y = [5, 8, 2]$$

projektiivisella suoralla $P(U)$.

Pistettä X edustava vektori $(0, -4, 2)$ voidaan esittää vektoreiden $(1, 1, 0)$ ja $(5, 1, 2)$ lineaarikombinaationa muodossa

$$(5, 1, 2) - 5(1, 1, 0) = (0, -4, 2),$$

joten $(0, -4, 2) \in U$. Nyt siis $X \in P(U)$ eli piste X on suoralla $P(U)$. Tarkastellaan nyt pistettä Y. Esitetään pistettä Y edustava vektori $(5, 8, 2)$ lineaarikombinaationa muodossa

$$a(1, 1, 0) + b(5, 1, 2) = (5, 8, 2).$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a + 5b = 5 \\ a + b = 8 \\ 2b = 2. \end{cases}$$

Kahdesta alimmasta yhtälöstä saadaan, että $b = 1$ ja $a = 7$. Nämä eivät kuitenkaan toteuta ylintä yhtälöä, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Siis vektoria $(5, 8, 2)$ ei voida esittää vektoreiden $(1, 1, 0)$ ja $(5, 1, 2)$ lineaarikombinaationa, joten $(5, 8, 2) \notin U$ eikä piste Y ole siis suoralla $P(U)$.

Seuraavassa lauseessa esitetään ja todistetaan sellainen projektiivisen geometrian ominaisuus, joka poikkeaa selvästi euklidisen geometrian vastaavasta ominaisuudesta. Euklidisessa geometriassa tason kaksi eri suoraa leikkaavat korkeintaan yhdessä pisteessä. Tapauksessa, jossa suorat ovat yhdensuuntaiset, leikkauspistettä ei ole. Projektiivisen tason kahdella eri suoralla on puolestaan aina täsmälleen yksi leikkauspiste. [5, s. 3]

Lause 3.2. *Projektiivisen tason kaksi eri suoraa leikkaa täsmälleen yhdessä pisteessä.*

Todistus (vrt. [5, s. 7]). Olkoon $P(V)$ projektiivinen taso ja olkoot $P(U_1)$ ja $P(U_2)$ tason $P(V)$ kaksi eri suoraa. Tällöin $\dim(V) = 3$ ja $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 2$ sekä U_1 ja U_2 ovat kaksi eri vektoriavaruuden V aliavaruutta. Lauseen 2.5 perusteella $U_1 + U_2$ on vektoriavaruuden V aliavaruus ja tällöin lauseen 2.4 mukaan

$$\dim(U_1 + U_2) \leq \dim(V).$$

Toisaalta lauseen 2.6 perusteella

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Yhdistämällä edelliset saadaan, että

$$2 + 2 - \dim(U_1 \cap U_2) \leq 3,$$

joten täytyy olla voimassa ehto

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1.$$

Koska $U_1 \cap U_2$ on lauseen 2.5 mukaan vektoriavaruus ja $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ ja $U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$, niin lauseen 2.4 perusteella

$$\dim(U_1 \cap U_2) \leq 2.$$

Vektoriavaruuden $U_1 \cap U_2$ dimensio ei kuitenkaan voi olla 2, sillä muutoin olisi voimassa ehto

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) = \dim(U_2),$$

ja tällöin siis lauseen 2.4 perusteella

$$U_1 = U_1 \cap U_2 = U_2,$$

mikä on ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa.

Nyt siis $U_1 \cap U_2$ on yksiulotteinen vektoriavaruuden V aliavaruus. Lisäksi $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ ja $U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$, joten $P(U_1 \cap U_2)$ on kysytty projektiivisen avaruuden $P(V)$ piste.

Osoitetaan vielä pisteen yksikäsitteisyys. Oletetaan, että on olemassa myös toinen projektiivisten suorien $P(U_1)$ ja $P(U_2)$ leikkauspiste ja olkoon $P(W)$ tämä piste. Nyt W on vektoriavaruuden V yksiulotteinen aliavaruus.

Koska $P(W)$ on suorien $P(U_1)$ ja $P(U_2)$ leikkauspiste, niin $P(W) \subseteq P(U_1)$ ja $P(W) \subseteq P(U_2)$. Tällöin myös $W \subseteq U_1$ ja $W \subseteq U_2$, joten myös $W \subseteq U_1 \cap U_2$. Koska kuitenkin $\dim(W) = \dim(U_1 \cap U_2)$, niin lauseen 2.4 mukaan $W = U_1 \cap U_2$. Siis kahden projektiivisen suoran leikkauspiste on yksikäsitteinen. $\square$

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan projektiivista tasoa $P(\mathbb{R}^3)$ ja sen projektiivisia suoria $P(U_1)$ ja $P(U_2)$, kun

$$U_1 = \operatorname{span}(\{(1,1,0),(0,1,0)\})$$
$$U_2 = \operatorname{span}(\{(0,2,1),(4,1,-2)\}).$$

Määritetään näiden suorien leikkauspiste. Huomataan, että

$$2(0,2,1)+(4,1,-2) = (4,5,0)$$

ja toisaalta

$$4(1,1,0)+(0,1,0) = (4,5,0),$$

joten $(4,5,0) \in U_1 \cap U_2$. Lauseen 3.2 todistuksen mukaan $\operatorname{span}(\{(4,5,0)\}) = U_1 \cap U_2$ ja siis piste $[4,5,0]$ on suorien $P(U_1)$ ja $P(U_2)$ leikkauspiste.

Huomautus. Tutkielman esimerkeissä käytetään havainnollisuuden vuoksi pääasiassa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^3$. Projektiivisen geometrian määritelmät ja lauseet pätevät kuitenkin myös yleisesti muillekin vektoriavaruuksille.

4 Projektiivinen kuvaus

Määritelmä 4.1. (Vrt. [5, s. 9], [8, s. 77].) Olkoon X projektiivisen avaruuden $P(V)$ piste ja olkoon $\boldsymbol{v} \in V$ sitä edustava vektori. Kuvaus $\tau\colon P(V) \to P(W)$ on *projektiivinen kuvaus*, mikäli on olemassa sellainen kääntyvä lineaarikuvaus $T\colon V \to W$, että

$$\tau(X) = [T(\boldsymbol{v})]$$

kaikilla $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Määritelmän 4.1 mukaisessa tapauksessa voidaan myös sanoa, että T *määrää* projektiivisen kuvauksen τ. Lisäksi projektiivista kuvausta voidaan sanoa myös *projektiviteetiksi*. On kuitenkin huomattava, että eri lähteissä projektiivisen kuvauksen määritelmän muoto ja kuvauksen nimitys voivat hieman vaihdella. (Ks. [8, s. 77], [5, s. 9], [3, s. 64].)

Oletetaan nyt, että $T\colon V \to W$ määrää projektiivisen kuvauksen τ. Olkoon lisäksi $[\boldsymbol{u}] \in P(V)$ piste ja $U \subseteq V$ se aliavaruus, jonka $\boldsymbol{u}$ virittää. Lauseen 2.8 perusteella $T(U) \subseteq W$ on myös aliavaruus. Lisäksi, koska T on kääntyvä, niin lauseen 2.16 mukaan $\dim(U) = \dim(T(U))$. Siis yksiulotteinen aliavaruus U kuvautuu yksiulotteiseksi aliavaruudeksi $T(U)$. Toisin sanoen projektiivinen kuvaus kuvaa projektiivisen avaruuden $P(V)$ pisteen projektiivisen avaruuden $P(W)$ pisteeksi. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan, miten suoran kolme pistettä kuvautuvat projektiivisessa kuvauksessa.

Esimerkki 4.1. Olkoon $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus säännöllä $T(x, y, z) = (2x-z, y, x+y)$. Esimerkissä 2.1 näytettiin, että T on kääntyvä. Tarkastellaan nyt tämän kuvauksen määräämää projektiivista kuvausta τ ja projektiivisen tason $P(\mathbb{R}^3)$ pisteitä

$$\begin{aligned} X_1 &= [1, 1, 0], \\ X_2 &= [0, 2, 5], \\ X_3 &= [3, 5, 5]. \end{aligned}$$

Nämä pisteet ovat samalla suoralla, sillä jos tarkastellaan suoraa $P(U) \subseteq P(\mathbb{R}^3)$, missä $U = \operatorname{span}(\{(1, 1, 0), (0, 2, 5)\})$, niin selvästi $(1, 1, 0) \in U$ ja $(0, 2, 5) \in U$. Lisäksi $(3, 5, 5) = 3(1, 1, 0) + (0, 2, 5) \in U$. Nyt

$$\begin{aligned} \tau(X_1) &= [T(1, 1, 0)] = [2, 1, 2], \\ \tau(X_2) &= [T(0, 2, 5)] = [-5, 2, 2], \\ \tau(X_3) &= [T(3, 5, 5)] = [1, 5, 8]. \end{aligned}$$

Olkoon $P(U')$ pisteiden $[2, 1, 2]$ ja $[-5, 2, 2]$ kautta kulkeva suora. Tällöin $U' = \operatorname{span}(\{(2, 1, 2), (-5, 2, 2)\})$. Nyt

$$(1, 5, 8) = 3(2, 1, 2) + (-5, 2, 2) \in U',$$

joten myös piste $[1,\ 5,\ 8]$ on suoralla $P(U')$. Siis τ kuvasi kolme samalla suoralla olevaa pistettä samalle suoralle.

