TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Jemina Laukkanen

Äärettömistä tuloista ja gammafunktiosta kompleksitasossa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Elokuu 2012

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

LAUKKANEN, JEMINA: Äärettömistä tuloista ja gammafunktiosta kompleksitasossa

Pro gradu -tutkielma, 27 s.

Matematiikka

Elokuu 2012

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa käsitellään äärettömiä tuloja ja gammafunktiota kompleksitasossa. Tarkastelu aloitetaan kokonaisen funktion määritelmästä ja sen käyttäytymisen tutkimisesta. Sitten esitetään esitysmuoto kokonaiselle funktiolle, jolla on äärellisen monta nollakohtaa. Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan kompleksilukujen ja kompleksiarvoisten funktioiden äärettömän tulon suppenemiseen liittyviä lauseita. Sitten esitetään Weierstrassin tekijähajotelma, joka antaa esitysmuodon funktiolle, jolla on äärettömän monta nollakohtaa. Lopuksi esitetään gammafunktio lähtien liikkeelle Weierstrassin muodosta. Myös muita esitysmuotoja sekä ominaisuuksia gammafunktiolle käydään läpi. Päälähdeteoksena tutkielmassa on I-Hsiung Linin teos Classical Complex Analysis, A Geometric Approach–Vol.2.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan äärettömiä tuloja ja gammafunktiota kompleksitasossa. Lukijan odotetaan hallitsevan kompleksianalyysin perusteet (ks. [6]) sekä reaalisten sarjojen suppenemisen (ks. [7, luku 11]). Päälähteenä käytetään teosta Lin I-H.: Classical Complex Analysis, A Geometric Approach–Vol.2, jonka lukuja 5.5 ja 5.6 tutkielma väljästi seuraa. Muina lähteinä toimivat pääasiassa teokset Alfors L.V.: Complex Analysis ja Lin I-H.: Classical Complex Analysis, A Geometric Approach–Vol.1.

Ensimmäisessä luvussa on valmistelevia tarkasteluja tutkielman varsinaisia aiheita varten. Ensin määritellään muutama peruskäsite, jonka jälkeen esitetään kokonainen funktio ja tutkitaan sen käyttäytymistä. Luvun lopuksi esitetään esitysmuoto kokonaiselle funktiolle, jolla on äärellisen monta nollakohtaa.

Toisessa luvussa tarkastellaan äärettömiä tuloja ja niiden suppenemiseen liittyviä lauseita. Käsittely aloitetaan kompleksilukujen äärettömän tulon suppenemisen tarkastelemisesta. Sitten siirrytään tutkimaan kompleksiarvoisten funktioiden äärettömän tulon suppenemista. Kompleksilukujen äärettömän tulon suppenemiseen liittyviä tuloksia voidaan hyödyntää vastaavien tulosten todistamisessa kompleksiarvoisille funktioille.

Kolmannessa luvussa esitetään Weierstrassin tekijähajotelma, joka antaa esitysmuodon funktiolle, jolla on äärettömän monta nollakohtaa. Kolmas luku toimii valmistelevana tarkasteluna tutkielman toiselle osalle eli kompleksiselle gammafunktiolle. Neljännessä luvussa esitetään gammafunktio lähtien liikkeelle Weierstrassin muodosta. Luvussa esitetään ja todistetaan myös muita esitysmuotoja sekä ominaisuuksia gammafunktiolle.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa käydään läpi käsitteitä, määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan seuraavissa luvuissa. Todistuksista esitetään ne, jotka ovat oleellisia ja joiden katsotaan tuovan lisäymmärrystä seuraaviin osioihin.

2.1 Perusmääritelmiä

Tässä luvussa määritellään käsitteitä, joita tarvitaan tutkielmassa. Luonnollisten lukujen muodostamaa joukkoa merkitään $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ja kokonaislukujen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Kompleksilukujen muodostamaa joukkoa merkitään $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$. Seuraavaksi määritellään kompleksiluvun logaritmi reaalisen logaritmin avulla.

Määritelmä 2.1. Kompleksiluvun $z \neq 0$ logaritmi

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z),$$

missä $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$, $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Logaritmin päähaara $\mathrm{Ln}(z)$ saadaan, kun $k = 0$. Tällöin

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z).$$

2.2 Funktioista

Tässä luvussa määritellään kokonainen funktio ja tarkastellaan sen muutamia ominaisuuksia. Ensin esitetään kokonaisen funktion Taylorin sarjakehitelmä, jonka jälkeen etsitään esitysmuoto kokonaiselle funktiolle, jolla ei ole nollakohtia tai jolla on äärellisen monta nollakohtaa. Kompleksisen sarjan itseinen ja tasainen suppeneminen oletetaan tunnetuiksi (ks. [3, s. 83, 124-125]).

Määritelmä 2.2. (Ks. [3, s. 345, 348].) Funktio $f(z)$ on *analyyttinen* avoimessa joukossa $O \subseteq \mathbb{C}$, jos sillä on derivaatta jokaisessa O:n pisteessä. Funktio $f(z)$ on *analyyttinen pisteessä* z_0, jos se on analyyttinen (jossakin) pisteen z_0 ympäristössä. Funktio $f(z)$ on *kokonainen*, jos se on analyyttinen koko kompleksitasossa.

Lause 2.1. *Kokonaisella funktiolla $f(z)$ on origossa Taylorin sarjakehitelmä*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (a_n \in \mathbb{C}, |z| < \infty),$$

joka suppenee itseisesti ja paikallisesti tasaisesti kompleksitasossa. Lisäksi pätee $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Todistus. Ks. [3, s. 397-399]. □

Esimerkki 2.1. (Vrt. [3, s. 365-366]) Logaritmilla $\mathrm{Ln}(1+z)$ on Taylorin sarjakehitelmä

$$\mathrm{Ln}(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots,$$

kun $|z| < 1$.

