TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Hanna Sulonen

Ehrenfeucht-Fraïssé-pelistä

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
2012

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

SULONEN, HANNA: Ehrenfeucht-Fraïssé-pelistä

Pro gradu -tutkielma, 30 s., 0 liites.

Matematiikka

2012

Tiivistelmä

Tässä työssä käsitellään Andrzej Ehrenfeuchtin 1960-luvulla kehittämää Ehrenfeucht-Fraïssé-peliä, jonka pääsovellus on ensimmäisen kertaluvun logiikan määrittelemättömyystulosten todistaminen. Ehrenfeucht-Fraïssé-pelistä käytetään tässä työssä lyhennystä EF-peli. Äärettömien mallien tapauksessa löytyy määrittelemättömyystulosten todistamiseen monia EF-pelejä tehokkaampia työkaluja, mutta äärellisten mallien tapauksessa EF-pelit ovat sovellettavuudeltaan erinomaisia. EF-pelejä käytetään paljon äärellisten mallien teoriassa ja sen sovelluksissa tietojenkäsittelytieteessä, koska malliteoriassa ei ole EF-pelien lisäksi monia muita äärellisten mallien tapauksessa päteviä menetelmiä.

Tämän työn aluksi tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun logiikan eli predikaattilogiikan peruskäsitteistöä. Ensimmäisen kertaluvun logiikasta käytetään tässä työssä merkintää FO. Työn alussa määritellään muun muassa aakkosto ja malli sekä käsitellään homomorfisuutta mallien välillä. Seuraavaksi tässä työssä tarkastellaan logiikan FO syntaksia ja semantiikkaa. Logiikan FO termit ja kaavat sekä näiden vapaat muuttujat määritellään, minkä lisäksi tutustutaan termien ja kaavojen totuusarvoihin mallissa $\mathfrak{A}$ sekä käsitellään aakkostojen laajentamista. Tämän jälkeen käsitellään kyselyjä ja logiikan FO ilmaisuvoimaa äärellisten mallien tapauksessa.

Tämän työn päättävässä luvussa tarkastellaan EF-pelejä. Aluksi esitetään EF-pelin säännöt ja EF-peliä koskevia määritelmiä, kuten osittaisen isomorfismin, EF-pelin voittotilanteen ja EF-pelin voittostrategian sekä kaavojen kvanttoriasteen määritelmät. Seuraavaksi esitetään EF-lause seurauslauseineen, jotka käsittelevät mallien ominaisuuksien ja kyselyjen määriteltävyyttä logiikassa FO. Lisäksi tämän työn päättävässä luvussa tarkastellaan tyyppejä, back-and-forth-relaatiota sekä Hintikka-kaavoja, joita käyttäen esitetään vaihtoehtoinen todistus EF-lauseelle.

Tässä työssä esitellään joitakin logiikan FO peruskäsitteitä, mutta työn seuraaminen edellyttää kuitenkin lukijalta logiikan perusteiden tuntemista. Lukijan tulee myös tuntea esimerkiksi relaation käsite.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä työssä käsitellään Ehrenfeucht-Fraïssé-peliä, joka on yksi tärkeimmistä menetelmistä määrittelemättömyystulosten todistamiseen. Ehrenfeucht-Fraïssé-pelin kehitti Puolassa syntynyt ja Amerikassa asunut matemaatikko Andrzej Ehrenfeucht 1960-luvulla. Ehrenfeucht käytti Ehrenfeucht-Fraïssé-pelissä ranskalaisen matemaatikon Roland Fraïssén 1950-luvulla kehittämää back-and-forth-metodia, mistä nimi Ehrenfeucht-Fraïssé-peli johtuu.

Ehrenfeucht-Fraïssé-pelien pääsovellus on ensimmäisen kertaluvun logiikan määrittelemättömyystulosten todistaminen. Äärettömien mallien tapauksessa löytyy määrittelemättömyystulosten todistamiseen monia Ehrenfeucht-Fraïssé-pelejä tehokkaampia työkaluja, joten joissakin malliteoriaa käsittelevissä teoksissa Ehrenfeucht-Fraïssé-pelit mainitaan vain lyhyesti. Äärellisten mallien tapauksessa Ehrenfeucht-Fraïssé-pelit ovat kuitenkin sovellettavuudeltaan erittäin hyviä. Malliteoriassa ei ole monia muita äärellisten mallien tapauksessa päteviä menetelmiä kuin Ehrenfeucht-Fraïssé-pelit, joten Ehrenfeucht-Fraïssé-pelejä käytetään paljon äärellisten mallien teoriassa ja sen sovelluksissa tietojenkäsittelytieteessä. Ehrenfeucht-Fraïssé-pelejä voi käyttää esimerkiksi tietokantakielien ilmaisuvoiman mittaamiseen.

Ehrenfeucht-Fraïssé-pelejä käyttäen saadaan parhaimmillaan todistettua määrittelemättömyystuloksia melko yksinkertaisesti. Useimmat pelejä käyttäen tehdyt todistukset ovat kuitenkin melko monimutkaisia ja niiden vaikeus nousee yleensä nopeasti kun todistettavat asiat muuttuvat monimutkaisemmiksi.

Tämän työn aluksi tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun logiikan eli predikaattilogiikan peruskäsitteistöä. Ensimmäisen kertaluvun logiikasta käytetään tässä työssä merkintää FO. Luvussa 2 esitetään sellaisia logiikan FO perusmääritelmiä, joita tarvitaan myöhemmin Ehrenfeucht-Fraïssé-peliä käsittelevässä luvussa 3. Ehrenfeucht-Fraïssé-pelistä käytetään tässä työssä lyhennystä EF-peli. Malleja tarkastelevassa alaluvussa 2.1 määritellään muun muassa aakkosto ja malli sekä käsitellään homomorfisuutta mallien välillä. Näiden lisäksi alaluvussa 2.1 määritellään mallin alimalli sekä suuntaamaton verkko, joka on eräs esimerkki mallista. Seuraavassa alaluvussa 2.2 tarkastellaan logiikan FO syntaksia ja semantiikkaa. Logiikan FO termit ja kaavat sekä näiden vapaat muuttujat määritellään, minkä lisäksi tutustutaan termien ja kaavojen totuusarvoihin mallissa $\mathfrak{A}$ sekä käsitellään aakkostojen laajentamista. Luvun 2 viimeisessä kyselyjä käsittelevässä alaluvussa 2.3 määritellään k-paikkainen kysely ja Boolen kysely sekä tarkastellaan kyselyjen määriteltävyyttä ja logiikan FO ilmaisuvoimaa äärellisten mallien tapauksessa. Kyselyihin palataan tämän työn luvussa 3.

Luvussa 3 keskitytään EF-pelin tarkasteluun. Luku aloitetaan tarkastelemalla EF-pelin lähtökohtaa ja kulkua. Tämä tehdään alaluvussa 3.1 esittämällä EF-pelin säännöt ja määrittelemällä muun muassa osittainen isomorfismi, EF-pelin voittotilanne ja EF-pelin voittostrategia. EF-pelien voittostrategioita havainnoillistetaan alaluvussa 3.1 viidellä esimerkillä sekä lauseilla 3.1 ja 3.2. Näiden EF-peliä koskevien määritelmien ja lauseiden jatkoksi esitetään seuraavassa alaluvussa 3.2 muita EF-peliin liittyviä määritelmiä ja lauseita kuten kaavojen kvanttoriasteen määritelmä sekä EF-lause (lause 3.3). EF-lauseelle esitetään myös kolme seurauslausetta, jotka käsittelevät mallien ominaisuuksien ja kyselyjen määriteltävyyttä logiikassa FO. Tyyppejä käsitellään seuraavassa alaluvussa 3.3 esittämällä r-tyyppien määritelmä sekä niihin liittyvä lause 3.7. Alaluvussa 3.3 esitetään myös yksi apulause sekä kolme seurauslausetta. Luvun 3 päättävässä alaluvussa 3.4 esitetään todistus EF-lauseelle 3.3 sekä määritellään Hintikka-kaavat, joita käyttäen esitetään vaihtoehtoinen todistus EF-lauseelle. Alaluvussa 3.4 määritellään myös back-and-forth-relaatio.

Tässä työssä esitellään joitakin logiikan FO peruskäsitteitä, mutta työn seuraaminen edellyttää kuitenkin lukijalta logiikan perusteiden tuntemista. Lukijan tulee myös tuntea esimerkiksi relaation käsite.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa esitellään logiikan FO peruskäsitteitä. Alaluvussa 2.1 käsitellään malleja sekä homomorfisuutta mallien välillä. Alaluvussa 2.2 esitellään lisää logiikan FO peruskäsitteitä. Tämän luvun viimeisessä alaluvussa 2.3 tarkastellaan kyselyjä.

2.1 Mallit

Tässä alaluvussa tarkastellaan malleja ja niiden ominaisuuksia esittämällä määritelmiä sekä kolme esimerkkiä, joilla havainnoillistetaan malleja ja homomorfisuutta mallien välillä.

Määritelmä 2.1. Aakkosto σ on kokoelma vakiosymboleja, relaatiosymboleja ja funktiosymboleja. Relaatiosymboleista käytetään myös nimitystä predikaattisymbolit, ja niitä merkitään $P_1, \ldots, P_n, \ldots$. Vakiosymboleja merkitään $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ ja funktiosymboleja merkitään $f_1, \ldots, f_n, \ldots$. Jokaisella aakkoston σ relaatiosymbolilla P ja funktiosymbolilla f on paikkaluku $n \in \mathbb{Z}_+$. Relaatiosymbolin P paikkalukua merkitään $\#(P)$ ja funktiosymbolin f paikkalukua merkitään $\#(f)$.

Lisäksi sovitaan, että vakiosymbolin c paikkaluku $\#(c)$ on 0. Aakkoston σ vakiosymbolien joukosta käytetään merkintää $Con(\sigma)$, relaatiosymbolien joukosta käytetään merkintää $Rel(\sigma)$ ja funktiosymbolien joukosta käytetään merkintää $Fun(\sigma)$.

Määritelmä 2.2. σ-malli $\mathfrak{A} = \langle A, (c^{\mathfrak{A}})_{c \in Con(\sigma)}, (P^{\mathfrak{A}})_{P \in Rel(\sigma)}, (f^{\mathfrak{A}})_{f \in Fun(\sigma)} \rangle$ koostuu mallin $\mathfrak{A}$ universumista $A = Dom(\mathfrak{A})$ sekä aakkoston σ vakiosymbolien, relaatiosymbolien ja funktiosymbolien tulkinnoista, jotka määritellään seuraavasti:

- jokainen aakkoston σ vakiosymboli c_i tulkitaan alkioksi $c_i^{\mathfrak{A}} \in A$;
- jokainen aakkoston σ k-paikkainen relaatiosymboli P_i tulkitaan universumin A k-paikkaiseksi relaatioksi $P_i^{\mathfrak{A}} \subseteq A^k$; ja
- jokainen aakkoston σ k-paikkainen funktiosymboli f_i tulkitaan universumin A k-paikkaiseksi funktioksi $f_i^{\mathfrak{A}} : A^k \to A$.

