TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Jevgeni Haigora

Pakottamismenetelmästä

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Joulukuu 2011

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

HAIGORA, JEVGENI: Pakottamismenetelmästä

Pro gradu -tutkielma, 87 s.

Matematiikka

Joulukuu 2011

Tiivistelmä

Pakottamismenetelmä on joukko-opillinen menetelmä, jonka kehitti yhdysvaltalainen matemaatikko Paul Cohen 1960-luvulla muun muuassa sen todistamiseksi, että kontinuumhypoteesia ei voi johtaa ZFC-aksioomista. Se osoittautui hyvin tehokkaaksi välineeksi, jonka avulla todistettiin lukuisia samantyyppisiä riippumattomuustuloksia.

Tämän tutkielman tavoitteena on pakottamismenetelmän esitteleminen, johon kuuluu *numeroituvan transitiivisen* ZFC-*mallin* M laajentaminen suuremmaksi ZFC-malliksi $M[G]$ siten, että saadun laajennuksen ominaisuuksia voidaan tutkia. Tämä onnistuu lähtemällä liikkeelle osittain järjestetystä joukosta $P \in M$, jota kutsumme *pakotuskäsitteeksi.* Osoitamme, että joukolla P on olemassa M*-geneerinen filtteri* G, joka ei ole välttämättä mallin M joukko, ja esittelemme keinon, jolla voimme laajentaa malli M joukon G sisältäväksi ZFC-malliksi $M[G]$, jossa lauseiden totuusarvot määräytyvät valitun pakotuskäsitteen P mukaan. Valitsemmalla sopiva pakotuskäsite voimme siis muodostaa ZFC-mallin, jolla on halutut ominaisuudet. Tutkielmassa muodostamme ZFC-mallin, jossa kontinuumhypoteesi on epätosi, mistä seuraa, että kontinuumhypoteesia ei voi johtaa ZFC-aksioomista, jos ne ovat ristiriidattomia.

Luvussa 2 esittelemme transitiivisia malleja koskevaa teoriaa ja perustelemme sen, miksi voimme olettaa, että numeroituva transtiivinen ZFC-malli on olemassa siitä huolimatta, että sen olemassaoloa ei voi todistaa (ZFC:ssä).

Pakottamismenetelmän esittelyä voidaan lähestyä eri tavoin. Täman tutkielman lähestymistapa perustuu Boolen arvoisten mallien käyttöön, joita käsittelemme luvussa 3.

Asiasanat: pakottamismenetelmä, suhteellinen ristiriidattomuus, kontinuumhypoteesi, Boolen arvoiset mallit, ZFC-aksioomat.

Sisältö

1 Johdanto

Matematiikan muodollisen perustan luomiseen liittyvät kysymykset olivat erityisesti 1900-luvun alussa yksi matemaattisen tutkimuksen keskeisimmistä kohteista, jotka eivät edelleenkään menettäneet merkitystään. 1920-luvulla saksalainen matemaatikko David Hilbert esitti ohjelmansa, jonka tavoitteena oli löytää sellainen ristiriidaton ja täydellinen aksioomajärjestelmä, joka voisi toimia perustana koko matematiikalle. Järjestelmän täydellisyydellä tarkoitetaan sitä, että jokaisella matemaattisella lauseella on totuusarvo tässä järjestelmässä. Tämä tavoite osoittautui kuitenkin mahdottomaksi, kun Kurt Gödel todisti vuonna 1931 kaksi *epätäydellisyyslauseiksi* kutsuttua lausetta. Ensimmäisen epätäydellisyyslauseen mukaan jokaisella aritmetiikan tulkintaa sisältävällä ristiriidattomalla aksiomaattisella järjestelmällä T, jonka lauseet ovat lueteltavissa jollakin algoritmilla, on olemassa tämän järjestelmän kielellä ilmaistavissa olevia väitteitä, joiden totuusarvon määrittäminen järjestelmän T sisällä on mahdotonta. Sanomme, että silloin lause on *riippumaton* järjestelmän T aksioomeista. Toinen epätäydellisyyslause taas sanoo, että tällainen järjestelmä ei pysty todistamaan omaa ristiriidattomuuttaan, jos se on ristiriidaton.

Nykyään tunnetuin ja käytetyin matematiikan perustana toimiva aksioomajärjestelmä on ZFC -niminen predikaattilogiikan lauseiden joukko. Sen nimi on lyhenne, joka tarkoittaa *Zermelo-Fraenkelin aksioomeja* (ZF), joihin on lisätty *valinta-aksiooma*. Siitä huolimatta, että ZFC:tä pidetään yleensä tarpeeksi vahvana teoriana matematiikan formalisoinniksi, on todistettu lukuisia joukko-opillisia tuloksia, joiden mukaan jotakin tiettyä lausetta on mahdotonta johtaa ZFC-aksioomeista, mikäli ZFC on ristiriidaton. Yksi tällaisista tuloksista on *kontinuumhypoteesin* (CH) riippumattomuus.

Kontinuumhypoteesi on väite, jonka mukaan ei ole olemassa joukkoa, jonka mahtavuus on aidosti suurempi kuin kaikkien luonnollisten lukujen joukon mahtavuus ja aidosti pienempi kuin kaikkien reaalilukujen joukon (luonnollisten lukujen potenssijoukon) mahtavuus eli

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Merkintä $\mathrm{Con}(T)$ tarkoittaa väitettä, että teoria T on *ristiriidaton*. Sen, että

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH}),$$

(mistä seuraa heti, että lausetta $\neg\,\mathrm{CH}$ ei voi johtaa ZFC-aksioomeista, jos ZFC on ristiriidaton) on todistanut Kurt Gödel vuonna 1938 hänen keksimänsä *konstruoituvan universumin* avulla. Samoin Gödel todisti myös sen, että

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}).$$

Sen, että

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg\,\mathrm{CH})$$

osoitti yhdysvaltalainen matemaatikko Paul Cohen vuonna 1963 hänen kehittämänsä *pakottamismenetelmän* (eng. *forcing*) avulla.

Tämän tutkielman tavoitteena on pakottamismenetelmän esitteleminen. Pakottamismenetelmä on joukko-opillinen menetelmä, jonka Cohen kehitti 1960-luvulla muun muassa sen todistamiseksi, että kontinuumhypoteesia ei voi johtaa ZFC-aksioomista. Se osoittautui hyvin tehokkaaksi välineeksi, jonka avulla todistettiin useita riippumattomuustuloksia. Tutkielmassa rajoitamme pakottamismenetelmän esittelyä sen verran, että pystymme osoittamaan sen avulla, että lausetta $\neg\,\mathrm{CH}$ ei voi johtaa ZFC-aksioomista, jos ne ovat ristiriidattomia.

Pakottamismenetelmän esittelyä on mahdollista lähestyä eri tavoin (ks. [3, s. 232]). Tutkielmassamme käytämme Robert Solovayn vuonna 1965 keksimää Boolen arvoisiin malleihin perustuvaa lähestymistapaa, joka on yhtäpitävä Cohenin alkuperäisen menetelmän kanssa, eli niillä molemmilla voidaan todistaa täsmälleen samat tulokset. Boolen arvoiset mallit saattavat tarjota intuitiivisesti selkeämmän tavan pakottamismenetelmän esittelemiseksi Cohenin alkuperäiseen menetelmään verrattuna.

Lähestymistapamme toinen tärkeä piirre on transitiivisten mallien käyttö. Esittelemme tämän tutkielman kannalta oleelliset malliteoriaan kuuluvat määritelmät ja tulokset luvussa 2. Osoitamme muun muassa, että jokaisella äärellisellä ZFC-aksioomien joukolla voidaan todistaa ZFC:ssä näitä aksioomeja toteuttavan numeroituvan transitiivisen mallin olemassaolon, mikä mahdollistaa tutkielmassa kuvatun transitiivisiin malleihin perustuvan lähestymistavan käyttämisen. Lopuksi perustelemme sen, miksi voimme olettaa, että numeroituva transitiivinen ZFC-malli on olemassa siitä huolimatta, että tällaisen mallin olemassaoloa ei voi todistaa.

Luku 3 sisältää Boolen arvoisia malleja koskevaa teoriaa. Ensin määrittelemme Boolen arvoisen mallin käsitteen ja esittelemme siihen liittyviä tuloksia, joita tulemme tarvitsemaan myöhemmin. Tämän jälkeen kuvaamme Boolen arvoisen mallin $M^{(B)}$ muodostamista transitiivisen ZFC-mallin M ja *mallissa* M *täydellisen* Boolen algebran B avulla ja tarkastelemme sen ominaisuuksia. Lopuksi todistamme, että $M^{(B)}$ toteuttaa kaikki ZFC-aksioomat.

Luvussa 4 esittelemme transitiivisen ZFC-mallin $M[U]$ muodostamista Boolen arvoisen mallin $M^{(B)}$ ja Boolen algebran B *M-geneerisen ultrafiltterin* U avulla, ja osoitamme muun muassa, että $M[U]$ on pienin mallin M laajennus, joka sisältää joukon U. Koska usein $U \notin M$, niin sanomme, että $M[U]$ on mallin M *generinen laajennus*, joka on saatu lisäämällä malliin M *uusi* joukko U. Mallin $M[U]$ ominaisuudet riippuvat sitten algebran

B valinnasta. Osoitamme, että geneeristä laajennusta muodostaessa voimme lähteä liikkeelle mallin M osittain järjestetystä joukosta P, jota kutsumme *pakotuskäsitteeksi*. Valitsemalla sopiva pakotuskäsite voimme muodostaa sitä vastaavan Boolen algebran ja sen kautta geneerisen laajennuksen, jonka ominaisuuksia voidaan tutkia tämän pakotuskäsitteen avulla.