Edellisen esimerkin tapaus voidaan myös yleistää. Koska kääntyville lineaarikuvauksille on lauseen 2.16 mukaan voimassa ehto $\dim(U) = \dim(T(U))$, kun U on aliavaruus, niin myös kaksiulotteinen aliavaruus kuvautuu kaksiulotteiseksi aliavaruudeksi. Siis projektiivinen suora kuvautuu projektiiviseksi suoraksi.

Seuraava lause kuvaa sitä, millä ehdolla kaksi eri lineaarikuvausta määräävät saman projektiivisen kuvauksen. Tätä lausetta tarvitaan myöhemmin lauseen 4.2 todistuksessa.

Lause 4.1. *Olkoot T ja T' kääntyviä lineaarikuvauksia, jotka määräävät jonkin projektiivisen kuvauksen. Tällöin T ja T' määräävät saman projektiivisen kuvauksen, jos ja vain jos $T' = \lambda T$ jollakin skalaarilla $\lambda \neq 0$.*

Todistus (vrt. [5, s. 9]). Olkoot τ ja τ' ne projektiiviset kuvaukset, jotka lineaarikuvaukset T ja T' määräävät. Oletetaan aluksi, että $T' = \lambda T$ jollakin skalaarilla $\lambda \neq 0$. Valitaan nyt mielivaltainen piste $[\boldsymbol{v}]$ kuvauksen τ määrittelyjoukosta. Nyt

$$\tau([\boldsymbol{v}]) = [T(\boldsymbol{v})] = [\lambda(T(\boldsymbol{v}))] = [(\lambda T)(\boldsymbol{v})] = \tau'([\boldsymbol{v}]),$$

joten $\tau = \tau'$ kaikilla pisteillä $[\boldsymbol{v}]$. Siis T ja T' määräävät saman projektiivisen kuvauksen.

Oletetaan nyt, että T ja T' määräävät saman projektiivisen kuvauksen, jolloin siis $\tau = \tau'$. Nyt lineaarikuvausten T ja T' määrittely- ja maalijoukot ovat samat. Olkoon määrittelyjoukko V ja olkoon $\{\boldsymbol{v_0}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ sen kanta. Nyt

$$\tau([\boldsymbol{v_i}]) = [T(\boldsymbol{v_i})] = [T'(\boldsymbol{v_i})]$$

kaikilla $i = 0, \ldots, n$, joten

$$T'(\boldsymbol{v_i}) = \lambda_i T(\boldsymbol{v_i})$$

joillakin skalaareilla λ_i. Koska kannan vektoreiden lineaarikombinaatiot ovat myös vektoriavaruuden V vektoreita, niin täytyy myös olla voimassa ehto

$$T'\left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v_i}\right) = \lambda T\left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v_i}\right)$$

jollakin skalaarilla $\lambda \neq 0$. Nyt edellisten kohtien ja lineaarikuvausten ominaisuuksien perusteella

$$\lambda T\left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v_i}\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda T(\boldsymbol{v_i})$$

ja

$$\lambda T\left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v_i}\right) = T'\left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v_i}\right) = \sum_{i=0}^{n} T'(\boldsymbol{v_i}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T(\boldsymbol{v_i}).$$

Yhdistämällä nämä saadaan, että

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda T(\boldsymbol{v_i}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T(\boldsymbol{v_i}).$$

Lauseen 2.15 perusteella kääntyvillä lineaarikuvauksilla määrittely- ja maalijoukkojen dimensio on sama. Koska T on kääntyvä, niin lauseen 2.14 kohdan (c) ja lauseen 2.9 perusteella vektorit $T(\boldsymbol{v_i})$, kun $i = 0, \ldots, n$, ovat lineaarisesti riippumattomia. Siten nämä vektorit muodostavat maalijoukon kannan. Nyt siis lauseen 2.2 perusteella summien $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i T(\boldsymbol{v_i})$ ja $\sum_{i=0}^{n} \lambda T(\boldsymbol{v_i})$ skalaarit ovat yksikäsitteisiä, joten $\lambda_i = \lambda$ kaikilla $i = 0, \ldots, n$.

Siis kaikille kannan vektoreille on voimassa ehto $T'(\boldsymbol{v_i}) = \lambda T(\boldsymbol{v_i})$, joten lauseen 2.12 perusteella $T' = \lambda T$ jollakin skalaarilla λ. □

Lineaarialgebrassa vektoriavaruuden kanta ja lineaarisesti riippumattomat vektorit ovat keskeisiä käsitteitä. Esimerkiksi lineaarikuvauksissa kannan vektoreiden kuvautuminen määrittää koko kuvauksen, kuten lauseista 2.11 ja 2.12 käy ilmi. Tarkastellaan seuraavaksi vastaavanlaista ominaisuutta projektiivisessa geometriassa.

Määritelmä 4.2. [5, s. 12] Olkoon $P(V)$ projektiivinen avaruus, jonka dimensio on n. Tällöin $n+2$ tämän avaruuden pistettä ovat *yleisessä asemassa*, mikäli tämän pistejoukon minkä tahansa $n+1$ pistettä sisältävän osajoukon pisteitä edustavat vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat vektoriavaruudessa V.

Lause 4.2. *Jos projektiivisen avaruuden $P(V)$ pisteet $X_1, \ldots, X_{n+2}$ ja projektiivisen avaruuden $P(W)$ pisteet $Y_1, \ldots, Y_{n+2}$ ovat yleisessä asemassa, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen projektiivinen kuvaus $\tau \colon P(V) \to P(W)$, että $\tau(X_i) = Y_i$, kun $i = 1, \ldots, n+2$.*

Todistus [5, s. 12–13]. Valitaan sellaiset vektorit $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n+2}} \in V$, jotka edustavat projektiivisen avaruuden $P(V)$ pisteitä $X_1, \ldots, X_{n+2}$. Koska pisteet $X_1, \ldots, X_{n+2}$ ovat yleisessä asemassa, niin vektorit $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n+1}}$ ovat lineaarisesti riippumattomat ja muodostavat siten vektoriavaruuden V kannan. Tällöin $\boldsymbol{v_{n+2}}$ voidaan esittää kannan vektoreiden lineaarikombinaationa eli toisin sanoen on olemassa sellaiset skalaarit λ_i, että

$$\boldsymbol{v_{n+2}} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \boldsymbol{v_i}. \tag{4.1}$$

Nyt $\lambda_i \neq 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n+1$, sillä muutoin yhtälö (4.1) voitaisiin kirjoittaa sellaisessa muodossa, että siinä olisi vain $n+1$ termiä. Tämä puolestaan osoittaisi yhtälössä esiintyvät $n+1$ vektoria lineaarisesti riippuviksi, mikä on ristiriidassa yleisen aseman määritelmän kanssa.

Nyt koska $\lambda_i \boldsymbol{v_i} \neq 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n+1$, niin myös vektori $\lambda_i \boldsymbol{v_i}$ on pistettä X_i edustava vektori kaikilla $i = 1, \ldots, n+1$. Voidaan siis valita pisteitä $X_1, \ldots, X_{n+1}$ edustavat vektorit uudestaan niin, että

$$\boldsymbol{v_{n+2}} = \sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{v_i}. \tag{4.2}$$

Vastaavasti voidaan valita sellaiset pisteitä $Y_1, \ldots, Y_{n+2}$ edustavat vektorit $\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_{n+2}} \in W$, että

$$\boldsymbol{w_{n+2}} = \sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{w_i}. \tag{4.3}$$

Koska vektorit $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n+1}}$ muodostavat vektoriavaruuden V kannan, niin lauseen 2.11 perusteella on olemassa sellainen yksikäsitteinen lineaarikuvaus $T\colon V \to W$, että $T(\boldsymbol{v_i}) = \boldsymbol{w_i}$, kun $i = 1, \ldots, n+1$. Nyt, koska T on lineaarikuvaus, yhtälöiden (4.2) ja (4.3) perusteella

$$T(\boldsymbol{v_{n+2}}) = T\left(\sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} T(\boldsymbol{v_i}) = \sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{w_i} = \boldsymbol{w_{n+2}}.$$

Lisäksi lauseen 2.9 perusteella

$$R(T) = \operatorname{span}(\{T(\boldsymbol{v_1}), \ldots, T(\boldsymbol{v_{n+1}})\}) = \operatorname{span}(\{\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_{n+1}}\}).$$

Koska myös vektorit $\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_{n+1}}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, niin

$$\operatorname{rank}(T) = n + 1 = \dim(V),$$

joten lauseen 2.14 perusteella T on kääntyvä. On siis olemassa sellainen kääntyvä lineaarikuvaus T, että kaikilla $i = 1, \ldots, n+2$ on voimassa

$$\tau(X_i) = \tau([\boldsymbol{v_i}]) = [T(\boldsymbol{v_i})] = [\boldsymbol{w_i}] = Y_i,$$

joten τ on kysytty projektiivinen kuvaus.