Mallin $\mathfrak{A}$ sanotaan olevan *äärellinen*, jos sen universumi A on äärellinen joukko.

Esimerkki 2.1. Jos aakkosto σ sisältää kaksipaikkaiset funktiosymbolit $+$ ja $\cdot$, vakiosymbolit 0 ja 1 sekä kaksipaikkaisen relaatiosymbolin $\leq$, ovat $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1, \leq^{\mathbb{R}} \rangle$ ja $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, 0, 1, \leq^{\mathbb{Q}} \rangle$ esimerkkejä aakkoston σ malleista. Mallin $\mathfrak{R}$ universumi on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja mallin $\mathfrak{Q}$ universumi on rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$. Symbolit $+^{\mathbb{R}}$ ja $+^{\mathbb{Q}}$ tarkoittavat malleissa tavallisia reaalilukujen ja rationaalilukujen yhteenlaskuja, $\cdot^{\mathbb{R}}$ ja $\cdot^{\mathbb{Q}}$ tarkoittavat tavallisia reaalilukujen ja rationaalilukujen kertolaskuja ja $\leq^{\mathbb{R}}$ ja $\leq^{\mathbb{Q}}$ tarkoittavat tavallisia reaalilukujen ja rationaalilukujen järjestyksiä.

Tässä työssä jatkossa tarkasteltava aakkosto σ on aina relationaalinen. Aakkosto σ sisältää siis relaatiosymboleja ja vakiosymboleja, mutta se ei sisällä lainkaan funktiosymboleja. Aakkostoa sanotaan puhtaasti relationaaliseksi, jos se sisältää ainoastaan relaatiosymboleja.

Jos σ on aakkosto, niin merkitsemme jatkossa kaikkien äärellisten σ-mallien luokkaa $Str[\sigma]$.

Määritelmä 2.3. Olkoon aakkosto $\sigma = \{E\}$, missä E on kaksipaikkainen relaatiosymboli. Suuntaamattomalla verkolla (lyhyemmin verkolla) tarkoitetaan aakkoston σ mallia $\mathfrak{G}$, jossa $E^{\mathfrak{G}}$ on irrefleksiivinen ja symmetrinen relaatio. Verkko on suunnattu, jos sille vaaditaan vain relaation $E^{\mathfrak{G}}$ irrefleksiivisyyden voimassaolo.

Verkon solmuiksi sanotaan mallin $\mathfrak{G}$ universumin $Dom(\mathfrak{G})$ alkioita, ja verkon särmiksi sanotaan pareja $\{a, b\}$, missä $(a, b) \in E^{\mathfrak{G}}$.

Jos suunnatulle verkolle $\mathfrak{G}$ pätevät ehdot $n \geq 1$ ja $((a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_{n+1})) \in E^{\mathfrak{G}}$, niin $a_1, \ldots, a_{n+1}$ on pituudeltaan n oleva polku verkon alkiosta a_1 alkioon a_{n+1}.

Tarkastellaan seuraavaksi homomorfisuutta mallien välillä.

Määritelmä 2.4. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja, ja olkoon $h : Dom(\mathfrak{A}) \to Dom(\mathfrak{B})$ kuvaus. Kuvaus h on *homomorfismi* mallista $\mathfrak{A}$ malliin $\mathfrak{B}$, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1. Jokaisella $c \in Con(\sigma)$ pätee $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.
2. Jos ehdot $P \in Rel(\sigma)$, $\#(P) = n$ ja $(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ pätevät, niin $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$.
3. Jos ehdot $f \in Fun(\sigma)$, $\#(f) = n$ ja $(a_1, \ldots, a_n) \in Dom(\mathfrak{A})^n$ pätevät, niin $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$.

Kuvauksen h sanotaan olevan *vahva homomorfismi* mallista $\mathfrak{A}$ malliin $\mathfrak{B}$, jos ehto 2 pätee myös seuraavassa vahvemmassa muodossa:

2´. Jos $P \in Rel(\sigma)$, $\#(P) = n$ ja $(a_1, \ldots, a_n) \in Dom(\mathfrak{A})^n$ pätevät, niin $(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$.

Kuvaus h on mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välinen *isomorfismi*, jos $h : Dom(\mathfrak{A}) \to Dom(\mathfrak{B})$ on vahva homomorfismi ja bijektio. Mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ sanotaan olevan isomorfiset, jos niiden välillä on isomorfismi. Mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ isomorfisuutta merkitään $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Kaksi mallia $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat isomorfiset, jos malli $\mathfrak{B}$ voidaan muodostaa mallista $\mathfrak{A}$ korvaamalla jokainen alkio $a \in A$ alkiolla $h(a) \in B$ muuten muuttamatta mallin rakennetta.

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan verkkoja $\mathfrak{A} = \langle V, E^{\mathfrak{A}} \rangle$ ja $\mathfrak{B} = \langle W, E^{\mathfrak{B}} \rangle$, missä $V = \{1, 2, 3\}, E^{\mathfrak{A}} = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}, W = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $E^{\mathfrak{B}} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$.

Kuvaus $h : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $h(x) = x$ on homomorfismi, sillä mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ aakkostojen ainoat symbolit ovat relaatiosymbolit $E^{\mathfrak{A}}$ ja $E^{\mathfrak{B}}$ ja toinen homomorfiaehto on voimassa:

> Kun $(a, b) \in E^{\mathfrak{A}}$, niin $\{a, b\} = \{1, 3\}$ tai $\{a, b\} = \{2, 3\}$ ja koska $\{h(a), h(b)\} = \{a, b\}$ on myös verkon $\mathfrak{B}$ särmä, pätee $(h(a), h(b)) \in E^{\mathfrak{B}}$.

Kuvaus h ei ole vahva homomorfismi, sillä esimerkiksi $(1, 2) \notin E^{\mathfrak{A}}$ mutta $(h(1), h(2)) = (1, 2) \in E^{\mathfrak{B}}$. Siis kuvaus h ei ole isomorfismi. Nähdään helposti, ettei mallien välisen isomorfisuuden toinen ehto päde: koska verkko $\mathfrak{A}$ sisältää kolme solmua ja verkko $\mathfrak{B}$ sisältää neljä solmua, ei ole olemassa bijektiota $f : Dom(\mathfrak{A}) \to Dom(\mathfrak{B})$.

Esimerkki 2.3. Osoitetaan, että on olemassa epäisomorfiset verkot, joissa on yhtä monta solmua ja yhtä monta särmää.

Tarkastellaan verkkoja $\mathfrak{A} = \langle V, E^{\mathfrak{A}} \rangle$ ja $\mathfrak{B} = \langle W, E^{\mathfrak{B}} \rangle$, missä $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E^{\mathfrak{A}} = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}, W = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $E^{\mathfrak{B}} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$.

Nyt kummassakin verkossa on neljä solmua ja neljä särmää. Olkoon $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ mielivaltainen bijektio ja olkoon $a = f(4)$. Nyt solmusta 4 lähtee verkossa $\mathfrak{A}$ kolme särmää. Solmusta a lähtee kuitenkin verkossa $\mathfrak{B}$ aina kaksi särmää riippumatta siitä, mikä verkon $\mathfrak{B}$ solmu a on. Siis on olemassa sellainen $x \in \{1, 2, 3\}$, että $(4, x) \in E^{\mathfrak{A}}$ mutta $(f(4), f(x)) = (a, f(x)) \notin E^{\mathfrak{B}}$, joten kuvaus f ei ole isomorfismi.

Määritellään tämän alaluvun lopuksi mallin alimalli.

Olkoon malli $\mathfrak{A}$ relationaalinen. Jos $\mathfrak{A} \in Str[\sigma]$ ja $A_0 \subseteq A$, sanotaan että universumin A_0 määräämä *mallin* $\mathfrak{A}$ *alimalli* on σ-malli $\mathfrak{B}$, jonka universumi $B = A_0 \cup \{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in Con(\sigma)\}$. Tässä pätee $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$ jokaisella vakiosymbolilla c ja $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{A}} \cap B^k$ jokaisella k-paikkaisella relaatiosymbolilla P.

Alimallia käytettäessä poistetaan siis käytöstä osa alkuperäisen mallin alkioista, mutta säilytetään kaikki alkuperäisen mallin sisältämät tulkinnat.

2.2 Ensimmäisen kertaluvun logiikan käsitteitä

Tässä alaluvussa tarkastellaan logiikan FO perusteita. Tarkastelu aloitetaan logiikan FO termien ja kaavojen muodostamisesta ja aiheen käsittelyä jatketaan tarkastelemalla termien arvoa mallissa ja kaavojen totuusarvoa mallissa.

Olkoon σ aakkosto. Logiikan FO kaavat muodostuvat seuraavista osista:

- muuttujista $x_1, x_2, x_3, \ldots,$
- konnektiiveista $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow,$
- eksistentiaali- ja universaalikvanttoreista $\exists, \forall,$
- yhtäsuuruusmerkistä $=,$
- suluista),(sekä
- aakkoston σ symboleista.

Määritellään seuraavaksi logiikan FO σ-termit, termien arvo mallissa $\mathfrak{A}$, σ-kaavat sekä termien ja kaavojen vapaat muuttujat.

Määritelmä 2.5. Olkoon σ aakkosto. Logiikan FO σ-termit määritellään seuraavasti:

- Jokainen muuttuja x on termi.
- Jokainen vakiosymboli c on termi.
- Jos $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä ja f on k-paikkainen funktiosymboli, niin $f(t_1, \ldots, t_k)$ on termi.

σ-mallin $\mathfrak{A}$ tulkintafunktio on funktio $\alpha : \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to A$. Termin t arvo mallissa $\mathfrak{A}$ tulkinnalla α määritellään seuraavasti:

- $x_i^{\mathfrak{A},\alpha} = \alpha(x_i)$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$.

- $c^{\mathfrak{A},\alpha} = c^{\mathfrak{A}}$ jokaisella $c \in Con(\sigma)$.
- Jos $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ ja $f \in Fun(\sigma)$, niin $t^{\mathfrak{A},\alpha} = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A},\alpha}, \ldots, t_k^{\mathfrak{A},\alpha})$.

Määritelmä 2.6. Olkoon σ aakkosto. Logiikan FO σ-atomikaavat ja σ-kaavat määritellään seuraavasti:

- Jos t_1 ja t_2 ovat termejä, niin $t_1 = t_2$ on atomikaava.
- Jos $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä, ja P on k-paikkainen relaatiosymboli, niin $P(t_1, \ldots, t_k)$ on atomikaava.
- Jokainen atomikaava on kaava.
- Jos φ_1 ja φ_2 ovat kaavoja, niin $\neg\varphi_1$ ja $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ ovat kaavoja.
- Jos φ on kaava, niin $\exists x\varphi$ on kaava.

Tiettyjen kaavojen sijasta käytetään tavallisesti lyhennysmerkintöjä:

- $\varphi_1 \vee \varphi_2 \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$,
- $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$,
- $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$,
- $\forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$.

Kaavan, joka ei sisällä eksistentiaali- tai universaalikvanttoreita $\exists$ ja $\forall$, sanotaan olevan kvanttoriton.