Kuten tulemme näkemään, ZFC-mallilla M ja sen geneerisellä laajennuksella $M[U]$ on samat ordinaalit. Mallin M kardinaali ei ole kuitenkaan välttämättä kardinaali mallissa $M[U]$, mikä johtuu siitä, että laajennuksessa $M[U]$ saattaa olla uusia bijektioita mallin M kardinaalin ja sitä pienemmän ordinaalin välillä. Käsittelemme tätä aihetta tarkemmin luvussa 5, jonka tuloksia tulemme tarvitsemaan myöhemmin luvussa 6, jossa esittelemme uusia luonnolisten lukujen joukkoja sisältävän geneerisen laajennuksen muodostamista. Näitä joukkoja kutsutaan *Cohenin reaaleiksi*. Osoitamme, että geneerinen laajennus voi sisältää niin paljon uusia reaaleja, että kontinuumhypoteesi on epätosi siinä.

Tutkielman päälähteinä käytimme seuraavia teoksia. ZFC-aksioomien äärellisten fragmenttien mallien käyttöön perustuva lähestymistapa pohjautuu K.Kunenin kirjaan *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Kuvaamme tätä lähestymistapaa luvussa 2. Luvut 3 ja 4 perustuvat J. L. Bellin kirjaan *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, joka käsittelee pakottamismenetelmää Boolen arvoisten malleihin perustuvan lähestymistavan näkökulmasta. Lukujen 5 ja 6 sisältämä tieto on otettu T. Jechin kirjasta *Set Theory, 3rd edition*, joka käsittelee joukko-oppia yleisesti.

Oletamme, että lukija hallitsee hyvin aksiomaattisen joukko-opin perusteet, kuten ordinaali- ja kardinaalilukujen määritelmät ja niiden perusominaisuudet.

2 Malliteoriaa

Tässä luvussa esittelemme jatkon kannalta tarpeellista logiikkaa ja malliteoriaa koskevaa tietoa.

2.1 Kieli, kaava, malli

Määritelmä 2.1. *Kieli* $\mathcal{L}$ on symbolien joukko, joka koostuu relaatio-, funktio- ja vakiosymboleista:

$$\mathcal{L} = \{R, \dots, F, \dots, c, \dots\}.$$

Jokaiseen relaatio- ja funktiosymboliin liittyy luonnollinen luku n, sen *paikkaluku.*

Määritelmä 2.2. Kielen $\mathcal{L}$ *kaavat* ovat ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kielioppisääntöjen mukaan rakennettuja äärellisiä merkkijonoja, jotka koostuvat kieli- ja logiikkasymboleista. Oletamme, että lukija tuntee nämä säännöt. *Lause* on kaava, jossa ei esiinny vapaita muuttujia. Kutsumme kielen $\mathcal{L}$ kaavoja ja lauseita $\mathcal{L}$*-kaavoiksi* ja $\mathcal{L}$*-lauseiksi.*

Määritelmä 2.3. Olkoon ϕ $\mathcal{L}$-kaava. Merkintä $\phi(x_1, \dots, x_n)$ tarkoittaa sitä, että kaavan ϕ kaikki vapaat muuttujat kuuluvat joukkoon $\{x_1, \dots, x_n\}$. Silloin eivät kuitenkaan välttämättä kaikki muuttujat $x_1, \dots, x_n$ ole kaavan ϕ vapaita muuttujia.

Määritelmä 2.4. Olkoon A joukko. Merkintä $\mathcal{L}(A)$ tarkoittaa kieltä, joka on saatu lisäämällä kieleen $\mathcal{L}$ vakiot c_a jokaisella $a \in A$. Samaistamme nämä vakiot niitä vastaavien alkioiden kanssa ja merkitsemme $c_a = a$ jokaisella $a \in A$.

Määritelmä 2.5. Olkoon A joukko. Olkoon $\phi(x_1, \dots, x_n)$ $\mathcal{L}$-kaava ja $a_1, \dots, a_n \in A$. Merkintä $\phi(a_1, \dots, a_n)$ tarkoittaa kielen $\mathcal{L}(A)$ lausetta, joka on saatu korvaamalla $\mathcal{L}$-kaavan muuttujat $x_1, \dots, x_n$ kielen $\mathcal{L}(A)$ vakioilla $a_1, \dots, a_n$.

Muistutamme lukijaa, että kaikki ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kaavat voidaan ilmaista muun muuassa käyttämällä pelkästään konnektiiveja $\wedge$ ja $\neg$ ja kvanttoria $\exists$.

Määritelmä 2.6. Kielen $\mathcal{L}$ *malli* on pari $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$, missä A on joukko, jota kutsutaan mallin *perusjoukoksi*; ja I on *tulkintafunktio*, joka on funktio kieleltä $\mathcal{L}$ siten, että $I(R) \subset A^n$, kun R on n-paikkainen relaatiosymboli; $I(F)$ on funktio $A^n \to A$, kun F on n-paikkainen funktiosymboli; ja $I(c) \in A$, kun c on vakiosymboli.

Jos kieli $\mathcal{L}$ on numeroituva, niin $\mathcal{L}$-mallista $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ voidaan käyttää merkintää

$$\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}}, \dots, F^{\mathfrak{A}}, \dots, c^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle,$$

missä $X^{\mathfrak{A}} = I(X)$ kaikilla $X \in \mathcal{L}$.

Määritelmä 2.7. Oletamme, että lukija tietää, miten määritellään lauseen σ totuusarvo mallissa $\mathfrak{A}$. Merkitsemme

$$\mathfrak{A} \models \sigma,$$

jos lause σ on tosi mallissa $\mathfrak{A}$.

Määritelmä 2.8. Olkoon $\mathcal{L}$ kieli. Kutsumme joukkoa T, jonka alkiot ovat $\mathcal{L}$-lauseita, *$\mathcal{L}$-teoriaksi*. Kutsumme teorian lauseita *aksioomeiksi*. Sanomme, että $\mathcal{L}$-malli $\mathfrak{A}$ on $\mathcal{L}$-teorian T *malli*, jos jokaisella $\sigma \in T$ pätee

$$\mathfrak{A} \models \sigma.$$

Merkitsemme silloin

$$\mathfrak{A} \models T.$$

Oletamme, että lukija tuntee ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan *muodollisen päättelyn* sääntöjä.

Määritelmä 2.9. Olkoon T $\mathcal{L}$-teoria ja σ $\mathcal{L}$-lause. Merkintä

$$T \vdash \sigma$$

tarkoittaa sitä, että σ voidaan päätellä muodollisesti teoriasta T. Sanomme, että σ on teorian T *looginen seuraus* ja merkitsemme

$$T \Rightarrow \sigma,$$

jos kaikilla $\mathcal{L}$-malleilla $\mathfrak{A}$ on voimassa $\mathfrak{A} \models \sigma$ aina, kun $\mathfrak{A} \models T$.

Lause 2.1 (Predikaattilogiikan eheyslause)**.** *Olkoon T $\mathcal{L}$-malli ja σ $\mathcal{L}$-lause. Silloin, jos $T \vdash \sigma$, niin $T \Rightarrow \sigma$.*

Todistus. Ks. [4, s. 99]. □

Määritelmä 2.10. Sanomme, että $\mathcal{L}$-teoria T on *ristiriidaton* ja merkitsemme $\mathrm{Con}(T)$, jos ei ole olemassa sellaista $\mathcal{L}$-lausetta ϕ, että $T \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Muuten T on *ristiriitainen*.

Lause 2.2 (Gödelin täydellisyyslause)**.** *$\mathcal{L}$-Teoria T on ristiriidaton, jos ja vain jos sillä on olemassa malli.*

Todistus. Ks. [4, s. 110]. □

Seuraus 2.3. *Olkoon T $\mathcal{L}$-malli ja σ $\mathcal{L}$-lause. Silloin*

$$T \vdash \sigma, \textit{ jos ja vain jos } T \Rightarrow \sigma.$$

Todistus. Väitteen toinen suunta on preidikaattilogiikan eheyslause (lause 2.1). Toinen suunta seuraa Gödelin täydellisyyslauseesta. (Tarkemmin kirjassa [4, s. 111].) □

2.2 ZFC-aksioomat

Määritelmä 2.11. Kutsumme kieltä $\mathcal{L} = \{\in\}$, missä $\in$ on 2-paikkainen relaatiosymboli, *joukko-opin kieleksi.* Kutsumme $\mathcal{L}$-kaavoja ja $\mathcal{L}$-lauseita lyhyemmin *kaavoiksi* ja *lauseiksi.*

ZFC (*Zermelo-Fraenkelin aksioomat + valinta-aksiooma*) on joukko-opin kielen ääretön teoria, jonka lauseita kutsumme ZFC-*aksioomeiksi.* ZFC aksiomatisoi joukon käsitettä ja toimii yhtenä mahdollisena matematiikan muodollisena perustana, jossa ZFC-aksioomat oletetaan tosiksi ja kaikki muut tulokset johdetaan niistä. Tällä hetkellä ZFC vaikuttaa olevan tunnetuin, käytetyin ja tutkituin matematiikan aksiomatisointi. Esitämme tässä aliluvussa ZFC-aksioomien täsmälliset määritelmät, joita tulemme tarvitsemaan myöhemmin.

Määritelmä 2.12. Lause σ on ZFC-*teoreema*, jos ZFC $\vdash \sigma$.

Luonnollisella kielellä esitetty ZFC-teoreeman todistus on periaatteessa voitava esittää muodollisesti predikaattilogiikan kielellä, mutta käytännössä yleensä näin ei tehdä, koska ihmisen on vaikeaa käsitellä muodollista tekstiä. Kaikkia matemaattisia tai matematiikkaan liittyviä, erityisesti sen perusteita koskevia, tarkasteluja ei välttämättä voi formalisoida ZFC:ssä. Kutsumme tällaisia tarkasteluja *metamatemaattisiksi.*

Vaikka matemaattinen todistus on luonteeltaan syntaktinen, näemme joukko-opin kielen kaavat *kaikkien joukkojen universimia* koskevina väitteinä. Koska näiden kaavojen tarkoituksena on myös kuvata matematiikkaa yleisesti, niin jokainen (muodollinen) matemaattinen objekti voidaan nähdä siis joukkona. Gödelin täydellisyyslauseen mukaan, jos ZFC on ristiriidaton, niin sillä on malli, joten on perusteltua puhua universumista, jota ZFC kuvaa.