Osoitetaan vielä, että τ on yksikäsitteinen. Oletetaan nyt, että on olemassa lineaarikuvaus T', joka määrää toisen projektiivisen kuvauksen τ', jolla on vastaava ominaisuus. Nyt siis

$$\tau'(X_i) = \tau'([\boldsymbol{v_i}]) = [T'(\boldsymbol{v_i})] = Y_i = [\boldsymbol{w_i}],$$

joten

$$T'(\boldsymbol{v_i}) = \mu_i \boldsymbol{w_i} \tag{4.4}$$

joillakin skalaareilla μ_i, kun $i = 1, \ldots, n+2$. Nyt yhtälöiden (4.2) ja (4.4) perusteella

$$\mu_{n+2}\boldsymbol{w_{n+2}} = T'(\boldsymbol{v_{n+2}}) = T'\left(\sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} T'(\boldsymbol{v_i}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \boldsymbol{w_i}.$$

Koska vektorit $\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_{n+1}}$ muodostavat vektoriavaruuden W kannan, niin yhtälössä (4.3) esitetty muoto vektorille $\boldsymbol{w_{n+2}}$ on lauseen 2.2 perusteella yksikäsitteinen. Nyt täytyy siis olla voimassa ehto $\mu_{n+2} = \mu_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n+1$ eli toisin sanoen $\mu_i/\mu_{n+2} = 1$. Jakamalla yhtälö (4.4) puolittain skalaarilla μ_{n+2} saadaan, että

$$\frac{1}{\mu_{n+2}} T'(\boldsymbol{v_i}) = \boldsymbol{w_i}.$$

Toisaalta $T(\boldsymbol{v_i}) = \boldsymbol{w_i}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n+2$, joten

$$T'(\boldsymbol{v_i}) = \mu_{n+2} T(\boldsymbol{v_i})$$

kaikilla kannan vektoreilla $\boldsymbol{v_i}$. Siis lauseen 2.12 perusteella $T' = \mu_{n+2} T$, joten lauseen 4.1 mukaan $\tau' = \tau$. $\square$

5 Desarguesin ja Pappoksen lauseet

Tässä luvussa esitetään Desarguesin ja Pappoksen lauseet todistuksineen. Girard Desargues (1591–1661) oli ranskalainen matemaatikko ja arkkitehti. Häntä pidetään yhtenä projektiivisen geometrian perustajana. Pappos Aleksandrialainen (290–350) oli puolestaan kreikkalainen matemaatikko, joka tarkasteli mm. Eukleideen geometriaa. Hänen mukaansa nimetty lause on kuitenkin merkittävä myös projektiivisessa geometriassa. ([3, s. 30, 38], [5, s. 14–15].)

5.1 Desargues

Todistetaan aluksi kaksi apulausetta, joita tarvitaan lauseiden 5.1 ja 5.2 todistuksissa.

Apulause 5.1. *Kolme projektiivisen avaruuden pistettä on samalla projektiivisella suoralla, jos ja vain jos näitä pisteitä edustavat vektorit ovat lineaarisesti riippuvat.*

Todistus (vrt. [3, s. 22]). Olkoot X, Y ja Z projektiivisen avaruuden $P(V)$ pisteitä ja olkoot lisäksi $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in V$ pisteitä X, Y ja Z edustavat vektorit.

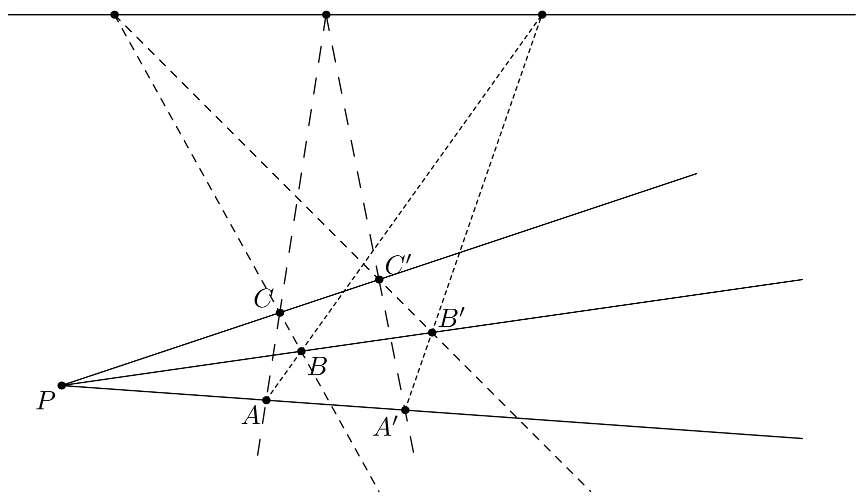
Oletetaan aluksi, että pisteet X, Y, Z ovat samalla projektiivisella suoralla. Määritelmän 3.4 mukaan projektiivinen suora on dimensioltaan 1 oleva projektiivisen avaruuden $P(V)$ lineaarinen aliavaruus. Olkoon tämä aliavaruus $P(U)$, jolloin $X, Y, Z \in P(U)$, joten $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in U$. Koska $\dim(U) = 2$, niin lineaarialgebran tulosten perusteella vektorit $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}$ ovat lineaarisesti riippuvat.

Oletetaan nyt, että vektorit $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}$ ovat lineaarisesti riippuvat ja olkoon U näiden vektoreiden virittämä vektoriavaruus. Tällöin $\dim(U) \leq 2$. Jos $\dim(U) = 2$, niin $P(U)$ on projektiivinen suora, joka kulkee pisteiden X, Y, Z kautta, joten pisteet ovat samalla projektiivisella suoralla. Jos puolestaan $\dim(U) = 1$, niin vektorit $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}$ ovat toistensa skalaarimonikertoja ja siten $X = Y = Z$, jolloin tapaus on triviaali. □

Apulause 5.2. *Projektiivisen suoran kolme eri pistettä ovat yleisessä asemassa.*

Todistus [5, s. 12]. Valitaan projektiivisen suoran kolmesta eri pisteestä mitkä tahansa kaksi. Koska kyseessä on kaksi eri pistettä, niin niitä edustavat vektorit eivät ole toistensa skalaarimonikertoja ja siten ovat lineaarisesti riippumattomat. Siis projektiivisen suoran kolme eri pistettä ovat yleisessä asemassa. □

Esitetään ja todistetaan seuraavaksi Desarguesin lause. Havainnollisuuden vuoksi kuvassa 1 on esitetty esimerkkitapaus Desarguesin lauseen mukaisesta tilanteesta tasossa $\mathbb{R}^2$.



Kuva 1: Desarguesin lauseen havainnollistus.

Lause 5.1 (Desarguesin lause)**.** *Olkoot A, B, C, A', B', C' ja P projektiivisen avaruuden $P(V)$ sellaiset seitsemän eri pistettä, että suorat AA', BB' ja CC' ovat eri suoria, jotka leikkaavat samassa pisteessä P. Tällöin leikkauspisteet $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ ja $CA \cap C'A'$ ovat samalla suoralla.*

Todistus [5, s. 14]. Lauseen oletusten mukaan P, A ja A' ovat saman projektiivisen suoran kolme eri pistettä. Tällöin apulauseen 5.2 perusteella pisteet P, A ja A' ovat yleisessä asemassa. Nyt voidaan vastaavasti kuin lauseen 4.2 todistuksessa valita sellaiset pisteitä edustavat vektorit $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a'}$, että

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a'}.$$

Koska piste P on myös suorilla BB' ja CC', niin voidaan samaan tapaan valita sellaiset pisteitä B ja B' edustavat vektorit $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b'}$ ja pisteitä C ja C' edustavat vektorit $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c'}$, että

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b'} \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c'}.$$

Yhdistämällä nämä saadaan, että $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a'} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b'} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c'}$, joten voidaan merkitä

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{b'} - \boldsymbol{a'} = \boldsymbol{c''} \\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{c'} - \boldsymbol{b'} = \boldsymbol{a''} \\ \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a'} - \boldsymbol{c'} = \boldsymbol{b''}. \end{aligned}$$

Koska pisteet A ja B ovat eri pisteitä, niin niitä edustavat vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat. Siten $\boldsymbol{c''} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Vastaavasti $\boldsymbol{a''} \neq \boldsymbol{0}$ ja $\boldsymbol{b''} \neq \boldsymbol{0}$, joten projektiivisessa avaruudessa $P(V)$ on pisteet A'', B'' ja C'', joita nämä vektorit edustavat. Lisäksi nyt

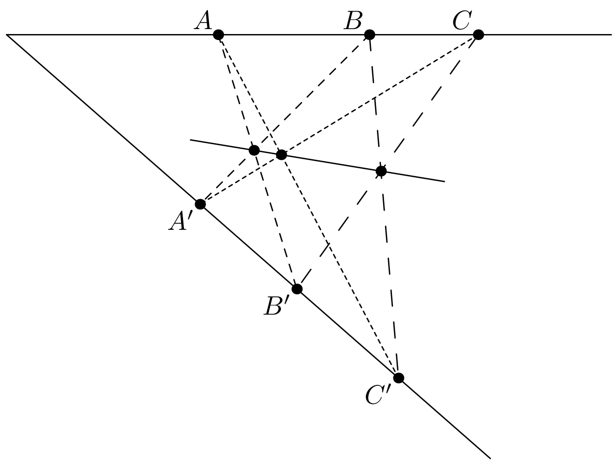
$$\boldsymbol{c''} + \boldsymbol{a''} + \boldsymbol{b''} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

joten vektorit $\boldsymbol{c}'', \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}''$ ovat lineaarisesti riippuvat. Tällöin apulauseen 5.1 perusteella pisteet A'', B'' ja C'' ovat samalla suoralla.