Määritelmä 2.7. Termin t vapaat muuttujat $\mathrm{Fr}(t)$ määritellään seuraavasti:

- $\mathrm{Fr}(x) = \{x\}$.
- $\mathrm{Fr}(c) = \emptyset$, kun $c \in Con(\sigma)$.
- Jos $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ ja $f \in Fun(\sigma)$, niin $\mathrm{Fr}(t) = \mathrm{Fr}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Fr}(t_k)$.

Kaavan φ vapaat muuttujat $\mathrm{Fr}(\varphi)$ määritellään seuraavasti:

- $\mathrm{Fr}(t = t') = \mathrm{Fr}(t) \cup \mathrm{Fr}(t')$.
- $\mathrm{Fr}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \mathrm{Fr}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Fr}(t_k)$, kun $P \in Rel(\sigma)$.
- Negaatio $\neg$ ei sido muuttujia, joten $\mathrm{Fr}(\varphi) = \mathrm{Fr}(\neg\varphi)$.
- $\mathrm{Fr}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathrm{Fr}(\varphi_1) \cup \mathrm{Fr}(\varphi_2)$. (Sama pätee kaavalle $\varphi_1 \vee \varphi_2$).
- $\mathrm{Fr}(\exists x\varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \backslash \{x\}$. (Sama pätee kaavalle $\forall x\varphi$).

Ne termien ja kaavojen muuttujat jotka eivät ole vapaita, ovat *sidottuja*. Kaavaa sanotaan *lauseeksi*, jos siinä ei ole lainkaan vapaita muuttujia. Merkintää $\varphi(\vec{x})$ käytetään, jos $\vec{x}$ sisältää kaikki kaavan φ vapaat muuttujat.

Tarkastellaan seuraavaksi kaavojen totuutta mallissa $\mathfrak{A}$.

Määritelmä 2.8. Olkoon $\mathfrak{A}$ σ-malli, olkoon α mallin $\mathfrak{A}$ tulkintafunktio ja olkoon φ σ-kaava. Määritellään kaavan φ totuus mallissa $\mathfrak{A}$ tulkinnalla α (merkitään tätä $\mathfrak{A}, \alpha \models \varphi$) seuraavasti:

- $\mathfrak{A}, \alpha \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A},\alpha} = t_2^{\mathfrak{A},\alpha}$.
- $\mathfrak{A}, \alpha \models P(t_1, \ldots, t_k) \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A},\alpha}, \ldots, t_k^{\mathfrak{A},\alpha}) \in P^{\mathfrak{A}}$.
- $\mathfrak{A}, \alpha \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}, \alpha \not\models \varphi$. Tässä $\mathfrak{A}, \alpha \not\models \varphi$ tarkoittaa, että kaava φ ei päde mallissa $\mathfrak{A}$ tulkinnalla α.
- $\mathfrak{A}, \alpha \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Leftrightarrow \mathfrak{A}, \alpha \models \varphi_1$ ja $\mathfrak{A}, \alpha \models \varphi_2$
- $\mathfrak{A}, \alpha \models \exists x_i \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}, \alpha(a/x_i) \models \varphi$ jollakin $a \in A$. Tässä $\alpha(a/x_i)$ on tulkintafunktio, joka saadaan vaihtamalla muuttujan x_i tulkinnaksi a. Siis $\alpha(a/x_i)(x_j) = \alpha(x_j)$ kun $j \neq i$ ja $\alpha(a/x_i)(x_j) = a$ kun $j = i$.

Tulkintafunktiosta α riittää informaatio $a_1 = \alpha(x_1), \ldots, a_n = \alpha(x_n)$, joten voidaan merkitä $\mathfrak{A}, (a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tai lyhyesti $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x})$. Tätä lyhyttä merkintätapaa käytetään myöhemmin tässä työssä.

Tämän alaluvun lopuksi tarkastellaan mallien aakkostojen laajentamista. Olkoon aakkosto σ' eri kuin aakkosto σ. Olkoon $\mathfrak{A}$ σ-malli ja olkoon $\mathfrak{A}'$ σ'-malli siten, että malleilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{A}'$ on sama universumi A. Tällöin merkinnällä $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ tarkoitetaan sellaista universumin A $\sigma \cup \sigma'$-mallia jolle pätee, että kaikki aakkoston σ vakio- ja relaatiosymbolit tulkitaan kuten mallissa $\mathfrak{A}$, ja kaikki aakkoston σ' vakio- ja relaatiosymbolit tulkitaan kuten mallissa $\mathfrak{A}'$.

Tyypillisessä tapauksessa aakkosto σ' sisältää ainoastaan vakiosymboleja. Tällainen mallin aakkoston laajentaminen mahdollistaa siirtymisen edestakaisin kaavojen ja lauseiden välillä, mikä on erityisen hyödyllistä monissa pelejä koskevissa tarkasteluissa. Merkinnällä σ_n tarkoitetaan aakkoston σ laajentamista n:llä uudella vakiosymbolilla $c_1, \ldots, c_n$.

2.3 Kyselyt

Tässä alaluvussa määritellään k-paikkainen kysely ja Boolen kysely. Lisäksi tässä alaluvussa tarkastellaan kyselyjen määriteltävyyttä jossakin logiikassa $\mathfrak{L}$ sekä esitetään lause 2.1, joka kuvaa logiikan FO ilmaisuvoimaa äärellisten mallien tapauksessa.

Määritelmä 2.9. Olkoon aakkosto σ relationaalinen. Määritellään aakkoston σ k-paikkainen kysely ja Boolen kysely seuraavasti.

(a) k-paikkainen σ-kysely (missä $k \geq 0$) on kuvaus q siten, että

- Jokaisella mallilla $\mathfrak{A} \in Str(\sigma)$, $q(\mathfrak{A})$ on universumin A k-paikkainen relaatio, ja
- Kuvaus q säilyy kaikissa isomorfismeissa. Siis jos kuvaus h on mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välinen isomorfismi, niin $q(\mathfrak{B}) = h(q(\mathfrak{A}))$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kuvaus h on isomorfismi $(A, q(\mathfrak{A})) \to (B, q(\mathfrak{B}))$.

(b) Boolen σ-kysely (tai 0-paikkainen kysely), on kuvaus $q : Str(\sigma) \to \{0, 1\}$ joka säilyy isomorfismeissa. Siis jos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, niin $q(\mathfrak{A}) = q(\mathfrak{B})$.

Esitetään seuraavaksi kyselyjä havainnoillistava esimerkki.

Esimerkki 2.4. Olkoon $\mathfrak{A}$ verkko. Nyt

- Verkon transitiivinen sulkeuma on esimerkki kyselystä, jossa $k = 2$. Siis $q(\mathfrak{A}) = \mathrm{TC}(\mathfrak{A}) = \{(a, b) \mid \text{solmusta } a \text{ kulkee polku solmuun } b\ \}$.
- Verkon eristettyjen solmujen joukko on esimerkki kyselystä, jossa $k = 1$. Siis $q(\mathfrak{A}) = \{a \mid a \in Dom(\mathfrak{A}) \wedge \neg\exists b \in Dom(\mathfrak{A}) : (a, b) \in E^{\mathfrak{A}}\}$.

Huomautus. Boolen kysely määrää malliluokan $K_q = \{\mathfrak{A} \in Str(\sigma) \mid q(\mathfrak{A}) = 1\}$. Kääntäen, jos $K \subseteq Str(\sigma)$ on isomorfismin suhteen suljettu malliluokka, niin siihen liittyy Boolen kysely q_K, missä $q_K(\mathfrak{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{A} \in K$.

Määritelmä 2.10. Olkoon kuvaus q n-paikkainen σ-kysely. Kyselyn q sanotaan olevan määriteltävissä logiikassa $\mathfrak{L}$ mikäli on olemassa sellainen logiikan $\mathfrak{L}$ σ-kaava $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, että kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$ pätee

$$q(\mathfrak{A}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x})\}.$$

Jos kysely q on määriteltävissä kaavalla φ, voidaan merkinnän $q(\mathfrak{A})$ sijasta käyttää merkintää $\varphi(\mathfrak{A})$.

Esitetään tämän alaluvun lopuksi lause, joka kuvaa logiikan FO ilmaisuvoimaa äärellisten mallien tapauksessa.

Lause 2.1. *Jokaisella äärellisellä mallilla $\mathfrak{A}$ on olemassa sellainen FO-lause $\varphi_{\mathfrak{A}}$, että kaikilla malleilla $\mathfrak{B}$ pätee $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Todistus. Vrt. [1, s. 13]. Olkoon $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Merkitään $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Olkoon kaava

$$\begin{aligned}\Theta_n = \{\Psi \mid\ & \text{kaava } \Psi \text{ on muotoa } R(x_{i_j}, \ldots, x_{i_k}),\ \text{missä } i_j \in \{1, \ldots, n\} \text{ ja} \\ & x_i = c \text{ tai } x_i = x_j,\ \text{ja kaavan sisältämät muuttujat löytyvät} \\ & \text{joukosta } x_1, \ldots x_n.\}\end{aligned}$$

ja olkoon kaava

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{A}} =&\exists x_1, \dots, x_n(\bigwedge\{\Psi \mid \Psi \in \Theta_n, \mathfrak{A}, \vec{a} \models \Psi_{\mathfrak{A}}(\vec{x})\} \wedge \bigwedge\{\neg\Psi \mid \Psi \in \Theta_n,\\ &\mathfrak{A}, \vec{a} \models \neg\Psi(\vec{x})\} \wedge \forall x_{n+1}(x_{n+1} = x_1 \vee \cdots \vee x_{n+1} = x_n)).\end{aligned}$$

Nyt kaavasta $\varphi_{\mathfrak{A}}$ seuraa, että $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ jos ja vain jos mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat isomorfisia.

3 Ehrenfeucht-Fraïssé-pelit

Malliteoriassa on hyviä työkaluja määriteltävyyskysymysten tutkimiseen, kuten esimerkiksi lähteessä [2, s. 16] esitetyt kompaktisuuslause ja Löwenheim-Skolem-lause. Nämä työkalut eivät kuitenkaan usein toimi äärellisten mallien tapauksessa. Tässä luvussa tarkasteltavat EF-pelit tarjoavat ratkaisun tähän ongelmaan. EF-pelejä voidaan hyödyntää sekä äärellisten että äärettömien mallien tapauksessa (ainakin logiikkaa FO tarkasteltaessa), mutta äärettömien mallien tarkasteluun on olemassa selvästi EF-pelejä tehokkaampiakin välineitä. Äärellisten mallien tapauksessa EF-pelit ovat kuitenkin sovellettavuudeltaan erinomaisia.