Määritelmä 2.3. (Ks. [4, s. 147-148].) Kokonainen funktio

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z| < \infty)$$

voi käyttäytyä äärettömyydessä seuraavalla kolmella tavalla:

1. Funktiolla $f(z)$ on *poistuva erikoispiste äärettömyydessä*, jos $a_n = 0$, kun $n \geq 1$. Tästä seuraa, että $f(z) = a_0 = \text{vakio}$.

2. Olkoon $k \geq 1$. Funktiolla $f(z)$ on *k-kertainen napa äärettömyydessä*, jos $a_n = 0$, kun $n \geq k+1$. Tällöin $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k$, missä $a_k \neq 0$.

3. Funktiolla $f(z)$ on *oleellinen erikoispiste äärettömyydessä*, jos äärettömän moni kertoimista $a_n \neq 0$. Tällaista funktiota kutsutaan *transkendenttiseksi kokonaiseksi funktioksi.*

Määritelmä 2.4. (Ks. [3, s. 348-349].) Funktiota $f(z)$, joka on määritelty avoimessa joukossa $O \subseteq \mathbb{C}$, sanotaan *meromorfiseksi funktioksi*, jos se on analyyttinen määrittelyjoukossaan lukuun ottamatta napoja.

Lause 2.2. *Polynomifunktio $f(z)$ voidaan esittää nollakohtiensa $z_1, \ldots, z_k$ avulla muodossa*

$$f(z) = a_k(z - z_1) \cdots (z - z_k) = a_k \prod_{n=1}^{k} (z - z_n),$$

missä kokonaisluku a_k on polynomin korkeinta astetta olevan termin kerroin.

Todistus. Väite seuraa algebran peruslauseesta. (Ks. [3, s. 412].) □

Lause 2.3. *Funktio $f(z)$ on kokonainen funktio, jolla ei ole nollakohtia, täsmälleen silloin, kun*

$$f(z) = e^{g(z)},$$

missä $g(z)$ on kokonainen funktio.

Todistus. Ks. [4, s. 148]. □

Lause 2.4. *Kokonaisella funktiolla $f(z)$ on äärellisen monta nollakohtaa $0, a_1, \ldots, a_k$ ($a_n \neq 0$, kun $1 \leq n \leq k$), jotka ovat järjestyksessä astetta $m, m_1, \ldots, m_k$, täsmälleen silloin, kun*

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{m_1} \cdots \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{m_k} = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{m_n},$$

missä $g(z)$ on kokonainen funktio.

Todistus. Ks. [4, s. 148-149]. □

3 Äärettömistä tuloista

Tässä luvussa käsitellään äärettömien tulojen suppenemista sekä Weierstrassin tekijähajotelmaa.

3.1 Äärettömän tulon suppenemisesta

Määritellään ensin ääretön tulo, jonka jälkeen tarkastellaan sen suppenemiseen liittyviä ehtoja.

Määritelmä 3.1. (Ks. [4, s. 150].) Lukujonon $\{a_n\} \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, termeistä muodostettua *ääretöntä tuloa* merkitään

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 a_2 \cdots a_n \cdots .$$

Jatkossa on järkevää tarkastella äärettömän tulon $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ sijasta tuloa

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Tarkastellaan ensin kompleksilukujen äärettömän tulon suppenemista. Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan kompleksiarvoisten funktioiden äärettäömän tulon suppenemista, jossa voidaan käyttää hyväksi vastaavia tuloksia kompleksiluvuilla.

Määritelmä 3.2. (Vrt. [1, s. 191]) Tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

suppenee, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku N siten, että

$$1 + a_n \neq 0,$$

kun $n \geq N$, ja osatulolla

$$\prod_{m=N}^{n} (1 + a_m)$$

on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{m=N}^{n} (1 + a_m) = P,$$

missä $P \neq 0$.

Määritelmän 3.2 perusteella siis äärellisen moni tulon $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ tekijöistä saa olla nolla. Tulo suppenee, jos nollasta poikkeavista tekijöistä muodostettu tulo suppenee. Tarkastelun yksinkertaistamiseksi oletetaan jatkossa, että $a_n \neq -1$ kaikilla $n \geq 1$.

Apulause 3.1. *Olkoon tulo*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

suppeneva. Tällöin $a_n \to 0$*, kun* $n \to \infty$*.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 150].) Olkoon kokonaisluku N kuten määritelmässä 3.2. Kun $n \geq N$, niin

$$1+a_n = \frac{(1+a_N)\cdots(1+a_{n-1})(1+a_n)}{(1+a_N)\cdots(1+a_{n-1})} \to \frac{P}{P} = 1,$$

kun $n \to \infty$. Täten on oltava, että $a_n \to 0$, kun $n \to \infty$. □

Todistetaan sitten lause, jossa esitetään kompleksilukujen äärettömän tulon suppenemisen ja vastaavista luvuista otettujen luonnollisten logaritmien päähaarojen äärettömän sarjan suppenemisen yhtäpitävyys.

Lause 3.2. *Tulo*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

suppenee luvuksi P*, jos ja vain jos sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ln}(1+a_n)$$

suppenee luvuksi $\mathrm{Ln}\,P + 2h\pi i$ *jollakin* $h \in \mathbb{Z}$*.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 150-151].) Olkoon

$$P_n = (1+a_1)\cdots(1+a_n) \qquad \text{ja} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ln}(1+a_k),$$

missä $n \geq 1$. Tällöin

$$P_n = e^{S_n}.$$

Oletetaan ensin, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ln}(1+a_n)$ suppenee. Tällöin, jos $S_n \to S$, kun $n \to \infty$, niin $P_n \to e^S$ ja tulo $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ suppenee tuloksi e^S.

