TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro Gradu -tutkielma

Niina Oksman

Greenin ja Stokesin lauseet

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Toukokuu 2012

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

OKSMAN, NIINA: Greenin ja Stokesin lauseet

Pro gradu -tutkielma, 38 s.

Matematiikka

Toukokuu 2012

Tiivistelmä

Tutkielma käsittelee vektoriarvoisten funktioiden integrointia. Tutkielman aluksi palautetaan mieleen, mitä ovat vektoriarvoiset funktiot, ja esitetään käyrän ja pinnan määritelmät. Tämän jälkeen käydään lyhyesti läpi sileän käyrän, sileän pinnan, suunnistetun käyrän, suunnistetun pinnan, takaisinvetosijoituksen ja differentiaalisen k-muodon määritelmät. Ennen tutkielman pääaiheen esittämistä katsotaan, miten määritetään funktion integraali yli kaksiulotteisen joukon ja määritellään viivaintegraali ja pintaintegraali.

Tutkielman pääaiheena on Greenin ja Stokesin lauseet. Molemmat lauseet väittävät, että

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} \omega = \iint\limits_{\vec{S}} d\omega,$$

missä ω on differentiaalinen 1-muoto ja $\vec{S}$ on suunnistettu kaksiulotteinen joukko. Lauseet eroavat ainoastaan ympäröivän avaruuden osalta. Greenin lausetta tarkastellaan kolmessa eri tapauksessa ja Stokesin lausetta kahdessa eri tapauksessa. Lauseille esitetään todistukset kussakin tapauksessa.

Lukijalta oletetaan differentiaali- ja integraalilaskennan perusosaamista sekä vektoreiden laskutoimitusten hallintaa. Päälähteenä tutkielmassa käytetään James Callahanin kirjaa *Advanced Calculus: A Geometric View.*

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee vektoriarvoisten funktioiden integrointia. Tutkielmassa keskitytään Greenin ja Stokesin lauseisiin ja niiden todistuksiin. Molemmat lauseet väittävät, että

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} \omega = \iint\limits_{\vec{S}} d\omega,$$

missä ω on differentiaalinen 1-muoto ja $\vec{S}$ on suunnistettu kaksiulotteinen joukko. Lauseet eroavat ainoastaan ympäröivän avaruuden osalta.

Ennen kuin esitetään tutkielman pääaihe, käydään läpi pääaiheen kannalta tärkeitä määritelmiä ja lauseita. Luvun 2 alussa palautetaan mieleen, mitä tarkoitetaan vektoriarvoisilla funktioilla, ja katsotaan käyrän ja pinnan määritelmät. Tämän jälkeen määritellään sileä käyrä ja sileä pinta sekä suunnistettu käyrä ja suunnistettu pinta. Luvun lopussa määritellään differentiaalinen k-muoto ja takaisinvetosijoitus.

Luvussa 3 katsotaan ensin lyhyesti, miten integroidaan yli kaksiulotteisen joukon ja yli suunnistetun kaksiulotteisen joukon. Luvun 3 kappaleissa 3.2 ja 3.3 määritellään viiva- ja pintaintegraali ja esitetään muutama lause näihin liittyen.

Luvussa 4 Greenin lausetta tarkastellaan kolmessa eri tapauksessa: kun suunnistettu kaksiulotteinen joukko $\vec{S}$ on sekä muuttujan x että muuttujan y funktioiden rajoittama, kun joukko $\vec{S}$ on vain toisen muuttujan funktioiden rajoittama ja kun joukko $\vec{S}$ on näiden kahden edellä mainitun tyyppisten joukkojen yhdiste. Lauseelle esitetään todistukset kussakin tapauksessa. Stokesin lause esitetään differentiaalimuotojen avulla ja todistetaan differentiaalimuotoja ja takaisinvetokuvausta käyttäen. Stokesin lause todistetaan ensin suunnistetulle pintapalalle ja sitten suunnistetulle pinnalle.

Tutkielmassa lukijalta oletetaan differentiaali- ja integraalilaskennan perusosaamista sekä vektoreiden laskutoimitusten hallintaa. Tällä tarkoitetaan yliopiston analyysin kurssien asioita. Nämä asiat voi kerrata esimerkiksi Tom Apostolin kirjoista *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra* ja *Calculus, Volume 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability.*

Päälähteenä tutkielmassa käytetään James Callahanin kirjaa *Advanced Calculus: A Geometric View*. Päälähteen lisäksi teorian tukemiseen ja esimerkkeihin käytetään Tom Apostolin kirjaa *Calculus, Volume 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, Robert Adamsin ja Christopher Essexin kirjaa *Calculus: A Complete Course*, Steven Weintraubin kirjaa *Differential Forms: A Complement to Vector Calculus* ja Jerrold Marsdenin ja Anthony Tromban kirjaa *Vector Calculus*.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa esitetään tutkielman aiheeseen liittyviä määritelmiä ja lauseita.

2.1 Vektoriarvoiset funktiot

Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, missä $n, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Kun funktion f sekä määrittely- että arvojoukko on $\mathbb{R}$, puhutaan reaaliarvoisesta reaalimuuttujan funktiosta. Kun $n = 1$ ja $m > 1$, kutsutaan funktiota *vektoriarvoiseksi* reaalimuuttujan funktioksi. Kun $n > 1$ ja $m = 1$, on funktio reaaliarvoinen vektorimuuttujan funktio, ja kun $n > 1$ ja $m > 1$, on funktio vektoriarvoinen vektorimuuttujan funktio eli *vektorikenttä*.

Tässä tutkielmassa käsitellään vektoriarvoisia funktioita. Määrittelyjoukko kerrotaan kunkin asian yhteydessä. Jatkossa vektoriarvoisia funktioita merkitään lihavoiduilla kirjaimilla.

Tutkielmassa vektoreilla $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ tarkoitetaan luonnollisen kannan vektoreita. Siis, jos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, niin $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ja $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, ja jos $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$, niin $\mathbf{i} = (1, 0)$ ja $\mathbf{j} = (0, 1)$.

Esimerkki 2.1. Funktio $\mathbf{f}(t) = \frac{t}{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ on vektoriarvoinen funktio, missä vektorit $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Siis funktio $\mathbf{f}$ on funktio $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Funktion $\mathbf{f}$ komponenttifunktiot $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat

$$f_1 = \frac{t}{2}, f_2 = \sqrt{t} \text{ ja } f_3 = t^3.$$

Reaalimuuttujan vektoriarvoisten funktioiden raja-arvot, jatkuvuus, derivaatta ja integraali voidaan tutkia funktion komponenttifunktioiden avulla. Nämä oletetaan tunnetuksi. Asiat voi kerrata esimerkiksi Tom Apostolin kirjoista *Calculus, Volume 1* ja *Calculus, Volume 2.*

Katsotaan kappaleen lopuksi, millaisista funktiosta käytetään nimitystä upotus.

Määritelmä 2.1. Olkoon $\mathbf{f} : \mathbf{T} \to \mathbb{R}^3$ jatkuvasti differentioituva kuvaus, missä $\mathbf{T} \subseteq \mathbb{R}^2$. Kuvaus $\mathbf{f}$ on *upotus* pisteessä $a \in \mathbf{T}$, jos funktion derivaatta pisteessä a on injektio. [3, s. 212]

2.2 Käyristä ja pinnoista

Kappaleessa määritellään sileä ja paloittain sileä käyrä sekä sileä ja paloittain sileä pinta. Aluksi esitetään käyrän määritelmä.

Määritelmä 2.2. Olkoon $\mathbf{f} : J \to \mathbb{R}^n$ vektoriarvoinen funktio, missä $J = [a, b]$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Jos funktio $\mathbf{f}$ on jatkuva joukossa J, niin funktion $\mathbf{f}$ arvojoukkoa $\mathbf{f}(J)$ kutsutaan *käyräksi.* Käyrää merkitään kirjaimella C. [2, s. 323] Käyrää C sanotaan *kaareksi*, jos se ei leikkaa itseään. Siis toisin sanoen arvojoukkoa $\mathbf{f}(J)$ sanotaan kaareksi, kun funktio $\mathbf{f}$ on injektio.

Käyrästä voidaan käyttää myös nimitystä *viiva* tai *polku.* Jos käyrän tai kaaren C alku- ja päätepiste ovat samat, niin käyrä tai kaari on suljettu. Suljetusta itseään leikkaamattomasta käyrästä käytetään usein nimitystä Jordanin käyrä.

Huomautus 2.1. Määritelmässä 2.2 muuttujaa $t \in J$ nimitetään parametriksi ja funktion $\mathbf{f}$ sanotaan parametrisoivan käyrän C tai antavan käyrän C parametriesityksen. Käyrän parametriesitys ei ole yksikäsitteinen.

Esimerkki 2.2. Yksikköympyrän parametrisoiva funktio on

$$\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \mathbf{f}(t) = \cos t \ \mathbf{i} + \sin t \ \mathbf{j}.$$

Määritellään seuraavaksi sileä käyrä ja paloittain sileä käyrä.

Määritelmä 2.3. Olkoon $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vektoriarvoinen jatkuva funktio, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Funktion $\mathbf{f}$ parametrisoima käyrä C on *sileä*, jos funktion $\mathbf{f}$ derivaatta on jatkuva ja $\mathbf{f}'(t) \neq 0$, kun $t \in \,]a, b[$. Käyrää C kutsutaan *paloittain sileäksi*, jos käyrän $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_k$ jokainen komponenttikäyrä $C_1, \ldots, C_k$ on sileä ja käyrän C_{i+1} alkupiste on käyrän C_i päätepiste, kun $i = 1, \ldots, k-1$ ja $k \in \mathbb{N}$. [3, s. 7] [2, s. 323]

Siis jatkuvan yhden muuttujan funktion kuvaajasta käytetään nimitystä käyrä, viiva tai polku. Kun kyseessä on kahden muuttujan funktio, käytetään funktion kuvaajasta nimitystä pinta. Kappaleessa esitetään pintapalan määritelmä parametrisoidun pinnan määritelmän sijasta. Parametrisoidun pinnan määritelmä (ks. [1, s. 870] tai [2, s. 417]) on lähes sama kuin pintapalan määritelmä. Esitetään nyt pintapalan määritelmä ja määritellään sen jälkeen paloittain sileä pinta ja sileä pinta. Tasoalueella tarkoitetaan yhtenäistä joukkoa, jonka reunaviiva on suljettu eikä leikkaa itseään [2, s. 420].

Määritelmä 2.4. Olkoon $\mathbf{f} : \mathbf{T} \to \mathbb{R}^3$ jatkuvasti differentioituva injektiivinen upotus avoimessa joukossa $\mathbf{T} \subseteq \mathbb{R}^2$. Olkoon $U \subset \mathbf{T}$ suljettu ja rajoitettu tasoalue. Pinta S on *pintapala*, jos $S = \mathbf{f}(U)$. [3, s. 392]

Siis funktio $\mathbf{f}$ antaa pintapalan S parametriesityksen.

Huomautus 2.2. Määritelmästä 2.4 voidaan päätellä, että pintapalalla S on reunat. Reunaviivojen kokonaisuudesta käytetään merkitään ∂S. Määritelmässä 2.4 oletus siitä, että funktio $\mathbf{f}$ on upotus, takaa sen, että funktion kuva on kaksiulotteinen kaikkialla [3, s. 392].