Alaluvussa 3.1 esitetään EF-pelin säännöt sekä muutamia EF-peliin liittyviä määritelmiä ja esimerkkejä. Näiden määritelmien ja esimerkkien lisäksi esitetään voittostrategiaa koskeva lause 3.1 ja lause 3.2, jonka mukaan pelaajalla D on voittostrategia r kierroksen EF-pelissä, jossa mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat tietyn ehdon toteuttavia järjestettyjä joukkoja. Alaluvussa 3.2 esitetään lisää EF-peliin liittyviä määritelmiä ja lauseita. Kyseisessä alaluvussa esitetään muun muassa EF-lause (lause 3.3), joka todistetaan myöhemmin alaluvussa 3.4. Alaluvussa 3.3 käsitellään tyyppejä. Tämän luvun päättävässä alaluvussa 3.4 esitetään todistus EF-lauseelle 3.3 sekä vaihtoehtoinen EF-lauseen todistus, jossa käytetään Hintikka-kaavoja. Alaluvussa 3.4 tarkastellaan myös tilannetta, jossa pelaaja D voittaa EF-pelin ilman yhtään tehtyä siirtoa, sekä tarkastellaan back-and-forth-relaatiota.

3.1 EF-pelin kulku

Tämän alaluvun aluksi esitellään EF-pelin säännöt. EF-pelin pelilaudan muodostavat mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$. Pelissä on kaksi pelaajaa, joita nimitetään duplikaattoriksi (merkitään tässä työssä jatkossa kirjaimella D) ja spoileriksi (merkitään kirjaimella S). Pelaajat D ja S pelaavat r kierrosta kestävän EF-pelin, jota merkitään $\mathrm{EF}^r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Pelaajan D tavoite pelissä on osoittaa, että mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat samankaltaisia, eikä niitä siis voi erottaa toisistaan. Pelaaja S taas pyrkii osoittamaan, että mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ eroavat toisistaan.

EF-pelin kullakin kierroksella $1 \leq i \leq r$ pelaajat suorittavat seuraavat siirrot:

- Pelaaja S valitsee toisen malleista $\mathfrak{A}$ tai $\mathfrak{B}$ sekä jonkin tämän mallin alkion. Pelaaja S valitsee siis alkion $a_i \in Dom(\mathfrak{A})$ tai alkion $b_i \in Dom(\mathfrak{B})$.

- Pelaaja D vastaa valitsemalla alkion toisesta mallista siten, että jos pelaaja S valitsi alkion $a_i \in Dom(\mathfrak{A})$, pelaaja D valitsee alkion $b_i \in Dom(\mathfrak{B})$. Vastaavasti jos pelaaja S valitsi alkion $b_i \in Dom(\mathfrak{B})$, valitsee pelaaja D alkion $a_i \in Dom(\mathfrak{A})$.

Seuraavaksi määritellään *osittainen isomorfismi*, minkä jälkeen tarkastellaan EF-pelin voittotilannetta.

Määritelmä 3.1. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja. Olkoon aakkosto σ relationaalinen ja olkoot $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ja $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$. Pari $(\vec{a}, \vec{b})$ määrittää mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välisen osittaisen isomorfismin, jos seuraavat ehdot pätevät:

- Jokaisella $i, j \leq n$ pätee

$$a_i = a_j \text{ jos ja vain jos } b_i = b_j.$$

- Jokaisella aakkoston σ vakiosymbolilla c ja jokaisella $i \leq n$ pätee

$$a_i = c^{\mathfrak{A}} \text{ jos ja vain jos } b_i = c^{\mathfrak{B}}.$$

- Jokaisella aakkoston σ k-paikkaisella relaatiosymbolilla P ja jokaisella jonolla indeksejä $(i_1, \dots, i_k) \in [1, n]$ pätee

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \in P^{\mathfrak{A}} \text{ jos ja vain jos } (b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \in P^{\mathfrak{B}}.$$

Merkitään kaikkien osittaisisomorfismien joukkoa $Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Jos pari $(\vec{a}, \vec{b})$ määrittää mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välisen osittaisen isomorfismin, merkitään $\vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Kun EF-peliä on pelattu n kierrosta, pelaajat ovat tehneet siirrot $(a_1, \dots, a_n)$ ja $(b_1, \dots, b_n)$. Olkoot $c_1, \dots, c_l$ aakkoston σ vakiosymbolit. Tällöin merkitään $\vec{c}^{\,\mathfrak{A}} = (c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_l^{\mathfrak{A}})$ ja vastaavasti $\vec{c}^{\,\mathfrak{B}} = (c_1^{\mathfrak{B}}, \dots, c_l^{\mathfrak{B}})$. Pelaaja D voittaa EF-pelin, jos pelin tuloksena syntyvä $(\vec{a}, \vec{b})$ on voittotilanne pelaajalle D. Tämä pätee jos $((\vec{a}, \vec{c}^{\,\mathfrak{A}}), (\vec{b}, \vec{c}^{\,\mathfrak{B}}))$ on osittainen isomorfismi mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä.

Pelaajan EF-pelissä käyttämä pelistrategia on joukko sääntöjä, jotka sanovat pelaajalle täsmälleen miten tämän tulee pelata riippuen pelissä aiemmin tehdyistä siirroista. Sanotaan, että pelaaja käyttää EF-pelissä tiettyä strategiaa, jos pelaajan jokainen pelissä tekemä siirto noudattaa tämän strategian sääntöjä.

Määritellään seuraavaksi EF-pelin voittostrategia sekä esitetään sitä koskeva lause 3.1. Tämän jälkeen esitetään viisi esimerkkiä voittostrategioista. Näistä esimerkeistä kahdessa kuvaillaan voittostrategioita tapauksessa, jossa tutkittavat mallit ovat yksinkertaisia joukkoja. Kahdessa esimerkissä kuvaillaan voittostrategioita yksinkertaisten verkkojen tapauksessa. Viimeisessä viidennessä esimerkissä kuvaillaan voittostrategiaa lineaarijärjestysten tapauksessa.

Määritelmä 3.2. Sanotaan, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, jos pelaaja D pystyy aina pelissä valitsemaan alkionsa siten, että pelaaja D voittaa pelin r kierroksen jälkeen riippumatta siitä, mitä alkioita pelaaja S pelissä valitsee. Merkitään $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$, jos pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Merkinnällä $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$ tarkoitetaan, että pelaajalla D on voittostrategia, kun EF-peliä jatketaan tilanteesta, jossa pelissä on pelattu tietyt alkiot.

Huomautus. Jos $\mathfrak{A} \simeq_n \mathfrak{B}$ pätee, niin silloin pätee myös $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$ kaikilla $r \leq n$.

Huomautus. Pelaajalla S on voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, jos pelaajalla D ei ole voittostrategiaa kyseisessä pelissä. Esitetään tämä asia seuraavaksi lauseena.

Lause 3.1. *Täsmälleen toisella pelaajista D ja S on voittostrategia pelissä* $\mathrm{EF}^r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$*.*

Tämän lauseen todistusta hahmotellaan esimerkiksi lähteessä [3, s. 53].

Esimerkki 3.1. Sisältäköön aakkosto σ kaksipaikkaiset funktiosymbolit $+, :$ ja $<$. Olkoot $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, :^{\mathbb{Q}}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$ ja $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, +^{\mathbb{Z}}, :^{\mathbb{Z}}, <^{\mathbb{Z}} \rangle$ aakkoston σ malleja. Symbolit $+^{\mathbb{Q}}$ ja $+^{\mathbb{Z}}$ tarkoittavat malleissa tavallisia rationaalilukujen ja kokonaislukujen yhteenlaskuja, $:^{\mathbb{Q}}$ ja $:^{\mathbb{Z}}$ tarkoittavat tavallisia rationaalilukujen ja kokonaislukujen jakolaskuja ja $<^{\mathbb{Q}}$ ja $<^{\mathbb{Z}}$ tarkoittavat tavallisia rationaalilukujen ja kokonaislukujen järjestyksiä. Tarkastellaan peliä $\mathrm{EF}^3(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Z})$.

Pelaaja S voi voittaa pelin $\mathrm{EF}^3(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Z})$ esimerkiksi pelaamalla seuraavasti:

Pelaaja S valitsee pelin ensimmäisellä kierroksella alkion $a_1 = 5 \in \mathbb{Z}$. Pelaaja D vastaa tähän valitsemalla alkion $b_1 \in \mathbb{Q}$.

Pelin toisella kierroksella pelaaja S valitsee alkion $a_2 = 6 \in \mathbb{Z}$. Siis $a_1 < a_2$. Nyt pelaajan D on vastattava tähän valitsemalla sellainen alkio $b_2 \in \mathbb{Q}$, jolle pätee $b_1 < b_2$.

Pelin kolmannella kierroksella pelaaja S valitsee alkion $b_3 = \frac{b_1+b_2}{2} \in \mathbb{Q}$. Nyt koska $b_1 < b_2$, pätee $b_1 < \frac{b_1+b_2}{2} < b_2$. Pelaaja D ei nyt pysty valitsemaan sellaista alkiota $a_3 \in \mathbb{Z}$, jolle pätisi $5 < a_3 < 6$, jolloin pelaaja S voittaa pelin $\mathrm{EF}^3(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Z})$.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan verkkoja $\mathfrak{G} = \langle V, E^{\mathfrak{G}} \rangle$ ja $\mathfrak{H} = \langle W, E^{\mathfrak{H}} \rangle$, missä $V = \{a, b, c\}, E^{\mathfrak{G}} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}, W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $E^{\mathfrak{H}} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{1, 5\}\}$.

Osoitetaan, että pelaajalla S on voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^3(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$.

Tarkastellaan peliä $\mathrm{EF}^3(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Pelaaja S voi valita pelin kierroksilla esimerkiksi verkon $\mathfrak{G}$ solmut a, b ja c. Tällöin valitut solmut ja niiden välillä olevat särmät muodostavat piirin. Pelaaja D ei voi valita solmuja verkosta $\mathfrak{H}$ siten, että niiden väliset särmät muodostaisivat piirin. Siis pelaajalla S on voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^3(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$.

Esimerkki 3.3. Tarkastellaan verkkoja $\mathfrak{G} = \langle V, E^{\mathfrak{G}} \rangle$ ja $\mathfrak{H} = \langle W, E^{\mathfrak{H}} \rangle$, missä $V = \{a, b, c, d\}, E^{\mathfrak{G}} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}, W = \{1, 2, 3\}$ ja $E^{\mathfrak{H}} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

Osoitetaan, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Kuvaillaan pelaajan D voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Pelin ensimmäisen kierroksen mahdolliset siirrot ovat:

- Jos pelaaja S valitsee alkion c, vastaa pelaaja D alkiolla 2.
- Jos pelaaja S valitsee alkion 2, vastaa pelaaja D alkiolla c.
- Jos pelaaja S valitsee jonkin alkioista a,b tai d, vastaa pelaaja D alkiolla 1.
- Jos pelaaja S valitsee toisen alkioista 1 tai 3, vastaa pelaaja D alkiolla a.

Pelin toisella kierroksella pelaaja D voi aina vastata pelaajan S siirtoon siten, että jos valitut verkon $\mathfrak{G}$ alkiot muodostavat särmän, niin myös valitut verkon $\mathfrak{H}$ alkiot muodostavat särmän. Vastaavasti, jos valitut verkon $\mathfrak{G}$ alkiot eivät muodosta särmää, voi pelaaja D tehdä toisen kierroksen valintansa siten, että valitut verkon $\mathfrak{H}$ alkiot eivät muodosta särmää. Siis pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$.