Oletetaan sitten, että tulo $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ suppenee luvuksi $P \neq 0$. On olemassa $h_n \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ln}(1+a_k) = \ln P_n + 2h_n\pi i.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln}(1+a_{n+1}) &= S_{n+1}-S_n \\
&= \ln P_{n+1} + 2h_{n+1}\pi i - (\ln P_n + 2h_n\pi i) \\
&= \ln P_{n+1} - \ln P_n + 2(h_{n+1}-h_n)\pi i.
\end{aligned}$$

Määritelmän 2.1 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\ln|1+a_{n+1}| + i\operatorname{Arg}(1+a_{n+1}) \\
&\quad = \ln|P_{n+1}| + i\arg(P_{n+1}) - \ln|P_n| - i\arg(P_n) + 2(h_{n+1}-h_n)\pi i \\
&\quad = \ln\frac{|P_{n+1}|}{|P_n|} + i\arg(P_{n+1}) - i\arg(P_n) + 2(h_{n+1}-h_n)\pi i \\
&\quad = \ln|1+a_{n+1}| + i\arg(P_{n+1}) - i\arg(P_n) + 2(h_{n+1}-h_n)\pi i.
\end{aligned}$$

Edelleen sieventämällä saadaan

$$\operatorname{Arg}(1+a_{n+1}) = \arg(P_{n+1}) - \arg(P_n) + 2(h_{n+1}-h_n)\pi.$$

Jos n on tarpeeksi suuri, niin $\arg(P_n)$ voidaan valita siten, että

$$\operatorname{Arg}(P)-\pi < \arg(P_n) < \operatorname{Arg}(P)+\pi \tag{3.1}$$

(ks. [3, s. 77-78]). Koska $\operatorname{Ln}(1+a_{n+1}) \to \operatorname{Ln} 1 = 0$ ja $\ln P_{n+1}, \ln P_n \to \operatorname{Ln} P$, kun $n \to \infty$, niin epäyhtälön (3.1) nojalla on olemassa kokonaisluku $n_0 \geq 1$ siten, että

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{Arg}(1+a_{n+1})| < \frac{2\pi}{3}, \quad |\arg(P_{n+1}) - \operatorname{Arg}(P)| < \frac{2\pi}{3} \quad \text{ja} \\
&|\arg(P_n) - \operatorname{Arg}(P)| < \frac{2\pi}{3}, \quad \text{kun} \quad n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Täten kolmioepäyhtälön nojalla

$$2|h_{n+1}-h_n|\pi < 3\cdot\frac{2\pi}{3} = 2\pi, \quad \text{kun} \quad n \geq n_0,$$

josta seuraa, että

$$|h_{n+1}-h_n| < 1, \quad \text{kun} \quad n \geq n_0.$$

Koska $h_n, h_{n+1} \in \mathbb{Z}$, niin $h_{n+1} = h_n = h$, kun $n \geq n_0$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \operatorname{Ln} P + 2h\pi i$$

ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ln}(1+a_n)$ suppenee. □

Määritelmä 3.3. Tulo
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$
suppenee itseisesti, jos tulo
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$
suppenee.

Seuraavassa lauseessa todistetaan kompleksilukujen äärettömän tulon itseinen suppeneminen.

Lause 3.3. *Seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä tulon* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ *suppenemisen kanssa.*

1. *Sarja* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *suppenee.*
2. *Sarja* $\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Ln}(1+a_n)|$ *suppenee.*

Todistus. (Ks. [4, s. 152].) Tarkastellaan raja-arvoa
$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Ln}(1+z)}{z}.$$
L'Hôpitalin säännön (ks. [6, luku 2, s. 14]) perusteella saadaan
$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Ln}(1+z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1+z}=1.$$
Tästä seuraa, että jokaiselle $\epsilon>0$ on olemassa $\delta>0$ siten, että
$$(1-\epsilon)|z|<|\operatorname{Ln}(1+z)|<(1+\epsilon)|z|, \tag{3.2}$$
kun $0<|z|<\delta$. Soveltamalla epäyhtälöä (3.2) jokaiseen termiin $\operatorname{Ln}(1+a_n)$, $n\geq 1$, havaitaan, että majorantti- ja minoranttiperiaatteiden mukaisesti sarjat $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ja $\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Ln}(1+a_n)|$ suppenevat tai hajaantuvat samanaikaisesti.

Tiedetään, että
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\quad \text{kun } x\in\mathbb{R}$$
(ks. [7, s. 670]), jolloin
$$1+x\leq e^x,$$
kun $x\in\mathbb{R}$. Täten saadaan
$$|a_1|+\cdots+|a_n|\leq(1+|a_1|)\cdots(1+|a_n|)\leq e^{|a_1|+\cdots+|a_n|},$$
kun $n\geq 1$. Vastaavasti kuin edellä, myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ja tulo $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ suppenevat tai hajaantuvat samanaikaisesti. □

Lause 3.4. *Itseisesti suppeneva ääretön tulo suppenee.*

Todistus. (Vrt.[4, s. 153].) Oletetaan, että tulo $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ on itseisesti suppeneva. Olkoon

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \quad \text{ja} \quad P'_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|).$$

Oletetaan lisäksi, että $P_0 = P'_0 = 0$. Havaitaan, että

$$|P_n - P_{n-1}| \leq P'_n - P'_{n-1},$$

sillä

$$|P_n - P_{n-1}| = \left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) - \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)\right| = |a_n|\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)\right|$$

ja

$$P'_n - P'_{n-1} = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) - \prod_{k=1}^{n-1}(1+|a_k|) = |a_n|\prod_{k=1}^{n-1}(1+|a_k|),$$

ja lisäksi kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)\right| = \prod_{k=1}^{n-1}|1+a_k| \leq \prod_{k=1}^{n-1}(1+|a_k|).$$

Koska oletuksen nojalla teleskooppinen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(P'_n - P'_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(P'_k - P'_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} P'_n$$

suppenee, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(P_n - P_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(P_k - P_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} P_n = P$$

suppenee itseisesti majoranttiperiaatteen nojalla.