Osoitetaan vielä, että pisteet A'', B'' ja C'' ovat kysytyt suorien leikkauspisteet. Koska $\boldsymbol{c}'' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ovat lineaarisesti riippumattomat, niin $\boldsymbol{c}''$ kuuluu vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ virittämään vektoriavaruuden V aliavaruuteen, jonka dimensio on 2. Olkoon tämä aliavaruus U. Nyt $P(U)$ on projektiivinen suora, joka kulkee pisteiden A ja B kautta, joten C'' on suoralla AB. Toisaalta, koska myös $\boldsymbol{c}'' = \boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}'$, niin vastaavasti voidaan päätellä, että C'' on myös suoralla $A'B'$. Koska AB ja $A'B'$ ovat eri suoria, niin C'' on leikkauspiste $AB \cap A'B'$. Vastaavalla päättelyllä huomataan, että $A'' = BC \cap B'C'$ ja $B'' = CA \cap C'A'$. Siis leikkauspisteet $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ ja $CA \cap C'A'$ ovat samalla suoralla. $\square$

5.2 Pappos

Esitetään ja todistetaan seuraavaksi Pappoksen lause. Kuvassa 2 esitetään Pappoksen lauseesta tasoon $\mathbb{R}^2$ piirretty havainnollistus.



Kuva 2: Pappoksen lauseen havainnollistus.

Lause 5.2 (Pappoksen lause)**.** *Olkoot A, B, C ja A', B', C' projektiivisen tason kuusi eri pistettä ja olkoot pisteet A, B, C samalla suoralla ja pisteet A', B', C' samalla suoralla. Tällöin leikkauspisteet $BC' \cap B'C$, $CA' \cap C'A$ ja $AB' \cap A'B$ ovat samalla suoralla.*

Todistus [5, s. 15–16]. Olkoon $P(V)$ tarkasteltava projektiivinen taso.Voidaan olettaa, että pisteet A, B, C', B' ovat yleisessä asemassa. Jos näin ei olisi, niin yksi näistä pisteistä olisi molemmilla suorilla. Tällöin kysyttyjä leikkauspisteitä olisi vain kaksi, jolloin lauseen väite on triviaalisti voimassa.

Koska A, B, C', B' ovat yleisessä asemassa, voidaan vastaavasti kuin lauseen 4.2 todistuksessa valita sellaiset näitä pisteitä edustavat vektorit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}', \boldsymbol{b}'$,

että
$$\boldsymbol{b'} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c'}.$$

Koska vektorit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c'}$ ovat lineaarisesti riippumattomat ja $\dim(V) = 3$, niin vektorit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c'}$ muodostavat vektoriavaruuden V kannan. Esitetään nyt pisteiden A, B, C', B' homogeeniset koordinaatit tämän kannan suhteen. Nyt siis

$$\begin{aligned} A &= [\boldsymbol{a}] &&= [1, 0, 0], \\ B &= [\boldsymbol{b}] &&= [0, 1, 0], \\ C' &= [\boldsymbol{c'}] &&= [0, 0, 1], \\ B' &= [\boldsymbol{b'}] &&= [1, 1, 1]. \end{aligned}$$

Nyt suoraa AB vastaa kaksiulotteinen vektoriavaruuden V aliavaruus, jonka vektorit $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ virittävät. Piste C on suoralla AB, joten $C = [x, y, 0]$ joillakin skalaareilla x ja y. Koska $C \neq B$, niin $x \neq 0$. Pisteen C homogeeniset koordinaatit voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$C = \left[\frac{x}{x}, \frac{y}{x}, 0\right] = \left[1, \frac{y}{x}, 0\right] = [1, c, 0].$$

Nyt $c \neq 0$, sillä $C \neq A$. Vastaavasti piste A' on suoralla $B'C'$ ja vektorit $(0, 0, 1), (1, 1, 1)$ virittävät tätä suoraa vastaavan aliavaruuden, joten

$$A' = [1, 1, a].$$

Nyt $a \neq 1$, sillä $A' \neq B'$.

Suoraa BC' vastaavan aliavaruuden vektorit ovat muotoa $(0, y, z)$. Suoraa $B'C$ vastaavan aliavaruuden virittävät puolestaan vektorit $(1, 1, 1)$ ja $(1, c, 0)$. Nyt näiden suorien leikkauspistettä edustava vektori on siis sellainen vektoreiden $(1, 1, 1)$ ja $(1, c, 0)$ lineaarikombinaatio, joka on muotoa $(0, y, z)$. Koska

$$(1, 1, 1) - (1, c, 0) = (0, 1 - c, 1),$$

niin $BC' \cap B'C = [0, 1 - c, 1]$. Suoraa $C'A$ vastaavan aliavaruuden vektorit ovat puolestaan muotoa $(x, 0, z)$ ja suoraa CA' vastaavan aliavaruuden virittävät vektorit $(1, c, 0)$ ja $(1, 1, a)$. Nyt

$$(1, c, 0) - c(1, 1, a) = (1 - c, 0, -ca),$$

joten leikkauspiste $CA' \cap C'A = [1 - c, 0, -ca]$. Tarkastellaan vielä suoria AB' ja $A'B$. Suoraa AB' vastaavan aliavaruuden vektorit ovat muotoa (x, y, y) ja suoraa $A'B$ vastaavan aliavaruuden virittävät vektorit $(1, 1, a)$ ja $(0, 1, 0)$. Koska

$$(1, 1, a) + (a - 1)(0, 1, 0) = (1, a, a),$$

niin $AB' \cap A'B = [1, a, a]$.

Nyt leikkauspisteitä $BC' \cap B'C$, $CA' \cap C'A$ ja $AB' \cap A'B$ edustavien vektoreiden lineaarikombinaatio

$$a(0, 1-c, 1) + (1-c, 0, -ca) + (c-1)(1, a, a) = \mathbf{0},$$

joten vektorit $(0, 1-c, 1), (1-c, 0, -ca), (1, a, a)$ ovat lineaarisesti riippuvat. Siis apulauseen 5.1 perusteella leikkauspisteet $BC' \cap B'C$, $CA' \cap C'A$ ja $AB' \cap A'B$ ovat samalla suoralla. □

6 Duaalisuus

Tässä luvussa tarkastellaan aluksi lineaarialgebran duaaliavaruuteen liittyviä käsitteitä. Näitä esitietoja tarvitaan pykälässä 6.2, jossa käsitellään duaalisuutta projektiivisessa geometriassa. Osa pykälässä 6.1 esitettävien tulosten todistuksista sivuutetaan.

6.1 Duaaliavaruus

Määritelmä 6.1. [4, s. 119] Olkoon V vektoriavaruus yli kunnan F. Tällöin vektoriavaruuden V *duaaliavaruus* V^* on kaikkien lineaarikuvausten $f\colon V \to F$ muodostama vektoriavaruus.

Lauseen 2.18 perusteella tiedetään, että jos V on äärellisulotteinen, niin kaikkien lineaarikuvausten $f\colon V \to F$ muodostaman vektoriavaruuden dimensio saadaan tulona $\dim(V) \cdot \dim(F)$. Koska $\dim(F) = 1$, niin $\dim(V^*) = \dim(V)$.