Määritelmä 2.13. Kutsumme kielen $\{\in\}$ mallia, joka toteuttaa ZFC-aksioomia ZFC-*malliksi.*

Gödelin epätäydellisyyslauseen mukaan, jos ZFC on ristiriidaton, niin sitä, että ZFC on ristiriidaton (eli ZFC-malli on olemassa) ei voi johtaa ZFC-aksioomista.

Seurauksen 2.3 perusteella lause σ on ZFC-teoreema, jos ja vain jos se on tosi jokaisessa ZFC-mallissa.

ZFC-aksioomat ovat seuraavat joukko-opin kielen lauseet, missä erottelu- ja korvausaksioomat ovat aksioomaskeemoja, joissa jokaista skeemassa käytettyä kaavaa ϕ kohti on oma aksiooma.

1. *Ekstensionaalisuusaaksiooma*

   $$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

2. *Erotteluaksioomat*

   $$\forall p \forall u \exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow x \in u \land \phi(x, p)),$$

   missä $\phi(x, p)$ on kaava.

3. *Korvausaksioomat*

   $$\begin{aligned} &\forall p (\forall x \forall y \forall z (\phi(x, y, p) \land \phi(x, z, p) \to y = z) \\ &\quad \to \forall u \exists v \forall y (y \in v \leftrightarrow \exists x \in u \phi(x, y, p))), \end{aligned}$$

   missä $\phi(x, y, p)$ on kaava.

4. *Yhdisteaksiooma*

   $$\forall u \exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow \exists y \in u (x \in y)).$$

5. *Potenssijoukkoaksiooma*

   $$\forall u \exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow \forall y \in x (y \in u)).$$

6. *Äärettömyysaksiooma*

   $$\exists u (\emptyset \in u \land \forall x \in u \exists y \in u (x \in y)).$$

7. *Säännöllisyysaksiooma*

   $$\forall u (u \neq \emptyset \to \exists y \in u \forall z \in y (z \notin u)).$$

8. *Valinta-aksiooma*

   $$\forall x \exists f (\mathrm{Fun}(f) \land \mathrm{dom}(f) = x \land \forall y \in x (y \neq \emptyset \to f(y) \in y),$$

   missä $\mathrm{Fun}(f)$ tarkoittaa kaavaa f *on funktio.*

2.3 Luokat ja hyvinperustetut relaatiot

Luokka A on kaikkien jonkin kaavan $\phi(x, p_1, \ldots, p_n)$ toteuttavien joukkojen kokoelma eli toisin sanoen $A = \{x : \phi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$ jollakin kaavalla ϕ, joka voi sisältää myös parametreja eli muita vapaita muuttujia muuttujan x lisäksi. Luokka on epämuodollinen käsite, jota ei voi formalisoida ZFC:ssä. Käytämme luokkia silloin, kun on selkeämpää puhua joukkojen kokoelmista kuin kaavoista.

Kun puhume luokasta, viittaamme siis johonkin kaavaan. Esimerkiksi, kun sanomme *"olkoon A luokka ja $a \in A$"*, niin se tarkoittaa lausetta *"olkoon $\phi(x, p_1, \ldots, p_n)$ kaava ja a sellainen, että $\phi(a, p_1, \ldots, p_n)$"*. Jokaista joukkoa x voi nähdä luokkana, koska $x = \{y : y \in x\}$. Kutsumme luokkaa, joka ei ole joukko, *aidoksi* luokaksi. Voimme määritellä myös joukko-opilliset operaatiot, relaatiot ja funktiot luokissa luonnollisella tavalla. Esimerkiksi, kun A ja B ovat luokkia, niin $A \cup B$ on seuraava luokka:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Määrittelemme nyt seuraavat luokat, joita tulemme käyttämään myöhemmin:

$$V = \{x : x = x\};$$
$$\mathrm{ORD} = \{x : x \text{ on ordinaali}\}.$$

Määritelmä 2.14. Olkoon C luokka ja $E \subset C \times C$ relaatio luokassa C. Merkitsemme jokaisella $x \in C$

$$\mathrm{ext}_E(x) = \{z \in C : \langle z, x \rangle \in E\}.$$

Määritelmä 2.15. Olkoon C luokka ja $E \subset C \times C$ relaatio luokassa C. Sanomme, että a on luokan $A \subset C$ *E-minimaalinen* alkio, mikäli $a \in A$ ja kaikilla $x \in A$ pätee $\langle x, a \rangle \notin E$.

Määritelmä 2.16. (Vrt. [2, s. 67]). Olkoon C luokka. Relaatio $E \subset C \times C$ on *hyvinperustettu*, jos

1. jokaisella epätyhjällä joukolla $x \subset C$ on olemassa E-minimaalinen alkio;
2. jokaisella $x \in C$ luokka $\mathrm{ext}_E(x)$ on joukko.

Esimerkki 2.1. Olkoon C luokka. Silloin

$$E = \{\langle x, y \rangle \in C \times C : x \in y\}$$

on hyvinperustettu relaatio, koska jokaisella $x \subset C$ on olemassa E-minimaalinen alkio säännöllisyysaksiooman perusteella (ks. [2, s. 64]), ja $\mathrm{ext}_E(y) \subset y$ kaikilla $y \in C$.

Lause 2.4. *Olkoon C luokka ja $E \subset C \times C$ hyvinperustettu relaatio. Silloin jokaisella luokalla $D \subset C$ on olemassa E-minimaalinen alkio.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 67]). Olkoon $S \in D$. Jos $\mathrm{ext}_E(S) \cap D = \emptyset$, niin S on luokan D E-minimaalinen alkio. Oletamme nyt, että $\mathrm{ext}_E(S) \cap D \neq \emptyset$. Olkoon $X = T \cap D$, missä

$$T = \bigcup_{n \in \omega} S_n$$

ja

$$S_0 = \mathrm{ext}_E(S), S_{n+1} = \bigcup \{\mathrm{ext}_E(z) \colon z \in S_n\}, \text{ kun } n \in \omega.$$

Koska E on hyvinperustettu, niin $\mathrm{ext}_E(z)$ on joukko kaikilla $z \in C$, joten jokaisella $n \in \omega$ luokka S_n on joukko, mistä seuraa, että T on myös joukko. Nyt, koska $X = \{z \in T \colon z \in D\}$, niin X on joukko erään erotteluaksiooman perusteella, joten sillä on olemassa E-minimaalinen alkio x. Koska $x \in T$, niin $x \in S_n$ jollakin $n \in \omega$. Jos olisi sellainen $y \in D$, että $\langle y, x \rangle \in E$, niin olisi $y \in S_{n+1}$ ja edelleen $y \in X$, jolloin x ei olisi joukon X E-minimaalinen alkio. Näin ollen x on myös luokan D E-minimaalinen alkio. $\square$

Lause 2.5 (Induktioperiaate)**.** *Olkoon P luokka ja $E \subset P \times P$ hyvinperustettu relaatio. Olkoon $\phi(x)$ sellainen kaava, että kaikilla $x \in P$ ehdosta*

$$\forall z \in \mathrm{ext}_E(x) \phi(z)$$

seuraa $\phi(x)$. Silloin $\phi(x)$ pätee kaikilla $x \in P$.

Todistus. Olkoon $C = \{x \in P \colon \neg\phi(x)\}$. Teemme vastaoletuksen, että $C \neq \emptyset$. Olkoon a luokan C E-minimaalinen alkio. Silloin kaikilla $z \in \mathrm{ext}_E(a)$ pätee $\phi(z)$, joten oletuksen perusteella $\phi(a)$ on voimassa, mikä on ristiriita. Näin ollen $C = \emptyset$ eli

$$\forall x (x \notin C),$$

mistä seuraa

$$\forall x (x \notin P \vee \phi(x))$$

ja edelleen

$$\forall x (x \in P \to \phi(x)).$$

$\square$

Lause 2.6 (Rekursioperiaate)**.** *Olkoon P luokka ja $E \subset P \times P$ hyvinperustettu relaatio. Olkoon G funktio luokalta $V \times V$. Silloin on olemassa yksikäsitteinen funktio F luokalta P siten, että*

$$F(x) = G(x, F \restriction \mathrm{ext}_E(x))$$

kaikilla $x \in P$.

Todistus. (Vrt. [2, s. 68]). Olkoon H luokka, joka koostuu kaikista funktioista f, joilla

1. $\mathrm{dom}(f) \subset P$;

2. aina, kun $x \in \mathrm{dom}(f)$, niin $\mathrm{ext}_E(x) \subset \mathrm{dom}(f)$;

3. kaikilla $x \in \mathrm{dom}(f)$ pätee $f(x) = G(x, f \restriction \mathrm{ext}_E(x))$.

Merkitsemme $F = \bigcup H$.

Osoitamme ensin, että F on funktio. Olkoon $x \in \mathrm{dom}(F)$. Teemme induktio-oletuksen, että kaikilla $z \in \mathrm{ext}_E(x)$ pätee

$$\forall uv(\langle z, u\rangle \in F \wedge \langle z, v\rangle \in F \to u = v).$$

Olkoon $\langle x, u\rangle, \langle x, v\rangle \in F$. Silloin on olemassa funktiot $f, g \in H$ siten, että $f(x) = u$ ja $g(x) = v$, jolloin induktio-oletuksen perusteella $f \restriction \mathrm{ext}_E(x) = g \restriction \mathrm{ext}_E(x)$, mistä seuraa

$$f(x) = G(x, f \restriction \mathrm{ext}_E(x)) = G(x, g \restriction \mathrm{ext}_E(x)) = g(x).$$

Näin ollen $u = v$, joten induktioperiaatteen nojalla relaatio F on funktio.