Tarkistetaan vielä, että $P \neq 0$. Apulauseen 3.1 perusteella tiedetään, että $\lim_{n\to\infty}(1+a_n) = 1$ ja lauseen 3.3 nojalla sarja $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ suppenee. Tällöin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k}{1+a_k}\right|$$

suppenee. Siis lauseen 3.3 perusteella tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{1+a_k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)} = \frac{1}{P}$$

suppenee. Täten $P \neq 0$. □

Esimerkki 3.1. Osoitetaan, että tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty} = \left(1 + \frac{z^n}{2n}\right)$$

suppenee, kun $|z| < 1$.

Lauseen 3.3 perusteella tiedetään, että jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \left|\frac{z^n}{2n}\right|$$

suppenee, niin alkuperäinen tulo suppenee itseisesti. Tutkitaan sarjan suppenemista suhdetestin avulla eli etsitään sen suppenemissäde R (ks. [3, s. 84]). Siis

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1,$$

jolloin sarja suppenee, kun $|z| < 1$. Lauseen 3.4 nojalla tulo suppenee, kun $|z| < 1$.

Määritelmä 3.4. (Ks. [4, s. 155].) Olkoon $f_n(z) : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$. Jos $z_0 \in \Omega$ on sellainen, että tulo $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z_0))$ suppenee, niin sanotaan, että ääretön tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$$

suppenee pisteessä z_0. Joukkoa Ω kutsutaan tulon *suppenemisjoukoksi.* Jos osatulo $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 + f_k(z))$ suppenee tasaisesti funktioksi $f(z)$ joukon Ω osajoukossa, niin tulon $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ sanotaan *suppenevan tasaisesti* funktioksi $f(z)$ kyseisessä osajoukossa. Tulo *suppenee paikallisesti tasaisesti* joukossa Ω, jos se suppenee tasaisesti jokaisessa joukon Ω kompaktissa osajoukossa.

Lause 3.5. *Olkoon jokainen jonon $\{f_n(z)\}$ termi analyyttinen määrittelyjoukossa G ja oletetaan, että ääretön sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ln}[1 + f_n(z)]$$

suppenee tasaisesti jokaisessa joukon G kompaktissa osajoukossa. Tällöin ääretön tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$$

suppenee tasaisesti analyyttiseksi funktioksi $f(z)$ jokaisessa joukon G kompaktissa osajoukossa.

Todistus. Ks. [5, s. 338-339]. □

3.2 Weierstrassin tekijähajotelma

Tässä luvussa esitetään Weierstrassin tekijähajotelma, joka antaa esitysmuodon kokonaiselle funktiolle, jolla on äärettömän monta nollakohtaa.

Lauseen 2.4 perusteella kokonainen funktio, jolla on äärellisen monta nollakohtaa $0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{m_n}, \tag{3.3}$$

missä $g(z)$ on kokonainen funktio. Nyt etsitään esitysmuoto funktiolle, jolla on äärettömän monta nollakohtaa $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Tällaista funktiota ei kuitenkaan voida suoraan esittää nollakohtiensa avulla esityksen (3.3) tapaan muodossa

$$e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \tag{3.4}$$

missä $m \geq 0$ ja funktio $g(z)$ on kokonainen, sillä ääretön tulo ei välttämättä suppene. Seuraavassa apulauseessa näytetään, miten äärettömästä tulosta esityksessä (3.4) saadaan suppeneva.

Apulause 3.6. *Olkoon $\{a_n\} \neq 0$ mielivaltainen jono kompleksilukuja siten, että $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Tällöin on olemassa polynomit $p_n(z)$, $n \geq 1$, siten, että tulo*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)}$$

suppenee itseisesti ja paikallisesti tasaisesti kokonaiseksi funktioksi.

Todistus. (Vrt. [1, s. 195], [4, s. 161-162].) Tarkastellaan sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(z), \tag{3.5}$$

missä

$$r_n(z) = \mathrm{Ln}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_n(z)$$

ja $-\pi < \mathrm{Im}[\, r_n(z)] \leq \pi$, suppenemista.

Lauseen 3.5 nojalla pätee, että jos sarja (3.5) suppenee tasaisesti koko kompleksitasossa, niin ääretön tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)}$$

suppenee tasaisesti kokonaiseksi funktioksi.

Olkoon $R > 0$ kiinnitetty. Tarkastellaan termejä, joilla $|a_n| > R$. Kun $|z| \leq R$, niin logaritmi $\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ voidaan kehittää Taylorin sarjaksi sijoittamalla esimerkin 2.1 muuttujan z paikalle $-\frac{z}{a_n}$, jolloin saadaan

$$\mathrm{Ln}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 - \cdots .$$

Valitaan, että

$$p_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n},$$

missä $m_n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$\begin{aligned} r_n(z) &= -\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} - \frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2} - \cdots \\ &= -\sum_{k=m_n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k . \end{aligned}$$

Arvioidaan jäännöksen $r_n(z)$ itseisarvoa. Siis

$$|r_n(z)| \leq \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^k \leq \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k-1} .$$

Nyt, jos n on tarpeeksi suuri, niin $|a_n| > 2R$ ja tällöin geometrisen sarjan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k-1}$ summa on $\left(1 - \frac{R}{|a_n|}\right)^{-1}$. Siis

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k-1} &= \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}\left(1 - \frac{R}{|a_n|}\right)^{-1} \\ &\leq \frac{2}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} . \end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että luku m_n voidaan valita siten, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}$$

suppenee millä tahansa kiinnitetyllä $R > 0$. Olkoon $m_n = n$, kun $n \geq 1$. Koska oletuksen nojalla $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, niin jokaiselle kiinnitetylle $R > 0$ pätee $|a_n| > 2R$, kun n on riittävän suuri. Olkoon $k > 0$ tämä rajaluku ja $n \geq k$. Tällöin sarja