Huomautus 2.3. Pintapalat S_i, $i \in \mathbb{N}$, sopivat yhteen, jos seuraavat pätevät

(i) jokainen reunaviiva ∂S_i on paloittain sileä suljettu käyrä, joka koostuu äärellisestä määrästä komponenttikäyriä,

(ii) pintapaloilla S_i ja S_j on yhteisiä pisteitä ainoastaan niiden reunoilla ja

(iii) kolmen tai useamman pintapalan yhteiset pisteet ovat eristettyjä ja niitä on äärellinen määrä.

[3, s. 412]

Määritelmä 2.5. Joukko $S \subset \mathbb{R}^3$ on *paloittain sileä pinta*, jos se koostuu äärellisestä määrästä pintapaloja siten, että pintapalat sopivat yhteen. [3, s. 412]

Esimerkki 2.3. (Vrt. [3, s. 412 – 413].) Tarkastellaan yksikköpallon pintaa S, joka on paloiteltu neljään pintapalaan siten, että pintapala S_1 on itäinen vyö, pintapala S_2 on läntinen vyö ja pintapalat S_3 ja S_4 ovat pohjoinen kansi ja eteläinen kansi (ks. kuva [3, s. 413]). Pinta S on paloittain sileä pinta.

Määritelmä 2.6. Olkoon S paloittain sileä pinta. Paloittain sileä pinta S on sileä, jos pinnalla S on olemassa jokaiselle mielivaltaiselle pisteelle $p \in S \backslash \partial S$ sellainen hajoitelma $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, $n \in \mathbb{N}$, että piste p on pinnan S jonkin pintapalan S_i sisäpiste. [3, s. 415]

2.3 Suunnistetut käyrät, tasoalueet ja pinnat

Käyrällä, tasolla ja pinnalla voi olla suunta. Tässä kappaleessa käydään lyhyesti läpi, millainen on suunnistettu käyrä, suunnistettu tasoalue ja suunnistettu pinta.

Määritelmä 2.7. Olkoon C sileä käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Käyrän C *suunnistus* osoittaa suunnan, mihin käyrä kulkee. Suunnistettua käyrää merkitään nuolella $\vec{C}$. [5, s. 45]

Siis sileät käyrät ovat suunnistettuja. Paloittain sileä käyrä C on suunnistettu, jos sen komponenttikäyrillä on sama suunnistus.

Oletetaan, että funktio $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ parametrisoi suunnistetun käyrän $\vec{C}$. Jos käyrän $\vec{C}$ suunnistus on pisteestä $\mathbf{f}(a)$ pisteeseen $\mathbf{f}(b)$, piste $\mathbf{f}(a)$ on käyrän $\vec{C}$ alkupiste ja $\mathbf{f}(b)$ loppupiste. Suunnistettu käyrä on suunnistettu kaari, jos funktio $\mathbf{f}$ on injektio.

Huomautus 2.4. Jos käyrän $\vec{C}$ suunta on oikealle käyrän siinä pisteessä, jossa käyrän parametrisoiva funktio saa pienimmän arvonsa, sanotaan käyrän olevan *positiivisesti suunnistettu.* Kun käyrän suunta on kyseisessä pisteessä vasemmalle, on käyrä negatiivisesti suunnistettu. Jos käyrä $\vec{C}$ on suljettu, niin positiivisella suunnistuksella tarkoitetaan, että suunta on vastapäiväinen.

Jos käyrä on paloittain sileä, suunnan määrää se funktio, joka saa pienimmän pienimmän arvon. Seuraavaksi esitetään tasoalueen suunnistuksen määritelmä.

Määritelmä 2.8. Olkoon $T \subseteq \mathbb{R}^2$ tasoalue. Tasoalueen T *suunnistus* on järjestetyn vektoriparin, jossa vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, pyörähdyssuuntaa mielivaltaisessa pisteessä $p \in T$. Suunnistetusta tasoalueesta käytetään merkintää $\vec{T}$. [3, s. 353]

Siis jokainen tasoalue on suunnistettu.

Huomautus 2.5. Vektoriparin pyörähdyssuunta on ensimmäisestä vektorista vektoreiden muodostaman pienemmän kulman kautta toiseen vektoriin. Tasoalue $\vec{T}$ on *positiivisesti suunnistettu*, jos järjestetyn vektoriparin pyörähdyssuunta on vastapäivään.

Jos tasoalue T on suunnistettu, niin jokaisella tasoalueen T polkuyhtäinen osajoukolla on sama suunnistus [3, s. 354]. Polkuyhtenäisellä joukolla tarkoitetaan sellaista joukkoa tai pintaa, jonka kaksi mielivaltaista pistettä voidaan yhdistää käyrällä.

Huomautus 2.6. Tasoalueen $\vec{T}$ suunnistus määrää reunaviivan $\partial\vec{T}$ suunnistuksen. Pinnan $\vec{S}$ suunnistus määrää sen reunaviivan $\partial\vec{S}$ suunnistuksen. [3, s. 355, s. 389]

Määritellään seuraavaksi suunnistettu pintapala ja suunnistettu paloittain sileä pinta.

Määritelmä 2.9. Pintapala S on suunnistettu, jos pintapalan määritelmässä (määritelmä 2.4) tasoalue $\vec{U}$ on suunnistettu. Suunnistettua pintapalaa merkitään nuolella $\vec{S}$. Tasoalueen $\vec{U}$ suunnistus määrää pintapalan $\vec{S}$ suunnistuksen. [3, s. 392]

Määritelmä 2.10. Olkoon S on paloittain sileä polkuyhtenäinen pinta. Oletetaan, että pinnan S jokainen pintapala on suunnistuva ja, että kahden vierekkäisen yhteenliitetyn pintapalan yhteisten reunakäyrien suunnistukset ovat vastakkaiset. Tällöin pinta $\vec{S}$ on *suunnistuva* ja pinnan suuntauksen määrää sen pintapalat. [3, s. 420]

Paloittain sileä suunnistettu pinta ja sen reunaviiva kirjoitetaan

$$\vec{S} = \vec{S}_1 \cup \cdots \cup \vec{S}_k = \vec{S}_1 + \cdots + \vec{S}_k$$
$$\partial\vec{S} = \partial\vec{S}_1 \cup \cdots \cup \partial\vec{S}_k = \partial\vec{S}_1 + \cdots + \partial\vec{S}_k,$$

missä $k \in \mathbb{N}$.

Huomautus 2.7. Suunnistetulla pinnalla S on olemassa mielivastaisessa pisteessä $\mathbf{p} \in S \backslash \partial S$ yksikäsitteinen normaalivektori $\mathbf{n}(\mathbf{p}) \neq 0$, missä

$$\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{v}_1(\mathbf{p}) \times \mathbf{v}_2(\mathbf{p})}{\|\mathbf{v}_1(\mathbf{p}) \times \mathbf{v}_2(\mathbf{p})\|}$$

ja vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ ovat lineaarisesti riippumattomia tangenttivektoreita pisteessä $\mathbf{p}$. [3, s. 388, s. 417]

Huomautus 2.8. Pinnalla on kaksi puolta. Pinnan $\vec{S}$ sen puolen suunta, missä $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ sijaitsee, on vastapäiväinen eli positiivinen. [3, s. 388]

Katsotaan vielä lopuksi esimerkki.

Esimerkki 2.4. (i) Kuution pinta on suunnistuva, jos sen kahden vierekkäisen yhteenliitetyn pintapalan yhteisten reunakäyrien suunnistukset ovat vastakkaiset [3, s. 421].

(ii) Möbiuksen nauha ei ole suunnistettu pinta [3, s. 415 – 416].

2.4 Sijoitusmenetelmistä ja differentiaalimuodoista

Joskus integraalin määrittäminen voi olla hankalaa joko alueen muodon tai integroitavan funktion takia. Tällöin integraalin määrittämistä voidaan helpottaa viemällä integraali toiseen koordinaattisysteemiin. Tämä voi tapahtua kahdella tavalla: ilmaisemalla muuttuja itse jonakin differentioituvana funktiona tai ilmaisemalla funktio uuden muuttujan avulla [3, s. 2]. Kappaleessa esitetään lyhyesti näistä ensimmäinen. Tämän tyyppistä sijoitusta kutsutaan takaisinvedoksi.

Takaisinvetosijoituksessa muuttuja ilmaistaan uuden muuttujan differentioituvana funktiona $x = \phi(s)$. Tällöin $dx = \phi'(s)\, ds$ ja

$$\int f(x)\, dx = \int f(\phi(s))\phi'(s)\, ds = \Phi,$$

missä $\Phi(s)$ on funktion $f(\phi(s))\phi'(s)$ integraalifunktio. Tasaisinvetosijoituksessa oletetaan, että funktiolla $\phi(s)$ on olemassa käänteisfunktio $\phi^{-1}(s)$. Sijoituksessa halutaan määräämättömäksi integraaliksi $F(x) = \Phi(\phi^{-1}(x))$, missä $s = \phi^{-1}(x)$ on funktion $x = \phi(s)$ käänteisfunktio. [3, s. 2]

Lisää takaisinvetosijoituksesta voi lukea esimerkiksi James Callahanin kirjasta *Advanced Calculus: A Geometric View* [3].

Takaisinvetosijoituksessa esitettyä funktiota $f(\phi(s))\phi'(s)\,ds$ kutsutaan *takaisinvetokuvaukseksi* ja siitä käytetään merkintää f^*. Takaisinvetokuvaus f^* kuvaa funktion f differentiaalimuodot funktion f arvojoukosta funktion f määrittelyjoukkoon.

Määritellään nyt lyhyesti mitä tarkoitetaan differentiaalimuodoilla. Lisää differentiaalimuodoista voi lukea esimerkiksi Steven H. Weintraubin kirjasta *Differential Forms: A Complement to Vector Calculus* [5].

Differentiaalimuodot ovat viiva- ja pintaintegraalin integrandeja sekä suunnistetun yksi- tai kaksoisintegraalin integrandeja. Määritellään differentiaalimuodot avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja käytetään yleisiä koordinaattiakseleita x, y ja z. Differentiaalimuotojen määritys avaruudelle $\mathbb{R}^n$ tapahtuu vastaavasti.

Määritelmä 2.11. (i) Astetta 0 oleva differentiaalimuoto α on funktio $A = \alpha$.

(ii) Astetta 1 oleva differentiaalimuoto on $\alpha = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, missä A, B ja C ovat funktioita.

(iii) Astetta 2 oleva differentiaalimuoto on $\alpha = A\,dydz + B\,dzdx + C\,dxdy$, missä A, B ja C ovat funktioita.

(iv) Astetta 3 oleva differentiaalimuoto on $\alpha = A\,dxdydz$, missä A on funktio.

[5, s. 1]

Jatkossa astetta k olevasta differentiaalimuodosta käytetään lyhennettä differentiaalinen k-muoto tai k-muoto.

Huomautus 2.9. Differentiaalisella 1-muodolla tarkoitetaan integroituvaa viivaintegraalia (kappale 3.2), siis integroidaan yli yksiulotteisen suunnistuvan alueen. Differentiaalisella 2-muodolla integroidaan yli kaksiuloitteisen suunnistetun alueen (kappale 3.3) ja 3-muodolla integroidaan yli kolmiulotteisen suunnistetun alueen. [3, s. 423]

Esimerkki 2.5. Differentiaalimuoto $\alpha = 2x^2\,dx + (yz+3)\,dz$ on astetta 1.

Huomautus 2.10. Differentiaalimuotojen kertolaskuissa sovelletaan seuraavia sääntöjä:

(i) $dxdx = dydy = dzdz = 0$,

(ii) $dxdy = -dydx$, $dxdz = -dzdx$, $dydz = -dzdy$.

[5, s. 2]

Määritellään nyt diffentiaalimuodon jatkuvuus ja differentioituvuus.