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan tyhjän aakkoston σ malleja $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$. Olkoot $|A|, |B| \geq n$. Osoitetaan, että $\mathfrak{A} \simeq_n \mathfrak{B}$.

Kuvaillaan pelaajan D voittostrategiaa. Oletetaan, että EF-peliä on pelattu i kierrosta ja näillä kierroksilla on pelattu alkiot $(a_1, \ldots, a_i) \in A$ ja $(b_1, \ldots, b_i) \in B$. Oletetaan, että pelaaja S valitsee pelin kierroksella $i + 1$ alkion $a_{i+1} \in A$. Jos $a_{i+1} = a_j$ pätee ehdolla $i \geq j$, vastaa pelaaja D valitsemalla alkion $b_{i+1} = b_j \in B$. Muutoin pelaaja D vastaa pelaajan S siirtoon valitsemalla jonkin alkion $b_{j+1} \in B - \{b_1, \ldots, b_i\}$ (tällainen alkio on olemassa, koska oletuksen mukaan $|B| \geq n$).

Näin pelaamalla pelaaja D voittaa pelin, koska riippumatta siitä, minkä alkion pelaaja S valitsee pelin kullakin kierroksella, pystyy pelaaja D aina vastaamaan valitsemalla pelattavan alkion vastaavasti kuin pelaaja S valitsi. Koska $|A|, |B| \geq n$, alkioita riittää valittaviksi kummassakin mallissa n kierroksen ajaksi.

Esimerkki 3.5. Olkoon aakkosto $\sigma = \{<\}$. Oletetaan, että L_1 ja L_2 ovat järjestettyjä joukkoja siten, että $|L_1|, |L_2| \geq n$. Oletetaan myös, että L_1 ja L_2 ovat eri pituiset. Tutkitaan päteekö $L_1 \simeq_n L_2$.

Nähdään helposti, että $L_1 \simeq_n L_2$ ei päde yleisesti edes tilanteessa $n = 2$. Oletetaan, että L_1 sisältää kolme alkiota $\{1, 2, 3\}$ ja L_2 sisältää kaksi alkiota $\{1, 2\}$. Järjestys on lukujen tavallinen järjestys tarkasteltavissa järjestetyissä joukoissa L_1 ja L_2. Pelaaja S valitsee ensimmäiseksi alkion $2 \in L_1$. Pelaajan D on vastattava valitsemalla toinen alkioista 1 tai $2 \in L_2$. Oletetaan, että pelaaja D vastaa valitsemalla alkion $1 \in L_2$. Tällöin pelaaja S pelaa seuraavaksi alkion $1 \in L_1$, mikä johtaa pelaajan D häviöön. Pelaajan D pitäisi nimittäin valita lineaarijärjestyksen L_2 alkio, joka on pienempi kuin 1, mikä ei kuitenkaan ole mahdollista. Jos pelaaja D valitsee ensimmäisellä kierroksella alkion $2 \in L_2$, valitsee pelaaja S alkion $3 \in L_1$ ja näin ollen pelaaja D häviää taas. Siis $L_1 \simeq_2 L_2$ ei päde.

Väite $L_1 \simeq_n L_2$ ei päde, jos järjestettyjen joukkojen L_1 ja L_2 pituudet eivät ole riittävän suuria. Pelaajalla D on voittostrategia silloin, kun järjetetyt joukot L_1 ja L_2 sisältävät paljon enemmän alkioita kuin pelissä on kierroksia. Tämän osoittaa seuraava lause. Tässä työssä esitetään lauseelle yksi todistus, toinen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [2, s. 30-31].

Lause 3.2. *Olkoon $r > 0$ ja olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ järjestettyjä joukkoja siten, että $|A|, |B| \geq 2^r$. Tällöin $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$.*

Todistus. Vrt. [2, s. 29-31]. Laajennetaan aakkostoa kahdella uudella vakiosymbolilla, *min* ja *max*, jotka tarkoittavat järjestettyjen joukkojen pienintä ja suurinta alkiota. Osoitetaan, että $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$ pätee tässä laajennetussa aakkostossa.

Olkoon mallin $\mathfrak{A}$ universumi joukko $\{1, \ldots, n\}$ ja olkoon mallin $\mathfrak{B}$ universumi joukko $\{1, \ldots, m\}$. Järjestys on malleissa $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ lukujen tavallinen järjestys. Oletetaan, että $n, m \geq 2^r + 1$. Universumin alkioiden x ja y välinen etäisyys määritellään kaavalla $d(x, y) = |x - y|$. Osoitetaan, että pelaaja D voi pelata siten, että i pelatun kierroksen jälkeen pätee seuraava tilanne.

(∗) Olkoot $\vec{a} = (a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_i)$ ja $\vec{b} = (b_{-1}, b_0, b_1, \ldots, b_i)$, missä $a_1, \ldots, a_i$ ja $b_1, \ldots, b_i$ ovat pelin kierroksilla $1, \ldots, i$ pelatut alkiot ja $a_{-1} = min^A$, $b_{-1} = min^B, a_0 = max^A, b_0 = max^B$. Tällöin voidaan olettaa olevan voimassa seuraava tilanne kaikilla $-1 \leq j, l \leq i$:

1. Jos $d(a_j, a_l) < 2^{r-i}$, niin $d(b_j, b_l) = d(a_j, a_l)$.
2. Jos $d(a_j, a_l) \geq 2^{r-i}$, niin $d(b_j, b_l) \geq 2^{r-i}$.
3. $a_j \leq a_l \Leftrightarrow b_j \leq b_l$.

Todistetaan induktiolla i:n suhteen, että pelaaja D voi pelata pelin jokaisella kierroksella i siten, että $(*)$ pätee. Tapaus $i = 0$ on selvä, sillä oletuksesta $|A|, |B| \geq 2^r$ seuraa $d(a_{-1}, a_0) \geq 2^r$ ja $d(b_{-1}, b_0) \geq 2^r$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että pelaaja D on pelannut pelissä siten, että $(*)$ pätee i:llä. Osoitetaan, että pelaaja D voi vastata pelaajan S seuraavaan siirtoon niin, että $(*)$ pätee $i+1$:llä. Oletetaan, että pelaaja S valitsee kierroksella $i+1$ alkion mallista $\mathfrak{A}$ (tapaus alkion valinta mallista $\mathfrak{B}$ vastaavasti). Jos pelaaja S valitsee sellaisen alkion $a_j \in A$, jolle $j \leq i$, vastaa pelaaja D valitsemalla alkion b_j ja $(*)$ pätee triviaalisti. Muutoin pelaajan S valitsema alkio sijaitsee jollakin välillä, joka olkoon sellainen, ettei siltä ole valittu pelissä aiemmin yhtään alkiota. Olkoon tälle pelaajan S valitsemalle alkiolle $a_j < a_{i+1} < a_l$. Nyt on kaksi mahdollista tapausta:

- $d(a_j, a_l) < 2^{r-i}$. Tällöin $d(b_j, b_l) = d(a_j, a_l)$ ja välit $[a_j, a_l]$ ja $[b_j, b_l]$ ovat yhtä pitkät. Siksi on olemassa sellainen alkio b_{i+1}, että $d(a_j, a_{i+1}) = d(b_j, b_{i+1})$ ja $d(a_{i+1}, a_l) = d(b_{i+1}, b_l)$. Väite pätee siis $i+1$:llä.

- $d(a_j, a_l) \geq 2^{r-i}$. Tässä tapauksessa on $d(b_j, b_l) \geq 2^{r-i}$. Nyt on kolme mahdollista tapausta:

  1. $d(a_j, a_{i+1}) < 2^{r-(i+1)}$. Tällöin $d(a_{i+1}, a_l) \geq 2^{r-(i+1)}$ ja alkio b_{i+1} voidaan valita siten, että $d(b_j, b_{i+1}) = d(a_j, a_{i+1})$ ja $d(b_{i+1}, b_l) \geq 2^{r-(i+1)}$.
  2. $d(a_{i+1}, a_l) < 2^{r-(i+1)}$. Tämä tapaus on samankaltainen edellisen kanssa.
  3. $d(a_j, a_{i+1}) \geq 2^{r-(i+1)}$ ja $d(a_{i+1}, a_l) \geq 2^{r-(i+1)}$. Koska $d(b_j, b_l) \geq 2^{r-i}$, voidaan alkio b_{i+1} valita välin $[b_j, b_l]$ keskeltä ja siten varmistaa, että $d(b_j, b_{i+1}) \geq 2^{r-(i+1)}$ ja $d(b_{i+1}, b_l) \geq 2^{r-(i+1)}$.

  Siis kaikissa näissä tapauksissa $(*)$ pätee $i+1$:llä.

Näin todistettiin, että pelaaja D voi voittaa r kierroksen EF-pelin mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä ja siten $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$.

3.2 EF-peliin liittyviä määritelmiä ja lauseita

Tässä alaluvussa esitetään EF-peliin liittyviä määritelmiä ja lauseita. Ensimmäiseksi esitetään EF-pelin tarkastelujen kannalta tärkeä kaavojen kvanttoriasteen määritelmä. Tämän jälkeen esitetään EF-lause sekä sille kolme seurauslausetta.

Määritelmä 3.3. Logiikan FO kaavan φ kvanttoriaste $qr(\varphi)$ määritellään seuraavasti:

- Jos φ on atomikaava, niin $qr(\varphi) = 0$.

- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$.
- $qr(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = qr(\varphi_1 \vee \varphi_2) = max\{qr(\varphi_1), qr(\varphi_2)\}$.
- $qr(\exists x\varphi) = qr(\forall x\varphi) = qr(\varphi) + 1$.

Merkintä FO$[k]$ tarkoittaa kaikkien niiden FO-kaavojen φ joukkoa, joille pätee $qr(\varphi) \leq k$.

Kaavan kvanttoriaste ei yleisesti ottaen ole sama kuin siinä käytettyjen kvanttorien lukumäärä. Voidaan esimerkiksi määritellä joukko kaavoja induktiolla seuraavasti: $d_0(x,y) \equiv E(x,y)$, ja $d_k(x,y) \equiv \exists z(d_{k-1}(x,z) \wedge d_{k-1}(z,y))$. Tällöin $qr(d_k) = k$, mutta kaavassa d_k käytettyjen kvanttorien kokonaismäärä on $2^k - 1$. Kaavoille, joissa kaikki kvanttorit ovat kaavan edessä, kvanttoriaste on kuitenkin sama kuin kaavassa käytettyjen kvanttorien lukumäärä.

Olkoon S joukko aakkoston σ FO-lauseita. Kaksi σ-mallia $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ toteuttavat samat joukon S lauseet, jos kaikille joukon S lauseille Φ pätee $\mathfrak{A} \models \Phi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \Phi$.

Lause 3.3 (EF-lause)**.** *Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ relationaalisen aakkoston malleja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

1. *Mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ toteuttavat samat* FO$[r]$*-kaavat.*
2. $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$.