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{n+1} \leq \sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

suppenee. Tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} r_n(z) = 0,$$

jos $|z| \leq R$. Täten

$$-\pi < \operatorname{Im}[\, r_n(z)] \leq \pi,$$

kunhan n on tarpeeksi suuri. Siis sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n(z)$ suppenee itseisesti ja Weierstrassin M-testin nojalla (ks. [1, s. 37]) tasaisesti, kun $|z| \leq R$ ja täten tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)}$$

suppenee itseisesti lauseen 3.3 nojalla ja lauseen 3.5 perusteella tasaisesti analyyttiseksi funktioksi, kun $|z| < R$. □

Nyt saadaan esitysmuoto funktiolle, jolla on äärettömän monta nollakohtaa. Esitystä kutsutaan *Weierstrassin tekijähajotelmaksi.*

Lause 3.7 (Weierstrassin tekijähajotelma)**.** *Olkoon $f(z)$ kokonainen funktio, jonka nollakohdat ovat $a_1, a_2, \cdots, a_n, \ldots$ siten, että*

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq \cdots \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty.$$

Tällöin jokainen kokonainen funktio, jolla on nämä ja vain nämä nollakohdat sekä origossa mahdollinen astetta $m \geq 0$ oleva nollakohta, on muotoa

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}},$$

missä $m_n \in \mathbb{Z}$ ja $g(z)$ on kokonainen funktio.

Todistus. (Vrt. [8, s. 250].) Apulauseen 3.6 todistuksen nojalla funktio

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}$$

on kokonainen funktio, jolla on samat nollakohdat kuin funktiolla $f(z)$. Täten $f(z)/h(z)$ on kokonainen funktio, jolla ei ole nollakohtia, joten se voidaan kirjoittaa muodossa $e^{g(z)}$, missä $g(z)$ on kokonainen funktio. Väite seuraa tästä. □

Lause 3.8. *Jos on olemassa kokonaisluku $h \geq 0$ siten, että sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{h+1}}$$

suppenee, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h+1} \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{h+1}$$

suppenee kaikilla kiinnitetyillä $R > 0$.

Tällöin tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h},$$

missä $h > 0$, *tai tulo*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

missä $h = 0$, *suppenee kompleksitasossa itseisesti ja paikallisesti tasaisesti kokonaiseksi funktioksi.*

Todistus. Väite seuraa apulauseen 3.6 todistuksesta. (Ks. [1, s. 196].) □

Määritelmä 3.5. (Ks. [4, s. 163].) Olkoon $h \geq 0$ pienin kokonaisluku siten, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{h+1}}$$

suppenee. Tällöin tuloa

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h}$$

sanotaan *kanoniseksi tuloksi liittyen jonoon* $\{a_n\}$ ja kokonaislukua h sen *genukseksi.*

Huomautus. Määritelmästä 3.5 seuraa, että kanoninen tulo liittyen annettuun jonoon $\{a_n\}$ on yksikäsitteinen, kun $n \geq 1$.

Määritelmä 3.6. (Ks. [4, s. 163].) Jos ääretön tulo funktion $f(z)$ Weierstrassin tekijähajotelmassa on kanoninen tulo, jolla on genus h, ja funktio $g(z)$ on polynomi, niin funktiolla $f(z)$ sanotaan olevan *äärellinen genus* ja

$$\operatorname{genus} f(z) = \max\{h, \deg(g(z))\},$$

missä $\deg(g(z))$ on polynomin $g(z)$ asteluku.

Esimerkki 3.2. (Vrt. [1, s. 196-197].) Osoitetaan, että

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \quad (n \neq 0).$$

Olkoon $n \neq 0$. Tiedetään, että $\sin \pi z = 0$, kun $z = n$ ja $n \in \mathbb{Z}$. Koska sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu harmonisena sarjana ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee yliharmonisena sarjana (ks. [6, luku 4, s. 1]), niin määritelmän 3.5 perusteella on oltava $h = 1$. Tällöin Weierstrassin tekijähajotelman on oltava muotoa

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \quad (n \neq 0).$$

Määritetään funktio $g(z)$, jota varten otetaan yhtälöstä puolittain luonnollinen logaritmi, jolloin se tulee muotoon

$$\begin{aligned} \ln(\sin \pi z) &= \ln \left[z e^{g(z)} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right] \\ &= \ln z + g(z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{n}\right) + \left(\frac{z}{n}\right) \right] \quad (n \neq 0). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Koska sarjan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{n}\right) + \left(\frac{z}{n}\right) \right] \quad (n \neq 0)$$

termit ovat analyyttisiä ja se suppenee tasaisesti koko kompleksitasossa apulauseen 3.6 nojalla, niin sarja voidaan derivoida termeittäin (ks. [1, s. 177]). Derivoimalla yhtälö (3.6) puolittain saadaan

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right] \quad (n \neq 0).$$

Koska

$$\pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z},$$

niin voidaan kirjoittaa

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right] \quad (n \neq 0).$$

Siis $g'(z) = 0$, sillä tiedetään ([1, s.188-189]), että

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right] \quad (n \neq 0).$$

Tällöin funktio $g(z)$ on vakiofunktio. Kun $z \to 0$, niin

$$\frac{\sin \pi z}{z} \to \pi$$

ja

$$e^{g(z)} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \to e^{g(z)} \quad (n \neq 0).$$

Täten $e^{g(z)} = \pi$ ja

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \quad (n \neq 0).$$

4 Gammafunktiosta

Gammafunktion teorian kehittely alkoi ongelmasta löytää esitys, joka saa arvon $n!$ positiivisella kokonaisluvulla n, ja joka voidaan yleistää mielivaltaiselle reaaliluvulle x. Ratkaisuksi positiivisten kokonaislukujen kertomalle saatiin tunnettu epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!.$$

Korvaamatta kuitenkaan suoraan termiä n termillä x tarkasteltiinkin funktiota, joka antaa positiiviselle kokonaisluvulle n arvon $(n-1)!$. Saatiin gammafunktio

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(Vrt. [2, s. 11].)

