TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Johanna Savolainen

Äärellisen mallin ominaisuus filtraation kautta

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Huhtikuu 2012

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

SAVOLAINEN, JOHANNA: Äärellisen mallin ominaisuus filtraation kautta

Pro gradu -tutkielma, 33 s.

Matematiikka

Huhtikuu 2012

Tiivistelmä

Tämän pro gradu -tutkielman pääaiheena on modaalilogiikan tulos siitä, kuinka äärellisen mallin ominaisuus voidaan todistaa filtraation avulla. Tutkielman luvussa 2 käsitellään modaalilogiikan perusteita lähtien modaalilogiikan syntaksista, semantiikasta sekä mahdollisista maailmoista. Luvussa 2 kerrataan myös modaalilogiikan mallit ja kehykset. Luvussa 3 käsitellään bisimulaatiota, erillisiä yhdisteitä, generoituja alimalleja, p-morfismia sekä näiden ominaisuuksia. Luvussa 4 esitellään äärellisen mallin ominaisuus sekä tutustutaan tulokseen, jonka mukaan äärellisen mallin ominaisuus voidaan todistaa filtraation avulla.

Filtraatio modaalilogiikassa on malli, joka yksinkertaistaa jo olemassaolevaa mallia. Filtraatiossa muodostetaan alkuperäisen mallin maailmoista ekvivalenssiluokkia, ja edelleen ekvivalenssiluokkien joukko muodostaa filtraation maailmojen joukon. Filtraatiossa eri propositiosymboleiden ja kaavojen totuusehdot pysyvät muuttumattomina. Filtraatioiden kautta huomataan, että monimutkaisista ja suuristakin äärellisistä malleista saadaan varsin yksinkertaisia.

Tutkielman päälähdeteoksina on käytetty kirjoja *Modal Logic* (Blackburn, de Rijke, Venema) sekä *Johdatus modaalilogiikkaan* (Rantala, Virtanen). Lähteinä on käytetty myös kirjaa *Modal Logic: an introduction* (Chellas) sekä verkkojulkaisuja *Model theory of modal logic* (Goranko, Otto) ja *Bisimulaatiosta* (Karvonen).

Sisältö

1 Johdanto

Modaalilogiikan historia ulottuu jo antiikin aikaan, ja varsinkin Aristoteleen statistiseen modaaliteoriaan, jonka mukaan *'jokin asia on mahdollinen, jos se toteutuu tällä tai jollakin tulevalla ajanhetkellä'* ja *'jokin asia on välttämätön, jos se toteutuu tällä ja jokaisella tulevalla ajanhetkellä'.* Tätä periaatetta hyödyntäen yhdysvaltalainen Arthur Lovejoy kehitti runsauden periaatteen, jonka mukaan *'jokainen aito mahdollisuus toteutuu joskus'.*

Loogisesti tai käsitteellisesti rinnakkaisia asiantiloja käsitteli ensimmäisenä skotlantilainen filosofi ja loogikko Duns Scotus. Mahdollisten maailmojen käsitteen kehitti kuitenkin saksalainen matemaatikko Gottfrien Wilhelm Leibniz. Leibniz määritteli kontingenssin, välttämättömyyden ja mahdollisuuden seuraavasti:

- Lause on kontingentti, jos sen totuus riippuu siitä, miten aktuaalinen maailma on.
- Lause on välttämätön, jos se on tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa; ts., jos sen totuus ei riipu siitä, mikä mahdollisista maailmoista on aktuaalinen.
- Lause on mahdollinen, jos se on tosi jossakin mahdollisessa maailmassa. [5, s. 25]

Leibnizin määritelmiä käytetään nykypäivän modaalilogiikassa lähes sellaisenaan, mutta mahdollisten maailmojen semantiikka pohjautuu pitkälti yhdysvaltalaisen matemaatikon Saul Kripken muotoiluun, jota kutsutaan Kripke-semantiikaksi.

Tässä tutkielmassa keskitytään tulosten osalta perusmodaalilogiikan osa-alueeseen. Esitettyjä tuloksia voidaan myös laajentaa, jos halutaan tarkastella yleistä modaalilogiikan tapausta. Peruskonnektiiveiksi tähän tutkielmaan on valittu negaatio $\neg$ ja konjuktio $\wedge$, joiden avulla muut konnektiivit voidaan esittää. Modaalioperaattoreista on perusoperaattoriksi valittu mahdollisuusoperaattori eli niin kutsuttu 'timantti' $\Diamond$.

Tämän tutkielman luvussa 4 tarkastellaan modaalilogiikan tulosta, jonka mukaan äärellisen mallin ominaisuus voidaan esittää filtraation avulla. Filtraatio modaalilogiikassa tarkoittaa mallia $M^f_\Sigma = (W^f, R^f, V^f)$, joka yksinkertaistaa äärellistä mallia. Filtraatiossa muodostetaan alkuperäisen mallin maailmoista ekvivalenssiluokkia, ja edelleen ekvivalenssiluokkien joukko muodostaa filtraation maailmojen joukon. Filtraatiossa eri propositiosymboleiden ja kaavojen totuusehdot pysyvät muuttumattomina. Filtraatioiden avulla voidaan siis esittää monimutkaisiakin malleja yksinkertaistetun mallin avulla.

Luvussa 2 käydään läpi modaalilogiikan yleisiä peruspiirteitä ja lainalaisuuksia. Olleellisilta osin luvussa 2 keskitytään modaalilogiikan syntaksiin sekä mahdollisten maailmojen, modaalilogiikan semantiikan sekä mallien ja kehyksien perusominaisuuksiin.

Luvussa 3 tarkastellaan bisimulaatiota sekä erillisiä yhdisteitä, generoituja alimalleja, p-morfismia ja näiden ominaisuuksia. Nämä tulokset ovat oleellisia filtraatioita käsiteltäessä.

Lukijalta edellytetään propositiologiikan sekä lauselogiikan perusasioiden tuntemista. Lukijan tulisi hallita myös modaalilogiikan merkintätavat ja eri toditusteoriat. Tutkielman päälähdeteoksina on käytetty kirjoja *Modal Logic* (Blackburn, de Rijke, Venema) sekä *Johdatus modaalilogiikkaan* (Rantala, Virtanen). Lähteinä on myös käytetty kirjaa *Modal Logic: an introduction* (Chellas) sekä verkkojulkaisuja *Model theory of modal logic* (Goranko, Otto) ja *Bisimulaatiosta* (Karvonen).

2 Modaalilogiikan perusteita

Tässä luvussa annetaan muutamia esitietoja tukemaan tulevien asioiden käsittelyä. Ensin määritellään modaalioperaattorit sekä modaalilogiikan syntaksi, jonka jälkeen lukijalle tehdään tutuksi mahdolliset maailmat sekä modaalilogiikan semantiikka. Lopuksi käsitellään vielä modaalilogiikan malleja ja kehyksiä.

2.1 Modaalilogiikan syntaksi

Modaalilogiikka logiikan osa-alueena tarkastelee aleettisten modaliteettien eli välttämättömyyden ja mahdollisuuden loogisia piirteitä. Modaalilogiikan kieli saadaan lause- ja propositiologiikan kielistä määrittelemällä konnektiivien $\neg$ (negaatio), $\wedge$ (konjunktio), $\vee$ (disjunktio), $\rightarrow$ (implikaatio) ja $\leftrightarrow$ (ekvivalenssi) lisäksi mahdollisuusoperaattori $\Diamond$ ja välttämättömyysoperaattori $\Box$.

Huomautus 2.1. Mahdollisuusoperaattorin $\Diamond$ sanallinen tulkinta on 'mahdollisesti tosi' ja välttämättömyysoperaattorin $\Box$ sanallinen tulkinta on 'välttämättä tosi'.

Esimerkki 2.1. Olkoon p lause 'huomenna sataa'. Tällöin lause 'on mahdotonta, että huomenna ei sada' voidaan kirjoittaa formaaliin muotoon $\neg\Diamond\neg p$ ja lause 'ei ole välttämätöntä, että huomenna sataa' muotoon $\neg\Box p$.

Huomautus 2.2. Tässä tutkielmassa tarkastellaan modaalisia kieliä, joissa joukko Φ on kokoelma propositiosymboleja. Propositiosymboleja eli lausemuuttujia merkitään yleensä notaatioilla $p_1, p_2, \ldots$ tai $p, q, r \ldots$.

Määritelmä 2.1 (vrt. [1, s. 10], [5, s. 44])**.** Modaalilogiikan kielen aakkoston muodostavat seuraavat perussymbolit:

- propositiosymbolit p_1, p_2, p_3,...
- propositiovakiot $\top$ ja $\bot$
- konnektiivit $\neg$ ja $\wedge$
- mahdollisuusoperaattori $\Diamond$
- sulut (,).

Perussymboleista muodostetaan edelleen kaavoja seuraavien kaavanmuodostussääntöjen avulla:

1. Propositiosymbolit eli joukon Φ alkiot $p \in \Phi$ ovat kaavoja.
2. Propositiovakiot $\top$ ja $\bot$ ovat kaavoja.
3. Jos ϕ on kaava, niin $\neg\phi$, ja $\Diamond\phi$ ovat kaavoja.
4. Jos ϕ ja ψ ovat kaavoja, niin $(\phi \wedge \psi)$ on kaava.
5. Muita kaavoja ei ole.

Huomautus 2.3. Konnektiivit $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ sekä välttämättömyysoperaattori $\Box$ voidaan ilmaista käyttäen konnektiiveja $\neg$ ja $\wedge$ sekä mahdollisuusoperaattoria $\Diamond$. Lyhennysmerkinnät $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ ja $\Box\phi$ saadaan siis muotoon

- $\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
- $\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\,(\phi \wedge \neg\psi)$
- $\phi \leftrightarrow \psi \equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \equiv \neg\,(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg\,(\psi \wedge \neg\phi)$
- $\Box\phi \equiv \neg\Diamond\neg\phi$

Huomautus 2.4. Konnektiivien vaikutusalat ja vahvuudet määräytyvät seuraavasti:

- Negaation $\neg$ sekä mahdollisuus- ja välttämättömyysoperaattoreiden, $\Diamond$ ja $\Box$, vaikutusala on niitä välittömästi seuraava kaava.
- Implikaatio $\rightarrow$ ja ekvivalenssi $\leftrightarrow$ ovat vahvempia kuin konjunktio $\wedge$ ja disjunktio $\vee$.

Esimerkiksi kaavassa, jossa on käytetty sulkuja, konnektiivien vaikutusalat määräävät kaavan luonteen.

Esimerkki 2.2. Olkoon $\phi = (p \vee \neg q) \leftrightarrow \Diamond r$. Jos kaavasta ϕ jättää sulut kirjoittamatta, saadaan se muotoon $\phi' = p \vee \neg q \leftrightarrow \Diamond r$. Havaitaan, että kaavat ϕ ja ϕ' eivät ole samat, sillä kaavassa ϕ suoritetaan ensin disjunktio, jonka jälkeen ekvivalenssi. Kaavassa ϕ', josta sulut on poistettu, suoritetaan ensin ekvivalenssi, ja sitten vasta disjunktio. Tämä seuraa siitä, että ekvivalenssi on vahvempi kuin disjunktio edellisen huomautuksen mukaan.