EF-lause on hyödyllinen määrittelemättömyystuloksia todistettaessa. EF-lause todistetaan seuraavassa alaluvussa 3.4.

Seuraavaksi esitettävää seurauslausetta käytetään määrittelemättömyystulosten todistamisessa.

Seurauslause 3.4. *Oletetaan, että aakkosto σ on äärellinen. Äärellisten σ-mallien ominaisuus P ei ole määriteltävissä logiikassa* FO*, jos ja vain jos jokaisella $r \in \mathbb{N}$ on olemassa kaksi äärellistä äärellisen aakkoston omaavaa σ-mallia $\mathfrak{A}_r$ ja $\mathfrak{B}_r$ siten, että pätee:*

$$\begin{aligned}&\textit{jos } \mathfrak{A}_r \simeq_r \mathfrak{B}_r \textit{ ja mallilla } \mathfrak{A}_r \textit{ on ominaisuus } P,\\ &\textit{niin mallilla } \mathfrak{B}_r \textit{ ei ole ominaisuutta } P.\end{aligned}$$

Todistetaan tämä seurauslause seuraavaksi toiseen suuntaan. Toisen suunnan todistus esitetään myöhemmin.

Todistus. Vrt. [2, s. 33]. Tehdään vastaoletus, että ominaisuus P voidaan määritellä lauseella Φ. Olkoon $r = qr(\Phi)$ ja olkoot $\mathfrak{A}_r$ ja $\mathfrak{B}_r$ kaksi äärellistä σ-mallia, joille pätee $\mathfrak{A}_r \simeq_r \mathfrak{B}_r$. Siis jos mallilla $\mathfrak{A}_r$ on ominaisuus P, niin myös mallilla $\mathfrak{B}_r$ on ominaisuus P, mikä on ristiriidassa oletusten kanssa. Siis vastaoletus on väärin ja ominaisuus P ei ole määriteltävissä logiikassa FO.

Huomautus. Jos aakkosto σ on ääretön, pätee implikaatio yllä olevassa seurauslauseessa.

Huomautus. Yllä olevan seurauslauseen ominaisuuksia voidaan ajatella Boolen kyselyinä q. Boolen kysely $q(\mathfrak{A}) = 1$, jos ominaisuus pätee mallille $\mathfrak{A}$, ja vastaavasti $q(\mathfrak{A}) = 0$ jos mallilla $\mathfrak{A}$ ei ole kyseistä ominaisuutta.

EF-pelit ovat täydellisiä kuvaamaan FO-määriteltävyyttä, kun aakkosto on äärellinen. Pelien käyttö helpottaa usein määriteltävyyskysymysten tutkimista. Ilman pelejäkin voidaan esimerkiksi todistaa, että tyhjän aakkoston σ tapauksessa *parillisuus* ei ole FO-määriteltävä (ks. [2, s. 25]). Käyttämällä kyseistä menetelmää ei kuitenkaan voida osoittaa, että *parillisuus* ei ole FO-määriteltävä äärellisten lineaarijärjestysten tapauksessa. Muita menetelmiä käyttäen tämän osoittaminen on paljon vaikeampaa kuin EF-pelejä käyttämällä. Seuraavassa seurauslauseessa nähdään, kuinka helposti kyseinen väite voidaan todistaa EF-pelien avulla.

Seurauslause 3.5. Parillisuus *ei ole* FO-*määriteltävä äärellisten lineaarijärjestysten tapauksessa.*

Todistus. Vrt. [2, s. 33]. Olkoon $\mathfrak{A}_r$ lineaarijärjestys, jossa on 2^r alkiota ja olkoon $\mathfrak{B}_r$ lineaarijärjestys, jossa on $2^r + 1$ alkiota. Nyt lauseen 3.2 mukaan $\mathfrak{A}_r \simeq_r \mathfrak{B}_r$ ja väite seuraa suoraan seurauslauseesta 3.4.

3.3 Tyypit

Tässä alaluvussa käsitellään tarkemmin logiikkaa FO$[r]$, ja tutustutaan tyyppien käsitteeseen.

Ensimmäiseksi tässä alaluvussa tarkastellaan logiikkaa FO$[0]$. Se koostuu atomikaavojen Boolen kombinaatioista. FO$[0]$:n lauseet ovat kvanttorittomia. Relaationaalisen aakkoston σ tapauksessa tällaiset lauseet ovat Boolen kombinaatioita muotoa $c = c'$ ja muotoa $R(c_1, \ldots, c_r)$ olevista kaavoista, joissa $c, c', c_1, \ldots, c_r$ ovat aakkoston σ vakiosymboleja.

Seuraavaksi oletetaan, että φ on FO$[r+1]$-kaava. Jos $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ tai $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, niin sekä φ_1 että φ_2 ovat FO$[r+1]$-kaavoja. Jos $\varphi = \neg\varphi_1$, niin $\varphi_1 \in$ FO$[r+1]$. Kuitenkin jos $\varphi = \exists x\psi$ tai $\varphi = \forall x\psi$, niin ψ on FO$[r]$-kaava. Siten jokainen FO$[r+1]$:n kaava on ekvivalentti muotoa $\exists x\psi$ (missä $\psi \in$ FO$[r]$) olevien kaavojen Boolen kombinaation kanssa. Tätä käyttäen voidaan todistaa seuraava apulause.

Apulause 3.6. *Olkoon aakkosto σ on äärellinen. Tällöin* FO$[r]$ *sisältää loogista ekvivalenssia vaille vain äärellisen määrän aakkoston σ kaavoja, joissa on m vapaata muuttujaa $x_1, \ldots, x_m$.*

Todistus. Vrt. [2, s. 34]. Todistetaan väite induktiolla r:n suhteen. Perustapaus FO$[0]$ sisältää vain äärellisen määrän sellaisia atomikaavoja, joiden vapaat muuttujat ovat joukossa $x_1, \ldots, x_m$. FO$[0]$ sisältää siten vain äärellisen määrän näiden kaavojen boolen kombinaatioita, joista jokainen on ekvivalentti sellaisen disjunktiivisen normaalimuodon kanssa, joka ei sisällä toistoa.

Tehdään induktio-oletus, että väite pätee FO$[r]$:n tapauksessa. Osoitetaan, että väite pätee FO$[r+1]$:n tapauksessa.

Muistetaan, että jokainen FO$[r+1]$:n kaava $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ on boolen kombinaatio kaavoista $\exists x_{m+1}\psi(x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$, joissa $\psi \in FO[r]$. Nyt oletuksen mukaan $m+1$ vapaata muuttujaa $(x_1, \dots, x_{m+1})$ sisältävien FO$[r]$-kaavojen määrä on loogista ekvivalenssia vaille äärellinen ja siten väitteen voidaan päätellä pätevän myös m vapaata muuttujaa sisältävien FO$[r+1]$-kaavojen tapauksessa.

Määritellään seuraavaksi tyypit.

Määritelmä 3.4. Olkoon aakkosto σ relationaalinen. Olkoon $\mathfrak{A}$ σ-malli ja olkoon $\vec{a} \in A^m$. Tällöin mallin $\mathfrak{A}$ ja jonon $\vec{a}$ r-tyyppi määritellään seuraavasti:

$$tp_r(\mathfrak{A}, \vec{a}) = \{\varphi \in FO[r] \mid \mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x})\}.$$

Mikä tahansa joukko muotoa $tp_r(\mathfrak{A}, \vec{a})$ olevia kaavoja on r-tyyppi.

Erityistapauksessa $m = 0$ $tp_r(\mathfrak{A})$ määritellään joukoksi FO$[r]$-lauseita, jotka pätevät mallissa $\mathfrak{A}$. Jokaisella kaavalla $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in$ FO$[r]$ pätee $\varphi \in S$ tai $\neg\varphi \in S$, jos S on r-tyyppi.

Nyt näyttäisi siltä, että r-tyypit ovat luonnostaan äärettömiä. Sitä ne ovatkin, mutta r-tyyppejä tarkasteltaessa riittää, että mukaan otetaan äärellinen määrä kaavoja. Tiedetään, että FO$[r]$ sisältää ekvivalenssia vaille äärellisen määrän kaavoja, joissa on m vapaata muuttujaa. Olkoot $\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_M(\vec{x})$ kaikki sellaiset FO$[r]$:n epäekvivalentit kaavat, joissa esiintyy vapaat muuttujat $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Jokaisen r-tyypin määritellään vastaavan tiettyä joukon $\{1, \dots, M\}$ sellaista osajoukkoa K, johon indeksit i kuuluvat. Yksinkertaisella kaavalla

$$\alpha_K(\vec{x}) \equiv \bigwedge_{i \in K} \varphi_i$$

voidaan testata, että jono $\vec{x}$ toteuttaa kaikki sellaiset kaavat φ_i, joille pätee $i \in K$ ja että jono $\vec{x}$ ei toteuta sellaisia kaavoja φ_j, joille pätee $j \notin K$.

Huomataan, että kaava $\alpha_K(\vec{x})$ on myös FO$[r]$-kaava, koska siinä ei esiinny yhtään uutta kvanttoria.

Kaikki kaavat α_K ovat toisensa poissulkevia. Siis indeksijoukoille $K \neq K'$ pätee: jos $\mathfrak{A} \models \alpha_K(\vec{a})$ niin $\mathfrak{A} \models \neg\alpha'_K(\vec{a})$. Jokainen FO$[r]$-kaava saadaan joidenkin kaavojen α_K disjunktiona. Seuraava lause toimii yhteenvetona yllä esitetyistä asioista.

Lause 3.7. *Vrt. [2, s. 35]. a) Olkoon relationaalinen aakkosto σ äärellinen. Tällöin sen erilaisten r-tyyppien määrä on äärellinen.*

b) Olkoon $T_1, \dots, T_s$ listaus kaikista r-tyypeistä. Tällöin on olemassa sellaiset FO$[r]$*-kaavat $\alpha_1(\vec{x}), \dots, \alpha_s(\vec{x})$, että seuraavat ehdot pätevät:*

- *jokaisella mallilla* $\mathfrak{A}$ *ja jonolla* $\vec{a} \in A^m$ *pätee* $\mathfrak{A} \models \alpha_i(\vec{a})$ *jos ja vain jos* $tp_r(\mathfrak{A}, \vec{a}) = T_i$*, ja*

- *jokainen sellainen* FO$[r]$*-kaava* $\varphi(\vec{x})$*, joka sisältää* m *vapaata muuttujaa, vastaa joidenkin kaavojen* α_i *disjunktiota.*

r-tyypit yhdistetään yleensä niitä määrittäviin kaavoihin α_i. On tärkeää muistaa, että näillä kaavoilla on samat kvanttoriasteet r.

EF-lauseesta ja lauseesta 3.7 saamme seuraavan seurauslauseen.

Seurauslause 3.8. *Oletetaan, että aakkosto* σ *on äärellinen. Ekvivalenssirelaatiolla* $\simeq_r$ *on äärellinen määrä ekvivalenssiluokkia.*

Seuraavaksi osoitetaan, että pelit ovat täydellisiä logiikan FO ilmaisuvoiman kuvailussa.