Tässä tutkielmassa tarkastellaan gammafunktion yleistystä kompleksiluvuille. Aloitetaan todistamalla lause, jossa näytetään millaista muotoa kompleksisen gammafunktion täytyy olla.

Lause 4.1. *Olkoon $f(z)$ meromorfinen funktio siten, että seuraavat ehdot pätevät*

1. $f(1) = 1$,
2. $f(z+1) = zf(z)$ *ja*
3. *funktiolla f ei ole nollakohtia, mutta sillä on yksinkertaiset navat pisteissä $z = 0, -1, -2, \ldots$*

Tällöin funktion $f(z)$ on oltava muotoa

$$f(z) = e^{-g(z)} \frac{1}{z \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}},$$

missä $g(z)$ on kokonainen funktio siten, että

$$g(1) = \gamma + 2k\pi i \quad \textit{ja} \quad g(z+1) - g(z) = \gamma + 2l\pi i,$$

missä $k, l \in \mathbb{Z}$ ja $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n)$.

Todistus. (Vrt. [4, s. 185-186].) Tarkastellaan funktiota

$$\frac{1}{f(z)},$$

joka on edelleen meromorfinen funktio, jolla ei ole napoja, mutta sillä on nollakohdat vain pisteissä $z = 0, -1, -2, \dots$ Tiedetään (ks. [4, s. 158]), että tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

suppenee itseisesti ja paikallisesti tasaisesti koko kompleksitasossa. Lauseen 3.7 perusteella tulo $z\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$ on kokonainen funktio, jolla on yksinkertaiset nollakohdat vain pisteissä $z = 0, -1, -2, \dots$ Tällöin osamäärä

$$\frac{(f(z))^{-1}}{z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}}$$

on myös kokonainen funktio, jolla ei ole nollakohtia kompleksitasossa. Täten lauseen 2.3 nojalla se voidaan kirjoittaa muodossa $e^{g(z)}$, missä $g(z)$ on kokonainen funktio. Siis

$$e^{g(z)} = \frac{(f(z))^{-1}}{z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}},$$

josta saadaan, että

$$f(z) = e^{-g(z)}\frac{1}{z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}}.$$

Kirjoitetaan nyt $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, missä

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{e^{-g(z)}}{z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}} \\ &= \frac{e^{-g(z)}}{z(1+z)(1+\frac{z}{2})\cdots(1+\frac{z}{n})e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{z}{k}}} \\ &= \frac{n!e^{-g(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{z}{k}}}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \end{aligned}$$

Oletuksen perusteella $f(z+1) = zf(z)$, joten

$$1 = \frac{zf(z)}{f(z+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{zf_n(z)}{f_n(z+1)}. \tag{4.1}$$

Termi $f_n(z+1)$ saadaan termistä $f_n(z)$ sijoittamalla muuttujan z paikalle $z+1$. Siis

$$f_n(z+1) = \frac{n!e^{-g(z+1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{z+1}{k}}}{(z+1)((z+1)+1)\cdots((z+1)+n)}.$$

Sijoitetaan termit $f_n(z)$ ja $f_n(z+1)$ alkuperäisen yhtälöketjun (4.1) oikeaan puoleen ja sievennetään, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{zf_n(z)}{f_n(z+1)} &= \lim_{n\to\infty}(z+n+1)e^{g(z+1)-g(z)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\\ &= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z+1}{n})e^{g(z+1)-g(z)-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]}\\ &= e^{g(z+1)-g(z)-\gamma}.\end{aligned}$$

Siis

$$e^{g(z+1)-g(z)-\gamma} = 1.$$

Otetaan yhtälöstä vielä puolittain luonnollinen logaritmi, jolloin se tulee muotoon

$$g(z+1)-g(z)-\gamma = 2l\pi i,$$

missä $l \in \mathbb{Z}$, sillä $\ln 1 = \ln|1| + i\arg(1) = i2\pi l$. Täten

$$g(z+1)-g(z) = \gamma + 2l\pi i.$$

Vastaavasti oletuksen perusteella $f(1)=1$, joten

$$\begin{aligned}1 = \lim_{n\to\infty} f_n(1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-g(1)}}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-\frac{1}{k}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!e^{-g(1)}}{(n+1)!e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-g(1)}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\ln n}e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-g(1)+\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]}}{1+\frac{1}{n}} = e^{-g(1)+\gamma}.\end{aligned}$$

Vastaavasti kuin edellä saadaan

$$g(1) = \gamma + 2k\pi i,$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. □

Yksinkertaisin funktio $g(z)$ on

$$g(z) = \gamma z,$$

jolloin vastaavaa funktiota $f(z)$ merkitään $\Gamma(z)$.

Määritelmä 4.1. (Ks. [4, s. 186].) Funktiota

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} \frac{1}{z \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}},$$

missä $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ ja $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$, sanotaan *gammafunktioksi Weierstrassin muodossa.*

Esimerkki 4.1. [4, s. 196, teht. 5a] Lausutaan ääretön tulo

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) e^{\frac{1}{2n}}$$

gammafunktion avulla. Havaitaan, että

$$\frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{2} e^{\frac{-\gamma}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) e^{\frac{1}{2n}},$$

josta saadaan

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) e^{\frac{1}{2n}} = \frac{-2e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}.$$

Lause 4.2. *Gammafunktio voidaan esittää muodossa*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$

missä $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$.