Huomautus 2.5. Seuraavat modaalilogiikan ekvivalenttisuudet ovat voimassa:

- $\neg\Diamond\phi \equiv \Box\neg\phi$
- $\neg\Box\phi \equiv \Diamond\neg\phi$

Eli negaation voi siirtää modaalioperaattoreiden yli, jos muuttaa modaalioperaattorin toiseksi.

Esimerkki 2.3. Olkoon $A = \neg\Box\Box\Box\Diamond\Diamond\Box\phi$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\neg\Box\Box\Box\Diamond\Diamond\Box\phi &\equiv \Diamond\neg\Box\Box\Diamond\Diamond\Box\phi \\
&\equiv \Diamond\Diamond\neg\Box\Diamond\Diamond\Box\phi \\
&\equiv \Diamond\Diamond\Diamond\neg\Diamond\Diamond\Box\phi \\
&\equiv \Diamond\Diamond\Diamond\Box\neg\Diamond\Box\phi \\
&\equiv \Diamond\Diamond\Diamond\Box\Box\neg\Box\phi \\
&\equiv \Diamond\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond\neg\phi
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.2 (vrt. [1, s. 6], [2, s. 28], [5, s. 45])**.** Kun kaava ϕ on jokin lausemuuttujasta poikkeava kaava, niin se muodostuu osista, joita kutsutaan kaavan ϕ *alikaavoiksi*. Prosessia, jossa etsitään kaikki kaavan ϕ alikaavat, voidaan havainnollistaa puumallilla (rakennepuulla) $\mathfrak{T} = (T, S)$. Rakennepuussa solmut ovat alikaavoja, jotka liitetään särmällä sitä välittömästi seuraavaan alikaavaan. Kaavan ϕ alikaavat voidaan määritellä rekursiivisesti seuraavaan tapaan:

1. $\mathrm{sub}(p_n) = \{p_n\}$ kaikille $n = 0, 1, 2, \ldots$.
2. $\mathrm{sub}(\top) = \{\top\}$.
3. $\mathrm{sub}(\bot) = \{\bot\}$.
4. $\mathrm{sub}(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup \mathrm{sub}(\phi)$.
5. $\mathrm{sub}(\phi \wedge \psi) = \{\phi \wedge \psi\} \cup \mathrm{sub}(\phi) \cup \mathrm{sub}(\psi)$.
6. $\mathrm{sub}(\Diamond\phi) = \{\Diamond\phi\} \cup \mathrm{sub}(\phi)$

Esimerkki 2.4. Olkoon $\phi = (\Box(p \to q) \land \Box p) \to \Box q$. Kaavan ϕ alikaavoja ovat

$$
\begin{aligned}
&(\Box(p \to q) \land \Box p) \to \Box q \\
&\Box(p \to q) \land \Box p, \\
&\Box q, \\
&\Box(p \to q), \\
&\Box p, \\
&p \to q, \\
&p \quad \text{ja} \\
&q.
\end{aligned}
$$

Määritelmän mukaan myös kaava ϕ on itsensä alikaava. On myös huomioitavaa, että kyseisessä kaavassa propositiosymbolit p ja q esiintyvät kahdesti eri kohdissa. Kuitenkin alikaavoja etsittäessä kukin propositiosymboli esitetään vain kerran.

Esimerkki 2.5. Kaavan $\Box(\Box p \to (q \leftrightarrow \Diamond r)) \to (\Box\Box p \to \Box(q \leftrightarrow \Diamond r))$ rakennepuu on seuraava:

$$
\begin{array}{c}
\Box(\Box p \to (q \leftrightarrow \Diamond r)) \to (\Box\Box p \to \Box(q \leftrightarrow \Diamond r)) \\
/\backslash \\
\begin{array}{cc}
\Box(\Box p \to (q \leftrightarrow \Diamond r)) & \Box\Box p \to \Box(q \leftrightarrow \Diamond r) \\
| & /\backslash \\
\Box p \to (q \leftrightarrow \Diamond r) & \Box\Box p \quad \Box(q \leftrightarrow \Diamond r) \\
/\backslash & | \qquad\qquad | \\
\Box p \quad q \leftrightarrow \Diamond r & \Box p \qquad q \leftrightarrow \Diamond r \\
| \qquad /\backslash & | \qquad\qquad /\backslash \\
p \quad q \quad \Diamond r & p \quad q \quad \Box r \\
| & | \\
r & r
\end{array}
\end{array}
$$

2.2 Mahdolliset maailmat ja modaalilogiikan semantiikka

Mahdollisen maailman käsitteen tulkinta vaihtelee tutkimusaloittain. Esimerkiksi fysiikassa puhutaan yleensä systeemeistä ja filosofiassa mahdollinen maailma on usein yhtä täydellinen kuin maailma tavanomaisessa merkityksessään. Modaalilogiikassa mahdollisen maailman käsitteellä viitataan yleensä johonkin tilanteeseen, asiantilaan, malliin tai struktuuriin. Mahdolliset maailmat modaalilogiikassa eivät ole metafyysisiä, vaan ne ovat logiikassa semantiikkaan liittyviä käsitteitä. [5, s. 28]

Modaalilogiikan semantiikka voidaan jaotella filosofiseen ja formaaliin semantiikkaan. Filosofisen semantiikan tasolla tarkastelut voivat toisinaan jäädä epätäsmällisiksi, mutta formaalin semantiikan keinoin niitä voidaan täsmentää. Yleensä tarkasteluissa käytetäänkin niin filosofista kuin formaaliakin semantiikkaa. Filosofinen semantiikka määrittelee mahdollisuuden ja välttämättömyyden seuraavasti:

- Lause $\Box A$ on tosi, jos A on tosi kaikissa loogisesti mahdollisissa maailmoissa.
- Lause $\Diamond A$ on tosi, jos A on tosi jossakin loogisesti mahdollisessa maailmassa. [5, s. 32]

Formaalissa semantiikassa voidaan sopia, mitkä mahdolliset maailmat ovat mahdollisia vaihtoehtoja kullekin tarkasteltavalle maailmalle. Formaalissa semantiikassa voidaan myös muodostaa kaavoja, joissa on äärellinen määrä sisäkkäisiä modaalioperaattoreita. Esimerkiksi lause $\Diamond\Box\Diamond A$ voidaan purkaa auki siten, että lause on tosi, jos $\Box\Diamond A$ on tosi jossakin mahdollisessa maailmassa. Lause $\Box\Diamond A$ on tosi, jos $\Diamond A$ on tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa ja lause $\Diamond A$ on tosi, jos A on tosi jossakin mahdollisessa maailmassa.

Modaalilogiikassa kaavojen totuuksia tarkastellaan kehysten ja mallien avulla. Kehykset muodostuvat maailmojen joukosta W ja relaatiosta R, mallit sen sijaan muodostuvat kehyksistä ja valuaatiosta V.

Joukko W on mahdollisten maailmojen joukko, joka koostuu tiloista, jotka ovat kullekin mallille mahdollisia. Tiloja merkitään yleensä notaatioilla $w_1, w_2, \ldots$ tai juoksevalla numeroinnilla. Kaksipaikkainen relaatio R sen sijaan ilmaisee, mitkä maailmat ovat mahdollisia maailman w suhteen. Valuaatio V on kuvaus, joka kertoo propositioiden totuusarvot maailmojen joukossa W.

2.3 Mallit ja kehykset

Määritelmä 2.3 (vrt. [1, s. 16-17])**.** Modaalilogiikan kehys $\mathfrak{F} = (W, R)$ on pari, jossa W on epätyhjä joukko ja R on kaksipaikkainen relaatio joukossa W. Olkoon $\Phi \subseteq \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Modaalilogiikan Φ-malli sen sijaan on pari $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, jossa $\mathfrak{F}$ on kehys ja V funktio, jolle $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$, missä $V(p) \subseteq W$. Funktiota V kutsutaan *valuaatioksi* ja mallin $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ sanotaan perustuvan kehykseen $\mathfrak{F}$.

Yllämääriteltyjä kehystä ja mallia kutsutaan toisinaan myös *Kripke -kehykseksi* ja *Kripke-malliksi* niiden keksijän Saul Kripken mukaan ja niitä kutsutaan tavallisesti lyhyemmin *K-kehykseksi* ja *K-malliksi*.

Huomautus 2.6. Tässä tutkielmassa kaikki tarkasteltavat mallit kiinnitetään Φ-malleiksi.

Määritelmä 2.4 (vrt. [1, s. 17-18], [2, s. 5])**.** Olkoon maailma w mallissa $\mathfrak{M} = (W, R, V)$. Tällöin totuusrelaatio $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ määritellään seuraavasti:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \quad \text{joss} \quad w \in V(p), \quad \text{missä} \quad p \in \Phi,$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \top$$

$$\text{Ei} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \bot$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi \quad \text{joss ei päde, että} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \phi,$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \wedge \psi \quad \text{joss} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \quad \text{ja} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \psi,$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi \quad \text{joss jollekin} \quad v \in W, \quad \text{jolle} \quad wRv, \quad \text{pätee} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \phi.$$

Propositiovakio $\top$ on aina tosi maailmassa w ja propositiovakio $\bot$ sen sijaan on aina epätosi maailmassa w.

Jos kaava ϕ ei ole tosi mallissa $\mathfrak{M}$ maailmassa w, niin käytetään merkintää $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$. Määritelmässä 2.3 annettu valuaation määritelmä laajennetaan ilmaisemaan niiden maailmojen joukkoa, jossa kaava ϕ on tosi:

$$\|\phi\|^{\mathfrak{M}} := \{w \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$$

Lause 2.7. *$\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi$ jos ja vain jos kaikille $v \in W$, joille wRv, pätee $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$.*

Todistus. Todistetaan lauseen kumpikin suunta erikseen.

1. Oletetaan, että $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi$ missä $w \in W$. Tällöin huomautuksen 2.3 nojalla $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Diamond\neg\phi$. Siis $\mathfrak{M}, w \nVdash \Diamond\neg\phi$. Oletetaan, että $v \in W$ siten, että wRv. Koska $\mathfrak{M}, w \nVdash \Diamond\neg\phi$ ja wRv, niin $\mathfrak{M}, v \nVdash \neg\phi$. Tällöin siis $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, koska kaikilla $w \in W$ pätee wRv.

2. Olkoon $w \in W$. Oletetaan sitten, että $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$ kaikilla $v \in W$, joilla wRv. Ei siis ole olemassa $v \in W$, jolla wRv ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \neg\phi$. Siis $\mathfrak{M}, w \nVdash \Diamond\neg\phi$. Määritelmän 2.4 nojalla $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Diamond\neg\phi$ ja edelleen Huomautuksen 2.3 nojalla $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi$.

$\square$

Huomautus 2.8. Konnektiivien totuusarvot voidaan ilmaista myös totuustaulujen avulla, missä t = tosi ja e = epätosi. Totuustaulut ovat lyhennysmerkintöjä ylläolevan määritelmän 2.4 kohdille.

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
t	t	e	t	t	t	t
t	e	e	e	t	e	e
e	t	t	e	t	t	e
e	e	t	e	e	t	t

Määritelmä 2.5 (vrt. [1, s. 2-3])**.** Olkoon relaatio $R \subseteq W \times W$. Tällöin relaatio R on

- *refleksiivinen*, jos wRw kaikilla $w \in W$.
- *symmetrinen*, jos sillä pätee seuraava ehto: jos wRv, niin vRw, kun $w, v \in W$.
- *transitiivinen*, jos sillä pätee seuraava ehto: jos wRu ja uRv, niin wRv, kun $w, v, u \in W$.