Määritelmä 2.12. Olkoon $T \subseteq \mathbb{R}^3$ yhtenäinen joukko.

(i) Differentiaalimuoto α on jatkuva joukossa T, jos sen jokainen komponenttifunktio on jatkuva joukossa T.

(ii) Differentiaalimuoto α on differentioituva joukossa T, jos sen jokainen komponenttifunktio on differentioituva joukossa T.

(iii) Differentiaalimuoto α on jatkuvasti differentioituva joukossa T, jos sen jokainen komponenttifunktio on jatkuvasti differentioituva joukossa T.

[5, s. 6]

Seuraavaksi esitetään differentiaalimuodon ulkoisen derivaatan määritelmä ja tämän jälkeen katsotaan lyhyesti, miten takaisinvetokuvaus kuvaa diffentiaalimuotoja.

Määritelmä 2.13. Olkoon A 0-muoto eli funktio. Funktion A ulkoinen derivaatta dA on 1-muoto

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}\,dx + \frac{\partial A}{\partial y}\,dy + \frac{\partial A}{\partial z}\,dz = A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz.$$

[5, s. 5]

Määritelmä 2.14. Olkoon α k-muoto. Differentiaalisen k-muodon ulkoinen derivaatta $d\alpha$ on (k+1)-muoto, missä jokaiseen k-muodon funktioon sovelletaan määritelmää 2.13. [5, s. 5]

Lause 2.1. *Olkoon* $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ *funktio, missä* f_1, f_2, f_3 *ovat komponenttifunktioita. Oletetaan, että funktion* $\boldsymbol{f}$ *arvojoukko on sileä pinta. Olkoon* $\alpha = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$ *funktion* $\boldsymbol{f}$ *arvojoukossa määritelty 1-muoto. Tällöin*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}^*(\alpha) &= A(\boldsymbol{f}(u,v))\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial u}\,du + B(\boldsymbol{f}(u,v))\frac{\partial f_2(u,v)}{\partial u}\,du \\ &\quad + C(\boldsymbol{f}(u,v))\frac{\partial f_3(u,v)}{\partial u}\,du + A(\boldsymbol{f}(u,v))\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial v}\,dv \\ &\quad + B(\boldsymbol{f}(u,v))\frac{\partial f_2(u,v)}{\partial v}\,dv + C(\boldsymbol{f}(u,v))\frac{\partial f_3(u,v)}{\partial v}\,dv.\end{aligned}$$

Todistus. Ks. [5, s. 81]. □

Seuraus 2.1. Lauseen 2.1 perusteella takaisinvetokuvaus korvaa ulkoisen derivaatan.

3 Integraaleista

Luvussa käsitellään integrointia yli kaksiulotteisen joukon, yli käyrän ja yli pinnan. Koska vektoriarvoiset funktiot usein koostuvat reaaliarvoisista komponenttifunktioista integrointi yli kaksiulotteisen joukon esitetään reaaliarvoisille funktioille. Integrointi yli käyrän ja yli pinnan esitetään vain vektoriarvoisille funktioille. Reaaliarvoisten funktioiden viiva- ja pintaintegraalista voi lukea esimerkiksi Tom Apostolin kirjasta *Calculus, Volume 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability.*

3.1 Tasointegraali

Kappaleessa käydään läpi, minkä tyyppisiä kaksiulotteisia joukkoja on ja miten niiden yli integroidaan. Kappaleen funktiot ovat reaaliarvoisia vektorimuuttujan funktioita. Palautetaan ensin mieleen, miten integroidaan yli suorakulmion muotoisen tasoalueen.

Määritelmä funktion integraalista yli suorakulmion muotoisen tasoalueen oletetaan tunnetuksi, ks. [1, s. 793] tai [2, s. 357]. Funktion tasointegraalin määrittämiseen käytetään seuraavaa lausetta.

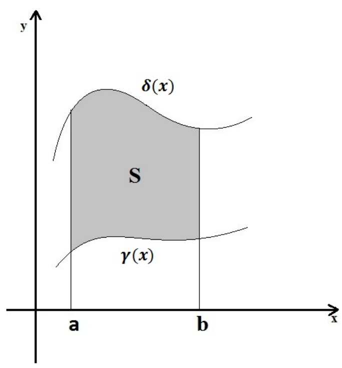
Lause 3.1. *Olkoon $f(x, y)$ suorakulmion muotoisella tasoalueella $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b$ ja $c \leq y \leq d$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ määritelty jatkuva funktio. Funktion f tasointegraali yli joukon R on*

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

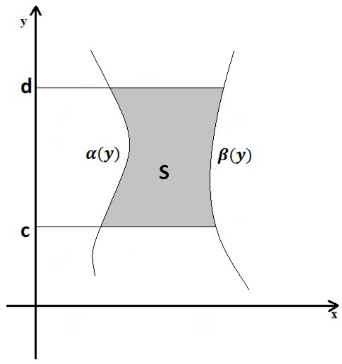
Todistus. Ks. [3, s. 319 – 321]. □

Tarkastellaan seuraavaksi joukkoja, jotka ovat jatkuvien funktioiden rajoittamia.

Olkoon S (x, y)-tasossa oleva jatkuvien funktioiden rajoittama yhtenäinen joukko. Nyt S voi olla kahden muuttujan x funktion rajoittama (kuva 1) tai kahden muuttujan y funktion rajoittama (kuva 2).



Kuva 1: Muuttujan x funktioiden rajoittama joukko.



Kuva 2: Muuttujan y funktioiden rajoittama joukko.

Jos S on kahden muuttujan x funktion rajoittama, voidaan S ilmaista seuraavasti:

$$S: \quad a \leq x \leq b,\ \gamma(x) \leq y \leq \delta(x),$$

missä funktiot $y = \gamma(x)$ ja $y = \delta(x)$ ovat välillä $[a, b]$ jatkuvia ja $\gamma(x) \leq \delta(x)$. Jos S on kahden muuttujan y funktion rajoittama, voidaan S ilmaista seuraavasti:

$$S: \quad c \leq y \leq d,\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y),$$

missä funktiot $x = \alpha(y)$ ja $x = \beta(y)$ ovat välillä $[c, d]$ jatkuvia ja $\alpha(y) \leq \beta(y)$. Joukko voi myös olla sekä muuttujan x funktioiden rajoittama että muuttujan y funktioiden rajoittama. Katsotaan nyt miten määritetään tasointegraali yli edellä mainittujen joukkojen.

Lause 3.2. *Olkoon S (x, y)-tasossa oleva joukko siten, että $a \leq x \leq b$ ja $\gamma(x) \leq y \leq \delta(x)$, missä $\gamma(x)$ ja $\delta(x)$ ovat jatkuvia funktioita välillä $[a, b]$. Olkoon $f(x, y)$ joukossa S määritelty jatkuva funktio. Funktion $f(x, y)$ tasointegraali yli joukon S on*

$$\iint\limits_S f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Samaan tapaan voidaan määrittää integraali yli joukon, jota rajoittavat muuttujan y funktiot.

Todistus. Ks. [3, s. 321]. □

Jos joukko on suunnistettu, tasointegraali määritetään seuraavasti:

Määritelmä 3.1. Olkoon joukko $\vec{S}$ suunnistettu ja olkoon $f(x, y)$ joukossa S määritelty jatkuva funktio. Tällöin funktion f integraali yli joukon $\vec{S}$ on

$$\iint\limits_{\vec{S}} f(x, y)\, dxdy = \operatorname{sgn} \vec{S} \iint\limits_S f(x, y)\, dxdy,$$

missä $\operatorname{sgn} \vec{S} = +1$, kun joukon $\vec{S}$ suunnistus on positiivinen, ja $\operatorname{sgn} \vec{S} = -1$, kun suunnistus on negatiivinen. [3, s. 356]

Esimerkki 3.1. (Vrt. [1, s. 800].) Olkoon $\vec{S}$ negatiivisesti suunnistettu joukko, jonka pisteet toteuttavat seuraavat epäyhtälöt: $0 \leq y \leq 1$ ja $0 \leq x \leq y^2$. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = e^{y^3}$ joukossa $\vec{S}$.

Funktio on selvästi jatkuva joukossa $\vec{S}$, joten funktiolle voidaan määrittää integraali yli suunnistetun joukon $\vec{S}$. Siis

$$\iint\limits_{\vec{S}} e^{y^3}\,dxdy = -\iint\limits_{S} e^{y^3}\,dxdy = -\int\limits_0^1\int\limits_0^{y^2} e^{y^3}\,dxdy = -\int\limits_0^1 y^2 e^{y^3}\,dy$$

$$= -\Big/_{\!\!0}^{\,1}\ \frac{e^{y^3}}{3} = -\frac{e-1}{3}.$$

3.2 Viivaintegraali

Kappaleessa käydään läpi, miten integroidaan funktio yli käyrän.

Määritelmä 3.2. Olkoon $\vec{C}$ sileä positiivisesti suunnistettu käyrä, jonka parametrisoi funktio $\mathbf{g}(t)$, missä $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ja $t \in [a, b]$. Olkoon $\mathbf{F}$ käyrällä $\vec{C}$ määritelty jatkuva vektorikenttä. Tällöin vektorikentän $\mathbf{F}$ *viivaintegraali* yli käyrän $\vec{C}$ on

$$\int\limits_{\vec{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{g} = \int\limits_a^b \mathbf{F}\left[\mathbf{g}(t)\right]\cdot \mathbf{g}'(t)\,dt.$$

[2, s. 324] [3, s. 10] [4, s. 288]

Jos käyrä on negatiivisesti suunnistettu, integraalin eteen tulee miinusmerkki.

Huomautus 3.1. Tarkastellaan määritelmää 3.2, kun funktiot $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{F}$ ilmaistaan komponenttifunktioidensa avulla. Olkoon nyt $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, missä $g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ja olkoon $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, missä $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia funktioita ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin viivaintegraali on

$$\int\limits_{\vec{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{g} = \int\limits_{\vec{C}} (f_1\,dg_1 + \cdots + f_n\,dg_n) = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_a^b f_k\left[\mathbf{g}(t)\right] g_k'(t)\,dt.$$

Kun käsitellään kaksiulotteista avaruutta, on tapana merkitä funktion $\mathbf{g}$ komponenttifunktioita $g_1 = x$ ja $g_2 = y$. Tällöin viivaintegraali on

$$\int_{\vec{C}} f_1\, dx + f_2\, dy.$$

[2, s. 324]

Esimerkki 3.2. (Vrt. [4, s. 290].) Määritetään integraali

$$\int_{\vec{C}} \cos z\, dx + e^x\, dy + e^y\, dz,$$

kun sileän positiivisesti suunnistetun käyrän $\vec{C}$ parametrisoi funktio $\mathbf{g}$: $[0, 2] \to \mathbb{R}^3$, missä $\mathbf{g}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$.

Määritetään ensin $\mathbf{F}(\mathbf{g})$ ja $\mathbf{g}'(t)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}) = \mathbf{F}(1, t, e^t) = \cos e^t\mathbf{i} + e^1\mathbf{j} + e^t\mathbf{k} \;\text{ ja }\; \mathbf{g}'(t) = \mathbf{j} + e^t\mathbf{k}.$$

Funktioiden sisätulo on

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t) &= (\cos e^t\mathbf{i} + e^1\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}) \\ &= (0 \cdot \cos e^t)\mathbf{i} + (1 \cdot e)\mathbf{j} + (e^t \cdot e^t)\mathbf{k} = e\ \mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Viivaintegraaliksi saadaan

$$\int_{\vec{C}} \cos z\ dx + e^x\ dy + e^y\ dz = \int_0^2 (e + e^{2t})\, dt = 2e + \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{2}.$$

Aiemmin todettiin, ettei käyrän parametriesitys ole yksikäsitteinen. Esitetään seuraavaksi lause tapauksesta, jossa käyrällä on kaksi parametriesitystä.