Seuraavaksi osoitamme, että $\mathrm{dom}(F) = P$. Olkoon $x \in P$. Teemme induktio-oletuksen, että $z \in \mathrm{dom}(F)$ kaikilla $z \in \mathrm{ext}_E(x)$. Olkoon $z \in \mathrm{ext}_E(x)$. Merkitsemme

$$H_z = \{f \in H \colon z \in \mathrm{dom}(f)\},$$

jolloin $H_z \neq \emptyset$ induktio-oletuksen perusteella. Väitämme, että on olemassa sellainen funktio $f \in H_z$, että $f \subset g$ kaikilla $g \in H_z$. Olkoon $h \in H_z$ ja

$$f = \{\langle x, y\rangle \in h \colon \forall g \in H_z(\langle x, y\rangle \in g)\}.$$

Silloin $f \in H_z$ ja $f \subset g$ kaikilla $g \in H_z$. Näin ollen kaava

$$\phi(z, f_z) := \forall g \in H(z \in \mathrm{dom}(g) \to f_z \subset g)$$

liittää jokaiseen $z \in \mathrm{ext}_E(x)$ yksikäsitteisen funktion f_z, joten erään korvausaksiooman perusteella

$$\{f_z \colon z \in \mathrm{ext}_E(x)\}$$

on joukko. Asetamme

$$g = \bigcup\{f_z \colon z \in \mathrm{ext}_E(x)\}$$

ja

$$f = g \cup \{\langle x, G(x, g \restriction \mathrm{ext}_E(x))\rangle\}.$$

Silloin $f \in H$, joten $x \in \mathrm{dom}(F)$, mikä päättää induktioaskeleen. Induktioperiaatteen nojalla siis $P \subset \mathrm{dom}(F)$, ja koska myös selvästi $\mathrm{dom}(F) \subset P$, niin $\mathrm{dom}(F) = P$.

Seuraavaksi osoitamme, että

$$F(x) = G(x, F \restriction \mathrm{ext}_E(x))$$

kaikilla $x \in P = \mathrm{dom}(F)$. Olkoon $x \in P$ ja $f \in H$ sellainen, että $F(x) = f(x)$. Silloin ehdon 2. perusteella $z \in \mathrm{dom}(f)$ kaikilla $z \in \mathrm{ext}_E(x)$, ja $f(z) = F(z)$ kaikilla $z \in \mathrm{ext}_E(x)$. Näin ollen $f \restriction \mathrm{ext}_E(x) = F \restriction \mathrm{ext}_E(x)$, joten

$$F(x) = f(x) = G(x, f \restriction \mathrm{ext}_E(x)) = G(x, F \restriction \mathrm{ext}_E(x)).$$

Lopuksi todistamme, että F on yksikäsitteinen. Olkoon F' sellainen funktio luokalta P, että $F'(x) = G(x, F' \restriction \mathrm{ext}_E(x))$. Olkoon $x \in P$. Teemme induktio-oletuksen: $F'(z) = F(z)$, kun $z \in \mathrm{ext}_E(x)$. Silloin $F' \restriction \mathrm{ext}_E(x) = F \restriction \mathrm{ext}_E(x)$, joten

$$F'(x) = G(x, F' \restriction \mathrm{ext}_E(x)) = G(x, F \restriction \mathrm{ext}_E(x)) = F(x).$$

Näin ollen induktioperiaatteen perusteella $F'(x) = F(x)$ kaikilla $x \in P$, joten F on yksikäsitteinen. $\square$

Voimme kirjoittaa edellinen lause seuraavassa muodossa. Olkoon E hyvinperustettu relaatio luokassa P ja $G(x, y, z)$ sellainen kaava, että jokaisella parilla $\langle x, y\rangle$ kaava $G(x, y, z)$ on tosi täsmälleen yhdellä joukolla z. Silloin on olemassa kaava $F(x, y)$ siten, että jokaisella $x \in P$ kaava $F(x, y)$ on tosi täsmälleen yhdellä joukolla y, ja y on sellainen, että $G(x, F \restriction \mathrm{ext}_E(x), y)$ on tosi. Lisäksi, jos jollakin toisella kaavalla $F'(x, y)$ on samat ominaisuudet, niin

$$F(x, y) \Leftrightarrow F'(x, y)$$

kaikilla x, y.

Esimerkin 2.1 mukaan relaatio $\in$ on hyvinperustettu, joten voimme käyttää induktiota ja rekursiota relaation $\in$ suhteen, joita kutsumme $\in$-*induktioksi* ja $\in$-*rekursioksi*.

2.4 Transitiiviset mallit

Lähestymistapamme pakottamismenetelmän käsittelemiseksi yhtenä pääpiirteenä on transitiivisten mallien käyttö. Esittelemme transitiivisen mallin käsitteen tässä aliluvussa. Lisäksi puhumme mahdottomuudesta formalisoida ZFC:ssä kaavojen totuutta.

Määritelmä 2.17. Mielivaltainen joukko A voidaan nähdä mallina $\langle A, E\rangle$, missä $E = \{\langle a, b\rangle : a \in b\}$. Kutsumme mallia $\langle A, E\rangle$ $\in$-*malliksi* ja merkitsemme sitä mallin perusjoukon symbolilla, tässä tapauksessa symbolilla A.

Määritelmä 2.18. Joukko x on *transitiivinen*, jos jokaisella $y \in x$ pätee $y \subset x$.

Määritelmä 2.19. $\in$-malli M on *transitiivinen*, jos sen perusjoukko on transitiivinen.

Monet tämän tutkielman lauseet käsittelevät mielivaltaisten kaavojen totuusarvoja, esimerkkinä väite "*olkoon σ lause. Silloin σ on tosi, jos ...* ". Osoitamme seuraavaksi, että tällaista lausetta ei voi formalisoida ZFC:ssä.

Olkoon $Form$ kaikkien kaavojen joukko. Sovimme, että merkintä $\ulcorner\phi\urcorner$ tarkoittaa joukon $Form$ alkiota, joka vastaa (metamatemaattista) kaavaa ϕ.

Lause 2.7 (Tarski)**.** *Ei ole olemassa sellaista kaavaa $\psi(x)$, että jokaisella lauseella $\ulcorner\sigma\urcorner \in Form$ pätee*

$$\psi(\ulcorner\sigma\urcorner) \leftrightarrow \sigma.$$

Todistus. Ks. [2, s. 102]. □

Koska joukko-opin kielen lauseiden totuutta ei voi formalisoida ZFC:ssä, niin sovimme, että määritelmät ja lauseet, jossa puhumme mielivaltaisten kaavojen totuusarvoista ovat muodollisesti *määritelmä-* ja *lauseskeemoja*, joissa jokaista skeemassa käytettyä kaavaa kohti on olemassa oma lause tai määritelmä samaan tapaan kuin erottelu- ja korvausaksioomien määritelmissä.

Määritelmä 2.20. Olkoon M joukko. Määrittelemme rekursiiviseti jokaiselle kaavalle ϕ sen *suhteellistuksen* ϕ^M (joka on myös kaava) seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}(x \in y)^M &:= x \in y,\\ (x = y)^M &:= x = y,\\ (\neg\phi)^M &:= \neg\phi^M\\ (\phi \wedge \psi)^M &:= \phi^M \wedge \psi^M\\ (\exists x\phi)^M &:= \exists x \in M\phi^M.\end{aligned}$$

On helppo nähdä, että silloin myös

$$\begin{aligned}(\phi \vee \psi)^M &\Leftrightarrow \phi^M \vee \psi^M,\\ (\phi \rightarrow \psi)^M &\Leftrightarrow \phi^M \rightarrow \psi^M,\\ (\phi \leftrightarrow \psi)^M &\Leftrightarrow \phi^M \leftrightarrow \psi^M,\\ (\forall x\phi)^M &\Leftrightarrow \forall x \in M\phi^M.\end{aligned}$$

Määritelmä 2.21. Olkoon $\mathcal{L}$ joukko-opin kieli, eli $\mathcal{L} = \{\in\}$, ja M $\in$-malli. Sanomme, että $\mathcal{L}(M)$-lause σ on *tosi mallissa* M tai M on *lauseen* ϕ *malli*, jos σ^M on tosi. Samoin, jos S on $\mathcal{L}(M)$-lauseiden joukko ja σ^M on tosi jokaisella $\sigma \in S$, niin sanomme, että S on *tosi mallissa* M tai M on *lausejoukon* S *malli*.

Huomautus 2.1. Määrittelimme yllä uudelleen lauseen σ totuuden mallissa M. Teimme näin koska nyt kyseessä on metamatemaattinen lauseen totuuden määritelmä, joka ei tapahdu ZFC:ssä, mikä erottaa sen relaatiosta $\vDash$, jonka oletamme ZFC:n sisällä määritellyksi. Huomatkoon kuitenkin, että jokaisella yksittäisellä lauseella σ pätee

$$(M \vDash \ulcorner \sigma \urcorner) \Leftrightarrow \sigma^M,$$

missä $\ulcorner \sigma \urcorner$ on ZFC:n joukko, joka vastaa metamatemaattista lausetta σ.

Määritelmä 2.22. (Vrt. [2, s. 163]). Kaava ϕ on Δ_0-*kaava*, jos

1. siinä ei ole kvanttoreita, tai
2. se on muotoa $\psi \wedge \chi$, $\psi \vee \chi$, $\neg\psi$, $\psi \to \chi$ tai $\psi \leftrightarrow \chi$, missä ψ ja χ ovat Δ_0-kaavoja, tai
3. se on muotoa $(\exists x \in y)\psi$ tai $(\forall x \in y)\psi$, missä ψ on Δ_0-kaava.