Relaatio $R \subseteq W \times W$ on *ekvivalenssirelaatio*, jos se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

Määritelmä 2.6 (vrt. [1, s. 5-6])**.** Kaksipaikkaisen relaation R *transitiivinen sulkeuma* R^+ on pienin sellainen transitiivinen relaatio, joka sisältää relaation R. Siis

$$R^+ = \bigcap \{R' \subseteq W \times W \mid \text{R' transitiivinen ja } R \subseteq R'\},$$

Edelleen relaation R *refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma* R^* on pienin sellainen refleksiivinen ja transitiivinen relaatio, joka sisältää relaation R.

Esimerkki 2.6. Olkoon malli $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, missä

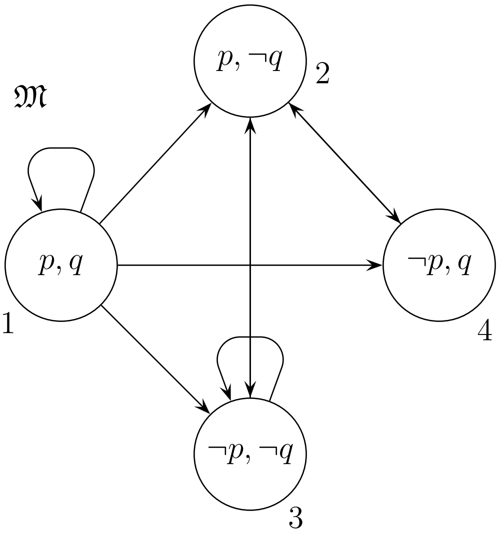
$$\begin{aligned}
W &= \{w_1, w_2, w_3,\} \\
R &= \{(w_1, w_2), (w_2, w_3)\} \\
V(p_1) &= \{w_1, w_2\} \\
V(p_2) &= W \\
V(p_3) &= \{w_3\} \\
V(p_4) &= \emptyset \\
V(p_i) &= \{w_1, w_2\}, \text{kun} \quad i = 5, 6, 7, \ldots
\end{aligned}$$

Kyseisessä mallissa $\mathfrak{M}$ lausemuuttuja p_1 on siis tosi maailmoissa w_1 ja w_2, sillä $w_1, w_2 \in V(p_1)$. Lausemuuttuja p_4 ei ole tosi missään mallin $\mathfrak{M}$ maailmassa, lausemuuttuja p_2 sen sijaan on tosi kaikissa mallin $\mathfrak{M}$ maailmoissa.

Esimerkki 2.7. Olkoon $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, missä

$$\begin{aligned}
&W = \{1, 2, 3, 4\}, \\
&R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (4,2)\}, \\
&V(p) = \{1, 2\} \quad \text{ja} \quad V(q) = \{1, 4\}.
\end{aligned}$$

Havainnollistetaan mallia kuvion avulla.



Kuviossa relaatio R esitetään nuolilla, jotka osoittavat maailmojen yhteydet toisiinsa. Kuviosta nähdään myös propositioiden p ja q totuusarvot eri maailmoissa.

Määritelmä 2.7 (vrt. [1, s. 24], [5, s. 200])**.** Kaava ϕ on *validi*

- kehyksen $\mathfrak{F}$ maailmassa w, jos ϕ on tosi maailmassa w jokaisessa mallissa $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$. Tätä merkitään notaatiolla $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$.

- kehyksessä $\mathfrak{F}$, jos se on se on validi jokaisessa kehyksen $\mathfrak{F}$ maailmassa. Tätä merkitään notaatiolla $\mathfrak{F} \Vdash \phi$.

- kehysluokassa $\mathfrak{C}$, jos $\mathfrak{F} \Vdash \phi$ aina, kun $\mathfrak{F} \in \mathfrak{C}$. Tätä merkitään notaatiolla $\Vdash_{\mathfrak{C}} \phi$.

- mallissa $\mathfrak{M}$, jos se on validi jokaisessa mallin $\mathfrak{M}$ maailmassa w. Tätä merkitään notaatiolla $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.

- malliluokassa $\mathcal{M}$, jos $\mathfrak{M} \Vdash \phi$ aina, kun $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$. Tätä merkitään notaatiolla $\Vdash_{\mathcal{M}} \phi$.

Kaava ϕ on validi, jos jokaiselle mallille $\mathfrak{M}$ ja jokaiselle maailmalle w pätee $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. Tätä merkitään notaatiolla $\Vdash \phi$.

Esimerkki 2.8. Esimerkin 2.7 kuviosta nähdään esimerkiksi, että propositio p ei ole validi mallissa $\mathfrak{M}$, mutta on sen sijaan tosi maailmoissa 1 ja 2. Siis $\mathfrak{M}, 1 \Vdash p$ ja $\mathfrak{M}, 2 \Vdash p$.

Kun tarkastellaan kaavaa $\phi = \Box\Diamond\Box p$, huomataan, että kaava $\Box p$ on tosi vain maailmassa 4. Siis $\mathfrak{M}, 4 \Vdash \Box p$. Toisaalta taas $\mathfrak{M}, 2 \Vdash \Diamond\Box p$ ja edelleen $\mathfrak{M}, 4 \Vdash \Box\Diamond\Box p$. Siis $\mathfrak{M}, 4 \Vdash \phi$.

Esimerkki 2.9. Todistetaan, että kaava $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ on validi. Olkoon $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ malli ja $w \in W$. Oletetaan, että $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box(p \to q)$. Oletetaan edelleen, että $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p$. Osoitetaan, että tällöin $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box q$. Tarkastellaan sitä varten mitä tahansa maailmaa $v \in W$, jolla wRv. Koska $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p$, niin $\mathfrak{M}, v \Vdash p$. Koska $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box(p \to q)$, on siis voimassa $\mathfrak{M}, v \Vdash (p \to q)$. Näistä seuraa, että $\mathfrak{M}, v \Vdash q$. Siis $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box q$, joten oletuksen nojalla $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p \to \Box q$. Siis oletuksesta $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box(p \to q)$ seuraa, että $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box p \to \Box q$, joten $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$. Olemme siis osoittaneet kaavan $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ validiksi kaikissa malleissa.

3 Bisimulaatio

Tässä luvussa käsitellään modaalilogiikan bisimulaatiota, erillisiä yhdisteitä, generoituja alimalleja sekä p-morfismia. Bisimulaatio modaalilogiikassa on relaatio kahden mallin välillä. Tällöin mallit ovat keskenään bisimilaariset. Bisimulaation käsite on oleellinen käsiteltäessä äärellisiä malleja ja niiden ominaisuuksia.

3.1 Bisimulaation käsite

Määritelmä 3.1 (vrt. [1, s. 64-65])**.** Olkoot molemmat $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ja $\mathfrak{M} = (W', R', V')$ kaksi modaalilogiikan mallia. Epätyhjä kaksipaikkainen relaatio $Z \subseteq W \times W'$ on *bisimulaatio* mallien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ välillä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

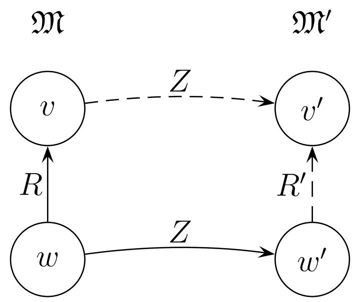
(i) Jos wZw', niin tällöin w ja w' toteuttavat samat propositiosymbolit $p \in \Phi$.

(ii) Jos wZw' ja wRv, niin on olemassa sellainen $v' \in W'$ siten, että vZv' ja $w'R'v'$.

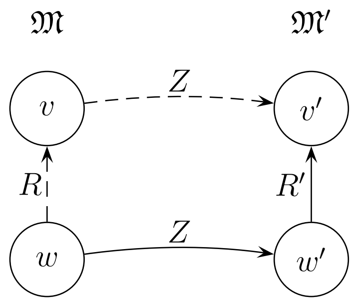
(iii) Jos wZw' ja $w'R'v'$, niin on olemassa sellainen $v \in W$ siten, että vZv' ja wRv.

Jos Z on bisimulaatio ja wZw', niin tällöin maailmat w ja w' ovat *bisimilaariset* ja merkitään $Z : \mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{M}', w'$. Havainnoillistetaan määritelmän kohtia (ii) ja (iii) kuvioiden avulla (vrt. [4, s. 3]):

Kohta (ii)



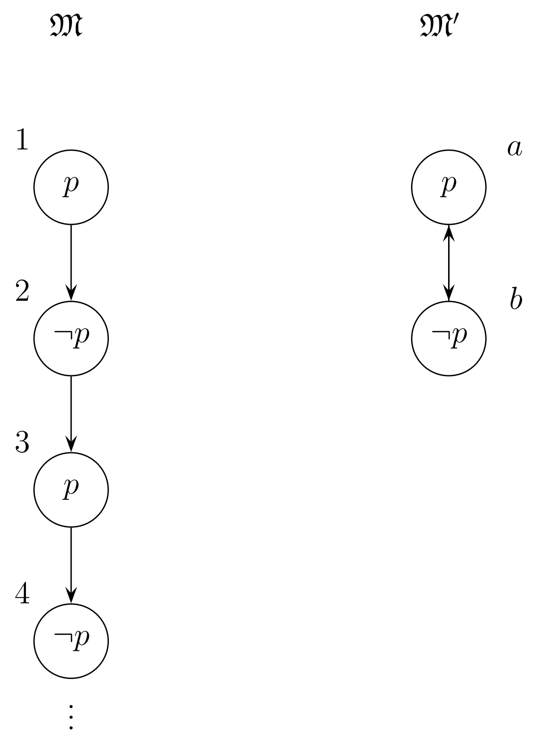
Kohta (iii)



Esimerkki 3.1. Olkoon $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$, missä

$$
\begin{aligned}
&W = \{\mathbb{Z}_+\} && W' = \{a, b\} \\
&R = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} && R' = \{(a, b), (b, a)\} \\
&V(p) = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}_+\} && V'(p) = \{a\}
\end{aligned}
$$

Havainnollistetaan malleja kuvioiden avulla



Osoitetaan, että mallit $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ ovat bisimilaariset. Määritellään relaatio

Z maailmojen välille:

$$Z = \{(2n+1, a), (2n+2, b)\}$$

Bisimilaarisuuden osoittamiseksi on tutkittava määritelmän 3.1 asettamat ehdot. Käymällä läpi kaikki mahdolliset tapaukset huomataan, että ehdot toteutuvat.