Lause 3.3. *Olkoon $\vec{C}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ sileä suunnistettu käyrä, jonka parametrisoi sekä funktio $\boldsymbol{g}(t)$ että funktio $\boldsymbol{h}(t)$. Olkoon $\boldsymbol{F}$ on jatkuva vektorikenttä käyrällä $\vec{C}$. Jos funktiot $\boldsymbol{g}$ ja $\boldsymbol{h}$ piirtävät käyrän $\vec{C}$ samaan suuntaan, niin*

$$\int_{\vec{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{g} = \int_{\vec{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{h}.$$

Jos funktiot piirtävät käyrän eri suuntaan,

$$\int_{\vec{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{g} = -\int_{\vec{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{h}.$$

Todistus. Ks. [2, s. 327]. □

Esitetään seuraavaksi määritelmä integraalista yli paloittain sileän suunnistetun käyrän.

Määritelmä 3.3. Olkoot $m \in \mathbb{N}$ ja $\vec{C} = \vec{C}_1 \cup \cdots \cup \vec{C}_m$ paloittain sileä positiivisesti suunnistettu käyrä, jonka parametrisoi funktio $\mathbf{g}$. Käyrällä $\vec{C}$ määritellyn jatkuvan vektorikentän $\mathbf{F}$ viivaintegraali yli käyrän $\vec{C}$ on

$$\int\limits_{\vec{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int\limits_{\vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \cdots + \vec{C}_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int\limits_{\vec{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} + \int\limits_{\vec{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} + \cdots + \int\limits_{\vec{C}_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}.$$

[3, s. 9]

Määritelmä 3.3 voidaan yleistää tapaukseen, jossa käyrät ovat erillisiä. Symbolia $\oint$ käytetään yleensä silloin, kun integroidaan yli suljetun käyrän.

3.3 Pintaintegraali

Kappaleessa määritellään vektoriarvoisten funktioiden pintaintegraali yli sileän suunnistetun pintapalan ja yli paloittain sileän suunnistetun pinnan. Kappaleen määritelmissä oletetaan, että pintapalan suunnistus on positiivinen. Jos suunnistus on negatiivinen, tulee integraalin eteen miinusmerkki.

Määritelmä 3.4 (pintaintegraali)**.** Olkoon $\vec{S}$ sileä suunnistettu pintapala. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3)$ pintapalalla $\vec{S}$ määritelty jatkuva vektorikenttä, missä f_1, f_2 ja f_3 ovat komponenttifunktioita. Vektorikentän $\mathbf{F}$ *pintaintegraalia* yli pintapalan $\vec{S}$ merkitään

$$\iint\limits_{\vec{S}} f_1(x, y, z)\, dydz + f_2(x, y, z)\, dzdx + f_3(x, y, z)\, dxdy.$$

Olkoon funktio $\mathbf{g}(u, v) : \mathbf{T} \to \mathbb{R}^3$ pintapalan $\vec{S} = \mathbf{g}(\vec{U})$ parametriesitys, missä $\mathbf{T} \subseteq \mathbb{R}^2$ ja $\vec{U} \subset \mathbf{T}$. Tällöin vektorikentän $\mathbf{F}$ pintaintegraalin arvo on

$$\iint\limits_{\vec{U}} \left(f_1(\mathbf{g}(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + f_2(\mathbf{g}(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + f_3(\mathbf{g}(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv.$$

[3, s. 402]

Lause 3.4. *Pintaintegraali on riippumaton siitä, mitä pintapalan $\vec{S}$ parametriesitystä käytetään. [3, s. 401]*

Todistus. Ks. [4, s. 335]. $\square$

Pintaintegraalin määritelmässä esitettyjen Jacobin determinanttien $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ ja $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ muodostamasta vektorista käytetään nimitystä suuntanormaali. Siis suuntanormaali $\mathbf{N}$ on

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

Määritellään seuraavaksi vektorikentän integraali yli paloittain sileän pinnan ja katsotaan sen jälkeen esimerkki.

Määritelmä 3.5. Olkoon $\vec{S}$ paloittain sileä suunnistettu pinta ja olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$ pinnalla $\vec{S}$ määritelty vektorikenttä, missä f_1, f_2 ja f_3 ovat komponenttifunktioita. Vektorikentän $\mathbf{F}$ pintaintegraali yli paloittain sileän pinnan $\vec{S}$ on

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\vec{S}} f_1(x,y,z)\,dydz + f_2(x,y,z)\,dzdx + f_3(x,y,z)\,dxdy \\ &\quad = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\vec{S}_i} f_1(x,y,z)\,dydz + f_2(x,y,z)\,dzdy + f_3(x,y,z)\,dxdy,\end{aligned}$$

missä $\vec{S} = \vec{S}_1 + \cdots + \vec{S}_k$ ja $k \in \mathbb{N}$. [3, s. 417, s. 420]

Pintaintegraali yli paloittain sileän suunnistetun pinnan on siis sileiden suunnistettujen pintapalojen integraalien summa.

Esimerkki 3.3. (Vrt. [3, s. 421].) Tarkastellaan (x,y,z)-avaruudessa olevaa yksikkökuutiota, jonka yksi kärjistä on origossa ja muut kärjet ovat x-, y- ja z-akseleiden positiivisilla puolilla. Oletetaan, että yksikkökuution paloittain sileä pinta $\vec{S}$ on suunnistettu. Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, y-x, 0)$ pinnalla $\vec{S}$ määritelty vektorikenttä. Tasossa $x = 1$ pinnan $\vec{S}_{x=1}$ parametrisoi funktio $\mathbf{g}_{x=1} : \vec{U} \to \mathbb{R}^3$, missä $\vec{U}$ on positiivisesti suunnistettu yksikköneliö (u,v)-tasossa ja $(x,y,z) = (1,u,v)$. Nyt kun $x = 1$, suuntanormaali $\mathbf{N}_{x=1}$ on

$$\mathbf{N}_{x=1} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = (1,0,0).$$

Vektorikentän $\mathbf{F}$ pintaintegraali yli pinnan $\vec{S}_{x=1}$ on

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\vec{S}_{x=1}} (x+y)\,dydz + (y-x)\,dzdx + 0\,dxdy \\
&\qquad = \iint\limits_{\vec{U}} ((1+u)\cdot 1 + (u-1)\cdot 0 + 0)\,dudv \\
&\qquad = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (1+u)\,dudv = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Pintaintegraalit yli kuution muiden pintojen $\vec{S}_{x=0}$, $\vec{S}_{y=0}$, $\vec{S}_{y=1}$, $\vec{S}_{z=0}$ ja $\vec{S}_{z=1}$ saadaan laskettua vastaavasti, ks. [3, s. 421].

Esitetään seuraavaksi hyödyllinen lause pintaintegraalista.

Lause 3.5. *Olkoon paloittain sileällä suunnistetulla pinnalla $\vec{S}$ on kaksi suunnistettujen pintapalojen ositusta $\vec{S} = \vec{S}_1 + \cdots + \vec{S}_k = \vec{T}_1 + \cdots + \vec{T}_m$, missä $k, m \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\vec{S}_i} f_1\,dydz + f_2\,dzdy + f_3\,dxdy = \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{\vec{T}_j} f_1\,dydz + f_2\,dzdy + f_3\,dxdy,$$

missä $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$ on pinnalla $\vec{S}$ määritelty vektorikenttä. [3, s. 420]

Todistus. Määritelmän 3.5 nojalla vektorikentän pintaintegraali yli paloittain sileän pinnan on

$$\iint\limits_{\vec{S}} f_1\,dydz + f_2\,dzdx + f_3\,dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\vec{S}_i} f_1\,dydz + f_2\,dzdy + f_3\,dxdy.$$

Toisaalta, määritelmän 3.5 nojalla vektorikentän pintaintegraali yli paloittain sileän pinnan on

$$\iint\limits_{\vec{S}} f_1\,dydz + f_2)\,dzdx + f_3\,dxdy = \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{\vec{T}_j} f_1\,dydz + f_2\,dzdy + f_3\,dxdy.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\vec{S}_i} f_1\, dydz + f_2\, dzdy + f_3\, dxdy = \iint\limits_{\vec{S}} f_1\, dydz + f_2\, dzdx + f_3\, dxdy$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{\vec{T}_j} f_1\, dydz + f_2\, dzdy + f_3\, dxdy.$$

□

Kun tarkastellaan pintaintegraalin määritelmää, huomataan, että integrandi on 2-muoto. Esitetään kappaleen lopuksi pintaintegraalista lause, jossa käytetään takaisinvetokuvausta.

Lause 3.6. *Olkoon $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}^3$ jatkuvasti differentioituva injektiivinen upotus avoimessa joukossa $\boldsymbol{T} \subseteq \mathbb{R}^2$. Olkoon $\vec{U} \subset \boldsymbol{T}$ positiivisesti suunnistettu, suljettu ja rajoitettu tasoalue ja olkoon $\vec{S} = \boldsymbol{f}(\vec{U})$ suunnistettu pintapala. Olkoon ω pinnalla $\vec{S}$ määritelty jatkuva 2-muoto siten, että $\omega = A\, dydz + B\, dzdx + C\, dxdy$. Tällöin*

$$\iint\limits_{\vec{S}} \omega = \iint\limits_{\boldsymbol{f}(\vec{U})} A\, dydz + B\, dzdx + C\, dxdy$$
$$= \iint\limits_{\vec{U}} \left(A(\boldsymbol{f}(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + B(\boldsymbol{f}(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + C(\boldsymbol{f}(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv$$
$$= \iint\limits_{\vec{U}} \boldsymbol{f}^*(\omega).$$

[3, s. 432]

Todistus. Seuraa pintaintegraalin määritelmästä ja lauseesta 2.1. □

4 Greenin ja Stokesin lauseet

Tässä luvussa käydään läpi tutkielman pääaihe: Greenin ja Stokesin lauseet. Luku on melko suoraan James Callahanin kirjan *Advanced Calculus: A Geometric View* kappaleista 9 ja 11.

4.1 Greenin lause

Greenin lause väittää, että tietynlaisten funktioiden tasointegraali yli tasossa olevan suunnistetun joukon $\vec{S}$ on yhtäsuuri kuin funktion integraali yli suunnistetun reunaviivan $\partial\vec{S}$. Kappaleessa käsitellään Greenin lause kolmessa eri tapauksessa.

Ensimmäinen tapauksessa oletetaan, että positiivisesti suunnistetun joukon $\vec{S}$ pisteille ovat yhtäaikaa voimassa seuraavat epäyhtälöt:

$$\begin{aligned} \vec{S}: &\quad a \le x \le b,\ \gamma(x) \le y \le \delta(x) \text{ ja} \\ \vec{S}: &\quad c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y), \end{aligned}$$

missä $\gamma(x)$ ja $\delta(x)$ ovat muuttujan x jatkuvia funktioita välillä $[a, b]$ siten, että joukon $\vec{S}$ reunaviiva on paloittain sileä, ja $\alpha(y)$ ja $\beta(y)$ muuttujan y jatkuvia funktioita välillä $[c, d]$ siten, että joukon $\vec{S}$ reunaviiva on paloittain sileä. Siis joukko $\vec{S}$ on sekä muuttujan x että muuttujan y funktioiden rajoittama. Joukon $\vec{S}$ suunnistus määrää reunaviivan $\partial\vec{S}$ suunnistuksen.