Tarkastellaan nyt äärellisulotteista vektoriavaruutta V ja sen järjestettyä kantaa $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$. Nyt jokainen $\boldsymbol{v} \in V$ voidaan esittää yksikäsitteisten skalaarien $a_1, \ldots, a_n$ avulla muodossa

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v_i}.$$

Määritellään nyt kuvaus $f_i\colon V \to F$ säännöllä $f_i(\boldsymbol{v}) = a_i$. Tällöin sanotaan, että kuvaus f_i on *i:s koordinaattifunktio kannan β suhteen.* Nyt kannan β vektoreille $f_i(\boldsymbol{v_j}) = 1$, kun $i = j$ ja $f_i(\boldsymbol{v_j}) = 0$, kun $i \neq j$. [4, s. 43, 119]

Osoitetaan vielä, että kuvaus f_i on lineaarikuvaus. Valitaan mielivaltaiset vektorit $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ ja skalaari c, jolloin

$$\boldsymbol{v_1} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{v_i} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{v_2} = \sum_{i=1}^{n} d_i \boldsymbol{v_i}$$

joillakin skalaareilla $b_1, \ldots, b_n, d_1, \ldots, d_n$. Tällöin

$$c\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = \sum_{i=1}^{n} (cb_i \boldsymbol{v_i} + d_i \boldsymbol{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} (cb_i + d_i) \boldsymbol{v_i},$$

joten

$$f_i(c\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = cb_i + d_i = cf_i(\boldsymbol{v_1}) + f_i(\boldsymbol{v_2}).$$

Lause 6.1. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus järjestettynä kantanaan $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$. Olkoon lisäksi f_i i:s koordinaattifunktio kannan β suhteen, kun $i = 1, \ldots, n$. Merkitään, että $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Tällöin β^* on duaaliavaruuden V^* järjestetty kanta ja jokainen $f \in V^*$ voidaan esittää muodossa*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{v_i}) f_i.$$

Todistus. Ks. [4, s. 120]. □

Määritelmä 6.2. [4, s. 120] Olkoot V, V^* ja β, β^* kuten lauseessa 6.1. Tällöin β^* on kannan β *duaalikanta.*

Määritelmän 6.1 mukaan duaaliavaruus on myös vektoriavaruus. Voidaan siis tarkastella duaaliavaruuden V^* duaaliavaruutta V^{**}, joka on kaikkien lineaarikuvausten $f\colon V^* \to F$ muodostama vektoriavaruus. Tätä sanotaan *biduaaliksi.* [4, s. 122]

Olkoon nyt $\boldsymbol{v} \in V$ vektori ja määritellään kuvaus $\hat{v}\colon V^* \to F$ säännöllä $\hat{v}(f) = f(\boldsymbol{v})$ kaikilla $f \in V^*$ [4, s. 122]. Kuvaus $\hat{v}$ on lineaarikuvaus, sillä jos valitaan mielivaltaiset $f, g \in V^*$ ja $c \in F$, niin

$$\hat{v}(cf + g) = (cf + g)(\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) = c\hat{v}(f) + \hat{v}(g).$$

Nyt siis $\hat{v} \in V^{**}$. Lause 6.2 osoittaa, että tämän kuvauksen avulla voidaan muodostaa isomorfismi vektoriavaruuksien V ja V^{**} välille. Todistetaan sitä ennen vielä seuraava apulause.

Apulause 6.1. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoon $\boldsymbol{v} \in V$. Jos $\hat{v}(f) = 0$ kaikilla $f \in V^*$, niin $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.*

Todistus [4, s. 122]. Riittää osoittaa, että jos $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, niin on olemassa sellainen $f \in V^*$, että $\hat{v}(f) \neq 0$. Olkoon siis $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Tällöin voidaan muodostaa sellainen vektoriavaruuden V järjestetty kanta $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$, missä $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v}$. Olkoon nyt $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ kannan β duaalikanta ja valitaan, että $f = f_1$. Tällöin

$$\hat{v}(f) = f(\boldsymbol{v}) = f_1(\boldsymbol{v}) = 1 \neq 0,$$

joten lause on tosi. □

Lause 6.2. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoon $\psi\colon V \to V^{**}$ kuvaus säännöllä $\psi(\boldsymbol{v}) = \hat{v}$. Tällöin ψ on isomorfismi.*

Todistus [4, s. 122–123]. Osoitetaan ensin, että ψ on lineaarikuvaus. Valitaan mielivaltaiset vektorit $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ ja skalaari c ja olkoon $f \in V^*$. Koska $f, \hat{v}$ ja $\hat{u}$ ovat lineaarikuvauksia, niin

$$\begin{aligned}\psi(c\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})(f) &= f(c\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{u}) \\ &= c\hat{v}(f) + \hat{u}(f) = (c\hat{v}+\hat{u})(f),\end{aligned}$$

joten

$$\psi(c\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) = c\hat{v} + \hat{u} = c\psi(\boldsymbol{v}) + \psi(\boldsymbol{u}).$$

Siis ψ on lineaarikuvaus.

Todistetaan vielä, että ψ on kääntyvä. Koska $\dim(V) = \dim(V^{**})$, niin lauseen 2.14 perusteella riittää osoittaa, että ψ on injektio. Olkoon nyt $\boldsymbol{v} \in N(\psi)$. Tällöin siis $\hat{v}(f) = 0$ kaikilla $f \in V^*$. Apulauseen 6.1 perusteella $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Siis $N(\psi) = \{\boldsymbol{0}\}$, joten lauseen 2.13 perusteella ψ on injektio. Siis ψ on kääntyvä ja siten isomorfismi. $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi tiettyä duaaliavaruuden osajoukkoa, joka osoittautuu tärkeäksi myöhemmissä tarkasteluissa.

Määritelmä 6.3. [4, s. 126] Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Olkoon lisäksi U jokin vektoriavaruuden V osajoukko. Tällöin joukko

$$U^0 = \{f \in V^* \colon f(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ kaikilla } \boldsymbol{u} \in U\}$$

on joukon U *annihilaattori*.

Lause 6.3. [4, s. 126, harj. 13a] *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoon $U \subseteq V$ osajoukko. Tällöin annihilaattori U^0 on duaaliavaruuden V^* aliavaruus.*

Todistus. Nollakuvaus on duaaliavaruuden nollavektori ja selvästi nollakuvaus kuuluu joukkoon U^0. Valitaan nyt mielivaltaiset lineaarikuvaukset $f, g \in U^0$ ja mielivaltainen vektori $\boldsymbol{u} \in U$. Tällöin $f(\boldsymbol{u}) = 0$ ja $g(\boldsymbol{u}) = 0$, joten

$$(f+g)(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u}) = 0.$$

Siis $(f+g)(\boldsymbol{u}) = 0$ kaikilla $\boldsymbol{u} \in U$, joten $f+g \in U^0$. Valitaan nyt mielivaltainen skalaari c. Tällöin $cf(\boldsymbol{u}) = c \cdot 0 = 0$ kaikilla $\boldsymbol{u} \in U$, joten myös $cf \in U^0$. Siis U^0 on duaaliavaruuden V^* aliavaruus. $\square$

Lause 6.4. *Olkoot U_1 ja U_2 äärellisulotteisen vektoriavaruuden V osajoukkoja. Olkoon lisäksi $U_1 \subseteq U_2$. Tällöin $U_2^0 \subseteq U_1^0$.*

Todistus [5, s. 17]. Valitaan mielivaltainen $f \in U_2^0$. Tällöin $f(\boldsymbol{u}) = 0$ kaikilla $\boldsymbol{u} \in U_2$. Koska $U_1 \subseteq U_2$, niin $f(\boldsymbol{u}) = 0$ kaikilla $\boldsymbol{u} \in U_1$. Siis $f \in U_1^0$, joten $U_2^0 \subseteq U_1^0$. $\square$

Lause 6.5. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoon $U \subseteq V$ sen aliavaruus. Tällöin*

$$\dim(U) + \dim(U^0) = \dim(V).$$

Todistus [5, s. 17]. Olkoon $\{\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_m}\}$ aliavaruuden U järjestetty kanta ja laajennetaan se vektoriavaruuden V järjestetyksi kannaksi

$$\beta = \{\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_m}, \boldsymbol{v_{m+1}}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}.$$

Olkoon nyt $\beta^* = \{f_1 \ldots, f_n\}$ kannan β duaalikanta. Nyt aliavaruuden U kannan vektoreille on voimassa ehto $f_i(\boldsymbol{u_j}) = 0$, kun $i = m+1, \ldots, n$, joten $f_i(\boldsymbol{u}) = 0$ kaikilla $\boldsymbol{u} \in U$, kun $i = m+1, \ldots, n$. Siis $f_i \in U^0$, kun $i = m+1, \ldots, n$.

Valitaan nyt mielivaltainen $f \in U^0$. Tällöin myös $f \in V^*$, joten f voidaan esittää yksikäsitteisten skalaarien $a_1, \ldots, a_n$ avulla muodossa

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

Koska $f \in U^0$, niin $f(\boldsymbol{u_j}) = 0$, kun $j = 1, \ldots, m$. Toisaalta

$$f(\boldsymbol{u_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\boldsymbol{u_j}) = a_j,$$

joten $a_i = 0$, kun $i = 1, \ldots, m$. Siis f voidaan esittää yksikäsitteisesti duaalikannan vektoreiden $f_{m+1}, \ldots, f_n$ lineaarikombinaationa, joten lauseen 2.2 perusteella $\{f_{m+1}, \ldots, f_n\}$ on annihilaattorin U^0 kanta. Nyt siis

$$\dim(U) + \dim(U^0) = m + n - m = n = \dim(V),$$

joten lause on tosi. □

Koska U^0 on duaaliavaruuden aliavaruus, niin voidaan myös tarkastella joukon U^0 annihilaattoria U^{00}. Nyt siis

$$U^{00} = \{g \in V^{**} \colon g(f) = 0 \text{ kaikilla } f \in U^0\}.$$

Jos siis U on äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruus, niin lauseen 6.5 perusteella

$$\dim(U) + \dim(U^0) = \dim(V)$$

ja

$$\dim(U^0) + \dim(U^{00}) = \dim(V^*).$$

Koska $\dim(V) = \dim(V^*)$, niin yhdistämällä edelliset saadaan, että $\dim(U) = \dim(U^{00})$.