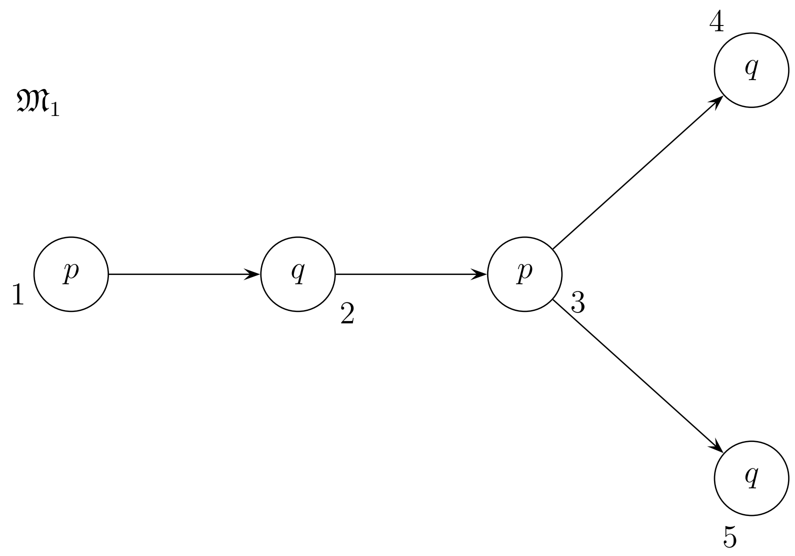
1. Kohta (i) on voimassa, sillä relaation Z yhdistämät maailmat toteuttavat samat propositiosymbolit.

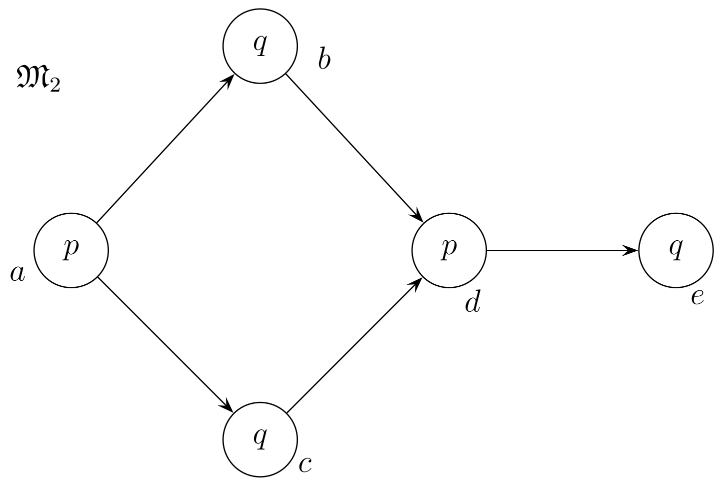
2. Oletetaan, että wZw' ja wRv. Kohta (ii) toteutuu, sillä jos valitaan esimerkiksi $w = 2n+2$, niin on olemassa $v' = b \in W'$ siten, että $(2n+2)Zb$ ja $aR'b$.

3. Oletetaan, että wZw' ja $w'Rv'$. Myös määritelmän kohta (iii) on voimassa, sillä jos valitaan esimerkiksi $w = 2n+1$ ja $w' = a$, niin on olemassa $v = (2n+2) \in W$ siten, että $(2n+2)Zb$ ja $(2n+1)R(2n+2)$.

Kohtien 1-3 perusteella mallien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ välillä on bisimulaatio eli $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$.

Esimerkki 3.2. (vrt. [1, s. 65-66]) Seuraavat mallit $\mathfrak{M}_1$ ja $\mathfrak{M}_2$ ovat bisimilaariset.





Tämän osoittamiseksi määritellään relaatio Z maailmojen välille:

$$Z = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, d), (4, e), (5, e)\}.$$

1. Määritelmän 3.1 kohta (i) on voimassa, sillä relaation Z yhdistämät maailmat toteuttavat samat propositiosymbolit.

2. Oletetaan sitten, että $w_1 Z w_2$ ja $w_1 R_1 v_1$. Myös määritelmän 3.1 kohta (ii) on voimassa, sillä jos valitaan esimerkiksi $w_1 = 2$, niin on olemassa $v_2 = b \in W_2$ siten, että $2Zb$ ja aR_2b.

3. Olkoon sitten $w_1 Z w_2$ ja $w_2 R_2 v_2$. Tällöin jos valitaan esimerkiksi $w_1 = 3$ ja $w_2 = d$ niin on olemassa $v_1 = 4 \in W_1$ siten, että $4Ze$ ja $3R_14$. Siis määritelmän 3.1 kohta (iii) on myös voimassa.

Käymällä kaikki mahdolliset tapaukset läpi huomataan, että mallien $\mathfrak{M}_1$ ja $\mathfrak{M}_2$ välillä on bisimulaatio eli $\mathfrak{M}_1, w_1 \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}_2, w_2$.

Määritelmä 3.2 (vrt. [1, s. 73])**.** Modaalilogiikan kaavan ϕ aste määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\deg(p) &= 0, \quad p \in \Phi, \\
\deg(\bot) &= 0, \\
\deg(\neg\phi) &= \deg(\phi), \\
\deg(\phi \wedge \psi) &= \max\{\deg(\phi), \deg(\psi)\}, \\
\deg(\Diamond\phi) &= 1 + \deg(\phi).
\end{aligned}$$

Määritelmä 3.3 (vrt. [1, s. 52])**.** Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ kaksi mallia, ja olkoot w ja w' maailmoja kyseisissä malleissa. Maailman w teoria $Th(\mathfrak{M}, w)$ on niiden kaavojen joukko, jotka ovat tosia maailmassa w, toisin sanoen joukko $\{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$. Maailmat w ja w' ovat *modaalisesti ekvivalentit*, $w \leftrightsquigarrow w'$, jos niillä on samat teoriat. Maailmat w ja w' ovat *n-ekvivalentit*, $w \leftrightsquigarrow_n w'$, jos ne toteuttavat samat korkeintaan astetta n olevat kaavat.

Mallin $\mathfrak{M}$ teoria on joukko kaavoja, jotka ovat tosia kaikissa mallin $\mathfrak{M}$ maailmoissa, toisin sanoen joukko $\{\phi \mid \mathfrak{M} \Vdash \phi\}$. Mallit $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ ovat modaalisesti ekvivalentit, $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$, jos niiden teoriat ovat identtiset.

Lause 3.1. *Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ malleja. Tällöin jokaiselle $w \in W$ ja $w' \in W'$, $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$ pätee, että $w \leftrightsquigarrow w'$. Toisin sanoen, modaalisten kaavojen totuus säilyy bisimulaatiossa.*

Todistus (vrt. [1, s. 67]). Todistetaan lause induktiolla kaavan ϕ pituuden suhteen. Riittää, että todistetaan tapaukset, joissa ϕ on propositiosymboli, $\phi = \neg\psi$, $\phi = \psi \wedge \theta$ ja $\phi = \Diamond\psi$. Olkoon Z bisimulaatio siten, että wZw'.

1. Jos ϕ on propositiosymboli, lauseen tulos seuraa suoraan määritelmästä 3.1.

2. Olkoon $\phi = \neg\psi$. Oletetaan, että väite pätee kaavalle ψ. Siis $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \psi$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \nVdash \psi \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \nVdash \psi \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \neg\psi \end{aligned}$$

3. Olkoon $\phi = \psi \wedge \theta$. Oletetaan, että väite pätee kaavoille ψ ja θ. Siis $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \psi$ ja $\mathfrak{M}, w \Vdash \theta \Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \theta$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \wedge \theta &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \quad \text{ja} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \theta \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \psi \quad \text{ja} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash \theta \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}', w' \Vdash \psi \wedge \theta \end{aligned}$$

4. Olkoon $\phi = \Diamond\psi$. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalla ϕ ja kaikilla v ja v' siten, että $v \underline{\leftrightarrow} v'$. Oletetaan, että $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Siis on olemassa $v \in \mathfrak{M}$ siten, että wRv ja $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$. Koska wZw', on olemassa määritelmän 3.1 kohdan (ii) mukaan $v' \in W$ siten, että $w'Rv'$ ja $v \underline{\leftrightarrow} v'$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$ eli $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond\psi$. Todistuksen toinen suunta seuraa suoraan määritelmän 3.1 kohdasta (iii).

Induktiotodistuksen nojalla väite pätee kohtien 1-4 perusteella. □

Määritelmä 3.4 (vrt. [1, s. 69])**.** Malli $\mathfrak{M}$ on kuvaäärellinen, jos sen jokaiselle maailmalle w ja relaatiolle R joukko $\{v \in W \mid wRv\}$ on äärellinen.

Lause 3.2 (**Hennessy-Milner**)**.** *Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ kaksi kuvaäärellistä mallia. Tällöin kaikille $w \in W$ ja $w' \in W'$, $w \underline{\leftrightarrow} w'$ jos ja vain jos $w \leftrightsquigarrow w'$.*

Todistus (vrt. [1, s. 69-70]). Lauseen suunta vasemmalta oikealle seuraa suoraan lauseesta 3.1. Toisen suunnan todistamiseksi osoitetaan, että modaalinen ekvivalenssirelaatio $\leftrightsquigarrow$ toteuttaa määritelmän 3.1 ehdot. Osoitetaan siis, että modaalinen ekvivalenssirelaatio on itseasiassa bisimulaatio. Ensimmäinen ehto seuraa suoraan ekvivalenssirelaation määritelmästä. Kohdan (ii) osoittamiseksi oletetaan, että $w \leftrightsquigarrow w'$ ja wRv. Pyritään ristiriitaan olettamalla, ettei ole olemassa $v' \in W'$, jolle $w'R'v'$ ja $v \leftrightsquigarrow v'$. Olkoon $S' = \{u' \mid w'Ru'\}$. Joukko S' on epätyhjä, sillä muuten $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond\top$, joka on ristiriidassa sen kanssa, että $w \leftrightsquigarrow w'$ ja $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\top$. Edelleen, koska $\mathfrak{M}'$ on kuvaäärellinen, joukon S' pitää olla myös äärellinen, $S' = \{w'_1, ..., w'_n\}$. Oletuksen nojalla jokaiselle $w'_i \in S'$ on olemassa kaava ψ_i siten, että $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi_i$ mutta $\mathfrak{M}', w'_i \nVdash \psi_i$.
Tästä seuraa, että $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ ja $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$. Tämä on ristiriidassa oletuksen $w \leftrightsquigarrow w'$ kanssa. Kohdan (iii) osoittaminen menee vastaavaan tapaan kuin edellinen. $\square$

3.2 Erilliset yhdisteet, generoidut alimallit ja p-morfismi

Määritelmä 3.5 (vrt. [1, s. 53])**.** Kaksi mallia ovat erilliset, jos niiden maailmojen joukossa ei ole yhteisiä alkioita. Erillisille malleille $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i)$, $(i \in I)$, erillinen yhdiste on $\biguplus_i \mathfrak{M}_i = (W, R, V)$, missä W on yhdiste joukoista W_i, R on yhdiste relaatioista R_i ja jokaiselle propositiosymbolille p pätee, että $V(p) = \biguplus_{i \in I} V_i(p)$.

Erilliset yhdisteet ovat hyödyllisiä muodostettaessa suurempia malleja pienemmistä. Käytännössä kuitenkin yleensä on tarpeen käyttää toista menetelmää, generoituja alimalleja.

Määritelmä 3.6 (vrt. [1, s. 56])**.** Olkoot $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ malleja. Tällöin malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ alimalli jos

(i) $W' \subseteq W$,

(ii) R' on relaation R rajoittuma joukkoon W', $R' = R \cap (W' \times W')$ ja

(iii) V' on valuaation V rajoittuma malliin $\mathfrak{M}$, $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ *generoitu alimalli*, $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$, jos $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ alimalli ja kaikille $w \in W'$ ja $v \in W'$ pätee: jos w on mallissa $\mathfrak{M}'$ ja wRv, niin tällöin v on mallissa $\mathfrak{M}'$.
Tietyn joukon X generoima alimalli $\mathfrak{M}'$ on pienin mallin $\mathfrak{M}$ generoitu alimalli, jonka maailmojen joukko sisältää joukon X.