Lause 2.8. *Olkoon M transitiivinen malli, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ Δ_0-kaava ja $a_1, \ldots, a_n \in M$. Silloin*

$$\phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \phi^M(a_1, \ldots, a_n).$$

Todistus. (Vrt. [2, s. 163]). Käytämme induktiota kaavan pituuden suhteen. On helppo nähdä, että väite on tosi, kun ϕ on atomikaava tai kun $\phi = \neg\psi$ tai $\phi = \psi \wedge \chi$ ja väite on tosi kaavoilla ψ ja χ. Olkoon

$$\phi = (\exists x \in y)\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$$

ja $a_1, \ldots, a_n, b \in M$. Teemme induktio-oletuksen, että väite on tosi kaavalla $\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Silloin

$$\begin{aligned} & (\exists x \in b\psi(x, a_1, \ldots, a_n))^M \\ & \Leftrightarrow \exists x \in M((x \in b)^M \wedge \psi^M(x, a_1, \ldots, a_n)) \\ \text{(i.o.)} & \Leftrightarrow \exists x \in M(x \in b \wedge \psi(x, a_1, \ldots, a_n)) \\ & \Rightarrow \exists x \in b\psi(x, a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Meidän tehtäväksemme jää vielä todistaa, että

$$\exists x \in b\psi(x, a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \exists x \in M(x \in b \wedge \psi(x, a_1, \ldots, a_n)).$$

Tämä seuraa siitä, että kun $\psi(c, a_1, \ldots, a_n)$ on tosi jollakin $c \in b$, niin koska M on transitiivinen ja $b \in M$, pätee myös $c \in M$. □

Lause 2.9. *Seuraavat kaavat ovat Δ_0-kaavoja:*

1. $x = \{u, v\}$, $x = \langle u, v\rangle$, $x = \emptyset$, $x \subset y$, *x on transitiivinen, x on ordinaali, x on rajaordinaali, x on luonnollinen luku,* $x = \omega$.

2. $z = x \times y$, $z = x - y$, $z = x \cap y$, $z = \bigcup x$, $z = \mathrm{dom}(x)$, $z = \mathrm{ran}(x)$.

3. *x on relaatio, f on funktio,* $y = f(x)$, $g = f \restriction x$.

Todistus. Ks. [2, s. 164]. □

Määritelmä 2.23. Merkitsemme

$$\mathrm{Ord}(x) := x \text{ on ordinaali.}$$

Sanomme, että α on transitiivisen *mallin M ordinaali*, jos $\alpha \in M$ ja $\mathrm{Ord}^M(\alpha)$ on tosi. Lisäksi merkitsemme

$$\mathrm{ORD}^{(M)} = \{x \in M\colon \ \mathrm{Ord}^M(x)\}$$

ja sanomme, että $\mathrm{ORD}^{(M)}$ on *mallin M kaikkien ordinaalien joukko.*

Esimerkki 2.2. Olkoon M transitiivinen malli. Koska lauseketta *x on ordinaali* vastaa seuraava Δ_0-kaava:

$$\begin{aligned}
&\forall u \in x \forall v \in u(v \in x)\\
\wedge\ &\forall u \in x \forall v \in x(u \in v \vee v \in u \vee u = v)\\
\wedge\ &\forall u \in x \forall v \in x \forall w \in x(u \in v \wedge v \in w \to u \in w),
\end{aligned}$$

niin lauseen 2.8 mukaan kaikilla $x \in M$ pätee $\mathrm{Ord}^M(x)$, jos ja vain jos x on ordinaali, joten

$$\mathrm{ORD}^{(M)} = \mathrm{ORD} \cap M.$$

Esimerkki 2.3. Merkitsemme symbolilla $\omega^{(M)}$ transitiivisen mallin M alkiota x, jolla pätee $(x = \omega)^M$. (Tällaista alkiota ei välttämättä ole olemassa.) Koska $x = \omega$ on Δ_0-kaava, niin $\omega^{(M)} = \omega$ kaikilla transitiivisilla malleilla M, jotka sisältävät alkion $\omega^{(M)}$.

Esimerkki 2.4. Olkoon M transitiivinen malli ja $x \in M$. Merkitsemme

$$\mathcal{P}^{(M)}(x) = \{y \in M \colon y \subset x\}.$$

Huomaamme, että

$$(u = \mathcal{P}(x))^M \Leftrightarrow \forall y \in M(y \in u \leftrightarrow y \subset x),$$

joten

$$(\mathcal{P}^{(M)}(x) = \mathcal{P}(x))^M$$

silloin, kun $\mathcal{P}^{(M)}(x) \in M$. Sanomme, että $\mathcal{P}^{(M)}(x)$ on alkion x *potenssijoukko mallissa* M. Nyt, koska yleensä

$$\{y \colon y \subset x\} \neq \{y \in M \colon y \subset x\},$$

niin voi olla, että

$$(u = \mathcal{P}(x))^M \not\Leftrightarrow u = \mathcal{P}(x)$$

jollakin $u \in M$, ja erityisesti voi olla

$$\mathcal{P}^{(M)}(x) \neq \mathcal{P}(x).$$

2.5 Mallin romautus transitiiviseksi malliksi

Olkoon $\langle M, E \rangle$ malli, missä E on 2-paikkainen relaatio. Esittelemme tässä aliluvussa jatkon kannalta tärkeän tuloksen, jonka mukaan malli $\langle M, E \rangle$ voidaan samaistaa yksikäsitteisen transitiivisen mallin kanssa, jos relaatio E täyttää tietyt ehdot (on ekstensionaalinen ja hyvinperustettu).

Määritelmä 2.24. Malli $\langle P, E \rangle$ on *ekstensionaalinen*, jos ekstensionaalisuusaksiooma on tosi mallissa $\langle P, E \rangle$.

Huomaamme, että malli $\langle P, E \rangle$ on ekstensionaalinen, jos ja vain jos kaikilla $x, y \in P$ ehdosta $x \neq y$ seuraa $\mathrm{ext}_E(x) \neq \mathrm{ext}_E(y)$.

Lause 2.10 (Mostowskin romautuslemma)**.** *Olkoon $\langle P, E \rangle$ ekstensionaalinen malli, missä relaatio E on hyvinperustettu. Silloin on olemassa yksikäsitteinen transitiivinen malli M ja isomorfismi $h \colon P \to M$ eli bijektio joukolta P joukolle M siten, että*

$$\langle y, x \rangle \in E \Leftrightarrow h(y) \in h(x)$$

kaikilla $x, y \in P$.

Todistus. (Vrt. [2, s. 69]). Määrittelemme funktion h rekursiolla hyvinperustetun relaation E suhteen. Asetamme jokaisella $x \in P$

$$h(x) = \{h(y)\colon \langle y, x\rangle \in E\} = \{h(y)\colon y \in \mathrm{ext}_E(x)\}$$

ja merkitsemme $M = \mathrm{ran}(h)$. Joukko M on selvästi transitiivinen. Todistamme, että h on injektio. Olkoon

$$C = \{z \in M\colon z = h(x) = h(y) \wedge x \neq y \text{ joillakin } x, y \in P\}.$$

Teemme vastaoletuksen, että $C \neq \emptyset$. Olkoon a joukon C $\in$-minimaalinen alkio. Olkoot $x, y \in P$ sellaiset, että $a = h(x) = h(y)$ ja $x \neq y$. Sillon $\mathrm{ext}_E(x) \neq \mathrm{ext}_E(y)$, koska malli $\langle P, E\rangle$ on ekstensionaalinen. Symmetrian nojalla voimme olettaa, että $u \in P$ on sellainen alkio, että $u \in \mathrm{ext}_E(x)$ ja $u \notin \mathrm{ext}_E(y)$. Silloin $h(u) \in h(x)$, ja koska $h(x) = h(y)$, niin $h(u) \in h(y)$. Nyt, koska $u \notin \mathrm{ext}_E(y)$, niin on oltava sellainen $v \in \mathrm{ext}_E(y)$, että $h(u) = h(v)$ ja $u \neq v$. Näin ollen $h(u) \in C$, ja koska $h(u) \in h(x) = a$, niin saamme ristiriidan. Funktio h on siis injektio. On myös helppo nähdä, että kaikilla $x, y \in P$ pätee

$$\langle y, x\rangle \in E \Leftrightarrow h(y) \in h(x),$$

joten h on etsitty isomorfismi.

Seuraavaksi osoitamme, että h ja M ovat yksikäsitteiset. Olkoot M_1,M_2 transitiiviset joukot ja $h_1\colon P \to M_1$, $h_2\colon P \to M_2$ isomorfismit. Merkitsemme $g = h_2 \circ h_1^{-1}$, jolloin g on isomorfismi joukolta M_1 joukolle M_2. Olkoon $z \in M_1$. Teemme induktio-oletuksen, että kaikilla $z \in x$ pätee $g(z) = z$. Koska g on isomorfismi, niin kaikilla $z \in x$ pätee $g(z) \in g(x)$, jolloin induktio-oletuksen nojalla $z \in g(x)$ kaikilla $z \in x$ eli $x \subset g(x)$. Osoitamme, että $g(x) \subset x$ seuraavalla tavalla. Olkoon $t \in g(x)$. Koska M_2 on transitiivinen, niin $t \in M_2$, jolloin $t = g(z)$ jollakin $z \in M_1$. Siis $g(z) \in g(x)$, joten $z \in x$, jolloin induktio-oletuksen perusteella $t = g(z) \in x$. Näin ollen $g(x) \subset x$ ja edelleen $x = g(x)$. Siis induktioperiaatteen nojalla $x = g(x)$ kaikilla $x \in M_1$ eli $g = h_1 \circ h_2^{-1}$ on identtinen funktio, joten $h_1 = h_2$, mistä seuraa myös, että $M_1 = M_2$. $\square$

2.6 Numeroituvan transitiivisen ZFC-mallin olemassaolosta

Tässä aliluvussa tutkimme numeroituvan transitiivisen ZFC-mallin olemassaoloa. Tutkielmassa osoitamme, että numeroituva transitiivinen ZFC-malli M voidaan laajentaa transitiiviseksi ZFC-malliksi $M[G]$ siten, että saadun laajennuksen ominaisuuksia on mahdollista tutkia. Voimme muun muassa muodostaa laajennuksen, joka toteuttaa lauseen $\neg\,\mathrm{CH}$, mitä tulemmekin tekemään tutkielman päätteeksi. Oletus mallin M numeroituvuudesta on tärkeä, sillä, kuten tulemme näkemään, ylinumeroituvan mallin tapauksessa tutkielmassa esiteltyä menetelmää ei välttämättä voi soveltaa.