Lause 6.6. *Olkoon U äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruus ja olkoon $\psi\colon V \to V^{**}$ kuten lauseessa 6.2. Tällöin $\psi(U) = U^{00}$.*

Todistus (vrt. [5, s. 17–18]). Koska U on aliavaruus, niin lauseen 2.8 mukaan $\psi(U)$ on biduaalin V^{**} aliavaruus. Lisäksi lauseen 2.16 mukaan $\dim(\psi(U)) = \dim(U)$, joten edellisen kohdan perusteella $\dim(\psi(U)) = \dim(U^{00})$.

Osoitetaan nyt, että $\psi(U) \subseteq U^{00}$. Valitaan mielivaltainen $g \in \psi(U)$. Tällöin on olemassa sellainen $\boldsymbol{u} \in U$, että $\psi(\boldsymbol{u}) = \hat{u} = g$. Valitaan nyt mielivaltainen $f \in U^0$. Tällöin

$$g(f) = \psi(\boldsymbol{u})(f) = \hat{u}(f) = f(\boldsymbol{u}) = 0,$$

joten $g(f) = 0$ kaikilla $f \in U^0$. Siis $g \in U^{00}$, joten $\psi(U) \subseteq U^{00}$. Koska näiden aliavaruuksien dimensiot ovat samat, niin lauseen 2.4 perusteella $\psi(U) = U^{00}$. □

Esitetään vielä muutamia sellaisia vektoriavaruuksiin liittyviä määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan seuraavassa pykälässä.

Määritelmä 6.4. [4, s. 23] Olkoon U vektoriavaruuden V aliavaruus ja olkoon $\boldsymbol{v} \in V$ vektori. Tällöin joukko

$$\boldsymbol{v} + U = \{\boldsymbol{v}\} + U = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\colon \boldsymbol{u} \in U\}$$

on aliavaruuden U *sivuluokka.*

On mahdollista osoittaa, että kaksi sivuluokkaa $\boldsymbol{v_1} + U$ ja $\boldsymbol{v_2} + U$ ovat samat, jos ja vain jos $\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2} \in U$ (ks. [2, s. 1]). Olkoot nyt U ja V kuten määritelmässä 6.4. Määritellään seuraavaksi yhteenlasku ja skalaarilla kertominen kaikkien aliavaruuden U sivuluokkien joukossa $S = \{\boldsymbol{v} + U\colon \boldsymbol{v} \in V\}$. Olkoot $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ vektoreita ja c skalaari. Tällöin

$$(\boldsymbol{v_1} + U) + (\boldsymbol{v_2} + U) = (\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) + U$$

ja

$$c(\boldsymbol{v_1} + U) = c\boldsymbol{v_1} + U.$$

Yhteenlasku ja skalaarilla kertominen ovat hyvin määriteltyjä eivätkä siis ole riippuvaisia vektorin $\boldsymbol{v}$ valinnasta. Tämän todistaminen sivuutetaan. (Ks. [2, s. 2], [4, s. 23].)

Lause 6.7. *Olkoon U vektoriavaruuden V aliavaruus ja olkoon joukko S ja yhteenlasku sekä skalaarilla kertominen määritelty kuten yllä. Tällöin S on vektoriavaruus.*

Todistus. Ks. [2, s. 3]. □

Lauseen 6.7 mukaista vektoriavaruutta sanotaan vektoriavaruuden V *tekijäavaruudeksi modulo* U ja tälle käytetään merkintää V/U [4, s. 23]. Tämän vektoriavaruuden nollavektori on $U = \mathbf{0} + U$, sillä jos valitaan mielivaltainen $\boldsymbol{v} \in V$, niin

$$(\boldsymbol{v} + U) + U = (\boldsymbol{v} + U) + (\mathbf{0} + U) = (\boldsymbol{v} + \mathbf{0}) + U = \boldsymbol{v} + U$$

[2, s. 3]. Nyt jos $\boldsymbol{u} \in U$, niin myös $\boldsymbol{u} - \mathbf{0} \in U$, joten $\boldsymbol{u} + U = \mathbf{0} + U = U$. Seuraava lause koskee tekijäavaruuden dimensiota.

Lause 6.8. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoon U sen aliavaruus. Tällöin V/U on äärellisulotteinen ja*

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U).$$

Todistus. Ks. [2, s. 3–4]. □

Esimerkki 6.1. Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja U sen aliavaruus. Tarkastellaan nyt kuvausta $\pi \colon V \to V/U$ säännöllä $\pi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + U$ ja näytetään, että π on lineaarikuvaus. Valitaan mielivaltaiset vektorit $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ ja skalaari c. Nyt tekijäavaruudessa määritellyn yhteenlaskun perusteella

$$\pi(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + U = (\boldsymbol{v} + U) + (\boldsymbol{w} + U) = \pi(\boldsymbol{v}) + \pi(\boldsymbol{w}).$$

Lisäksi

$$\pi(c\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{v} + U = c(\boldsymbol{v} + U) = c\pi(\boldsymbol{v}),$$

joten π on lineaarikuvaus.

6.2 Duaalisuus projektiivisessa geometriassa

Tarkastellaan seuraavaksi projektiivisia avaruuksia $P(V)$ ja $P(V^*)$ sekä yhteyttä näiden avaruuksien välillä. Tässä pykälässä seurataan soveltuvin osin Hitchinin monisteen [5] pykälää 2.4.

Määritelmä 6.5. Olkoon V vektoriavaruus ja V^* sen duaaliavaruus. Tällöin projektiivinen avaruus $P(V^*)$ on projektiivisen avaruuden $P(V)$ *duaalinen projektiivinen avaruus.*

Projektiivisen avaruuden määritelmän mukaan $P(V^*)$ on duaaliavaruuden V^* yksiulotteisten aliavaruuksien joukko. Olkoon $W \subseteq V^*$ jokin tällainen aliavaruus, jonka dimensio on 1, ja olkoon $f \in W$ tämän aliavaruuden virittävä vektori. Tällöin siis $W = \operatorname{span}(\{f\})$. Nyt $P(W) \subseteq P(V^*)$ on dimensioltaan 0 oleva projektiivisen avaruuden $P(V^*)$ lineaarinen aliavaruus eli piste ja f on tätä pistettä edustava vektori.

Tarkastellaan seuraavaksi, millainen yhteys duaalisen projektiivisen avaruuden pisteiden ja projektiivisen avaruuden tiettyjen lineaaristen aliavaruuksien välillä on. Jokaista duaalisen projektiivisen avaruuden pistettä $[f] \in P(V^*)$ edustaa siis vektori f, joka toisaalta on myös lineaarikuvaus

$$f\colon V \to F.$$

Koska f edustaa jotakin projektiivisen avaruuden pistettä, se ei voi olla nollakuvaus. Siten lauseen 2.9 perusteella $\operatorname{rank}(f) = 1$, jolloin lauseen 2.10 mukaan

$$\operatorname{nullity}(f) = \dim(V) - \operatorname{rank}(f) = \dim(V) - 1.$$

Koska nolla-avaruus $N(f)$ on lauseen 2.7 mukaan vektoriavaruuden V aliavaruus, niin f määrää siis tietyn vektoriavaruuden V aliavaruuden, jonka dimensio on $\dim(V) - 1$. Duaalisen projektiivisen avaruuden pistettä $[f] \in P(V^*)$ edustaa kuitenkin vektorin f lisäksi myös λf millä tahansa skalaarilla $\lambda \neq 0$. Osoitetaan seuraavaksi, että $N(f) = N(\lambda f)$.

Lause 6.9. *Olkoon $f\colon V \to F$ lineaarikuvaus ja $\lambda \neq 0$ skalaari. Tällöin $N(f) = N(\lambda f)$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $N(f) \subseteq N(\lambda f)$. Valitaan mielivaltainen $\boldsymbol{v} \in N(f)$. Tällöin $f(\boldsymbol{v}) = 0$, joten $(\lambda f)(\boldsymbol{v}) = \lambda(f(\boldsymbol{v})) = \lambda \cdot 0 = 0$. Siis $\boldsymbol{v} \in N(\lambda f)$, joten $N(f) \subseteq N(\lambda f)$.

Osoitetaan vielä, että $N(\lambda f) \subseteq N(f)$. Valitaan mielivaltainen $\boldsymbol{v} \in N(\lambda f)$, jolloin $(\lambda f)(\boldsymbol{v}) = 0$. Koska $(\lambda f)(\boldsymbol{v}) = \lambda(f(\boldsymbol{v}))$ ja $\lambda \neq 0$, niin täytyy olla $f(\boldsymbol{v}) = 0$. Siis $\boldsymbol{v} \in N(f)$, joten $N(\lambda f) \subseteq N(f)$. Tällöin siis $N(f) = N(\lambda f)$. □

Lauseen 6.9 perusteella siis kuvausten f ja λf nolla-avaruudet ovat samat, joten duaalisen projektiivisen avaruuden piste $[f] \in P(V^*)$ määrää yksikäsitteisen aliavaruuden $U \subseteq V$, jonka dimensio on $\dim(V) - 1$. Tämä aliavaruus puolestaan vastaa projektiivisen avaruuden $P(V)$ hypertasoa $P(U)$.