Esimerkki 3.3. Olkoon malli $\mathfrak{M} = (\mathbb{Z}, <, V)$. Tällöin alkion 0 generoima alimalli on $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$, jossa $W' = \mathbb{N}$ ja $mR'n$ jos ja vain jos $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m < n$.

Määritelmä 3.7 (vrt. [1, s. 57]). Olkoot $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ malleja. Kuvaus $f : W \to W'$, on *homomorfismi* mallilta $\mathfrak{M}$ mallille $\mathfrak{M}'$, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) Jos $w \in V(p)$, niin $f(w) \in V'(p)$, kun $p \in \Phi$.

(ii) Jos wRu, niin $f(w)R'f(u)$.

Määritelmä 3.8 (vrt. [1, s. 57]). Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ malleja. Kuvaus $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ on *vahva homomorfismi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(i) Jokaiselle propositiosymbolille p ja mallin $\mathfrak{M}$ maailmalle w, $w \in V(p)$ joss $f(w) \in V'(p)$.

(ii) wRu joss $f(w)R'f(u)$.

Jos vahva homomorfismi on bijektiivinen, tällöin kuvaus f on *isomorfismi*. Jos mallit $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ ovat isomorfiset, merkitään $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$.

Määritelmä 3.9 (vrt. [1, s. 57]). Olkoot $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ja $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ malleja. Kuvaus $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ on *p-morfismi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) w ja $f(w)$ toteuttavat samat propositiosymbolit $p \in \Phi$.

(ii) Jos wRv, niin $f(w)R'f(v)$.

(iii) Jos $f(w)R'v'$, niin on olemassa v, jolle wRv ja $f(v) = v'$.

Jos on olemassa surjektiivinen p-morfismi mallilta $\mathfrak{M}$ mallille $\mathfrak{M}'$, niin tällöin malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ *p-morfinen kuva*, $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$.

Lause 3.3. *Olkoot $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ ja $\mathfrak{M}_i$ $(i \in I)$ malleja. Tällöin*

(i) *Jos $f : \mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ on isomorfismi, niin $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', f(w)$.*

(ii) *Kaikille $i \in I$ ja $w \in W_i$, $\mathfrak{M}_i, w \leftrightarroweq \biguplus_i \mathfrak{M}_i, w$.*

(iii) *Jos $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$, niin $\mathfrak{M}', w \leftrightarroweq \mathfrak{M}, w$ kaikille $w \in \mathfrak{M}'$.*

(iv) *Jos $f : \mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$, niin tällöin $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', f(w)$ kaikilla $w \in \mathfrak{M}$.*

Todistus. Todistetaan lauseen jokainen kohta erikseen.

1. Olkoon $f : \mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ isomorfismi. Siis f on bijektio maailmojen välillä, $f : w \to f(w)$, siten, että wRv mallissa $\mathfrak{M}$ jos ja vain jos $f(w)R'f(v)$. Osoitetaan, että kuvaus f on bisimulaatio määritelmän 3.1 nojalla. Kohta (i) on triviaali. Kohdan (ii) osoittamiseksi tarkastellaan paria (w, w'), missä $w' = f(w)$, $w \in W$ ja $w' \in W'$. Olkoon edelleen $v \in W$ siten, että wRv. Tällöin on olemassa oletuksen mukaan $v' \in W'$ siten, että vfv' ja $w'R'v'$. Määritelmän kohta (iii) menee vastaavaan tapaan. Siis kuvaus f on bisimulaatio.

2. (vrt. [1, s. 66]). Määritellään relaatio Z mallien $\mathfrak{M}_i$ ja $\biguplus_i \mathfrak{M}_i$ välille, $Z = \{(w, w) \mid w \in W_i\}$. Tällöin Z on bisimulaatio määritelmän 3.1 kohtien nojalla. Kohta (i) on triviaalisti tosi. Kohtien (ii) ja (iii) osoittamiseksi, valitaan mikä tahansa R-siirtymä mallista $\mathfrak{M}_i$. Tällöin wZw ja wRv, joten on siis olemassa $v' \in \biguplus_i W_i$ siten, että vZv ja $wR'v$, nimittäin $v' = v$. Siis määritelmän 3.1 kohta (ii) on tosi. Jos taas wZw ja $wR'v$, niin on olemassa $v \in W$ siten, että vZv ja wRv. Siis relaatio Z on bisimulaatio.

3. Oletetaan, että $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$, missä malli $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ generoitu alimalli. Määritellään kuvaus $Z = \{(w, w) \mid w \in W'\}$. Tällöin $w \in W'$ ja wRv. Siis $v \in W$ ja $w' \in W$. Osoitetaan, että kuvaus Z on bisimulaatio määrittelemällä kuvaus Z identtiseksi relaatioksi. Määritelmän 3.1 kohta (i) on jälleen triviaalisti tosi. Kohdan (ii) osoittamiseksi on voimassa wZw' ja wRv. On siis olemassa $v' \in W'$ siten, että vZv' ja $w'R'v'$, nimittäin $w' = w$ ja $v' = v$. Siis kohta (ii) on tosi. Kohdan (iii) osoittamiseksi oletetaan, että wZw ja $wR'v$. On siis olemassa $v \in W$ siten, että vZv ja wRv. Siis kuvaus Z on bisimulaatio.

4. Olkoon kuvaus $P : \mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$ p-morfismi. Osoitetaan, että kuvaus P on bisimulaatio. Määritellään kuvaus $Z = \{(w, P(w)) \mid w \in W\}$, missä $P(w) = w'$. Määritelmän 3.9 kohdasta (i) seuraa suoraan bisimulaation määritelmän 3.1 kohta (i). Kohdan (ii) osoittamiseksi määritelmän 3.9 perusteella on voimassa wZw' ja wRv. On siis olemassa $v' \in \mathfrak{M}'$ siten, että vZv' ja $w'R'v'$. Kohta (iii) menee vastaavaan tapaan eli on voimassa wZw' ja $w'R'v'$. On olemassa siis $v \in \mathfrak{M}$ siten, että vZv' ja wRv. Siis kuvaus Z on bisimulaatio.

□

Seurauslause 3.4. Olkoot $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ ja $\mathfrak{M}_i$ $(i \in I)$ malleja.

(i) Olkoot $\mathfrak{M}_i$ erillisiä malleja kaikilla $i \in I$. Tällöin

$$\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi \leftrightsquigarrow \biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi.$$

Siis modaalikaavojen totuus säilyy erillisissä malleissa.

(ii) Olkoon $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$. Tällöin

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w \Vdash \phi.$$

Siis modaalikaavojen totuus säilyy generoidussa alimallissa.

(iii) Olkoon $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$. Tällöin

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi.$$

Siis modaalikaavojen totuus säilyy p-morfismissa.

Todistus. Kohdat (i) - (iii) ovat seurausta lauseista 3.1 ja 3.3. □

4 Äärelliset mallit

Tässä luvussa tutkitaan äärellisen mallin ominaisuutta. Esitetään myös tulos siitä, kuinka filtraation kautta voidaan monimutkaisistakin äärellisistä malleista saada yksinkertaisia.

4.1 Äärellisen mallin ominaisuus

Määritelmä 4.1. Olkoon $\mathfrak{F} = (W, R)$ kehys. *Polku* on jono $\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$, jossa $w_i R w_{i+1}$ tai $w_{i+1} R w_i$. Myös alkioiden toisto on sallittua eli tilanne, jossa $w_i = w_j, i \neq j$, on mahdollinen. *Sykli* on polku, jossa $w_1 = w_n$. Kehys $\mathfrak{F}$ on *puu*, jos siinä ei ole yhtään sykliä.

Määritelmä 4.2 (vrt. [1, s. 62])**.** Malli $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ on *puumainen*, jos kehys (W, R) on puu.

Huomautus 4.1. Seuraava lause osoittaa, että modaalilogiikalla on *puumalli -ominaisuus.*

Lause 4.2. *Kaikille malleille $\mathfrak{M}$ on olemassa puumainen malli $\mathfrak{M}'$ siten, että $\mathfrak{M}' \twoheadrightarrow \mathfrak{M}$. Tästä johtuen mikä tahansa toteutuva kaava on tosi puumaisessa mallissa.*

Todistus (vrt. [1, s. 63]). Olkoon w mallin $\mathfrak{M}$ maailma. Määritellään malli $\mathfrak{M}'$ siten, että sen W' sisältää kaikki äärelliset jonot $(w, u_1, \ldots, u_n)$, joille $n \geq 0$, ja että mallissa $\mathfrak{M}$ pätee $wRu_1 \ldots Ru_n$. Määritellään, että $(w, u_1, \ldots, u_n)R'(w, v_1, \ldots, v_m)$ pätee, jos $m = n + 1, u_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$, ja että $u_n R v_m$ pätee mallissa $\mathfrak{M}$. Toisin sanoen, R' yhdistää kaksi jonoa jos ja vain jos toinen jonoista on ensimmäisen laajennus mallin $\mathfrak{M}$ maailmalla, joka on ensimmäisen jonon viimeisen alkion seuraaja. Viimeiseksi määritellään valuaatio V' siten, että $(w, u_1, \ldots, u_n) \in V'(p)$ jos ja vain jos $u_n \in V(p)$. Kuvaus $f : (w, u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_n$ määrittelee surjektiivisen p-morfismin mallilta $\mathfrak{M}'$ mallille $\mathfrak{M}$, sillä w ja $f(w)$ toteuttavat samat propositiosymbolit ja kaikilla $w \in W$ on olemassa $(w, u_1, \ldots, u_n) \in W'$, jolle $f(w) = (w, u_1, \ldots, u_n)$. Näin ollen mallit $\mathfrak{M}'$ ja $\mathfrak{M}$ ovat ekvivalentit. □

Määritelmä 4.3 (vrt. [1, s. 73])**.** Olkoon $\mathcal{M}$ malliluokka. Modaalisella kielellä $\mathfrak{L}$ on äärellisen mallin $\mathfrak{M}$ ominaisuus, jos seuraava ehto on voimassa:

Jos ϕ on kielen $\mathfrak{L}$ kaava ja ϕ on tosi jossakin mallissa $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$,
niin tällöin ϕ on tosi äärellisessä mallissa $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$.

Lause 4.3. *Oletetaan, että joukko* Φ *on äärellinen. Tällöin*

(i) *Kaikille* n*, loogisen ekvivalenssin tarkkuudella, on olemassa äärellinen määrä kaavoja, jotka ovat astetta* n*.*

(ii) *Mallissa* $\mathfrak{M}$ *ja maailmassa* w *totta olevat kaavat muodostavat kaavajuokon, jonka korkeus on enintään* n *astetta. Tällöin kaikille* n *ja jokaiselle mallille* $\mathfrak{M}$ *ja maailmalle* w*, on olemassa kaava, joka on ekvivalentti kaavajoukon kanssa.*

Todistus (vrt. [1, s. 74]). Todistetaan kohta (i) induktiolla luvun n suhteen.