Seurauslause 3.9. *Ominaisuus* P *on ilmaistavissa logiikassa* FO *jos ja vain jos on olemassa* r *siten, että kaikilla malleilla* $\mathfrak{A}$ *ja* $\mathfrak{B}$ *pätee:*

$$\textit{jos } \mathfrak{A} \in P \textit{ ja } \mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}, \textit{ niin } \mathfrak{B} \in P.$$

Todistus. Vrt. [2, s. 35]. Jos ominaisuus P voidaan ilmaista logiikan FO lauseella Φ, olkoon $r = qr(\Phi)$. Jos $\mathfrak{A} \in P$, niin $\mathfrak{A} \models \Phi$. Siis mallille $\mathfrak{B}$, jolle pätee $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$, on $\mathfrak{B} \models \Phi$ ja edelleen $\mathfrak{B} \in P$.

Käänteisesti, jos ehdoista $\mathfrak{A} \in P$ ja $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$ seuraa $\mathfrak{B} \in P$, niin mille tahansa kahdelle mallille, joilla on sama tyyppi, pätee toinen seuraavista tilanteista. Joko molemmilla malleilla on ominaisuus P tai kummallakaan mallilla ei ole ominaisuutta P. Siten P on tyyppien unioni ja siis määriteltävissä joidenkin kaavojen α_i disjunktiona. Kyseiset kaavat α_i määritellään tässä luvussa aiemmin esitetyllä kaavalla $\alpha_K(\vec{x}) \equiv \bigwedge_{i \in K} \varphi_i \wedge \bigwedge_{j \notin K} \neg\varphi_j$.

Ominaisuus P ei siis ole ilmaistavissa logiikassa FO, jos ja vain jos jokaisella r:llä löytyy kaksi sellaista mallia $\mathfrak{A}_r$ ja $\mathfrak{B}_r$, joille pätee $\mathfrak{A}_r \simeq_r \mathfrak{B}_r$, mutta mallilla $\mathfrak{A}_r$ on ominaisuus P ja mallilla $\mathfrak{B}_r$ ei ole ominaisuutta P.

Esitetään vielä tämän alaluvun lopuksi seurauslause m-paikkaisten kyselyjen q määriteltävyydestä logiikassa FO.

Seurauslause 3.10. σ*-mallien* m*-paikkainen kysely* q *ei ole määriteltävissä logiikassa* FO*, jos ja vain jos jokaisella* $r \in \mathbb{N}$ *on olemassa kaksi äärellistä* σ*-mallia* $\mathfrak{A}_r$ *ja* $\mathfrak{B}_r$ *ja kaksi* m*-jonoa* $\vec{a} \in A^m$ *ja* $\vec{b} \in B^m$ *siten, että seuraavat ehdot pätevät:*

- $(\mathfrak{A}_r, \vec{a}) \simeq_r (\mathfrak{B}_r, \vec{b})$*, ja*

- $\vec{a} \in q(\mathfrak{A}_r)$ *ja* $\vec{b} \notin q(\mathfrak{B}_r)$*.*

3.4 EF-lauseen todistus

Tässä alaluvussa esitetään todistus EF-lauseelle 3.3 sekä vaihtoehtoinen EF-lauseen todistus, jossa käytetään Hintikka-kaavoja. Ennen kyseistä todistusta esitetään Hintikka-kaavojen määritelmä. Alaluvun aluksi tarkastellaan ekvivalenssirelaatiota $\simeq_0$ minkä jälkeen käsitellään tärkeää back-and-forth-relaatiota.

Merkinnällä $\simeq_0$ tarkoitetaan siis tilannetta, jolloin pelaaja D voittaa EF-pelin ilman yhtään tehtyä siirtoa. Näin käy, kun $(\emptyset, \emptyset)$ on osittainen isomorfismi mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä, mikä toteutuu seuraavien ehtojen pätiessä:

- Vakiosymboleille $\vec{c}$ pätee $c_i^{\mathfrak{A}} = c_j^{\mathfrak{A}}$ täsmälleen silloin, kun $c_i^{\mathfrak{B}} = c_j^{\mathfrak{B}}$ kaikilla i, j, sekä
- kaikilla relaatiosymboleilla P pätee $(c_{i_1}^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_{i_r}^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{A}}$ täsmälleen silloin, kun $(c_{i_1}^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_{i_r}^{\mathfrak{B}}) \in P^{\mathfrak{B}}$.

Toisin sanoen $(\emptyset, \emptyset)$ on osittainen isomorfismi mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä täsmälleen silloin kun mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ toteuttavat samat atomikaavat.

Käytetään nyt tätä mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välisen back-and-forth-relaation kuvaamiseen. Esitetään tämä seuraavassa apulauseessa.

Apulause 3.11. *Saman aakkoston mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ väliselle relaatiolle $\simeq_r$ pätevät seuraavat väitteet:*

1. *$\mathfrak{A} \simeq_0 \mathfrak{B}$ jos ja vain jos $(\emptyset, \emptyset)$ on osittainen isomorfismi mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä.*
2. *$\mathfrak{A} \simeq_{r+1} \mathfrak{B}$ jos ja vain jos seuraavat ehdot pätevät:*

$$\begin{aligned} &\text{forth} : \forall a \in A \; \exists b \in B : (\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b) \; ja \\ &\text{back} : \forall b \in B \; \exists a \in A : (\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b). \end{aligned}$$

Todistus. (1) seuraa suoraan EF-pelin määritelmästä.

(2) Oletetaan ensin, että $\mathfrak{A} \simeq_{r+1} \mathfrak{B}$. Olkoon $a \in A$. Tarkastellaan peliä $\mathrm{EF}^{r+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, missä pelaajan S ensimmäinen siirto on alkio $x_1 = a$. Olkoon pelaajan D voittostrategian mukainen vastaus tähän alkio $b \in B$ $(b = y_1)$. Pelaaja D voi nyt jatkaa peliä vielä r siirron verran samalla voittostrategialla. Tämä strategia on siis pelaajan D voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^r(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, b)$. Siis $(\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b)$. Koska tämä pätee jokaisella $a \in A$, pätee $\forall a \in A \; \exists b \in B : (\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b)$. Samalla tavalla nähdään, että $\forall b \in B \; \exists a \in A : (\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b)$.

Oletetaan sitten, että ehdot forth ja back pätevät. Tarkastellaan peliä $\mathrm{EF}^{r+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Olkoon $a_1 \in A$ pelaajan S ensimmäinen siirto. Nyt apulauseen kohdan (2) perusteella on olemassa sellainen $b_1 \in B$, että $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_r (\mathfrak{B}, b_1)$. Nyt pelaaja D voi käyttää tätä strategiaa pelin viimeisissä r siirrossa. Tämä takaa, että pelin tuloksena syntyy osittainen isomorfismi. Siis pelaaja D voittaa varmasti pelin $\mathrm{EF}^{r+1}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Jos pelaaja S aloittaakin pelin alkiolla $b_1 \in B$, nähdään apulauseen kohdan (2) toisesta ehdosta, että pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EF}^{r+1}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.

Seuraavaksi esitetään ja todistetaan jo aiemmin alaluvussa 3.2 esitetty EF-lause.

Lause 3.12. *Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ relationaalisen aakkoston σ malleja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

1. *Mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ toteuttavat samat* $\mathrm{FO}[r]$*-kaavat.*

2. $\mathfrak{A} \simeq_r \mathfrak{B}$.

Todistus. Vrt. [2, s. 36].Todistetaan väite induktiolla r:n suhteen. Tapaus $r = 0$ on selvä. Todistetaan ensin kohtien (1) ja (2) yhtäpitävyys. Oletetaan, että mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ toteuttavat samat kvanttoriasteeltaan $r+1$ olevat lauseet. Osoitetaan, että $\mathfrak{A} \simeq_{r+1} \mathfrak{B}$. Osoitetaan, että $\forall a \in A\ \exists b \in B : (\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b)$. Kohdan $\forall b \in B\ \exists a \in A : (\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b)$ todistaminen etenee täsmälleen samalla tavalla. Valitaan alkio $a \in A$ ja määrittäköön α_i sen r-tyypin. Tällöin $\mathfrak{A} \models \exists x \alpha_i(x)$. Koska $qr(\alpha_i) = r$, se on kvanttoriasteeltaan $r+1$ oleva lause ja siten $\mathfrak{B} \models \exists x \alpha_i(x)$. Olkoon $tp_r(\mathfrak{A}, a) = tp_r(\mathfrak{B}, b)$. Siis jokaiselle aakkoston σ sellaiselle lauseelle Ψ, jolle pätee $qr(\Psi) = r$, on $(\mathfrak{A}, a) \models \Psi$ jos ja vain jos $(\mathfrak{B}, b) \models \Psi$. Siten $(\mathfrak{A}, a)$ ja $(\mathfrak{B}, b)$ toteuttavat samat kvanttoriasteeltaan r olevat lauseet. Nyt induktio-oletuksen mukaan $(\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b)$.

Todistetaan vielä (2) $\Rightarrow$ (1). Jokainen $\mathrm{FO}[r+1]$-lause on Boolen kombinaatio sellaisista lauseista $\exists x \varphi(x)$, missä $\varphi \in \mathrm{FO}[r]$. Siksi riittää osoittaa, että väite pätee muotoa $\exists x \varphi(x)$ oleville lauseille. Oletetaan, että $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x)$. Siis $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ jollakin $a \in A$. Oletetaan apulauseen 3.11 perusteella, että $\forall a \in A\ \exists b \in B : (\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b)$. Siis löydetään sellainen alkio $b \in B$, että $(\mathfrak{A}, a) \simeq_r (\mathfrak{B}, b)$ joten mallit $(\mathfrak{A}, a)$ ja $(\mathfrak{B}, b)$ toteuttavat samat $\mathrm{FO}[r]$-lauseet oletuksen mukaan. Siten $\mathfrak{B} \models \varphi(b)$ ja edelleen $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$. Päinvastainen tilanne, jossa oletuksesta $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$ seuraa $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x)$, on identtinen. Näin ollen väite on todistettu.

Määritellään seuraavaksi Hintikka-kaavat sekä esitetään esimerkki niiden muodostamisesta.

Määritelmä 3.5. Olkoon $\mathfrak{A}$ relationaalisen aakkoston σ malli ja olkoon $\vec{a} \in A^m$. Määritellään Hintikka-kaavat $\varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$ rekursiolla seuraavasti:

- $\varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) = \bigwedge\{\Theta(\vec{x}) \mid \Theta$ on σ-atomikaava tai σ-atomikaavan negaatio ja $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \Theta(\vec{x})\}$

- $\varphi^{r+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) = \bigwedge_{a \in A} \exists x \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x) \land \forall x \bigvee_{a \in A} \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x)$

Huomautus. Kaava $\varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$ kuvailee voittostrategian pelissä $\mathrm{EF}^r(\mathfrak{A},\vec{a},\cdot,\cdot)$. Tässä merkinnän $\mathrm{EF}^r(\mathfrak{A},\vec{a},\cdot,\cdot)$ kaksi pistettä viittaavat johonkin nimeämättömään malliin.