Todistus. (Ks. [4, s. 187].) Osoitetaan, että

$$e^{-\gamma z} \frac{1}{z \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$

kun $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Siis

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma z} \frac{1}{z \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma z}}{z(1+z)(1+\frac{z}{2})\cdots(1+\frac{z}{n})e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{z}{k}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n! e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{z}{n} - \gamma z}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n! e^{(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \gamma)z}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n! e^{(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \gamma)z + z\ln n}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.
\end{aligned}$$

Koska

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma,$$

niin

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^{z\ln n}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.\end{aligned}$$

□

Lauseen 4.2 esitystä gammafunktiolle kutsutaan *Gaussin esitysmuodoksi.* Seuraavissa lauseissa 4.3 ja 4.4 esitetään kaksi muuta gammafunktion esitysmuotoa niitä kuitenkaan todistamatta.

Lause 4.3. Eulerin integraaliesitys *gammafunktiolle on*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

missä $t \in \mathbb{R}$ *ja* $\mathrm{Re}[z] > 0$.

Todistus. Ks. [4, s. 187-189]. □

Lause 4.4. *Jos* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, *niin*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

missä sarja suppenee itseisesti ja paikallisesti tasaisesti, kun z *kuuluu määrittelyalueeseensa sekä integraali on kokonainen funktio.*

Todistus. Ks. [4, s. 187-188]. □

Lauseen 4.4 muotoa gammafunktiolle kutsutaan *osamurtoesitykseksi.*

Seuraavassa lauseessa todistetaan ehdot, jotka määrittävät gammafunktion.

Lause 4.5. *Jos on olemassa analyyttinen funktio* $F(z)$, *joka on määritelty joukossa* $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ *ja joka täyttää ehdot*

1. $F(1) = 1$,
2. $F(z+1) = zF(z)$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{F(z+n)}{n^z F(n)} = 1$,

niin $F(z) = \Gamma(z)$, *kun* $z \neq 0, -1, -2, \dots$

Todistus. (Ks. [4, s. 201].) Havaitaan, että

$$\begin{aligned} F(z+n) &= (z+n-1)F(z+n-1) \\ &= (z+n-1)(z+n-2)F(z+n-2) \\ &= (z+n-1)\cdots(z+1)zF(z) \\ &= z(z+1)\cdots(z+n-1)F(z), \end{aligned}$$

kun $n \geq 1$ ja $z \neq 0, -1, \ldots, -n$. Täten

$$F(n+1) = n!,$$

kun $n \geq 0$. Nyt oletuksen ja lauseen 4.2 nojalla

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F(z+n)}{n^z F(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)}{n^z(n-1)!} \right) F(z) = \frac{F(z)}{\Gamma(z)},$$

kun $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ Siis

$$F(z) = \Gamma(z).$$

□

Apulause 4.6 (Eulerin vakio)**.** *Olkoon* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$*. Tällöin jos*

$$G(z-1) = ze^{\gamma}G(z),$$

missä $G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$*, niin*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Todistus. Olkoon $z = 1$. Tällöin

$$G(0) = e^{\gamma}G(1).$$

Koska $G(0) = 1$, niin

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}. \tag{4.2}$$

Kirjoitetaan n:s osatulo auki ja saadaan

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}} &= (1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})} \\ &= \frac{1}{n!}(1+1)(2+1)(3+1)\cdots(n+1)e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})} \\ &= \frac{(n+1)!}{n!}e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})} \\ &= (n+1)e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

Palataan sitten takaisin äärettömään tuloon (4.2) ja kirjoitetaan

$$e^{-\gamma} = \lim_{n\to\infty} \left((n+1)e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\right).$$

Ottamalla yhtälöstä puolittain luonnollinen logaritmi saadaan

$$\begin{aligned}
-\gamma &= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left((n+1)e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left((n+1)e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Kun $n \to \infty$, niin $\ln(n+1) \to \ln(n)$, joten

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right).$$

□

Seuraavaksi todistetaan Eulerin funktionaaliyhtälö.

Lause 4.7 (Eulerin funktionaaliyhtälö)**.** *Olkoon* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$*, tällöin*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{4.3}$$

Erityisesti $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$*.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 198-199].) Funktion $\sin \pi z$ yksinkertaiset nollakohdat ovat pisteissä $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Tarkastellaan funktiota

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

jolla on yksinkertaiset nollakohdat pisteissä $z = -1, -2, \ldots$ Tällöin on selvää, että funktiolla $G(-z)$ on yksinkertaiset nollakohdat pisteissä $z = 1, 2, \ldots$ Esimerkin 3.2 avulla saadaan

$$\begin{aligned}
zG(z)G(-z) &= z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} \\
&= z\prod_{n=-1}^{-\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} \\
&= z\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} \quad (n \neq 0) \\
&= \frac{\sin \pi z}{\pi}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Havaitaan, että funktiolla $G(z-1)$ on samat nollakohdat kuin funktiolla $G(z)$, sekä lisäksi nollakohta origossa. Täten voidaan kirjoittaa lauseen 3.7 nojalla

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z), \tag{4.5}$$

missä $\gamma(z)$ on kokonainen funktio.

Seuraavaksi määritetään funktio $\gamma(z)$. Sijoitetaan

$$G(z-1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{-z+1}{n}},$$

jolloin yhtälö (4.5) tulee muotoon

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{-z+1}{n}} = ze^{\gamma(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}. \tag{4.6}$$

Ottamalla yhtälöstä (4.6) puolittain luonnollinen logaritmi saadaan

$$\ln\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{-z+1}{n}}\right] = \ln\left[ze^{\gamma(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right].$$

Käyttämällä logaritmin laskusääntöjä yhtälö tulee muotoon

$$\ln\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{-z+1}{n}}\right] = \ln z + \ln e^{\gamma(z)} + \ln\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]$$

ja edelleen saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\left(1+\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{-z+1}{n}}\right] = \ln z + \gamma(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right].$$

Derivoimalla yhtälö puolittain saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right). \tag{4.7}$$

Muutetaan yhtälön (4.7) vasemman puolen summa alkamaan nollasta korvaamalla luku n luvulla $n+1$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n+1}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

sillä kun $n\to\infty$, niin

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\\&=1-0\\&=1.\end{aligned}$$

Nyt alkuperäinen yhtälö (4.7) tulee muotoon

$$\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)+1=\frac{1}{z}+\gamma'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right),$$

joten

$$\gamma'(z)=0.$$

Täten funktio $\gamma(z)$ on vakiofunktio ja merkitään $\gamma(z)=\gamma$. Siis yhtälö (4.5) tulee muotoon

$$G(z-1)=ze^{\gamma}G(z), \tag{4.8}$$

joten vakio γ on apulauseen 4.6 mukainen Eulerin vakio.