1. Luvulle $n = 0$ väite on selvä määritelmän 3.2 nojalla, sillä keskenään ei-ekvivalentteja kaavoja on yhtä paljon kuin on totuusfunktioita $f : \{t, e\}^k \to \{t, e\}$, missä $k \in |\Phi|$.

2. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee luvulle n ja osoitetaan, että väite pätee myös luvulle $n + 1$.

3. Havaitaan, että jokainen kaava, jonka aste on $\leq n+1$, on boolen kombinaatio propositiosymboleista ja muotoa $\Diamond\psi$ olevista kaavoista, joille $\deg(\psi) \leq n$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa vain äärellisen monta ei-ekvivalenttia kaavaa ψ. Näin ollen on olemassa vain äärellisen monta ei-ekvivalenttia boolen kombinaatiota propositiosymboleista ja kaavoista $\Diamond\psi$. Koska $\deg(\psi) \leq n$, niin tällöin on olemassa vain äärellisen monta ei-ekvivalenttia kaavaa, joiden aste on enintään $n + 1$.

Kohta (ii) seuraa suoraan kohdasta (i). □

Määritelmä 4.4 (vrt. [1, s. 73])**.** Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ malleja sekä w ja w' maailmoja. Maailmat w ja w' ovat *n-bisimilaariset*, $w \underline{\leftrightarrow}_n w'$, jos on olemassa kaksipaikkaisten relaatioiden jono $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0$ seuraavin ominaisuuksin:

(i) wZ_nw'.

(ii) Jos vZ_0v' niin tällöin v ja v' toteuttavat samat propositiosymbolit.

(iii) Jos $vZ_{i+i}v'$ ja vRu niin tällöin on olemassa u', jolle $v'R'u'$ ja uZ_iu'.

(iv) Jos $vZ_{i+1}v'$ ja $v'Ru'$ niin tällöin on olemassa u, jolle vRu ja uZ_iu'.

Jos $w \underline{\leftrightarrow}_n w'$, niin tällöin maailmat w ja w' ovat bisimilaariset syvyyteen n asti.

Huomautus 4.4. On selvää, että jos $w \leftrightarrows w'$ niin $w \leftrightarrows_n w'$ kaikille n, mutta käänteinen ei päde kaikissa tapauksissa: Jos Z on bisimulaatio siten, että $(w, w') \in Z$, niin tällöin valitsemalla $Z_n = Z$ jokaiselle, jolle $(w, w') \in Z_n$ kaikilla n.

Lause 4.5. *Olkoon Φ äärellinen joukko propositiosymboleja ja olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ malleja. Tällöin kaikille maailmoille $w \in \mathfrak{M}$ ja $w' \in \mathfrak{M}'$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

(i) $w \leftrightarrows_n w'$.

(ii) *w ja w' toteuttavat samat korkeintaan astetta n olevat kaavat.*

Toisin sanoen n-bisimilaarisuus ja modaalinen n-ekvivalenssi yhtyvät relaatioina maailmojen välillä.

Todistus (vrt. [1, s. 75]). Todistetaan implikaatio (i)⇒(ii) induktiolla luvun n suhteen. Oletetaan, että $w \leftrightarrows_n w'$ ja $w \leftrightsquigarrow_n v$.

1. Luvulle $n = i = 0$ väite on selvä, sillä jos wZ_0w', niin w ja w' toteuttavat samat enintään astetta 0 olevat kaavat eli maailmat w ja w' toteuttavat samat propositiosymbolit. Siis määritelmän 4.4 nojalla perusaskel on tosi.

2. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee luvulle $n = i$ ja osoitetaan, että väite pätee myös luvulle $n = i + 1$.

3. Oletetaan, että maailma u toteuttaa mahdollisuusoperaattorilla alkavan kaavan ϕ, joka on korkeintaan astetta $i + 1$. Nyt $\Diamond\phi$ on tosi maailmassa v, eli on siis olemassa $v \in W$, jolle vRu. Tällöin kaavan ϕ aste on korkeintaan i. Induktio-oletuksen nojalla määritelmän 4.4 kohta (iii) on voimassa. On siis olemassa maailma u', jolle $v'R'u'$ ja uZ_iu'. Siis u ja u' toteuttavat samat enintään astetta $n = i + 1$ olevat kaavat.

□

Määritelmä 4.5. Modaalilogiikan mallin *juuri* r on mallin korkein solmu. Malli $\mathfrak{M}$ on *juurellinen*, jos sillä on juuri r. Mallin $\mathfrak{M}$ *korkeus* on pienin n, jolla on olemassa polku $wRu_1Ru_2 \cdots Ru_{n-1}Rv$. Mallin korkeus on 1, jos wRv. Jos arvoa n ei ole, on mallin korkeus ääretön.

Määritelmä 4.6 (vrt. [1, s. 75])**.** Luonnolliselle luvulle k, mallin $\mathfrak{M}$ *rajoittuma* lukuun k, $\mathfrak{M} \upharpoonright k$, määritellään alimallina, joka sisältää ainoastaan maailmat, joiden korkeus on korkeintaan k. Siis

$$(\mathfrak{M} \upharpoonright k) = (W_k, R_k, V_k),$$

missä $W_k = \{v \mid korkeus(v) \leq k\}$, $R_k = R \cap (W_k \times W_k)$ ja kaikille p, $V_k(p) = V(p) \cap W_k$.

Lause 4.6. *Olkoon $\mathfrak{M}$ juurellinen malli, olkoon r sen juuri ja olkoon k luonnollinen luku. Tällöin jokaiselle maailmalle w mallissa $(\mathfrak{M} \upharpoonright k)$ pätee*

$$(\mathfrak{M} \upharpoonright k), w \underline{\leftrightarrow}_l \mathfrak{M}, w, \quad \textit{missä} \quad l \leq k - \textit{korkeus}(w).$$

Todistus (ks. [1, s. 76]). Lause todistetaan induktiolla luvun l suhteen. Todistuksen idea on esitetty kirjan *Modal logic* (Blackburn, de Rijke, Venema) sivulla 76. □

Lause 4.7 (Äärellisen mallin ominaisuus valinnan kautta). *Olkoon ϕ kaava. Jos ϕ on tosi jossakin mallissa, niin tällöin se on tosi myös äärellisessä mallissa.*

Todistus (vrt. [1, s. 76-77]). Oletetaan, että modaaliselle kaavalle ϕ pätee $\deg(\phi) = k$. Olkoon $\mathfrak{M}_1, w_1$ siten, että $\mathfrak{M}_1, w_1 \Vdash \phi$. Lauseen 4.2 nojalla on olemassa puumainen malli $\mathfrak{M}_2$, jolla on juuri w_2 siten, että $\mathfrak{M}_2, w_2 \Vdash \phi$. Olkoon $\mathfrak{M}_3 := (\mathfrak{M}_2 \upharpoonright k)$. Edellisen lauseen 4.6 nojalla $\mathfrak{M}_2, w_2 \underline{\leftrightarrow}_k \mathfrak{M}_3, w_2$ ja lauseen 4.5 nojalla $\mathfrak{M}_3, w_2 \Vdash \phi$. Määritellään maailmojen äärellinen joukko $S_0 \ldots, S_k$ ja malli $\mathfrak{M}_4$, jonka maailmojen joukko on $S_0 \cup \cdots \cup S_k$. Joukon S_n korkeus tulee tällöin olemaan n.

Olkoon S_0 yksiö $\{w_2\}$. Oletetaan sitten, että joukko $S_0 \ldots, S_n$ on jo määritelty. Kiinnitetään joukon S_n alkio. Lauseen 4.3 nojalla on olemassa vain äärellisen monta ei-ekvivalenttia modaalista kaavaa $\psi_1, \ldots \psi_m$, jonka aste on korkeintaan k. Jokaiselle tällaiselle kaavalle, joka on muotoa $\langle a \rangle \chi$ ja joka pätee mallin $\mathfrak{M}_3$ maailmassa v, valitaan maailma u mallista $\mathfrak{M}_3$, jolle $vR_a u$ ja $\mathfrak{M}_3, u \Vdash \chi$. Lisätään kaikki tällaiset maailmat u joukkoon S_{n+1} ja toistetaan tämä valinta jokaisen alkion tapauksessa. Joukko S_{n+1} määritellään kaikkien sellaisten pisteiden joukkona, jotka on valittu kyseisellä tavalla.

Lopuksi määritellään malli $\mathfrak{M}_4$, jonka maailmojen joukko on $S_0 \cup \cdots \cup S_k$. Koska jokainen S_i on äärellinen, myös malli $\mathfrak{M}_4$ on äärellinen. Relaatiot ja valuaatio on saatu rajoittamalla mallin $\mathfrak{M}_3$ relaatiot ja valuaatiot mallin $\mathfrak{M}_4$ maailmojen joukkoon. Nyt voidaan osoittaa, että $\mathfrak{M}_4, w_2 \underline{\leftrightarrow}_k \mathfrak{M}_3, w_2$, sillä $Z_k = (w_2, w_2)$. Tällöin $\mathfrak{M}_4, w_2 \Vdash \phi$. □

4.2 Äärellisen mallin ominaisuus filtraation kautta

Filtraatio on eniten käytetty menetelmä, kun halutaan osoittaa äärellisen mallin ominaisuus modaalilogiikassa. Filtraatio esiteltiin ensimmäisen kerran matemaatikkojen Lemmon ja Scott toimesta. Myöhemmin ruotsalainen matemaatikko Segerberg laajensi filtraation käsitettä, ja matemaatikko Gabbay esitteli *valinnaisen filtraation.* [3, s. 19-20]

Määritelmä 4.7 (vrt. [1, s. 77])**.** Kaavojen joukko Σ on *alikaavasuljettu* jos kaikille kaavoille ϕ, ψ:

- jos $\phi \wedge \psi \in \Sigma$, niin tällöin myös $\phi \in \Sigma$ ja $\psi \in \Sigma$,
- jos $\neg\phi \in \Sigma$, niin tällöin myös $\phi \in \Sigma$ ja
- jos $\Diamond\phi \in \Sigma$, niin tällöin myös $\phi \in \Sigma$.

Määritelmä 4.8 (vrt. [1, s. 77-78])**.** Olkoon $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ malli ja olkoon Σ alikaavasuljettu. Olkoon $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ ekvivalenssirelaatio mallin $\mathfrak{M}$ maailmojen joukossa siten, että

$$w \leftrightsquigarrow_\Sigma v \quad \text{joss kaikille} \quad \phi \in \Sigma : (\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \quad \text{joss} \quad \mathfrak{M}, v \Vdash \phi).$$

Olkoon $W_\Sigma = \{|w|_\Sigma \mid w \in W\}$, missä $|w|_\Sigma$ on maailman w ekvivalenssiluokka relaation $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ suhteen. Olkoon $\mathfrak{M}^f_\Sigma = (W^f, R^f, V^f)$ malli, jolle pätee

(i) $W^f = W_\Sigma$.

(ii) Jos wRv niin $|w|\, R^f\, |v|$.

(iii) Jos $|w|\, R^f\, |v|$, niin tällöin kaikille $\Diamond\phi \in \Sigma$: jos $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, niin $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$.

(iv) $V^f(p) = \{|w| \mid \mathfrak{M}, w \Vdash p\}$ kaikille propositiosymboleille $p \in \Sigma$.