Joukon $\vec{S}$ sulkeumalla tarkoitetaan joukon ja reunaviivan yhdistettä $\vec{S} \cup \partial\vec{S}$.

Lause 4.1 (Greenin lause)**.** *Olkoon $\vec{S}$ edellä mainitulla tavalla suunnistettu ja rajoitettu joukko (x, y)-tasossa ja olkoon $\partial\vec{S}$ joukon $\vec{S}$ reunaviiva. Olkoot $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ joukon $\vec{S}$ sulkeumassa jatkuvasti differentioituvia reaaliarvoisia funktioita. Tällöin*

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\vec{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Todistus. Oletetaan, että joukko $\vec{S}$ on positiivisesti suunnistettu. Väite voidaan ilmaista seuraavasti:

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} P\,dx + \oint\limits_{\partial\vec{S}} Q\,dy = \iint\limits_{\vec{S}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy - \iint\limits_{\vec{S}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

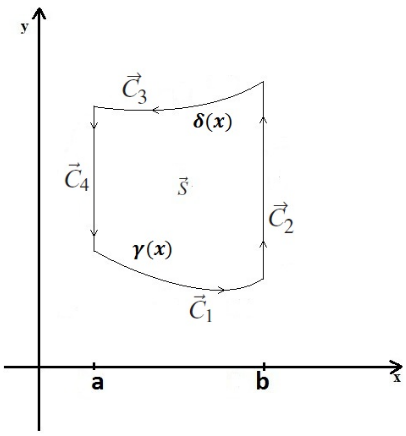
Nyt väite voidaan jakaa kahteen osaan. Todistetaan väitteen ensimmäinen puolikas, eli

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} P\,dx = -\iint\limits_{\vec{S}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy, \tag{4.1}$$

käyttämällä hyväksi joukkoa $\vec{S}$ rajoittavia muuttujan x funktioita. Siis kun $(x, y) \in \vec{S}$, niin $a \leq x \leq b$ ja $\gamma(x) \leq y \leq \delta(x)$.

Aloitetaan yhtälön (4.1) vasemmasta puolesta eli viivaintegraalista. Suunnistettu reunaviiva $\partial\vec{S}$ koostuu paloista, jotka ovat jatkuvien funktioiden arvojoukkoja eli käyriä siten, että reunaviiva on paloittain sileä. Merkitään näitä käyriä seuraavasti: $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$, $\vec{C}_3$ ja $\vec{C}_4$, missä parilliset ovat pystysuoria ja parittomat sivuttaissuuntaisia käyriä siten, että käyrän $\vec{C}_3$ yli integroidaan toiseen suuntaan kuin käyrän $\vec{C}_1$ yli ja käyrän $\vec{C}_4$ yli integroidaan toiseen suuntaan kuin käyrän $\vec{C}_2$ yli (kuva 3). Koska joukko $\vec{S}$ on funktioiden rajoittama, on käyriä neljä tai vähemmän.

Siis oletusten perusteella funktio $\gamma(x)$ parametrisoi käyrän $\vec{C}_1$ ja funktio $\delta(x)$ käyrän $\vec{C}_3$, pystysuorat käyrät $\vec{C}_2$ ja $\vec{C}_4$ parametrisoi funktiot $x = b$ ja $x = a$.



Kuva 3: $\vec{S}$ muuttujan x funktioiden rajoittamana.

Viivaintegraalit yli pystysuorien käyrien $\vec{C}_2$ ja $\vec{C}_4$ eivät vaikuta, koska käyrän $\vec{C}_2$ yli integroitaessa on integrointiväli pisteestä b pisteeseen b ja käyrän $\vec{C}_4$ yli integroitaessa integrointiväli on pisteestä a pisteeseen a. Siis viivaintegraaliksi tulee molemmista tapauksista 0. Nyt yhtälön 4.1 viivaintegraali saadaan määritettyä integroimalla sivuttaissuuntaisten käyrien yli. Määritelmän 3.3 nojalla

$$\oint_{\partial\vec{S}} P\,dx = \int_{\vec{C}_1} P\,dx + \int_{\vec{C}_3} P\,dx.$$

Käyrien $\vec{C}_1$ ja $\vec{C}_3$ yli integroitaessa voidaan käyttää muuttujaa x parametrina.

Nyt käyrän $\vec{C}_1$ yli integroitaessa integrointiväli on pisteestä a pisteeseen b ja käyrän käyrän $\vec{C}_3$ yli integroitaessa integrointiväli on pisteestä b pisteeseen a. Koska funktio $\gamma(x)$ parametrisoi käyrän $\vec{C}_1$ ja funktio $\delta(x)$ käyrän $\vec{C}_3$, niin funktion $P(x,y)$ viivaintegraali yli käyrän $\vec{C}_1$ ja $\vec{C}_3$ on

$$\int_{\vec{C}_1} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,\gamma(x))\,dx \quad \text{ja}$$

$$\int_{\vec{C}_3} P(x,y)\,dx = \int_b^a P(x,\delta(x))\,dx = -\int_a^b P(x,\delta(x))\,dx.$$

Siis funktion $P(x,y)$ viivaintegraali yli reunaviivan $\partial\vec{S}$ on

$$\oint_{\partial\vec{S}} P\,dx = \int_a^b \left(P(x,\gamma(x)) - P(x,\delta(x))\right)\,dx,$$

missä $\gamma(x)$ ja $\delta(x)$ ovat muuttujan x jatkuvia funktioita välillä $[a,b]$.

Tarkastellaan nyt yhtälön (4.1) oikeaa puolta. Käyttämällä määritelmää 3.1 ja lausetta 3.2 saadaan

$$\begin{aligned}\iint_{\vec{S}} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy &= \iint_{S} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dydx \\ &= \int_a^b \Big/_{\gamma(x)}^{\delta(x)} -P(x,y)\,dx \\ &= \int_a^b \left(P(x,\gamma(x)) - P(x,\delta(x))\right)dx.\end{aligned}$$

Nyt yhdistämällä yllä saadut tulokset saadaan

$$\iint_{\vec{S}} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b \left(P(x,\gamma(x)) - P(x,\delta(x))\right)dx = \oint_{\partial\vec{S}} P\,dx.$$

Näin todistettiin väitteen ensimmäinen puolikas.

Väitteen toinen puolikas,

$$\oint_{\partial\vec{S}} Q\,dy = \iint_{\vec{S}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy,$$

voidaan todistaa samalla tavalla kuin ensimmäinen puolikas, mutta käyttämällä joukkoa $\vec{S}$ rajoittavia muuttujan y funktioita. $\square$

Esimerkki 4.1. (Vrt. [4, s. 349].) Olkoon $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = xy$ ja olkoon joukko $\vec{S}$ yksikköympyrä $x^2 + y^2 \leq 1$. Tarkastellaan Greenin lauseen voimassaoloa.

Oletetaan, että $\vec{S}$ on positiivisesti suunnistettu. Joukon $\vec{S}$ reunaviivan $\partial\vec{S}$ parametrisoivat funktiot $x = \cos t$ ja $y = \sin t$, missä $0 \leq t \leq 2\pi$. Siis $dx = -\sin t$ ja $dy = \cos t$. Tällöin Greenin lauseen mukainen viivaintegraali yli reunaviivan $\partial\vec{S}$ on

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial\vec{S}} P\,dx + Q\,dy &= \int\limits_0^{2\pi} ((\cos t)(-\sin t) + \cos t \sin t \cos t)\,dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \cos^2 t\right) dt \\ &= \Big/_{0}^{2\pi} \left(\frac{\cos 2t}{4} + \frac{\cos^3 t}{3}\right) = 0.\end{aligned}$$

Joukko $\vec{S}$ on sekä muuttujan x funktioiden että muuttujan y funktioiden rajoittama. Määritetään tasointegraali muuttujan x funktioiden avulla. Nyt $-1 \leq x \leq 1$ ja joukkoa $\vec{S}$ rajoittavat funktiot $y = \sqrt{1-x^2}$ ja $y = -\sqrt{1-x^2}$. Tasointegraali yli joukon $\vec{S}$ on

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\vec{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy &= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (y - 0)\,dydx \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \Big/_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{2}\,dx = 0.\end{aligned}$$

Siis Greenin lauseen tulos on voimassa.

Huomautus 4.1. Olkoon $F(x,y) = \int f(x,y)\,dx$ eli $\frac{\partial F}{\partial x} = f$. Olkoon nyt $P(x,y) = 0$ ja $Q(x,y) = F(x,y)$. Tällöin Greenin lauseen nojalla

$$\iint\limits_{\vec{S}} f(x,y)\,dxdy = \oint\limits_{\partial\vec{S}} F(x,y)\,dy.$$

Siis

$$\iint\limits_{\vec{S}} f(x,y)\,dxdy = \oint\limits_{\partial\vec{S}} \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy$$

eli Greenin lauseen avulla voidaan arvioida tasointegraalia sieventämällä se viivaintegraalin ja yksinkertaisen integraalin yhdistelmäksi.

Viivaintegraali voidaan määrittää tasointegraalin avulla. Katsotaan siitä esimerkki.

Esimerkki 4.2. (Vrt. [2, s. 382].) Olkoon $\vec{S}$ positiivisesti suunnistettu neliö, jonka kulmapisteet ovat $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ja $(0,1)$. Tarkastellaan viivaintegraalia

$$\oint\limits_{\vec{S}} (5 - xy - y^2)\,dx - (2xy - x^2)\,dy.$$

Muuttujille x ja y pätee, että $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1$. Nyt funktioina ovat $P = 5 - xy - y^2$ ja $Q = -2xy + x^2$. Tällöin

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2y + 2x - (-x - 2y) = 3x.$$

Greenin lausetta käyttämällä saadaan viivaintegraaliksi

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\vec{S}} 3x\,dxdy = 3\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x\,dxdy = \frac{3}{2}.$$

Greenin lause antaa apuja viivaintegraalin määrittämiseen. Seuraavaksi esitetään seuraus tähän liittyen.

Seuraus 4.1. Olkoon P muuttujan x funktio, joka ei sisällä muuttujaa y, ja olkoon Q muuttujan y funktio, joka ei sisällä muuttujaa x. Tällöin

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Todistus. Koska $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 0 = 0$, niin

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\vec{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

□

Todistetaan seuraavaksi Greenin lause käyttämällä ainoastaan toisen muuttujan funktioita. Todistuksessa osittaisderivaatoista käytetään seuraavanlaisia lyhenteitä: $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y$ ja $\frac{(\partial F/\partial y)}{\partial x} = F_{yx}$.