Transitiivisiin ZFC-malleihin liittyy kuitenkin se ongelma, että niiden olemassaoloa ei voi todistaa ZFC:ssä (paitsi, jos ZFC on ristiriitainen), mikä seuraa Gödelin epätäydellisyyslauseesta. Voimme tietenkin olettaa, että ZFC on ristiriidaton, jolloin ZFC-mallin olemassaolo seuraa tästä oletuksesta, mutta emme voi tietää onko se transitiivinen. ZFC:ssä on kuitenkin mahdollista todistaa, että jokaisella ZFC-aksioomien äärellisellä osajoukolla S on olemassa tämän fragmentin toteuttava numeroituva transitiivinen $\in$-malli. Esitämme sen todistuksen tässä aliluvussa (lause 2.13).

Jos tarkastelemme tutkielmassa kuvattua transitiivisen ZFC-mallin M laajentamista, niin huomaamme, että sen toteuttaminen vaatii vain jonkun tietyn äärellisen ZFC-aksioomien joukon voimassaoloa mallissa M. Tämän takia voimme olettaa naiivisti, että numeroituva transitiivinen ZFC-malli on olemassa, mikä tarkasti ottaen kuitenkin tarkoittaa, että mallissa M on voimassa vain kaikki tarvittavat aksioomat, joita on äärellinen määrä. Samanlaista lähestymistapaa käytetään kirjassa [3].

Määritelmä 2.25. Määrittelemme rekursiivisesti jokaisella ordinaalilla α joukon V_α asettamalla

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset, \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha), \\ V_\alpha &= \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma, \text{ kun } \alpha \text{ on rajaordinaali.} \end{aligned}$$

Lause 2.11. *Jokaisella x on olemassa ordinaali α siten, että $x \in V_\alpha$.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 64].) Olkoon C seuraava luokka:

$$C = \{x \colon \forall \alpha \in \mathrm{ORD}(x \notin V_\alpha)\}.$$

Teemme vastaoletuksen, että $C \neq \emptyset$. Koska relaatio $\in$ on hyvinperustettu, niin luokalla C on olemassa $\in$-minimaalinen alkio x. Koska x on $\in$-minimaalinen, niin on olemassa funktio f joukolta x, joka kuvaa jokaisen $z \in x$ sellaiseksi ordinaaliksi α, että $z \in V_\alpha$. Korvausaksiooman perusteella joukko $\mathrm{ran}(f)$ on olemassa, jolloin $\gamma = \bigcup \mathrm{ran}(f)$ on ordinaali ja $z \in V_\gamma$ jokaisella $z \in x$. Näin ollen $x \subset V_\gamma$, joten $x \in V_{\gamma+1}$, ristiriita. $\square$

Määritelmä 2.26. Määrittelemme funktion ρ luokalta V luokkaan ORD asettamalla

$$\rho(x) = \text{ pienin } \alpha, \text{ jolla } x \in V_{\alpha+1}.$$

Kutsumme tätä funktiota *rank-funktioksi.*

Huomaamme, että

1. $\rho(x) < \rho(y)$ aina, kun $x \in y$;
2. $\rho(\alpha) = \alpha$ jokaisella ordinaalilla α.

Määritelmä 2.27. Määrittelemme kaavan ϕ *alikaavojen* joukon $\mathrm{sub}(\phi)$ asettamalla

1. $\mathrm{sub}(\phi) = \{\phi\}$, jos ϕ on atomikaava,
2. $\mathrm{sub}(\phi) = \{\phi\} \cup \mathrm{sub}(\psi) \cup \mathrm{sub}(\chi)$, jos ϕ on muotoa $\psi \wedge \chi$,
3. $\mathrm{sub}(\phi) = \{\phi\} \cup \mathrm{sub}(\psi)$, jos ϕ on muotoa $\neg\psi$ tai $\exists x\psi$.

Sanomme, että kaavojen joukko S on *suljettu alikaavojen suhteen*, jos aina, kun $\phi \in S$ ja ψ on kaavan ϕ alikaava, pätee $\psi \in S$.

Lause 2.12 (Heijastusperiaate)**.** *Olkoon $S = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ äärellinen joukko kaavoja. Silloin on olemassa ordinaali β siten, että kaikilla $\phi(x_1, \ldots, x_m) \in S$ ja $a_1, \ldots, a_m \in V_\beta$ pätee*

$$\phi^{V_\beta}(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow \phi(a_1, \ldots, a_m).$$

Todistus. (Vrt. [3, s. 136]). Voimme olettaa, että S on suljettu alikaavojen suhteen, muuten laajennamme sen sellaiseksi. Määrittelemme jokaisella $1 \leq i \leq n$ funktion $F_i\colon \mathrm{ORD} \to \mathrm{ORD}$ seuraavalla tavalla. Jos ϕ_i on muotoa $\exists x\phi_j(x, x_1, \ldots, x_m)$, niin määrittelemme ensin funktion G_i luokalta V^m asettamalla kaikilla $a_1, \ldots, a_m \in V$:

$$\begin{aligned} G_i(a_1, \ldots, a_m) &= \eta, \text{ jos } \exists x\phi_j(x, a_1, \ldots, a_m), \\ G_i(a_1, \ldots, a_m) &= \emptyset, \text{ muuten,} \end{aligned}$$

missä η on pienin ordinaali, jolla $(\exists x\phi(x, a_1, \ldots, a_m))^{V_\eta}$ on tosi; tämän jälkeen määrittelemme jokaisella ordinaalilla ξ sen kuvan

$$F_i(\xi) = \bigcup\{G_i(a_1, \ldots, a_m)\colon a_1, \ldots, a_m \in V_\xi\},$$

jolloin $F_i(\xi)$ on ordinaali. Jos ϕ_i ei ole muotoa $\exists x\phi_j(x, x_1, \ldots, x_m)$, niin asetamme $F_i(\xi) = \emptyset$ jokaisella ordinaalilla ξ. Huomaamme, että funktiot F_i ovat selvästi kasvavia.

Määrittelemme seuraavaksi joukon β asettamalla

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \emptyset, \\ \beta_{p+1} &= \max\{\beta_p + 1, F_1(\beta_p), \ldots, F_n(\beta_p)\}, \text{ kun } p \in \omega, \\ \beta &= \bigcup\{\beta_p\colon p \in \omega\}. \end{aligned}$$

Sillon β on rajaordinaali. Huomaamme, että jos $\xi < \beta$, niin $\xi < \beta_p$ jollakin $p \in \omega$, jolloin

$$F_i(\xi) \leq F_i(\beta_p) \leq \beta_{p+1} < \beta \tag{1}$$

jokaisella $1 \leq i \leq n$.

Todistamme induktiolla kaavan pituuden suhteen, että β on etsitty väitteen ordinaali. Väite on selvästi tosi, jos $\phi_i \in S$ on atomikaava, $\phi_i = \neg\phi_j$ tai $\phi_i = \phi_j \wedge \phi_k$ ja väite pätee kaavoilla ϕ_j ja ϕ_k. Oletamme nyt, että $\phi_i = \exists x \phi_j(x, x_1, \ldots, x_m)$ ja osoitamme, että silloin

$$\phi_i^{V_\beta}(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow \phi_i(a_1, \ldots, a_m)$$

kaikilla $a_1, \ldots, a_m \in V_\beta$. Olkoon $a_1, \ldots, a_m \in V_\beta$ ja $\phi_i(a_1, \ldots, a_m)$ tosi. Koska β on rajaordinaali, niin $a_1, \ldots, a_m \in V_\xi$ jollakin $\xi < \beta$. Merkitsemme $\eta = F_i(\xi)$. Funktion F_i määritelmästä seuraa, että $\phi_i^{V_\eta}(a_1, \ldots, a_m)$ on tosi, eli on olemassa sellainen $a \in V_\eta$, että $\phi_j^{V_\eta}(a, a_1, \ldots, a_m)$ on tosi. Nyt, kohdan (1) perusteella $\eta < \beta$, joten myös $a \in V_\beta$ ja $\phi_j^{V_\beta}(a, a_1, \ldots, a_m)$ on tosi, eli $\phi_i^{V_\beta}(a_1, \ldots, a_m)$ on tosi. Näin ollen

$$\phi_i(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow \phi_i^{V_\beta}(a_1, \ldots, a_m).$$

On helppo nähdä, että myös

$$\phi_i^{V_\beta}(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow \phi_i(a_1, \ldots, a_m),$$

joten väite on tosi. □

Hejastusperiaatteesta seuraa, että äärellisellä ZFC-aksioomien joukolla S on transitiivinen malli V_β. Osoitamme seuraavaksi hejastusperiaatteen avulla, että joukolla S on olemassa myös *numeroituva* transitiivinen malli.

Lause 2.13. *Olkoon S äärellinen joukko* ZFC*:n aksioomia. Silloin on olemassa numeroituva transitiivinen malli M siten, että σ^M on tosi jokaisella $\sigma \in S$.*

Todistus. (Vrt. [3, s. 139]). Olkoon $C = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ alikaavojen suhteen suljettu kaavojen joukko, jolla $S \subset C$. Merkitsemme jokaisella $1 \leq i \leq n$ kaavan ϕ_i vapaiden muuttujien lukumäärää symbolilla k_i. Heijastusperiaatteen mukaan on olemassa ordinaali β siten, että

$$\phi_i^{V_\beta}(a_1, \ldots, a_{k_i}) \Leftrightarrow \phi_i(a_1, \ldots, a_{k_i})$$

kaikilla $\phi_i(x_1, \dots, x_{k_i}) \in C$ ja $a_1, \dots, a_{k_i} \in V_\beta$ Olkoon F joukon $\mathcal{P}(V_\beta)$ valintafunktio. Määrittelemme jokaisella $1 \leq i \leq n$ funktion $H_i\colon V_\beta^{k_i} \to V_\beta$ seuraavalla tavalla. Jos ϕ_i on muotoa $\exists x \phi_j(x, x_1, \dots, x_{k_i})$, $a_1, \dots, a_{k_i} \in V_\beta$ ja $\phi_j^{V_\beta}(b, a_1, \dots, a_{k_i})$ on tosi jollakin $b \in V_\beta$, niin asetamme

$$H_i(a_1, \dots, a_{k_i}) = F(\{x \in V_\beta\colon \phi_j^{V_\beta}(x, a_1, \dots, a_{k_i})\}).$$

Muussa tapauksessa asetamme

$$H_i(a_1, \dots, a_{k_i}) = \emptyset.$$

Jos $k_i = 0$, niin sovimme, että $H_i = \emptyset$.