Jos ylläolevat ehdot ovat voimassa, niin tällöin $\mathfrak{M}^f_\Sigma$ on mallin $\mathfrak{M}$ *filtraatio* joukon Σ suhteen.

Huomautus 4.8. Tässä tutkielmassa jätetään alaindeksi Σ pois käsiteltäessä filtraatioita. Siis esimerkiksi $|w|_\Sigma \equiv |w|$.

Lause 4.9. *Olkoon Σ äärellinen alikaavasuljettu joukko modaalisia kaavoja. Jokaiselle mallille $\mathfrak{M}$, jos $\mathfrak{M}^f$ on filtraatio joukon Σ läpi, niin tällöin $\mathfrak{M}^f$ sisältää korkeintaan 2^n maailmaa, missä luku n on joukon Σ koko.*

Todistus (vrt. [1, s. 79]). Mallin $\mathfrak{M}^f$ maailmojen joukko W^f muodostuu ekvivalenssiluokkien joukosta. Olkoon g kuvaus, jonka lähtöjoukko on W_Σ ja maalijoukko $\mathcal{P}(\Sigma)$ määritellään $g(|w|) = \{\phi \in \Sigma \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$. Ekvivalenssirelaation $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ määritelmästä seuraa, että kuvaus g on hyvin määritelty ja injektio. Näin ollen joukon W_Σ koko on korkeintaan 2^n, missä n on joukon Σ koko. □

Lause 4.10 (**Filtraatiolause**)**.** *Olkoon $\mathfrak{M}^f_\Sigma = (W^f, R^f, V^f)$ filtraatio joukon Σ suhteen. Tällöin kaikille kaavoille $\phi \in \Sigma$ ja kaikille solmuille $w \in \mathfrak{M}$, pätee*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \quad \textit{jos ja vain jos} \quad \mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \phi.$$

Todistus (vrt. [1, s. 79]). Todistetaan lause induktiolla kaavan ϕ suhteen.

1. Jos ϕ on propositiosymboli, niin tällöin

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}, w \Vdash p &\Leftrightarrow w \in V(p) \\ &\Leftrightarrow |w| \in V^f(p), \quad \text{sillä} \quad p \in \Sigma \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}^f, |w| \Vdash p.\end{aligned}$$

   Olkoon $\phi = \neg\psi$. Oletetaan, että väite pätee kaavalle ψ. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \nVdash \psi \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}^f, |w| \nVdash \psi \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \neg\psi\end{aligned}$$

   Olkoon $\phi = \psi \wedge \theta$. Oletetaan, että väite pätee kaavoille ψ ja θ. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \wedge \theta &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \quad \text{ja} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \theta \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \psi \quad \text{ja} \quad \mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \theta \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \psi \wedge \theta\end{aligned}$$

2. Oletetaan, että $\Diamond\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalla ϕ. Tällöin on olemassa maailma v siten, että wRv ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Koska $\mathfrak{M}^f$ on filtraatio, niin $|w|\, R^f\, |v|$. Koska Σ on alikaavasuljettu joukko ja $\phi \in \Sigma$, induktio-oletuksen nojalla $\mathfrak{M}^f, |v| \Vdash \Diamond\phi$. Tästä seuraa, että $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \Diamond\phi$.

3. Lauseen toinen suunta todistetaan vastaavaan tapaan. Oletetaan, että $\Diamond\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}^f, |w| \Vdash \Diamond\phi$. Näin ollen on olemassa maailma $|v|$ mallissa $\mathfrak{M}^f$ siten, että $|w|\, R^f\, |v|$ ja $\mathfrak{M}^f, |v| \Vdash \phi$. Koska $\phi \in \Sigma$, induktio-oletuksen nojalla $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Siispä määritelmän 4.8 kohdan (iii) nojalla $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$.

□

Määritelmä 4.9 (vrt. [1, s. 79]). Olkoon $\mathfrak{M}$ malli ja Σ alikaavasuljettu joukko. Määritellään mallin $\mathfrak{M}$ pienin filtraatio R^s ja suurin filtraatio R^l seuraavasti:

(i) $|w|\, R^s\, |v|$ joss $\exists w' \in |w|\, \exists v' \in |v|\; w'Rv'$

(ii) $|w|\, R^l\, |v|$ joss kaikille kaavoille $\Diamond\phi \in \Sigma$: $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi \Rightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$.

Lause 4.11. *Olkoon $\mathfrak{M}$ malli, Σ alikaavasuljettu joukko, sekä joukot W_Σ ja V^f kuten filtraation määritelmässä. Tällöin molemmat mallit (W_Σ, R^s, V^f) ja (W_Σ, R^l, V^f) ovat mallin $\mathfrak{M}$ filtraatioita joukon Σ suhteen. Lisäksi, jos (W_Σ, R^f, V^f) on mikä tahansa mallin $\mathfrak{M}$ filtraatio joukon Σ suhteen, niin tällöin $R^s \subseteq R^f \subseteq R^l$.*

Todistus (vrt. [1, s. 80]). Todistetaan lauseen ensimmäinen väite eli, että malli (W_Σ, R^s, V^f) on filtraatio. Riittää osoittaa, että R^s toteuttaa määritelmän 4.8 kohdan (iii), sillä määritelmän nojalla R^s toteuttaa ehdon (ii) määritelmästä 4.8. Oletetaan, että $|w|\, R^s\, |v|$, $\Diamond\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Koska $|w|\, R^s\, |v|$, on olemassa $w' \in |w|$ ja $v' \in |v|$ siten, että $w'Rv'$. Koska $\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$, niin relaation $v \leftrightsquigarrow_\Sigma v'$ nojalla $\mathfrak{M}, v' \Vdash \phi$. Mutta koska $w'Rv'$, niin $\mathfrak{M}, w' \Vdash \Diamond\phi$. Näin ollen relaation $w \leftrightsquigarrow_\Sigma w'$ nojalla seuraa, että $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$, koska $\Diamond\phi \in \Sigma$. □

Lause 4.12 (**Äärellisen mallin ominaisuus filtraation kautta**). *Olkoon ϕ modaalinen kaava. Jos ϕ on tosi jossakin mallissa, niin tällöin se on tosi myös äärellisessä mallissa, joka sisältää korkeintaan 2^m solmua, missä luku m on kaavan ϕ alikaavojen lukumäärä.*

Todistus (vrt. [1, s. 80]). Olkoon ϕ tosi mallissa $\mathfrak{M}$ ja olkoon (W^f, R^f, V^f) mikä tahansa mallin $\mathfrak{M}$ filtraatio kaavan ϕ alikaavojen joukon läpi. Lauseen 4.10 nojalla ϕ täyttää ehdot filtraatiossa (W^f, R^f, V^f). Filtraation koon yläraja on siis 2^m lauseen 4.9 nojalla. □

Lause 4.13. *Olkoon $\mathfrak{M}$ malli, Σ alikaavasuljettu joukko ja W_Σ kuten filtraation määritelmässä. Olkoon R^t joukon W_Σ kaksipaikkainen relaatio, joka määritellään seuraavasti:*

$$|w|\, R^t\, |v| \text{ joss kaikille } \phi, \text{ jos } \Diamond\phi \in \Sigma \text{ ja } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi \vee \Diamond\phi, \text{ niin } \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi.$$

Jos R on transitiivinen, niin tällöin $\mathfrak{M}' = (W_\Sigma, R^t, V^f)$ on filtraatio ja relaatio R^t on transitiivinen.

Todistus (vrt. [2, s. 106-107]). Osoitetaan, että relaatio R^t on filtraatio ja jos malli $\mathfrak{M}$ on transitiivinen, niin relaatio R^t on transitiivinen.

Osoitetaan ensin, että malli $\mathfrak{M}'$ on transitiivinen. Oletetaan, että $|w|\, R^t\, |v|$ ja $|v|\, R^t\, |x|$, missä w, v ja x ovat mallin $\mathfrak{M}$ maailmoja. Tällöin siis seuraavat ehdot pätevät:

$$\begin{array}{llllll}
(1) & \text{kaikille} & \Diamond\phi \in \Sigma, & \text{jos} & \mathfrak{M}, v \Vdash \phi, & \text{niin} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi, \\
(2) & \text{kaikille} & \Diamond\phi \in \Sigma, & \text{jos} & \mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi, & \text{niin} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi, \\
(3) & \text{kaikille} & \Diamond\phi \in \Sigma, & \text{jos} & \mathfrak{M}, x \Vdash \phi, & \text{niin} \quad \mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi \quad \text{ja} \\
(4) & \text{kaikille} & \Diamond\phi \in \Sigma, & \text{jos} & \mathfrak{M}, x \Vdash \Diamond\phi, & \text{niin} \quad \mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi.
\end{array}$$

On siis osoitettava, että $|w|\, R^t\, |x|$ eli osoitettava seuraavat ehdot:

$$\begin{array}{llllll}
(5) & \text{kaikille} & \Diamond\phi \in \Sigma, & \text{jos} & \mathfrak{M}, x \Vdash \phi, & \text{niin} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi \quad \text{ja} \\
(6) & \text{kaikille} & \Diamond\phi \in \Sigma, & \text{jos} & \mathfrak{M}, x \Vdash \Diamond\phi, & \text{niin} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi.
\end{array}$$

Ehdon (5) osoittamiseksi oletetaan, että $\Diamond\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}, x \Vdash \phi$. Tällöin ehdon (3) perusteella $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi$, ja edelleen ehdon (2) nojalla $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$. Siis

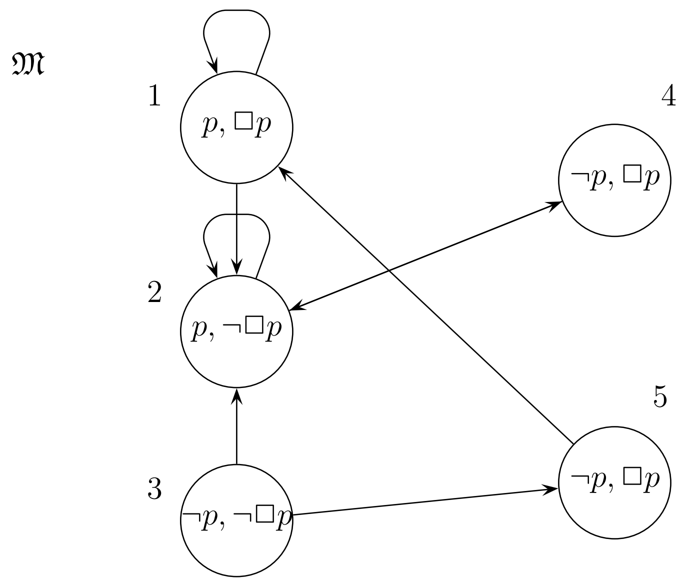
ehto (5) pätee.
Ehdon (6) osoittamiseksi oletetaan, että $\Diamond\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}, x \Vdash \Diamond\phi$. Tällöin ehdon (4) nojalla $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi$ ja edelleen ehdon (2) nojalla $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$. Siis myös ehto (6) on voimassa, joten malli $\mathfrak{M}'$ on transitiivinen.