Todistus. Oletetaan, että joukkoa $\vec{S}$ rajoittaa muuttujan x kaksi jatkuvaa funktiota siten, että joukon $\vec{S}$ reunaviiva on paloittain sileä. Joukon $\vec{S}$ pisteille siis pätevät seuraava:

$$\vec{S}: \quad a \leq x \leq b, \ \gamma(x) \leq y \leq \delta(x).$$

Nyt Greenin lauseen ensimmäisessä todistuksessa todistettu väite

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} P\,dx = \iint\limits_{\vec{S}} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

on voimassa. Todistetaan väitteen toinen puolikas eli

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} Q\,dy = \iint\limits_{\vec{S}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy.$$

Olkoon F funktion Q antiderivaatta muuttujan y suhteen eli

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\,dy \quad \text{ts.} \quad F_y(x,y) = Q(x,y). \tag{4.2}$$

Koska oletettiin, että funktio Q on jatkuvasti differentioituva eli funktion Q ensimmäiset derivaatat ovat jatkuvia, on funktion F toiset derivaatat jatkuvia ja $Q_x = F_{yx} = F_{xy}$. Funktion Q_x tasointegraali yli joukon $\vec{S}$ voidaan kirjoittaa seuraavasti (lause 3.2):

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\vec{S}} Q_x(x,y)\,dxdy &= \int\limits_a^b \int\limits_{\gamma(x)}^{\delta(x)} F_{xy}(x,y)\,dydx = \int\limits_a^b \Big/_{\gamma(x)}^{\delta(x)} F_x(x,y)\,dx \\ &= \int\limits_a^b \left(F_x(x,\delta(x)) - F_x(x,\gamma(x))\right)dx.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Näytetään nyt, että funktion Q integraali yli reunaviivan $\partial\vec{S}$ on sama kuin yhtälön (4.3) tulos. Määritetään yksitellen integraalit käyrien $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$, $\vec{C}_3$ ja

$\vec{C}_4$ yli. Käyrän $\vec{C}_1$ yli integroitaessa voidaan muuttujaa x käyttää parametrina, jolloin $y = \gamma(x)$ ja $a \le x \le b$. Määritelmän 3.2 ja huomautuksen 3.1 perusteella viivaintegraali on

$$\int_{\vec{C}_1} Q\,dy = \int_a^b Q(x, \gamma(x))\gamma'(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Koska funktio $\gamma(x)$ on muuttujan x funktio, saadaan ketjusäännön ja funktion $F_y = Q$ määrittelyn (yhtälö (4.2)) avulla funktion $F(x, \gamma(x))$ derivaataksi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x, \gamma(x)) &= F_x(x, \gamma(x)) + F_y(x, \gamma(x))\gamma'(x)\\ &= F_x(x, \gamma(x)) + Q(x, \gamma(x))\gamma'(x).\end{aligned}$$

Siis

$$Q(x, \gamma(x))\gamma'(x) = \frac{d}{dx}F(x, \gamma(x)) - F_x(x, \gamma(x)).$$

Koska Riemannin integraali on lineaarinen, niin

$$\int_a^b Q(x, \gamma(x))\gamma'(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}F(x, \gamma(x))\,dx - \int_a^b F_x(x, \gamma(x))\,dx. \tag{4.5}$$

Yhtälön (4.5) oikean puolen ensimmäinen integraali voidaan helposti laskea

$$\int_a^b \frac{d}{dx}F(x, \gamma(x))\,dx = \Big/_{\!a}^{\!b} F(x, \gamma(x)) = F(b, \gamma(b)) - F(a, \gamma(a)). \tag{4.6}$$

Yhtälöt (4.4), (4.5) ja (4.6) yhdistämällä saadaan funktion Q viivaintegraaliksi yli käyrän $\vec{C}_1$

$$\int_{\vec{C}_1} Q\,dy = F(b, \gamma(b)) - F(a, \gamma(a)) - \int_a^b F_x(x, \gamma(x))\,dx.$$

Kun integroidaan yli käyrän $\vec{C}_2$, on $x = b$ ja muuttujaa y voidaan käyttää parametrina, missä $\gamma(b) \le y \le \delta(b)$. Tällöin viivaintegraali on

$$\int_{\vec{C}_2} Q(b, y)\,dy = \int_{\gamma(b)}^{\delta(b)} F_y(b, y)\,dy = F(b, \delta(b)) - F(b, \gamma(b)).$$

Kun integroidaan yli käyrän $\vec{C}_3$, muuttujaa x voidaan käyttää parametrina. Nyt $y = \delta(x)$ ja koska käyrän $\vec{C}_3$ yli integroidaan toiseen suuntaan kuin käyrän $\vec{C}_1$ yli, niin integrointi tapahtuu muuttujan x suhteen pisteestä b pisteeseen a. Määritelmän 3.2 ja huomautuksen 3.1 nojalla

$$\int\limits_{\vec{C}_3} Q\,dy = \int\limits_b^a Q(x,\delta(x))\delta'(x)\,dx = -\int\limits_a^b Q(x,\delta(x))\delta'(x)\,dx.$$

Integraali saadaan samanlaiseen muotoon kuin käyrän $\vec{C}_1$ yli integroitaessa. Nyt funktion γ tilalla on funktio δ ja integraalin edessä on miinusmerkki:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\vec{C}_3} Q\,dy &= -\int\limits_a^b Q(x,\delta(x))\delta'(x)\,dx = -\int\limits_a^b \left(\frac{d}{dx}F(x,\delta(x)) - F_x(x,\delta(x))\right)dx \\ &= -F(b,\delta(b)) + F(a,\delta(a)) + \int\limits_a^b F_x(x,\delta(x))\,dx.\end{aligned}$$

Kun integroidaan yli käyrän $\vec{C}_4$, on $x = a$ ja muuttujaa y voidaan käyttää parametrina. Koska käyrä $\vec{C}_4$ yli integrointi tapahtuu toisen suuntaan kuin käyrän $\vec{C}_2$ yli integrointi, niin nyt tulee integroida pisteestä $\delta(a)$ pisteeseen $\gamma(a)$. Käyttämällä $F_y = Q$ määrittelyä (yhtälö (4.2)) saadaan

$$\int\limits_{\vec{C}_4} Q\,dy = \int\limits_{\delta(a)}^{\gamma(a)} Q(a,y)\,dy = \int\limits_{\delta(a)}^{\gamma(a)} F_y(a,y)\,dy = F(a,\gamma(a)) - F(a,\delta(a)).$$

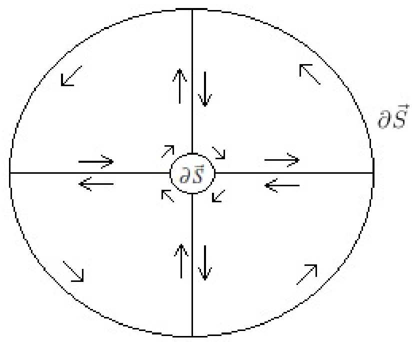
Nyt laskemalla yhteen viivaintegraalit yli käyrien $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$, $\vec{C}_3$ ja $\vec{C}_4$ ja käyttämällä yhtälöä (4.3) saadaan

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial\vec{S}} Q\,dy &= \int\limits_{\vec{C}_1} Q\,dy + \int\limits_{\vec{C}_2} Q\,dy + \int\limits_{\vec{C}_3} Q\,dy + \int\limits_{\vec{C}_4} Q\,dy \\ &= F(b,\gamma(b)) - F(a,\gamma(a)) - \int\limits_a^b F_x(x,\gamma(x))\,dx \\ &+ F(b,\delta(b)) - F(b,\gamma(b)) \\ &- F(b,\delta(b)) + F(a,\delta(a)) + \int\limits_a^b F_x(x,\delta(x))\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ F(a,\gamma(a)) - F(a,\delta(a)) \\
&= \int\limits_a^b F_x(x,\delta(x))\,dx - \int\limits_a^b F_x(x,\gamma(x))\,dx = \iint\limits_{\vec{S}} Q_x\,dxdy \\
&= \iint\limits_{\vec{S}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy.
\end{aligned}
$$

Siis väite on todistettu. Samaan tapaan voidaan todistaa tapaus, missä joukkoa $\vec{S}$ rajoittavat muuttujan y funktiot. $\square$

Greenin lauseen kolmannessa tapauksessa suunnistettu joukko $\vec{S}$ koostuu äärellisestä yhdisteestä, joka sisältää sekä yhden muuttujan funktioiden rajoittamia että molempien muuttujien funktioiden rajoittamia joukkoja (kuva 4). Siis sallitaan, että reunaviivalla $\partial\vec{S}$ voi olla useampi komponentti, joilla kaikilla on sama suunnistus kuin joukolla $\vec{S}$.



Kuva 4: $\vec{S}$ äärellisenä yhdisteenä.

Todistus. Olkoon joukko $\vec{S}$ suljettu, rajoitettu ja positiivisesti suunnistettu. Oletetaan, että joukko $\vec{S}$ on äärellinen yhdiste joukoista $\vec{S}_1, \ldots, \vec{S}_N$, missä $N \in \mathbb{N}$ ja osat $\vec{S}_i$ toteuttavat Greenin lauseen ehdot, kun $i = 1, \ldots, N$. Oletetaan lisäksi, että osat $\vec{S}_i$ ovat erillisiä reunoja lukuunottamatta ja, että niillä on sama suunnistus kuin joukolla $\vec{S}$. Tarkastellaan erikseen viiva- ja tasointegraaleja. Tasointegraalin additiivisuudesta seuraa, että funktioiden

P ja Q osittaisderivaattojen integraali yli joukon $\vec{S}$ on

$$\iint_{\vec{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$
$$= \iint_{\vec{S}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \cdots + \iint_{\vec{S}_N} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Tarkastellaan sitten viivaintegraalia. Jos kahdella osalla $\vec{S}_i$ ja $\vec{S}_j$ on yhteinen reunakäyrä $\vec{C}_k$, niin koska ne ovat reunakäyrän $\vec{C}_k$ vastakkaisilla sivuilla, on osan $\vec{S}_i$ reunakäyrän $\vec{C}_k$ suunnistus vastakkainen kuin osan $\vec{S}_j$ reunakäyrän $\vec{C}_k$ suunnistus. Tällöin käyrän $\vec{C}_k$ suunnistus osana reunaviivaa $\partial\vec{S}_i$ on vastakkaissuuntainen kuin sen suunnistus osana reunaviivaa $\partial\vec{S}_j$, eli integroidessa yli reunaviivan $\partial\vec{S}$ reunakäyrä $\vec{C}_k$ supistuu pois. Jäljelle jäävät vain ne käyrät $\vec{C}$, jotka ovat osana vain yhden osan reunaviiva $\partial\vec{S}_i$. Siis jäljelle jää ainoastaan joukon $\vec{S}$ reunaviiva $\partial\vec{S}$. Tällöin saadaan viivaintegraalille yhtäsuuruus:

$$\oint_{\partial\vec{S}} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\partial\vec{S}_1} (P\,dx + Q\,dy) + \cdots + \oint_{\partial\vec{S}_N} (P\,dx + Q\,dy).$$

Koska joukon $\vec{S}$ jokaisessa osassa $\vec{S}_i$ Greenin lauseen ehdot ovat voimassa, niin Greenin lauseen ehdot ovat voimassa myös joukossa $\vec{S}$:

$$\iint_{\vec{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial\vec{S}} P\,dx + Q\,dy.$$

□

Esimerkki 4.3. (Vrt. [1, s. 905].) Olkoon $\vec{S}$ positiivisesti suunnistettu suljettu ja rajoitettu (x, y)-tasossa oleva joukko, jonka reunaviiva $\partial\vec{S}$ ei kulje origon kautta. Osoitetaan, että

$$\oint_{\partial\vec{S}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0, & \text{jos origo on joukon } \vec{S} \text{ ulkopuolella,} \\ 2\pi, & \text{jos origo on joukon } \vec{S} \text{ sisällä.} \end{cases}$$

Siis $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ja $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$. Käsitellään ensin tapaus, kun origo on joukon $\vec{S}$ ulkopuolella. Jos $(x, y) \neq (0, 0)$, niin

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \left(\frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0.$$

Siis jos origo ei sisälly joukkoon $\vec{S}$, niin Greenin lauseen nojalla

$$\oint\limits_{\partial \vec{S}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \iint\limits_{\vec{S}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dxdy = 0.$$