Sen lisäksi, että duaalisen projektiivisen avaruuden $P(V^*)$ piste määrää hypertason projektiivisessa avaruudessa $P(V)$, voidaan asiaa tarkastella myös kääntäen: projektiivisen avaruuden hypertaso määrää duaalisen projektiivisen avaruuden pisteen. Tarkastellaan tätä seuraavaksi.

Olkoon nyt $P(U) \subseteq P(V)$ hypertaso, jolloin $U \subseteq V$ on aliavaruus, jonka dimensio on $\dim(V) - 1$. Olkoon lisäksi $\pi\colon V \to V/U$ kuvaus säännöllä $\pi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + U$. Tämä on lineaarikuvaus esimerkin 6.1 perusteella. Lauseen 6.8 mukaan $\dim(V/U) = 1$, joten jos $\nu \in V/U$ on nollavektorista eroava, niin π kuvaa vektorin $\boldsymbol{v} \in V$ vektoriksi $a\nu$ jollakin skalaarilla a. Kuvaus π voidaan siis esittää muodossa

$$\pi(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v})\nu,$$

missä $g\colon V \to F$ on kuvaus. Tämä on lineaarikuvaus, sillä jos valitaan vektorit $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ ja skalaari c, niin lineaarikuvaukselle π on voimassa, että

$$\pi(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = \pi(\boldsymbol{v_1}) + \pi(\boldsymbol{v_2}) = a_1\nu + a_2\nu = (a_1 + a_2)\nu$$

joillakin skalaareilla a_1, a_2. Lisäksi

$$\pi(c\boldsymbol{v_1}) = c\pi(\boldsymbol{v_1}) = ca_1\nu.$$

Nyt siis

$$g(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = a_1 + a_2 = g(\boldsymbol{v_1}) + g(\boldsymbol{v_2})$$

ja

$$g(c\boldsymbol{v_1}) = ca_1 = cg(\boldsymbol{v_1}).$$

Kuvaus π kuvaa kaikki aliavaruuden U vektorit tekijäavaruuden V/U nollavektoriksi, sillä U on tekijäavaruuden nollavektori ja $\boldsymbol{u} + U = U$ kaikilla $\boldsymbol{u} \in U$. Toisaalta vektorit, jotka eivät kuulu aliavaruuteen U kuvautuvat nollavektorista eroavaksi vektoriksi. Nyt siis U on kuvauksen g nolla-avaruus $N(g)$ ja g ei siis voi olla nollakuvaus. Jos alkuaan olisi valittu vektori $\nu \in V/U$ toisin, muuttuisi kuvaus g kuvaukseksi λg jollakin skalaarilla λ, mutta lauseen 6.9 perusteella tällä ei ole vaikutusta nolla-avaruuteen. Siis hypertaso määrää duaalisen projektiivisen avaruuden yksikäsitteisen pisteen $[g] \in P(V^*)$.

Tarkastellaan nyt pisteitä $[f], [g] \in P(V^*)$, kun piste $[f]$ määrää hypertason $P(U)$ ja tämä hypertaso määrää puolestaan pisteen $[g]$. Osoitetaan, että tällöin nämä pisteet ovat samat.

Lause 6.10. *Olkoot $[f], [g] \in P(V^*)$ sellaisia pisteitä ja olkoon $P(U) \subseteq P(V)$ sellainen hypertaso, että $[f]$ määrää hypertason $P(U)$ ja $P(U)$ määrää pisteen $[g]$ siten, kuin yllä on esitetty. Tällöin $[f] = [g]$.*

Todistus. Lauseen todistamiseksi tulee osoittaa, että $f = \lambda g$ jollakin skalaarilla λ. Olkoon nyt $\dim(V) = n + 1$, jolloin $\dim(U) = n$. Olkoon lisäksi $\{\boldsymbol{u_1}, \dots \boldsymbol{u_n}\}$ aliavaruuden U kanta ja laajennetaan se vektoriavaruuden V kannaksi $\{\boldsymbol{u_1}, \dots \boldsymbol{u_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}\}$.

Aiemmin esitetyn perusteella $U = N(f)$ ja $U = N(g)$, joten $f(\boldsymbol{u_i}) = 0 = g(\boldsymbol{u_i})$ kaikilla $\boldsymbol{u_i}$, kun $i = 1, \dots, n$. Lisäksi $f(\boldsymbol{v_{n+1}}) = a$ ja $g(\boldsymbol{v_{n+1}}) = b$ joillakin skalaareilla a ja b. Valitaan nyt, että $\lambda = a/b$. Tällöin

$$\lambda g(\boldsymbol{v_{n+1}}) = \frac{a}{b} g(\boldsymbol{v_{n+1}}) = \frac{a}{b} \cdot b = a = f(\boldsymbol{v_{n+1}})$$

ja

$$\lambda g(\boldsymbol{u_i}) = \lambda \cdot 0 = 0 = f(\boldsymbol{u_i})$$

kaikilla $\boldsymbol{u_i}$, kun $i = 1, \dots, n$. Siis lauseen 2.12 perusteella $f = \lambda g$, joten $[f] = [g]$. $\square$

Vastaavasti hypertason määräämä piste määrää alkuperäisen hypertason, sillä jos $P(U)$ määrää pisteen $[f]$, niin tällöin $U = N(f)$. Jos taas $[f]$ määrää hypertason $P(U')$, niin tällöin $U' = N(f)$, joten $U' = U$ ja siis $P(U) = P(U')$. Nyt voidaan siis muotoilla seuraava lause.

Lause 6.11. [5, s. 18] *Duaalisen projektiivisen avaruuden $P(V^*)$ pisteet vastaavat bijektiivisesti projektiivisen avaruuden $P(V)$ hypertasoja.*

Tarkastellaan seuraavaksi duaalisen projektiivisen avaruuden $P(V^*)$ lineaarisia aliavaruuksia. Olkoon nyt $P(W) \subseteq P(V^*)$ lineaarinen aliavaruus, jolloin $W \subseteq V^*$ on aliavaruus. Olkoon lisäksi $W^0 \subseteq V^{**}$ tämän aliavaruuden annihilaattori ja kuvaus $\psi\colon V \to V^{**}$ kuten lauseessa 6.2. Nyt voidaan määrittää joukon W^0 alkukuva $U \subseteq V$, jolloin siis $\psi(U) = W^0$. Lauseen 6.3 perusteella W^0 on biduaalin V^{**} aliavaruus, joten lauseen 2.8 mukaan U on vektoriavaruuden V aliavaruus. Nyt siis lauseen 6.6 perusteella $\psi(U) = U^{00}$, joten $W = U^0$. Jokainen aliavaruus $W \subseteq V^*$ voidaan siis assosioida sellaiseen aliavaruuteen $U \subseteq V$, jolle $W = U^0$. Toisaalta jokainen aliavaruus $U \subseteq V$ voidaan assosioida aliavaruuteen $U^0 \subseteq V^*$. Siten annihilaattorin avulla vektoriavaruuden V ja duaaliavaruuden V^* aliavaruudet vastaavat bijektiivisesti toisiaan. Tarkastellaan tätä hieman tarkemmin seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 6.2. Olkoot $[f], [g] \in P(V^*)$ kaksi eri pistettä ja olkoon $W \subseteq V^*$ vektoreiden f ja g virittämä aliavaruus. Tällöin $P(W) \subseteq P(V^*)$ on lineaarinen aliavaruus. Nyt pisteet $[f], [g]$ määräävät tietyt aliavaruudet $U_f, U_g \subseteq V$ ja siten hypertasot $P(U_f)$ ja $P(U_g)$. Lisäksi nyt $U_f = N(f)$ ja $U_g = N(g)$.

Toisaalta W on jonkin aliavaruuden $U \subseteq V$ annihilaattori eli $W = U^0$. Jos nyt valitaan mielivaltainen $\boldsymbol{u} \in U$, niin $f(\boldsymbol{u}) = 0$, sillä $f \in W = U^0$. Siis vektori $\boldsymbol{u}$ kuuluu kuvauksen f nolla-avaruuteen eli $\boldsymbol{u} \in U_f$. Siis $U \subseteq U_f$. Vastaavasti $U \subseteq U_g$. Siis tämän esimerkin mukaisessa tapauksessa se lineaarinen aliavaruus $P(U)$, johon $P(W) \subseteq P(V^*)$ liittyy, sisältyy hypertasoihin $P(U_f)$ ja $P(U_g)$.

Seuraavassa lauseessa yleistetään esimerkin 6.2 ajatus.

Lause 6.12. *Duaalisen projektiivisen avaruuden $P(V^*)$ lineaarinen aliavaruus $P(W)$ koostuu projektiivisen avaruuden $P(V)$ hypertasoista, joihin sisältyy tietty lineaarinen aliavaruus $P(U) \subseteq P(V)$. Jos lisäksi* $\dim(P(V^*)) = n$ *ja* $\dim(P(W)) = m$, *niin tällöin* $\dim(P(U)) = n - m - 1$.