Määrittelemme joukon N asettamalla

$$\begin{aligned} N_0 &= \{\emptyset\}, \\ N_{p+1} &= N_p \cup \{H_i(a_1, \dots, a_{k_i})\colon 1 \leq i \leq n \wedge a_1, \dots, a_{k_i} \in N_p\}, \text{ kun } p > 0, \\ N &= \bigcup_{i \in \omega} N_i. \end{aligned}$$

Silloin N on numeroituva joukko. Väitämme, että kaikilla $\phi_i \in C$ ja $a_1, \dots, a_{k_i} \in N$ pätee

$$\phi_i^N(a_1, \dots, a_{k_i}) \Leftrightarrow \phi_i(a_1, \dots, a_{k_i}).$$

Todistamme väitteen induktiolla kaavan pituuden suhteen. Väite on selvästi tosi silloin, kun ϕ_i on atomikaava, $\phi_i = \neg \phi_j$ tai $\phi_i = \phi_j \wedge \phi_k$ ja väite on tosi kaavoilla ϕ_j ja ϕ_k. Olkoon ϕ_i muotoa $\exists x \phi_j(x, x_1, \dots, x_{k_i})$ ja $a_1, \dots, a_{k_i} \in N$, jolloin $a_1, \dots, a_{k_i} \in N_p$ jollakin $p \in \omega$. Teemme induktio-oletuksen, että

$$\phi_j^N(a, a_1, \dots, a_{k_i}) \Leftrightarrow \phi_j(a, a_1, \dots, a_{k_i})$$

kaikilla $a, a_1, \dots, a_{k_i} \in N$. Olkoon lause $\phi_i(a_1, \dots, a_{k_i})$ tosi. Silloin lause $\phi_j(b, a_1, \dots, a_{k_i})$ on tosi, missä $b = H_i(a_1, \dots, a_{k_i})$, jolloin induktio-oletuksen perusteella lause $\phi_j^N(b, a_1, \dots, a_{k_i})$ on tosi, ja koska $b \in N$, niin $\phi_i^N(a_1, \dots, a_{k_i})$ on tosi. Näin ollen

$$\phi_i(a_1, \dots, a_{k_i}) \Rightarrow \phi_i^N(a_1, \dots, a_{k_i}),$$

ja koska selvästi myös

$$\phi_i^N(a_1, \dots, a_{k_i}) \Rightarrow \phi_i(a_1, \dots, a_{k_i}),$$

niin

$$\phi_i^N(a_1, \dots, a_{k_i}) \Leftrightarrow \phi_i(a_1, \dots, a_{k_i}).$$

Induktion nojalla siis

$$\phi_i^N(a_1, \ldots, a_{k_i}) \Leftrightarrow \phi_i(a_1, \ldots, a_{k_i})$$

kaikilla $\phi_i \in C$ ja $a_1, \ldots, a_{k_i} \in N$, jolloin σ^N on tosi jokaisella joukon S ZFC-aksioomalla σ.

Voimme olettaa, että ekstensionaalisuusaksiooma kuuluu joukkoon S, muuten lisäämme sen siihen. Joukko N on siis numeroituva ektensionaalinen $\in$-malli, joten Mostowskin romautuslemman perusteella on olemassa yksikäsitteinen transitiivinen malli M, joka on isomorfinen mallin N kanssa. Malli M on siis etsitty numeroituva transitiivinen malli, joka toteuttaa joukon S aksioomat. $\square$

Huomautus 2.2. *Kompaktisuuslauseen* (jota emme esitä tässä tutkielmassa) mukaan, jos jokaisella teorian T äärellisellä lauseiden joukolla on olemassa malli, niin teorialla T on malli. Hejastusperiaatteesta ei kuitenkaan seura se, että ZFC:llä on malli, koska se ei ole ZFC-teoreema vaan lauseskeema, joka sisältää äärettömän määrän ZFC-teoreemoja, jolloin jokaista äärellistä ZFC-aksioomien fragmenttia kohti on oma ZFC-teoreema.

2.7 Suhteellinen ristiriidattomuus

Määritelmä 2.28. Olkoon T teoria. Merkintä $\mathrm{Con}(T)$ tarkoittaa sitä, että teoria T on ristiriidaton.

Muistutamme lukijaa, että teoria on ristiriidaton, jos ja vain jos sillä on olemassa malli.

Määritelmä 2.29. Sanomme, että teoria T' on *ristiriidaton suhteessa* teoriaan T, jos $\mathrm{Con}(T) \Rightarrow \mathrm{Con}(T')$, ja että lause σ on *ristiriidaton suhteessa* teoriaan T, jos teoria $T \cup \{\sigma\}$ on ristiriidaton suhteessa teoriaan T. Sanomme, että lause σ on *riippumaton* teoriasta T, jos sekä σ, että $\neg\sigma$ ovat ristiriidattomia suhteessa teoriaan T.

Puhumme suhteellisesta ristiriidattomuudesta, koska lauseen σ ristiriidattomuus suhteessa teoriaan T ei tarkoita sitä, että teoria $T \cup \{\sigma\}$ olisi ristiriidaton, vaan sitä, että se on ristiriidaton sillä oletuksella, että T on ristiriidaton. Gödelin epätäydellisyyslauseen mukaan aritmetiikan tulkinnan sisältävässä (rekursiivisessa) ristiriidattomassa teoriassa T' ei voi todistaa itse teorian T' ristiriidattomuutta. Koska teorian T' ristiriidattomuuden todistaminen kuitenkin tapahtuu jossakin toisessa teoriassa T, niin voimme todistaa vain teorian T' suhteellisen ristiriidattomuuden.

Suhteellinen ristiriidattomuus liittyy muodolliseen päättelyyn ilmeisellä tavalla:

Lause 2.14. *Olkoon σ lause, joka on ristiriidaton suhteessa teoriaan T. Silloin, jos T on ristiriidaton, niin $T \nvdash \neg\sigma$.*

Todistus. Oletamme, että T ristiriidaton. Silloin teoria $T \cup \{\sigma\}$ on myös ristiriidaton. Jos olisi $T \vdash \neg\sigma$, niin olisi $T \cup \{\sigma\} \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$ eli $T \cup \{\sigma\}$ olisi ristiriitainen. Näin ollen $T \nvdash \neg\sigma$. □

Suhteellisen ristiriidattomuuden todistaminen on pakottamismenetelmän yleisin sovelluskohde. Sen avulla on todistettu useita tuloksia, joiden mukaan jotakin tiettyä lausetta ei voi johtaa ZFC-aksioomeista, jos ZFC on ristiriidaton. Yksi tunnetuimmista tällaisista tuloksista on kontinuumhypoteesin (CH) riippumattomuus ZFC:stä. Tässä tutkielmassa osoitamme pakottamismenetelmän avulla, että ZFC $\nvdash$ CH, jos ZFC on ristiriidaton.

Lauseen 2.13 mukaan jokaisella äärellisellä ZFC-aksioomien joukolla S voidaan todistaa ZFC:ssä joukon S lauseet toteuttavan numeroituvan transitiivisen mallin olemassaolon. Voimme käyttää tätä tietoa väitteen

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{CH}$$

todistamisessa seuraavalla tavalla. Oletamme, että ZFC on ristiriidaton ja teemme vastaoletuksen, että ZFC $\vdash$ CH. Silloin

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n \vdash \mathrm{CH}$$

joillakin ZFC-aksioomeilla $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Tulemme näkemään, että jos tietty ZFC-aksioomien joukko $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ on voimassa numeroituvassa transitiivisessa mallissa M, niin malli M voidaan laajentaa malliksi $M[G]$, joka toteuttaa samat aksioomat, minkä lisäksi se toteuttaa lauseen $\neg\,\mathrm{CH}$. Nyt, koska lauseen 2.13 nojalla on olemassa numeroituva transitiivinen malli, joka toteuttaa ZFC-aksioomat $\tau_1, \ldots, \tau_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$, niin saamme

$$\mathrm{Con}(\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\{\tau_1, \ldots, \tau_n, \neg\,\mathrm{CH}\}),$$

jolloin lauseen 2.14 perusteella

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n \nvdash \mathrm{CH},$$

ristiriita. Näin ollen ZFC $\nvdash$ CH, jos ZFC on ristiriidaton.

2.8 Transitiivisista ZFC-malleista

Jatkossa oletamme yksinkertaisuuden vuoksi, että numeroituva transitiivinen ZFC-malli on olemassa. Voimme tehdä näin luvuissa 2.7 ja 2.6 esitettyjen tulosten perusteella. Merkitsemme tätä mallia symbolilla M. Huomatkoon, että eheyslauseen perusteella (lause 2.1) jokainen ZFC-teoreema on tosi mallissa M.

Tulemme usein määrittelemään joukkoja, joiden haluamme olevan mallissa M. Osoitamme seuraavaksi, että jos joukko u on määritelty Δ_0-kaavalla parametreina mallin M joukot, niin u on mallissa M.

Lause 2.15. *Olkoon $\phi(x)$ $\mathcal{L}(M)$-kaava ja*

$$u = \{z \in a \colon \phi^M(z)\}.$$

Silloin $u \in M$.