Oletetaan, että origo sisältyy joukkoon $\vec{S}$. Origon on oltava joukon $\vec{S}$ sisäpiste, koska oletettiin, ettei reunaviiva $\partial \vec{S}$ kulje origon kautta. Siis mielivaltaiselle pisteelle $p \in \vec{S} \backslash \partial \vec{S}$ on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että ϵ-säteinen p-keskinen ympyrä sisältyy joukkoon $\vec{S}$. Olkoon $\vec{S}_\epsilon$ origo-keskinen ϵ-säteinen ympyrä. Oletetaan, että $\vec{S}_\epsilon$ on negatiivisesti suunnistettu. Määritetään integraali yli reunaviivan $\partial \vec{S}_\epsilon$. Reunaviivalle $\partial \vec{S}_\epsilon$ pätee, että $x^2+y^2=\epsilon^2$, missä ϵ on vakio. Käyttämällä Greenin lausetta ja viemällä tasointegraali napakoordinaatistoon (ks. [2, s. 396 – 398]) saadaan integraaliksi

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial \vec{S}_\epsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} &= \oint\limits_{\partial \vec{S}_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2}(-y\,dx + x\,dy) = \iint\limits_{\vec{S}_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 2\,dxdy \\
&= \frac{1}{\epsilon^2} \iint\limits_{\vec{S}_\epsilon} 2r\,drd\theta = -\frac{1}{\epsilon^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\epsilon} 2r\,drd\theta \\
&= -\frac{1}{\epsilon^2} \int\limits_0^{2\pi} \epsilon^2\,d\theta = -2\pi.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi joukkojen $\vec{S}$ ja $\vec{S}_\epsilon$ rajoittamaa positiivisesti suunnistettua joukkoa $\vec{S}_1$. Siis $\vec{S}_1 = \vec{S} \backslash \vec{S}_\epsilon$. Joukolla $\vec{S}_1$ on kaksi reunaviivaa: sekä $\partial \vec{S}$ että $\partial \vec{S}_\epsilon$. Lisäksi origo ei sisälly joukkoon $\vec{S}_1$. Tällöin Greenin lausetta käyttämällä saadaan, että

$$\oint\limits_{\partial \vec{S}_1} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \oint\limits_{\partial \vec{S}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} + \oint\limits_{\partial \vec{S}_\epsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\oint\limits_{\partial \vec{S}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = -\oint\limits_{\partial \vec{S}_\epsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = -(-2\pi) = 2\pi.$$

Siis väite on todistettu.

Tarkastellaan Greenin lauseen viivaintegraalin integrandia

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Huomataan, että integrandi on 1-muoto. Merkitään tätä 1-muotoa kirjaimella α. Differentiaalisen 1-muodon α ulkoinen derivaatta on määritelmän 2.14 nojalla

$$\begin{aligned} d\alpha &= dP(x,y)\,dx + dQ(x,y)\,dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\right)dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dydx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dydy. \end{aligned}$$

Nyt käyttämällä huomautuksen 2.10 laskusääntöjä hyväksi saadaan, että

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dydx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dydy &= \frac{\partial P}{\partial y}\,dydx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \end{aligned}$$

Siis tämä tarkoittaa, että differentiaalimuotojen avulla lausuttuna Greenin lause näyttää seuraavalta:

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} \alpha = \iint\limits_{\vec{S}} d\alpha,$$

missä $\vec{S}$ on Greenin lauseessa tarkasteltava joukko.

4.2 Stokesin lause

Stokesin lause yhdistää integraalin yli pinnan S ja integraalin yli pinnan reunaviivan ∂S toisiinsa. Tutkielmassa Stokesin lause esitetään differentiaalimuotojen avulla ja todistetaan differentiaalimuotoja ja takaisinvetokuvausta käyttäen. Vektorimuotoisen Stokesin lauseen voi katsoa esimerkiksi lähteestä [1] tai [4].

Stokesin lauseessa oletetaan, että $\vec{S}$ on paloittain sileä suunnistettu pinta (x, y, z)-avaruudessa ja $\omega = \omega(x, y, z)$ on differentiaalinen 1-muoto.

Sekä Greenin että Stokesin lause väittävät, että

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} \omega = \iint\limits_{\vec{S}} d\omega,$$

missä ω on 1-muoto ja $\vec{S}$ on suunnistettu kaksiulotteinen joukko. Lauseet eroavat ainoastaan ympäröivän avaruuden osalta. Greenin lause on määritelty avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja Stokesin lause avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Siis Greenin lauseessa joukko $\vec{S}$ on tasoalue ja Stokesin lauseessa $\vec{S}$ voi olla kaareva. Koska tasossa olevat joukot ovat pintapalojen parametriesitysten perustana, voidaan Greenin lausetta käyttää Stokesin lauseen todistamiseen.

Stokesin lauseen todistamiseen käytetään seuraavia tietoja hyväksi: Paloittain sileä pinta on suunnistettujen pintapalojen äärellinen summa, ja pintapalojen, joilla on yhteinen reunakäyrä, suunnistukset ovat vastakkaiset (määritelmä 2.10). Suunnistettu pintapala $\vec{S} = \mathbf{f}(\vec{U})$ on suljetun, rajoitetun, suunnatun tasoalueen $\vec{U} \subset \mathbf{T}$ kuvaus, missä funktio $\mathbf{f} : \mathbf{T} \to \mathbb{R}^3$ on jatkuvasti differentioituva injektiivinen upotus avoimessa joukossa $\mathbf{T} \subseteq \mathbb{R}^2$ (määritelmä 2.9). Kuvaus $\mathbf{f}$ on upotus pisteessä a, jos derivaatta pisteessä a, $d\mathbf{f_a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on injektio (määritelmä 2.1). Pintapalalla $\vec{S}$ määritellyn 2-muodon α pintaintegraali on (lause 3.6):

$$\iint_{\vec{S}} \alpha = \iint_{\vec{U}} \mathbf{f}^*(\alpha).$$

Integraali yli pintapalan $\vec{S}$ ei riipu siitä, mitä parametriesitystä käytetään (lause 3.4). Differentiaalisen 2-muodon pintaintegraali yli paloittain sileän suunnistetun pinnan on sileiden suunnistettujen pintapalojen integraalien summa (määritelmä 3.5). Esitetään vielä kaksi lemmaa ennen Stokesin lausetta.

Lemma 4.1. Olkoon $\mathbf{f} : \mathbf{T} \to \mathbb{R}^3$ jatkuvasti differentioituva kuvaus, missä $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}^2$. Olkoon $\alpha(x, y, z)$ funktion arvojoukossa $\mathbf{f}(\mathbf{T})$ määritelty k-muoto. Tällöin

$$\mathbf{f}^*(d\alpha) = d(\mathbf{f}^*(\alpha)).$$

Todistus. Ks. [5, s. 86 – 89]. □

Seuraavan lemman todistuksessa hyödennetään oletusta, että funktio $\mathbf{f}$ on upotus ja injektio.

Lemma 4.2. Olkoon $\mathbf{f} : \mathbf{T} \to \mathbb{R}^3$ on jatkuvasti differentioituva injektiivinen upotus avoimessa joukossa $\mathbf{T} \subseteq \mathbb{R}^2$. Olkoon $\vec{C}$ paloittain sileä suunnistettu tasossa oleva käyrä ja olkoon β joukossa $\mathbf{f}(\vec{C})$ määritelty 1-muoto. Tällöin

$$\int\limits_{\mathbf{f}(\vec{C})} \beta = \int\limits_{\vec{C}} \mathbf{f}^*(\beta).$$

Todistus. Olkoon $\vec{C} = \vec{C}_1 + \cdots + \vec{C}_m$, missä $\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_m$ ovat sileitä suunnistettuja kaaria ja $m \in \mathbb{N}$. Koska $\mathbf{f}$ on injektiivinen upotus, niin jokainen $\mathbf{f}(\vec{C}_i)$, $i = 1, \ldots, m$, on myös sileä suunnistettu kaari siten, että

$$\mathbf{f}(\vec{C}) = \mathbf{f}(\vec{C}_1) + \cdots + \mathbf{f}(\vec{C}_m).$$

Olkoon $\mathbf{u}_i(t) = (u_i(t), v_i(t))$ funktio, joka parametrisoi kaaren $\vec{C}_i$, missä $t \in [a_i, b_i]$. Tällöin funktio

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t) &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_i(t)\right), \\ (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) &= (x(u_i(t), v_i(t)), y(u_i(t), v_i(t)), z(u_i(t), v_i(t))), \end{aligned}$$

antaa kaaren $\mathbf{f}(\vec{C}_i)$ parametriesityksen, kun $t \in [a_i, b_i]$.

Kolmiulotteisen avaruuden 1-muoto on $\beta = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, missä P, Q ja R ovat funktioita (määritelmä 2.11). Tarkastellaan 1-muotoa β kolmessa osassa: kun $\beta = P\,dx$, kun $\beta = Q\,dy$ ja kun $\beta = R\,dz$.

Olkoon $\beta = P\,dx$. Nyt β on määritelty kaarella $\mathbf{f}(\vec{C})$ ja $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ antaa kaaren $\mathbf{f}(\vec{C})$ parametriesityksen, joten lauseen 2.1 nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^*(\beta) &= P(\mathbf{f}(\mathbf{u}))\frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial u}\,du + P(\mathbf{f}(\mathbf{u}))\frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial v}\,dv \\ &= P\left(\mathbf{f}(\mathbf{u})\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right). \end{aligned}$$

Merkitään $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$ ja $\frac{\partial x}{\partial v} = x_v$. Nyt viivaintegraalin määritelmän nojalla integraali yli kaaren $\vec{C}_i$ on

$$\int\limits_{\vec{C}_i} \mathbf{f}^*(\beta) = \int\limits_{\vec{C}_i} P\left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_i)\right)\left(x_{u_i}du + x_{v_i}dv\right) = \int\limits_{a_i}^{b_i} P\left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_i(t))\right)\left(x_{u_i}u_i' + x_{v_i}v_i'\right)dt.$$

Toisaalta, 1-muodon β integraali yli kaaren $\mathbf{f}(\vec{C}_i)$ on viivaintegraalin määritelmän ja ketjusäännön perusteella

$$\int\limits_{\mathbf{f}(\vec{C}_i)} \beta = \int\limits_{a_i}^{b_i} P\left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_i(t))\right)x_i'\,dt = \int\limits_{a_i}^{b_i} P\left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_i(t))\right)\left(x_{u_i}u_i' + x_{v_i}v_i'\right)dt = \int\limits_{\vec{C}_i} \mathbf{f}^*(\beta).$$

Tapaukset $\beta = Q\,dy$ ja $\beta = R\,dz$ todistetaan samaan tapaan. Lisäämällä nämä kolme tapausta yhteen, saadaan todistettua väite 1-muodolle $\beta = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. □

Esitetään ensin Stokesin lause pintapaloille ja sen jälkeen pinnoille.