Todistus (vrt. [5, s. 19]). Valitaan mielivaltainen piste $[f] \in P(W)$. Kuten aiemmin näytettiin, $W = U^0$ jollakin aliavaruudella $U \subseteq V$. Valitaan nyt mielivaltainen $\boldsymbol{u} \in U$. Nyt f on lineaarikuvaus ja $f(\boldsymbol{u}) = 0$, joten $\boldsymbol{u}$ kuuluu kuvauksen f nolla-avaruuteen $U_f = N(f)$. Siis $U \subseteq U_f$. Koska $P(U_f)$ on pisteen $[f]$ määräämä hypertaso, niin $P(U)$ sisältyy pisteen $[f]$ määräämään hypertasoon. Siis $P(U)$ sisältyy kaikkien lineaarisen aliavaruuden $P(W)$ pisteiden määräämiin hypertasoihin.

Olkoon nyt $P(U)$ projektiivisen avaruuden $P(V)$ lineaarinen aliavaruus ja valitaan sellainen mielivaltainen hypertaso $P(U') \subseteq P(V)$, että $P(U) \subseteq P(U')$. Olkoon lisäksi $[f] \in P(V^*)$ se piste, jonka hypertaso $P(U')$ määrää, jolloin $U' = N(f)$. Valitaan nyt mielivaltainen $\boldsymbol{u} \in U$. Koska $U \subseteq U'$, niin $\boldsymbol{u} \in N(f)$. Nyt siis $f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$. Koska $\boldsymbol{u}$ oli valittu mielivaltaisesti, niin $f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ kaikilla $\boldsymbol{u} \in U$. Tällöin $f \in U^0$, joten $[f] \in P(U^0) = P(W)$. Siis kaikkien lineaarisen aliavaruuden $P(U)$ sisältävien hypertasojen määräämät pisteet kuuluvat lineaariseen aliavaruuteen $P(W)$.

Osoitetaan vielä, että $\dim(P(U)) = n - m - 1$. Koska $\dim(P(V^*)) = n$, niin $\dim(V^*) = n + 1$ ja vastaavasti $\dim(U^0) = \dim(W) = m + 1$. Tällöin myös $\dim(V) = n + 1$, joten lauseen 6.5 perusteella

$$\dim(U) = \dim(V) - \dim(U^0) = (n + 1) - (m + 1) = n - m.$$

Nyt projektiivisen avaruuden dimension määritelmän mukaan $\dim(P(U)) = n - m - 1$. □

Jos nyt esimerkiksi $P(W)$ on duaalisen projektiivisen avaruuden $P(V^*)$ hypertaso, niin lauseen 6.12 mukaan $P(W)$ koostuu sellaisista projektiivisen avaruuden $P(V)$ hypertasoista, jotka kulkevat tietyn pisteen kautta. Jos esimerkiksi $P(V)$ ja $P(V^*)$ ovat projektiivisia tasoja eli niiden dimensio on 2, niin tällöin hypertaso $P(W) \subseteq P(V^*)$ on projektiivinen suora, joka koostuu projektiivisen avaruuden $P(V)$ projektiivisista suorista, jotka kulkevat tietyn pisteen $X \in P(V)$ kautta. Toisaalta piste $X = P(U)$ määrää suoran $P(U^0) = P(W)$.

Esimerkki 6.3. Olkoot $P(U_1), P(U_2)$ projektiivisen tason $P(V)$ kaksi eri pistettä. Tällöin lauseen 3.1 mukaan näiden pisteiden kautta kulkee yksikäsitteinen suora $P(U)$. Nyt $U_1, U_2 \subseteq U$, joten lauseen 6.4 perusteella $U^0 \subseteq U_1^0$ ja $U^0 \subseteq U_2^0$. Nyt siis suorat $P(U_1^0), P(U_2^0) \subseteq P(V^*)$ leikkaavat yksikäsitteisessä pisteessä $P(U^0) \subseteq P(V^*)$.

Toisaalta lausetta 3.2 voidaan soveltaa duaaliseen projektiiviseen tasoon $P(V^*)$. Sen mukaan kahdella eri suoralla $P(W_1)$ ja $P(W_2)$ on yksikäsitteinen leikkauspiste $P(W_3)$. Nyt suorat $P(W_1)$ ja $P(W_2)$ koostuvat niistä projektiivisen tason $P(V)$ suorista, jotka kulkevat tiettyjen pisteiden $P(U_1)$ ja $P(U_2)$ kautta ja piste $P(W_3)$ vastaa tiettyä hypertasoa eli suoraa $P(U_3)$. Koska yksikäsitteinen piste $P(W_3)$ on molemmilla suorilla $P(W_1)$ ja $P(W_2)$, niin suora $P(U_3)$ kulkee molempien pisteiden $P(U_1)$ ja $P(U_2)$ kautta ja on yksikäsitteinen. Näin siis duaalisuuden avulla toinen lauseista 3.1 tai 3.2 voidaan saada toisesta soveltamalla sitä duaaliseen projektiiviseen tasoon $P(V^*)$.

Vastaava tarkastelu voidaan tehdä myös tapauksessa, jossa projektiivisessa tasossa kolme suoraa leikkaa samassa pisteessä.

Esimerkki 6.4. Olkoot $P(W_1), P(W_2)$ ja $P(W_3)$ duaalisen projektiivisen tason $P(V^*)$ kolme suoraa, jotka leikkaavat samassa pisteessä. Tällöin nämä kolme suoraa koostuvat niistä projektiivisen tason $P(V)$ suorista, jotka kulkevat pisteen $P(U_1), P(U_2)$ tai $P(U_3)$ kautta. Koska suorien $P(W_1), P(W_2)$ ja $P(W_3)$ leikkauspiste on jokaisella kolmella suoralla, niin leikkauspisteen määräämä suora projektiivisessa tasossa $P(V)$ kulkee pisteiden $P(U_1), P(U_2)$ ja $P(U_3)$ kautta. Siis tasossa $P(V^*)$ kolmen suoran leikkaaminen samassa pisteessä vastaa projektiivisessa tasossa $P(V)$ sitä, että kolme pistettä on samalla suoralla. Vastaavasti tasossa $P(V^*)$ kolme pistettä samalla suoralla vastaa projektiivisessa tasossa $P(V)$ sitä, että kolme suoraa leikkaa samassa pisteessä.

Soveltamalla projektiivisen geometrian lausetta duaaliseen projektiiviseen tasoon $P(V^*)$ voidaan siis saada lauseelle toinen muoto projektiivisessa tasossa $P(V)$. Esimerkiksi Desarguesin lauseelle 5.1 saadaan toinen muoto soveltamalla sitä duaaliseen projektiiviseen tasoon $P(V^*)$. Nyt lauseessa 5.1 mainitut seitsemän pistettä ovatkin projektiivisessa tasossa $P(V)$ seitsemän suoraa, joista yksi kulkee muiden leikkauspisteiden kautta. Esitetään lopuksi Desarguesin lauseen duaali.

Lause 6.13. [5, s. 20] *Olkoot $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ ja μ sellaiset projektiivisen tason $P(V)$ seitsemän eri suoraa, että leikkauspisteet $\alpha \cap \alpha^*, \beta \cap \beta^*$ ja $\gamma \cap \gamma^*$ ovat suoran μ kolme eri pistettä. Tällöin leikkauspisteiden $\alpha \cap \beta, \alpha^* \cap \beta^*$ ja $\beta \cap \gamma, \beta^* \cap \gamma^*$ ja $\gamma \cap \alpha, \gamma^* \cap \alpha^*$ väliset suorat leikkaavat samassa pisteessä.*

Viitteet

[1] Barth, W. Geometrie. [Verkkodokumentti]. Version vom 10. Erlangen, 2004. [Viitattu 3.7.2012]. Saatavilla: http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼tbauer/Barth_Geometrie.pdf.

[2] Cañez, S. Notes on quotient spaces. [Verkkodokumentti]. [Viitattu 24.8.2012]. Saatavilla: http://nd.edu/∼jdiller/teaching/20820/quotient-spaces.pdf.

[3] Cooper, C. Geometry. [Verkkodokumentti]. 4th ed. 2010. [Viitattu 3.7.2012]. Saatavilla: http://web.science.mq.edu.au/∼chris/geometry/

[4] Friedberg, S., Insel, A., Spence, L. Linear Algebra. 4th ed. Pearson Education, New Jersey, 2003.

[5] Hitchin, N. Projective geometry. [Verkkodokumentti]. 2003. [Viitattu 3.7.2012]. Saatavilla: http://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/Projective_geometry/Chapter_1_Projective_geometry.pdf.

[6] Kivelä, S. Matriisilasku ja lineaarialgebra. 12. painos. Otatieto, Helsinki, 2002.

[7] Murdoch, D. Linear Algebra. John Wiley & Sons, New York, 1970.

[8] Reid, M., Szendrői, B. Geometry and Topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[9] Stillwell, J. The Four Pillars of Geometry. Springer, New York, 2005.