Tarkastellaan funktiota $H(z)=G(z)e^{\gamma z}$, joka toteuttaa funktionaaliyhtälön $H(z-1)=zH(z)$, sillä

$$G(z-1)e^{\gamma(z-1)}=zG(z)e^{\gamma z},$$

joka sievenee funktionaaliyhtälöksi (4.8). Tällöin funktio

$$\Gamma(z)=\frac{1}{zH(z)}$$

totetuttaa yhtälön

$$(z-1)\Gamma(z-1)=\Gamma(z), \tag{4.9}$$

sillä

$$\Gamma(z-1)=\frac{1}{(z-1)H(z-1)}=\frac{1}{(z-1)zH(z)}=\frac{\Gamma(z)}{(z-1)},$$

kun $z\neq 0,1$. Nyt

$$\Gamma(z)=\frac{1}{zH(z)}=\frac{1}{ze^{\gamma z}G(z)},$$

joten
$$G(z) = \frac{1}{\Gamma(z) z e^{\gamma z}}.$$
Edelleen
$$G(-z) = \frac{1}{\Gamma(-z)(-z)e^{-\gamma z}} = \frac{1}{\Gamma(1-z)e^{-\gamma z}},$$
sillä
$$\Gamma(-z) = \frac{\Gamma(1-z)}{-z}.$$
Täten yhtälön (4.4) nojalla
$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = zG(z)G(-z) = z\frac{1}{\Gamma(z)ze^{\gamma z}}\frac{1}{\Gamma(1-z)e^{-\gamma z}} = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)},$$
josta seuraa, että
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$
Osoitetaan vielä lopuksi, että $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Nyt
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi$$
ja täten
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
□

Lause 4.8. *Jos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, niin*
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Todistus. Lauseen 4.7 todistuksessa saatiin yhtälö (4.9)
$$(z-1)\Gamma(z-1) = \Gamma(z).$$
Sijoittamalla muuttujan z paikalle $z+1$ saadaan
$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1).$$
□

Todistetaan sitten eräs gammafunktion perusominaisuus luonnollisille luvuille.

Lause 4.9. *Oletetaan, että $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.$$

Todistus. Koska lauseen 4.8 perusteella

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

niin kuten lauseen 4.5 todistuksessa saadaan

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) &= \left(\frac{1}{2}+n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-1\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{2^n 2^{n-1}(n-1)!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2n(2n-1)!}{2^{2n-1}2n(n-1)!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{4^n n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Lauseen 4.7 perusteella $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, joten

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.$$

□

Esimerkki 4.2. Mitä on $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$?

Koska $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)$, niin lauseen 4.9 perusteella

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right) &= \frac{6!}{4^3 3!}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 16\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \\
&\approx 3,323.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.3. [4, s. 209, teht. 1b] Osoitetaan, että

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\sin\pi z},$$

kun $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, ja sen avulla, että

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y},$$

missä $y = \mathrm{Im}[z]$.

Lauseen 4.8 perusteella

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

johon sijoittamalla muuttujan z paikalle $-z$ saadaan

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z).$$

Sijoittamalla tämä Eulerin funktionaaliyhtälöön (4.3) saadaan

$$\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

ja edelleen

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin \pi z}.$$

Koska

$$\Gamma(iy)\Gamma(-iy) = \Gamma(iy)\Gamma(\overline{iy}) = \Gamma(iy)\overline{\Gamma(iy)} = |\Gamma(iy)|^2,$$

kun $y = \mathrm{Im}[\,z]$, niin

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{-\pi}{iy \sin \pi iy} = \frac{-\pi}{iy\frac{e^{i^2\pi y} - e^{-i^2\pi y}}{2i}} = \frac{\pi}{y\frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{2}} = \frac{\pi}{y \sinh \pi y}.$$

Lauseissa 4.10 ja 4.11 esitetään todistamatta kaksi tulokaavaa.

Lause 4.10. *Olkoon* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$. *Tällöin pätee yhtälö*

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

jota kutsutaan Legendren tulokaavaksi.

Todistus. Ks. [4, s. 198-199]. □

Lause 4.11. *Olkoon* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$. *Tällöin pätee yhtälö*

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(z) = n^{z-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right),$$

joka tunnetaan nimellä Gaussin tulokaava.

Todistus. Ks. [4, s. 199-201]. □

Viitteet

[1] Alfors, Lars V. *Complex Analysis, Third Edition.* McGraw-Hill, Inc., 1979.

[2] Artin, Emil *The Gamma Function.* Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964.

[3] Lin, I-Hsiung *Classical Complex Analysis, A Geometric approach–Vol.1.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011.

[4] Lin, I-Hsiung *Classical Complex Analysis, A Geometric approach–Vol.2.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011

[5] Markushevich, Alekseï I. *Theory of Functions of a Complex Variable, Second Edition.* Chelsea Publishing Company, 1977.

[6] Pohjolainen, S. *Kompleksimuuttujan funktioita.* Kurssimateriaali, Sisäinen julkaisu, Tampereen teknillinen yliopisto, 2011.

[7] Salas, S., Hille, E., Etgen, G. *Calculus, One and several variables, Ninth Edition.* John Wiley & Sons, Inc 2003.

[8] Ullrich, David C. *Complex Made Simple.* The American Mathematical Society, 2008.