Lause 4.2 (Stokesin lause pintapalalle)**.** *Olkoon $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}^3$ jatkuvasti differentioituva injektiivinen upotus avoimessa joukossa $\boldsymbol{T} \subseteq \mathbb{R}^2$. Olkoon $\vec{U} \subset \boldsymbol{T}$ suljettu ja rajoitettu positiivisesti suunnistettu tasoalue, joka toteuttaa Greenin lauseen ehdot. Jos ω on suunnistetulla pintapalalla $\vec{S} = \boldsymbol{f}(\vec{U})$ määritelty jatkuvasti differentioituva 1-muoto, niin*

$$\oint_{\partial \vec{S}} \omega = \iint_{\vec{S}} d\omega.$$

Todistus. Oletuksen, että $\vec{S} = \mathbf{f}(\vec{U})$ on pintapala, sekä tiedon, että $d\omega$ on 2-muoto (määritelmä 2.14) ja lauseen 3.6 nojalla

$$\iint_{\vec{S}} d\omega = \iint_{\mathbf{f}(\vec{U})} d\omega = \iint_{\vec{U}} \mathbf{f}^*(d\omega).$$

Lemman 4.1 perusteella

$$\iint_{\vec{U}} \mathbf{f}^*(d\omega) = \iint_{\vec{U}} d(\mathbf{f}^*(\omega)).$$

Lauseen 2.1 perusteella tiedetään, miten funktio $\mathbf{f}^*$ kuvaa 1-muodon ω. Koska funktio $\mathbf{f}$ ja 1-muoto ω ovat molemmat jatkuvasti differentioituvia, niin $\mathbf{f}^*(\omega)$ on jatkuvasti differentioituva. Nyt koska tasoalue $\vec{U}$ toteuttaa Greenin lauseen ehdot, niin kappaleen 4.1 sivun 30 perusteella

$$\iint_{\vec{U}} d(\mathbf{f}^*(\omega)) = \oint_{\partial \vec{U}} \mathbf{f}^*(\omega).$$

Lemman 4.2 nojalla

$$\oint_{\partial \vec{U}} \mathbf{f}^*(\omega) = \oint_{\mathbf{f}(\partial \vec{U})} \omega.$$

Koska oletettiin, että $\vec{S} = \mathbf{f}(\vec{U})$, niin reunaviivalle pätee $\partial \vec{S} = \partial(\mathbf{f}(\vec{U})) = \mathbf{f}(\partial \vec{U})$. Tällöin

$$\oint_{\mathbf{f}(\partial \vec{U})} \omega = \oint_{\partial \vec{S}} \omega.$$

Näin väite saatiin todistettua. □

Lause 4.3 (Stokesin lause). *Oletetaan, että $\vec{S} = \vec{S_1} + \cdots + \vec{S_m}$ on paloittain sileä suunnistettu pinta ja, että jokainen pintapala $\vec{S_i}$ toteuttaa lauseen 4.2 ehdot ($i = 1, \ldots, m$). Tällöin*

$$\oint\limits_{\partial \vec{S}} \omega = \iint\limits_{\vec{S}} d\omega,$$

missä ω on suunnistetulla pintapalalla $\vec{S}$ määritelty jatkuvasti differentioituva 1-*muoto.*

Todistus. Aiemmin todettiin, että jos pintapaloilla $\vec{S_i}$ ja $\vec{S_j}$ on yhteinen reunaviivan osa eli käyrä $\vec{C_l}$, niin käyrän $\vec{C_l}$ suunta on pintapalassa $\vec{S_i}$ vastakkainen kuin pintapalassa $\vec{S_j}$ (määritelmä 2.10). Tällöin viivaintegraalit näiden käyrien yli supistavat toisensa ja jäljelle jäävät vain integraalit yli reunaviivojen $\partial \vec{S_i}$, jotka sijaitsevat reunaviivalla $\partial \vec{S}$. Siis

$$\oint\limits_{\partial \vec{S}} \omega = \sum_{i=1}^{m} \oint\limits_{\partial \vec{S_i}} \omega,$$

missä $m \in \mathbb{N}$. Koska jokainen pintapala toteuttaa lauseen 4.2 ehdot, niin

$$\sum_{i=1}^{m} \oint\limits_{\partial \vec{S_i}} \omega = \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{\vec{S_i}} d\omega.$$

Tiedetään, että suunnistettu paloittain sileä pinta on suunnistettujen pintapalojen äärellinen summa, joten määritelmän 3.5 nojalla

$$\sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{\vec{S_i}} d\omega = \iint\limits_{\vec{S}} d\omega.$$

Siis väite on todistettu. □

Katsotaan seuraavaksi muutama esimerkki ja seuraus Stokesin lauseesta.

Esimerkki 4.4. (Vrt. [1, s. 915].) Olkoon $\vec{S}$ pallon $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ suunnistetun pinnan osa, joka on (x,y)-tason yläpuolella, ja olkoon 1-muoto $\omega = y^2 \cos xz \, dx + x^3 e^{yz} \, dy - e^{-xyz} \, dz$. Määritetään 2-muodon $d\omega$ pintaintegraali yli suunnistetun pintapalan $\vec{S}$.

Oletetaan, että pallon pinta on positiivisesti suunnistettu. Tällöin myös pintapala $\vec{S}$ ja sen reunaviiva $\partial\vec{S}$ ovat positiivisesti suunnistettuja. Pintapalan reunaviiva on (x,y)-tasossa oleva ympyrä $x^2 + y^2 = 4$. Ympyrä on myös suunnistettu reunaviiva tasoalueelle $\vec{D} = \{x^2 + y^2 \le 4, z = 0\}$. Siis $\partial\vec{S} = \partial\vec{D}$.

Tarkastellaan 2-muodon $d\omega$ integraalia yli tasoalueen $\vec{D}$. Koska tasoalue $\vec{D}$ on (x,y)-tasossa, niin 1-muoto supistuu

$$\omega = y^2 \cos xz\, dx + x^3 e^{yz}\, dy - e^{-xyz}\, dz = y^2\, dx + x^3\, dy,$$

sillä $dz = 0$. Nyt 2-muoto $d\omega$ on lauseen 2.14 nojalla on

$$d\omega = d(y^2)\, dx + d(x^3)\, dy = (3x^2 - 2y)\, dxdy.$$

Siis 2-muodon $d\omega$ tasointegraalia yli tasoalueen $\vec{D}$ on

$$\iint_{\vec{D}} d\omega = \iint_{D} (3x^2 - 2y)\, dxdy.$$

Viemällä tasointegraali napakoordinaatistoon (ks. [2, s. 396 – 398]) ja sijoittamalla $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ saadaan

$$\begin{aligned}
\iint_{D} (3x^2 - 2y)\, dxdy &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(3r^2 \cos^2\theta - 2r\sin\theta\right) r\, d\theta dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3r^2}{2} + \frac{3r^2}{2}\cos 2\theta - 2r\sin\theta\right) r\, d\theta dr \\
&= \int_0^2 \Big/_0^{2\pi} \left(\frac{3r^2\theta}{2} + \frac{3r^2}{4}\sin 2\theta + 2r\cos\theta\right) r\, dr \\
&= \int_0^2 \frac{3}{2} \cdot 2\pi r^3\ dr = \Big/_0^2\ \frac{3}{4}\pi r^4 = 12\pi.
\end{aligned}$$

Nyt koska $\vec{D}$ positiivisesti suunnistettu ja rajoitettu joukko (x, y)-tasossa ja koska ω on jatkuvasti differentioituva, on Greenin lause voimassa eli

$$\iint_{\vec{D}} d\omega = \oint_{\partial\vec{D}} \omega.$$

Koska $\partial\vec{D} = \partial\vec{S}$, niin

$$\oint\limits_{\partial\vec{D}} \omega = \oint\limits_{\partial\vec{S}} \omega.$$

Koska ω on määritelty ja jatkuvasti differentioitava suunnistetulla pintapalalla $\vec{S}$, niin Stokesin lause on voimassa. Siis

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} \omega = \iint\limits_{\vec{S}} d\omega.$$

Tällöin

$$\iint\limits_{\vec{S}} d\omega = 12\pi.$$

Seuraus 4.2. Jos $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, niin ulkoinen derivaatta on määritelmän 2.14 ja huomautuksen 2.10 perusteella

$$d\omega = (C_y - B_z)\,dydz + (A_z - C_x)\,dzdx + (B_x - A_y)\,dxdy$$

ja Stokesin lause menee seuraavasti

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} A\,dx + B\,dy + C\,dz = \iint\limits_{\vec{S}} (C_y - B_z)\,dydz + (A_z - C_x)\,dzdx + (B_x - A_y)\,dxdy.$$

Esimerkki 4.5. (Vrt. [4, s. 358] ja [1, s. 915].) Määritä integraali

$$\oint\limits_{\partial\vec{S}} -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz,$$

kun reunaviiva $\partial\vec{S}$ on sylinterin $x^2 + y^2 = 1$ ja tason $x + y + z = 1$ leikkaus ja reunaviivan suunnistus on positiivinen (x, y)-tasosta katsoen.

Siis pintapala $\vec{S}$ on sylinterissä $x^2 + y^2 = 1$ määritelty pinta, jota rajoittaa funktio $z = \mathbf{f}(x, y) = 1 - x - y$. Merkitään suunnistettua tasoaluetta $\vec{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. Differentiaalinen 1-muoto on $\alpha = -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz$ ja seurauksen 4.2 nojalla $d\alpha = (3x^2 + 3y^2)\,dxdy$. Käytetään Stokesin lausetta ja tarkastellaan viivaintegraalia pintaintegraalin avulla. Nyt funktio $\mathbf{g} : \vec{D} \to \mathbb{R}^3$ antaa pintapalan $\vec{S}$ parametriesityksen. Siis $\vec{S} = \mathbf{g}(\vec{D})$. Käyttämällä pintaintegraalin määritelmää saadaan

$$\iint\limits_{\vec{S}} d\alpha = \iint\limits_{\vec{D}} (3x^2 + 3y^2)\,dxdy.$$

Viemällä tasointegraali napakoordinaatteihin (ks. [2, s. 396 – 398]) saadaan

$$\iint_{\vec{D}} (3x^2 + 3y^2)\,dxdy = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r\,d\theta\,dr = 3\int_0^1 2\pi r^3\,dr = \frac{3\pi}{2}.$$

Siis

$$\oint_{\partial\vec{S}} -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz = \frac{3\pi}{2}.$$

Lause 4.4. *Oletetaan, että paloittain sileät pinnat $\vec{S}$ ja $\vec{\Sigma}$ toteuttavat Stokesin lauseen ehdot ja, että $\partial\vec{S} = \partial\vec{\Sigma}$. Olkoon ω jatkuvasti differentioituva joukossa $\boldsymbol{T}$ määritelty 1-muoto, missä $\vec{S} \subseteq \boldsymbol{T}$ ja $\vec{\Sigma} \subseteq \boldsymbol{T}$. Tällöin*

$$\iint_{\vec{S}} d\omega = \iint_{\vec{\Sigma}} d\omega.$$

Todistus. Koska Stokesin lause on voimassa, on

$$\iint_{\vec{S}} d\omega = \oint_{\partial\vec{S}} \omega.$$

Käyttämällä ensin hyväksi oletusta, että $\partial\vec{S} = \partial\vec{\Sigma}$, ja sitten Stokesin lausetta saadaan

$$\oint_{\partial\vec{S}} \omega = \oint_{\partial\vec{\Sigma}} \omega = \iint_{\vec{\Sigma}} d\omega.$$

Siis väite on todistettu. □

Viitteet

[1] Adams, Robert A., Essex, Christopher, *Calculus: A Complete Course*, 7th edition, Toronto: Pearson Canada, 2010.

[2] Apostol, Tom M., *Calculus, Volume 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, 2nd edition, New York: Wiley, 1969.

[3] Callahan, James J., *Advanced Calculus: A Geometric View*, New York: Springer Science + Business Media, LCC 2010.

[4] Marsden, Jerrold E., Tromba, Anthony J., *Vector Calculus*, San Francisco: Freeman, 1976.

[5] Weintraub, Steven H., *Differential Forms: A Complement to Vector Calculus*, San Diego: Academic Press, 1997.