On vielä osoitettava, että $\mathfrak{M}'$ on transitiivisen mallin $\mathfrak{M}$ filtraatio. Oletetaan, että malli $\mathfrak{M}$ on transitiivinen. Jotta saadaan osoitettua, että $\mathfrak{M}'$ on mallin $\mathfrak{M}$ filtraatio on todettava, että relaatio R^t täyttää määritelmän 4.8 kohdat (ii) ja (iii). Koska oletetaan, että $\Diamond\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi \vee \Diamond\phi$, niin tällöin $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$. Siis määritelmän 4.8 kohta (iii) on voimassa. Riittää siis osoittaa vain kohdan (ii) pätevyys eli, että jos wRv, niin $|w|\, R^f\, |v|$. Toisin sanoen osoitetaan, että ehdot (1) ja (2) kohtaavat.
Ehdon (1) osoittamiseksi oletetaan, että $\Diamond\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Tällöin on olemassa maailma v mallissa $\mathfrak{M}$ siten, että wRv ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \phi$. Siis $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$ eli ehto (1) on voimassa.
Ehdon (2) osoittamiseksi oletetaan, että $\Diamond\phi \in \Sigma$ ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi$. Tällöin on olemassa maailma v mallissa $\mathfrak{M}$ siten, että wRv ja $\mathfrak{M}, v \Vdash \Diamond\phi$. Toisaalta tällöin $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\Diamond\phi$. Koska malli $\mathfrak{M}$ on transitiivinen, niin $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi$, sillä kaava $\Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi$ on validi. Siis $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi$ eli ehto (2) on voimassa. $\square$

Esimerkki 4.1. Olkoon kaava $\phi = \Box p$. Tällöin alikaavasuljettu joukko $\Sigma = \{p, \Box p\}$. Olkoon malli $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, jossa

$$
\begin{aligned}
&W = \{1,2,3,4,5\} \\
&R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,2),(5,1)\} \\
&V(p) = \{1,2\}.
\end{aligned}
$$

Havainnollistetaan mallia kuvion avulla:



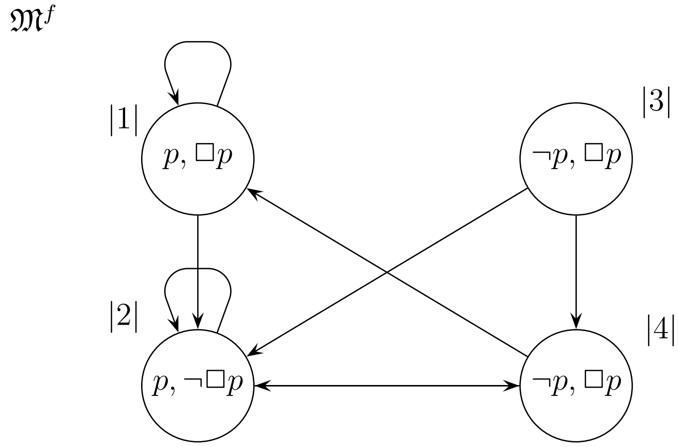
Kun tutkitaan mallin $\mathfrak{M}$ kuviota huomataan, että mallissa on neljänlaisia maailmoja:

- maailma 1, jossa lauseet p ja $\Box p$ ovat tosia
- maailma 2, jossa lauseet p ja $\neg\Box p$ ovat tosia
- maailma 3, jossa lauseet $\neg p$ ja $\neg\Box p$ ovat tosia
- maailmat 4 ja 5, joissa lauseet $\neg p$ ja $\Box p$ ovat tosia

Voidaan siis muodostaa ekvivalenssiluokat $|1|$, $|2|$, $|3|$ ja $|4| = |5|$. Lauseen 4.12 nojalla filtraatiossa on korkeintaan $2^2 = 4$ solmua. Muodostetaan filtraatio $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$, jossa

$$
\begin{aligned}
W^f &= \{|1|, |2|, |3|, |4|\} \\
V^f(p) &= \{|1|, |2|\} \\
R^f &= \{(|1|, |1|), (|1|, |2|), (|2|, |2|), (|2|, |4|), \\
&\quad (|3|, |2|), (|3|, |4|), (|4|, |2|), (|4|, |1|)\}
\end{aligned}
$$

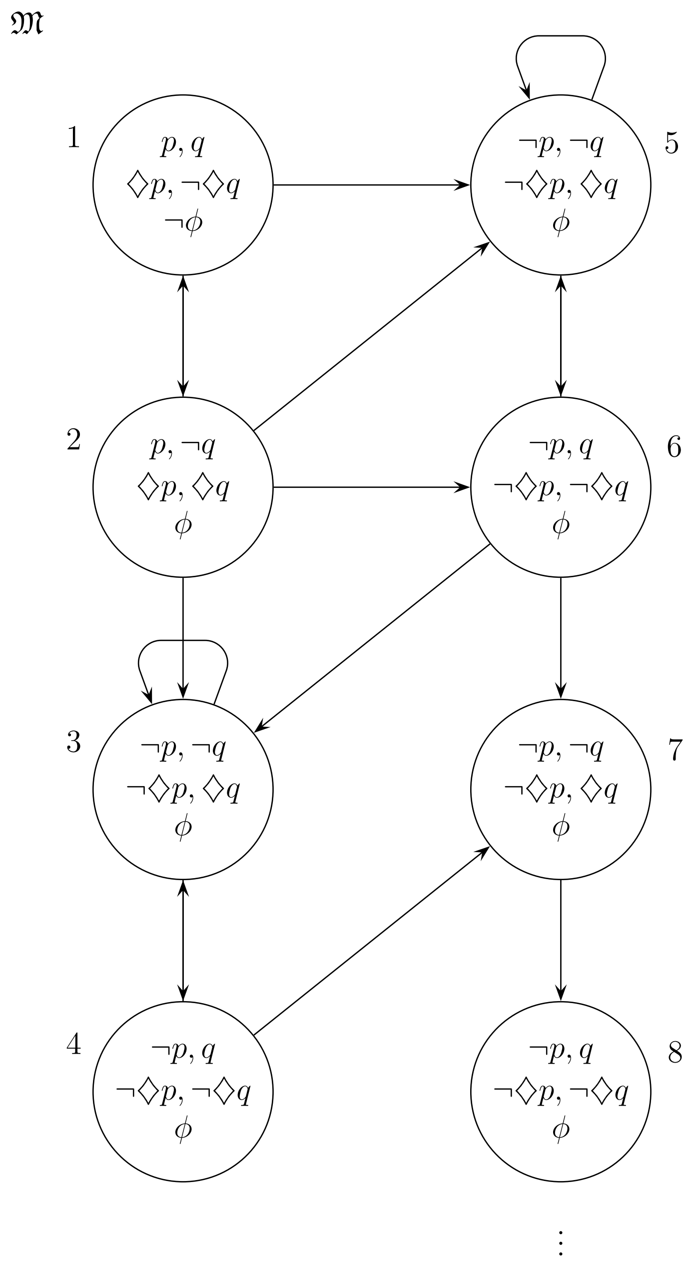
Mallin $\mathfrak{M}^f$ kuvio on siis muotoa:



Esimerkki 4.2. Olkoon kaava $\phi = \Diamond p \to \Diamond q$. Tällöin alikaavasuljettu joukko $\Sigma = \{p, q, \Diamond p, \Diamond q, \Diamond p \to \Diamond q\}$. Olkoon malli $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, jossa

$$\begin{aligned}
&W = \mathbb{Z}_+\\
&R = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),\\
&\qquad (4,3),(4,7),(5,5),(6,3),(6,5)\} \cup \{\, (n, n+1) \mid n \geq 5 \,\},\\
&V(p) = \{1,2\}\\
&V(q) = \{1\} \cup \{4,6,8,\ldots\}
\end{aligned}$$

Modaalilogiikan lainalaisuuksien sekä huomautuksen 2.5 perusteella saadaan mallille $\mathfrak{M}$ seuraava kuvio:



Huomataan, että mallissa $\mathfrak{M}$ on neljänlaisia maailmoja:

- maailma 1, jossa lauseet p, q, $\Diamond p$, $\neg\Diamond q$ ja $\neg\phi$ ovat tosia
- maailma 2, jossa lauseet p, $\neg q$, $\Diamond p$, $\Diamond q$ ja ϕ ovat tosia
- maailmat 3, 5, 7, ... joissa lauseet $\neg p$, $\neg q$, $\neg\Diamond p$, $\Diamond q$ ja ϕ ovat tosia

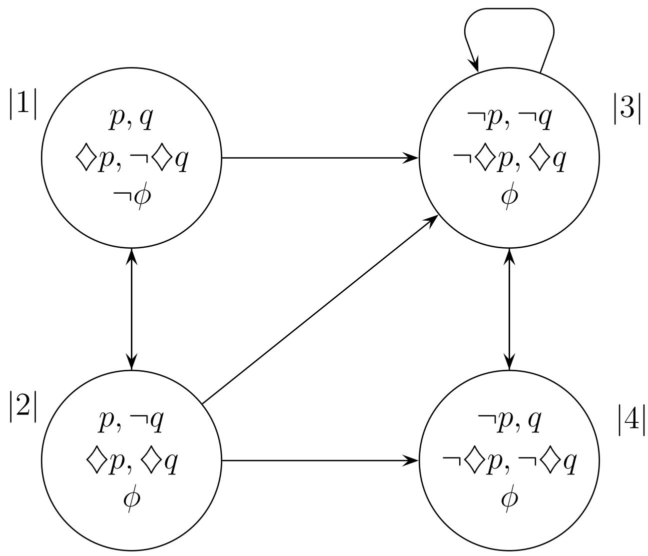
- maailmat 4, 6, 8, … joissa lauseet $\neg p$, q, $\neg\Diamond p$, $\neg\Diamond q$ ja ϕ ovat tosia

Voidaan siis muodostaa ekvivalenssiluokat $|1|$, $|2|$, $|3| = |5| = |7| = \cdots$ ja $|4| = |6| = |8| = \cdots$. Lauseen 4.12 nojalla fltraatiossa on korkeintaan $2^5 = 32$ solmua. Muodostetaan filtraatio $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$, jossa

$W^f = \{|1|, |2|, |3|, |4|\}$
$V^f(p) = \{|1|, |2|\}$
$V^f(q) = \{|1|, |4|\}$
$R^f = \{(|1|, |2|), (|1|, |3|), (|2|, |1|), (|2|, |3|), (|2|, |4|), (|3|, |3|), (|3|, |4|), (|4|, |3|)\}$

Mallin $\mathfrak{M}^f$ kuvio on siis muotoa:

$\mathfrak{M}^f$



Edellä olevista esimerkeistä huomataan, että filtraatioiden avulla äärellisistä malleista saadaan varsin yksinkertaisia.

Viitteet

[1] Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y. *Modal Logic.* 1st ed., Cambridge University Press, Cambridge UK, 2001.

[2] Chellas, B. F. *Modal Logic: an introduction.* 1st ed., Cambridge University Press, Cambridge USA, 1980.

[3] Goranko, V., Otto, M. *Model theory of modal logic*, http://www.scribd.com/doc/60162505/14/Finite-model-property

[4] Karvonen, S. *Bisimulaatiosta*, 11.10.2002, http://mtl.uta.fi/Opetus/seminaarit/logiikka/0203/bisimulaatio_esitelma111002.pdf

[5] Rantala, V., Virtanen, A. *Johdatus modaalilogiikkaan.* 1. painos, Gaudeamus, Helsinki, 2004.