Esimerkki 3.6. Olkoon aakkosto $\sigma = \{P\}$, missä $\#(P) = 1$. Olkoon $\mathfrak{A} = \langle A, P^{\mathfrak{A}}\rangle$ malli, jossa $A = \{a, b\}$ ja $P^{\mathfrak{A}} = \{a\}$. Muodostetaan Hintikka-kaavat $\varphi^0_{\mathfrak{A},a,b}(x,y)$, $\varphi^0_{\mathfrak{A},a,a}(x,y)$ ja $\varphi^1_{\mathfrak{A},a}(x)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\varphi^0_{\mathfrak{A},a,b}(x,y) &= P(x) \wedge \neg P(y) \wedge x \neq y,\\
\varphi^0_{\mathfrak{A},a,a}(x,y) &= P(x) \wedge P(y) \wedge x = y \ ja\\
\varphi^1_{\mathfrak{A},a}(x) &= \exists y \varphi^0_{\mathfrak{A},a,b}(x,y) \wedge \exists y \varphi^0_{\mathfrak{A},a,a}(x,y) \wedge \forall y[\varphi^0_{\mathfrak{A},a,b}(x,y) \vee \varphi^0_{\mathfrak{A},a,a}(x,y)]\\
&= \exists y(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge x \neq y) \wedge \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge x = y)\\
&\wedge \forall y[(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge x \neq y) \vee (P(x) \wedge P(y) \wedge x = y)].
\end{aligned}$$

Apulause 3.13. *Jokaisella mallilla $\mathfrak{A}$, jonolla $\vec{a} \in A^m$ ja $r \in \mathbb{N}$ pätee:*

1. $qr(\varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})) = r$ *ja*
2. $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$.

Todistus. Todistetaan ensin kohta (1). Oletetaan, että malli $\mathfrak{A}$ ja jono $\vec{a}$ ovat mielivaltaisia ja todistetaan väite induktiolla r:n suhteen.

Oletetaan ensin, että $r = 0$. Nyt $\varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}$ on atomikaavojen ja niiden negaatioiden konjunktio, joten $qr(\varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}) = 0$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että väite pätee kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$ ja jonoilla $\vec{a}$ kun $r = k$. Nyt kun $r = k+1$, on

$$\begin{aligned}
qr(\varphi^{k+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}) &= qr(\bigwedge_{a\in A} \exists x \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a} \wedge \forall x \bigvee_{a \in A} \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a})\\
&= max\{qr(\exists x \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}), qr(\forall x \bigvee_{a\in A} \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}) \mid a \in A\}\\
&= max\{qr(\varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}) + 1 \mid a \in A\}\\
&= k+1.
\end{aligned}$$

induktio-oletuksen perusteella. Väite seuraa nyt induktioperiaatteesta.

Todistetaan sitten kohdan (2) väite induktiolla r:n suhteen.

Tapauksessa $r = 0$ on $\varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) = \bigwedge\{\Theta(\vec{x}) \mid \Theta$ on σ-atomikaava tai σ-atomikaavan negaatio ja $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \Theta(\vec{x})\}$, joten $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$.

Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$ ja jonoilla $\vec{a}$ kun $r = k$. Olkoon $r = k+1$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi^{k+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) &\Leftrightarrow \mathfrak{A}, \vec{a} \models \bigwedge_{a \in Dom(A)} \exists x \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x) \wedge \forall x \bigvee_{a\in Dom(A)} \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x},x)\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A}, \vec{a} \models \bigwedge_{a \in Dom(A)} \exists x \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x) \ ja\\
&\qquad \mathfrak{A}, \vec{a} \models \forall x \bigvee_{a\in Dom(A)} \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x},x).
\end{aligned}$$

Oletetaan ensin, että $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \bigwedge_{a \in Dom(A)} \exists x \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x)$ ei päde. On siis olemassa jokin $a \in Dom(A)$ siten, että $\mathfrak{A}, \vec{a} \not\models \exists x \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x)$. Siis erityisesti $\mathfrak{A}, \vec{a}a \not\models \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x)$. Tämä on ristiriidassa induktio-oletuksen kanssa.

Oletetaan sitten, että $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \forall x \bigvee_{a \in Dom(A)} \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x)$ ei päde. On siis olemassa sellainen $b \in Dom(A)$, että $\mathfrak{A}, \vec{a}b \not\models \bigvee_{a \in Dom(A)} \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x)$.

Erityisesti $\mathfrak{A}, \vec{a}b \not\models \varphi^k_{\mathfrak{A},\vec{a}b}(\vec{x}, x)$, mikä on risririidassa induktio-oletuksen kanssa. Siis $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi^{k+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$.

Siis väite pätee induktioperiaatteen nojalla.

Esitetään seuraavaksi vaihtoehtoinen todistus EF-lauseelle. Kyseisessä EF-lauseen muotoilussa käytetään merkintää $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$, joka tarkoittaa, että mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ toteuttavat samat FO$[r]$-kaavat.

Lause 3.14. *Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ relationaalisen aakkoston σ malleja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

1. $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$.
2. $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$.
3. $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Todistus. Todistetaan ensin (1) $\Rightarrow$ (2). Oletetaan, että (1) pätee, eli $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$. Nyt apulauseen 3.13 perusteella $qr(\varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}) = r$ ja $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$, joten $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$.

Todistetaan sitten (2) $\Rightarrow$ (3). Todistetaan induktiolla r:n suhteen, että jos $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$, niin $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Oletetaan ensin, että $r = 0$ ja $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$. Siis jos $\Theta(\vec{x})$ on atomikaava, niin $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \Theta(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}, \vec{a} \models \Theta(\vec{x})$. Nyt $\vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Siis $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Tehdään sitten induktio-oletus että väite pätee r:llä kaikilla jonoilla $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Oletetaan, että $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi^{r+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$. Käytetään nyt apulausetta 3.11: jos $c \in A$, niin Hintikka-kaavan $\varphi^{r+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}$ määritelmän perusteella $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \exists x \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}c}(\vec{x}, x)$. Siis on olemassa sellainen $d \in B$, että $\mathfrak{B}, \vec{b}d \models \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}c}(\vec{x}, x)$. Nyt induktio-oletuksen perusteella $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \simeq_r (\mathfrak{B}, \vec{b}d)$. Vastaavasti jos $d \in B$, niin Hintikka-kaavan määritelmän perusteella $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \forall x \bigvee_{c \in A} \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}c}(\vec{x}, x)$, joten $\mathfrak{B}, \vec{b}d \models \bigvee_{c \in A} \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}c}(\vec{x}, x)$. Siis on olemassa sellainen $c \in A$, että $\mathfrak{B}, \vec{b}d \models \varphi^r_{\mathfrak{A},\vec{a}c}(\vec{x}, x)$. Nyt induktio-oletuksen perusteella $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \simeq_r (\mathfrak{B}, \vec{b}d)$. Siis apulauseen 3.11 perusteella $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{r+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Todistetaan vielä (3) $\Rightarrow$ (1). Todistetaan induktiolla kaavan φ rakenteen suhteen, että jos $qr(\varphi) \leq r$ ja $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$ niin $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi(\vec{x})$.

Oletetaan ensin, että φ on atomikaava. Siis $qr(\varphi) = 0$. Jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin $\vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Siis $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi(\vec{x})$.

Oletetaan sitten, että $\varphi = \neg\Psi$. Nyt $qr(\varphi) = qr(\Psi)$. Oletetaan, että $qr(\varphi) \leq r$ ja tehdään induktio-oletus, että $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \Psi(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \vec{b} \models \Psi(\vec{x})$. Nyt $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}, \vec{a} \not\models \Psi(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \vec{b} \not\models \Psi(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi(\vec{x})$.

Oletetaan vielä, että $\varphi = \Psi \wedge \Theta$. Nyt $qr(\varphi) = max\{qr(\Psi), qr(\Theta)\}$. Oletetaan, että $qr(\varphi) \leq r$. Siis $qr(\Psi), qr(\Theta) \leq r$. Tehdään induktio-oletus, että

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}, \vec{a} \models \Psi(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \vec{b} \models \Psi(\vec{x}) \ ja \ \mathfrak{A}, \vec{a} \models \Theta(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \vec{b} \models \Theta(\vec{x}). \\ Nyt \ \mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \vec{a} \models \Psi(\vec{x}) \ ja \ \mathfrak{A}, \vec{a} \models \Theta(\vec{x})) \\ \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \vec{b} \models \Psi(\vec{x}) \ ja \ \mathfrak{B}, \vec{b} \models \Theta(\vec{x})) \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Induktio-oletus koskee kaikkia kaavoja φ, joille $qr(\varphi) < r$. Oletetaan vielä lopuksi, että $\varphi = \exists x \Psi$. Nyt $qr(\varphi) = qr(\Psi) + 1$. Oletetaan, että $qr(\varphi) \leq r$, siis $qr(\Psi) \leq r - 1$. Oletetaan, että $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x})$. Siis on olemassa sellainen $a \in A$, että pätee $\mathfrak{A}, \vec{a}a \models \Psi(\vec{x}, x)$. Koska oletuksen mukaan $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_r (\mathfrak{B}, \vec{b})$ niin on olemassa sellainen $b \in B$, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_{r-1} (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$ (apulause 3.11). Nyt induktio-oletuksen perusteella pätee $\mathfrak{B}, \vec{b}b \models \Psi(\vec{x}, x)$, kun $qr(\Psi) \leq r-1$. Siispä $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \exists x \Psi(\vec{x}, x)$ eli $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi(\vec{x})$. Samalla tavalla voidaan todistaa, että jos $\mathfrak{B}, \vec{b} \models \varphi(\vec{x})$, niin $\mathfrak{A}, \vec{a} \models \varphi(\vec{x})$.

Tämän työn lopuksi käsitellään vielä lyhyesti yllä olevan Hintikka-kaavojen avulla tehdyn EF-lauseen todistuksen ja aiemmin tässä alaluvussa esitetyn EF-lauseen 3.12 todistuksen sisältöä ja eroja. EF-lauseen 3.12 todistamiseksi tarvittiin tietoa, että FO[r] sisältää loogista ekvivalenssia vaille vain äärellisen määrän aakkoston σ kaavoja (apulause 3.6). Kyseisessä todistuksessa tarvittiin myös tietoa tyypeistä. Molemmissa tässä työssä esitetyissä EF-lauseen todistuksissa hyödynnettiin apulausetta 3.11, joka kuvaa back-and-forth-relaatiota. Hintikka-kaavojen avulla tehdyssä todistuksessa käytettiin apulausetta 3.13, joka kuvaa Hintikka-kaavojen kvanttoriastetta ja Hintikka-kaavojen totuutta mallissa. Hintikka-kaavojen avulla tehty EF-lauseen todistus on ehkäpä esitetyistä todistuksista informatiivisempi, sillä siinä otetaan huomioon myös tutkittavan kaavan φ rakenne.

Viitteet

[1] Ebbinghaus, H-D., Flum, J. *Finite Model Theory.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

[2] Libkin, L. *Elements of Finite Model Theory.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.

[3] Marker, D. *Model Theory: an Introduction.* New York: Springer, cop., 2002.