Todistus. Koska M on ZFC-malli, niin erotteluaksiooma

$$\forall x \exists v \forall z (z \in v \leftrightarrow z \in x \wedge \phi(z))$$

on tosi mallissa M eli

$$\forall x \in M \exists v \in M \forall z \in M (z \in v \leftrightarrow z \in x \wedge \phi^M(z))$$

on tosi. Olkoon $v \in M$ sellainen, että

$$\forall z \in M (z \in v \leftrightarrow z \in a \wedge \phi^M(z)),$$

jolloin

$$\forall z (z \in v \cap M \leftrightarrow z \in a \cap M \wedge \phi^M(z)).$$

Nyt, koska M on transitiivinen ja $v, a \in M$, niin $v \cap M = v$ ja $a \cap M = a$, joten $u = v$. $\square$

Seuraus 2.16. *Olkoon $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ Δ_0-kaava, $a, a_1, \ldots, a_n \in M$ ja*

$$u = \{z \in a \colon \phi(z, a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Silloin $u \in M$.

Todistus. Lauseen 2.8 mukaan kaikilla $z \in a$ pätee

$$\phi(z, a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \phi^M(z, a_1, \ldots, a_n),$$

mistä väite seuraa. $\square$

Tarkastelemme seuraavaksi korvausaksiooman soveltamista mallissa M.

Lause 2.17. *Olkoon $\phi(x,y)$ sellainen $\mathcal{L}(M)$-kaava, että*

$$\forall x \forall y \forall z \in M(\phi^M(x,y) \wedge \phi^M(x,z) \to y = z).$$

Olkoon $u \in M$ ja

$$w = \{y \in M \colon x \in u \wedge \phi^M(x,y)\}.$$

Silloin $w \in M$.

Todistus. Koska M on ZFC-malli, niin erään korvausaksiooman ja oletuksen perusteella lause

$$\forall u \exists v \forall y(y \in v \leftrightarrow \exists x \in u \phi(x,y))$$

on tosi mallissa M eli

$$\forall u \in M \exists v \in M \forall y \in M(y \in v \leftrightarrow \exists x \in u \phi^M(x,y))$$

on tosi. Olkoon $v \in M$ sellainen, että

$$\forall y \in M(y \in v \leftrightarrow \exists x \in u \phi^M(x,y)).$$

Silloin

$$\forall y(y \in v \cap M \leftrightarrow y \in M \wedge \exists x \in u \phi^M(x,y)),$$

ja koska M on transitiivinen ja $v \in M$, niin

$$\forall y(y \in v \leftrightarrow y \in M \wedge \exists x \in u \phi^M(x,y)),$$

joten $w = v$. $\square$

3 Boolen arvoiset mallit

3.1 Boolen algebrat

Tässä aliluvussa esittelemme niitä Boolen algebroja koskevia tuloksia, joita tulemme tarvitsemaan jatkossa.

Määritelmä 3.1. Olkoon B joukko, jossa on määritelty kaksi 2-paikkaista operaatiota $\wedge$ ja $\vee$, 1-paikkainen operaatio * ja vakiot 0_B ja 1_B. Sanomme, että B on *Boolen algebra*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in B$:

$$\begin{array}{rlrl} x \vee y &= y \vee x; & x \wedge y &= y \wedge x; \\ x \vee x &= x; & x \wedge x &= x; \\ (x \vee y) \wedge y &= y; & (x \wedge y) \vee y &= y; \\ (x \vee y) \wedge z &= (x \wedge z) \vee (y \wedge z); & (x \wedge y) \vee z &= (x \vee z) \wedge (y \vee z); \\ x \vee x* &= 1_B; & x \wedge x* &= 0_B; \end{array}$$

$$0_B \neq 1_B.$$

Yksinkertaisuuden vuoksi merkitsemme usein vakiota 0_B symbolilla 0 ja vakiota 1_B symbolilla 1 silloin, kun se ei aiheuta sekaannusta.

Määritelmä 3.2. Määrittelemme osittaisen järjestyksen Boolen algebrassa B asettamalla kaikilla $x, y \in B$

$$x \leq y, \text{ jos ja vain jos } x \wedge y = x.$$

Huomaamme, että kaikila $x, y \in B$ myös pätee

$$x \leq y, \text{ jos ja vain jos } x \vee y = y$$

ja

$$(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y.$$

Määritelmä 3.3. Olkoon B Boolen algebra ja $x, y \in B$. Käytämme seuraavia merkintöjä: $x \Rightarrow y := x^* \vee y$, $x \Leftrightarrow y := (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ ja $x - y := x \wedge y^*$.

Lause 3.1. *Olkoon B Boolen algebra ja $x, y, z \in B$. Silloin*

$$\begin{aligned} &x \wedge y \leq z, \textit{ jos ja vain jos } x \leq (y \Rightarrow z); \\ &x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = (x \wedge y) \Rightarrow z; \\ &(x \Rightarrow y) = 1, \textit{ jos ja vain jos } x \leq y; \\ &(x \Leftrightarrow y) = 1, \textit{ jos ja vain jos } x = y; \\ &\textit{jos } y \leq z, \textit{ niin } (x \Rightarrow y) \leq (x \Rightarrow z). \end{aligned}$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Määritelmä 3.4. Olkoon B Boolen algebra ja $X \subset B$. Merkitsemme

$$\bigvee X = \min\{y \in B \colon x \leq y \text{ kaikilla } x \in X\};$$
$$\bigwedge X = \max\{y \in B \colon x \geq y \text{ kaikilla } x \in X\}.$$

Sovimme myös, että $\bigvee \emptyset = 0_B$ ja $\bigwedge \emptyset = 1_B$. Sanomme, että $\bigvee X$ on joukon X *supremum*, ja $\bigwedge X$ joukon X *infimum*.

Huomautus 3.1. Joukon $X \subset B$ supremum $\bigvee X$ tai infimum $\bigwedge X$ eivät välttämättä ole olemassa.

Määritelmä 3.5. Boolen algebra B on *täydellinen*, jos jokaisella $X \subset B$ on olemassa $\bigvee X$ ja $\bigwedge X$.

Lause 3.2. *Olkoon B täydellinen Boolen algebra, I, J indeksijoukot ja $x_i, x_{ij} \in B$ jokaisella $i \in I$, $j \in J$. Silloin*

$$x \vee \bigwedge_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} x \vee x_i;$$
$$x \wedge \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{i \in I} x \wedge x_i;$$
$$(\bigvee_{i \in I} x_i)^* = \bigwedge_{i \in I} x_i^*;$$
$$(\bigwedge_{i \in I} x_i)^* = \bigvee_{i \in I} x_i^*;$$
$$\bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} x_{ij} = \bigwedge_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} x_{ij};$$
$$\bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} x_{ij} = \bigvee_{j \in J} \bigvee_{i \in I} x_{ij};$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Määritelmä 3.6. Olkoon B Boolen algebra. Sanomme, että epätyhjä joukko $F \subset B$ on algebran B *filtteri*, jos

1. aina kun $x \in F$ ja $x \leq y \in B$, niin $y \in F$;
2. aina kun $x, y \in F$, niin $x \wedge y \in F$;
3. $0 \notin F$.

Jos jokaisella $x \in B$ on voimassa $x \in F$ tai $x^* \in F$, niin sanomme, että F on algebran B *ultrafiltteri*.

Lause 3.3. *Olkoon B Boolen algebra ja F algebran B filtteri. Silloin F on ultrafiltteri, jos ja vain jos se on maksimaalinen fillteri.*

Todistus. Olkoon F ultrafiltteri. Teemme vastaoletuksen, että $F \subsetneq F'$ jollakin algebran B filtterillä F'. Olkoon $x \in F' - F$. Silloin $x^* \in F$, joten $x^* \in F'$, ja koska myös $x \in F'$, niin $x \wedge x^* = 0 \in F'$, ristiriita. Näin ollen F on maksimaalinen filtteri.

Todistamme nyt toisen suunnan. Olkoon F filtteri, joka ei ole ultrafiltteri. Osoitamme, että F ei ole maksimaalinen. Olkoon $b \in B$ sellainen, että $b \in B - F$ ja $b^* \in B - F$. Asetamme

$$F' = \{x \in B \colon y \wedge b \leq x \text{ jollakin } y \in F\}.$$

Väitämme, että F' on filtteri. On helppo nähdä, että filtterin märitelmän kohdat 1 ja 2 ovat voimassa joukolle F'. Teemme vastaoletuksen, että $0 \in F'$. Silloin $y \wedge b = 0$ jollakin $y \in F$, jolloin

$$y \wedge b^* = (y \wedge b^*) \vee (y \wedge b) = y \wedge (b^* \vee b) = y,$$

mistä seuraa, että $y \leq b^*$, ja koska F on filtteri, niin $b^* \in F$, ristiriita. Siis $0 \notin F'$, joten F' on filtteri. Toisaalta, koska $y \wedge b \leq b$ kaikilla $y \in F$, niin $b \in F'$, joten $F \subsetneq F'$. Fillteri F ei siis ole maksimaalinen. □

Lause 3.4. *Olkoon B Boolen algebra ja $X \subset B$ sellainen, että $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$ kaikilla $x_1, \ldots, x_n \in X$. Silloin algebralla B on olemassa filtteri F siten, että $X \subset F$.*

Todistus. Olkoon

$$F = \{x \in B \colon x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leq x \text{ joillakin } x_1, \ldots, x_n \in X\}.$$

Silloin selvästi F on filtteri ja $X \subset F$. □

Lause 3.5 (Ultrafiltterilause)**.** *Olkoon B Boolen algebra ja F algebran B filtteri. Silloin algebralla B on olemassa ultrafilteri U siten, että $F \subset U$.*

Todistus. Olkoon

$$\mathcal{F} = \{F' \colon F' \text{ on algebran } B \text{ filtteri ja } F \subset F'\}.$$

Silloin jokaisella joukon $\mathcal{F}$ ketjulla $\mathcal{C}$ pätee $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$, joten Zornin lemman perusteella joukossa $\mathcal{F}$ on maksimaalinen filtteri U, joka on myös algebran B maksimaalinen filtteri, jolloin lauseen 3.3 perusteella se on ultrafiltteri. □

3.2 Boolen arvoinen malli

Oletamme tässä luvussa, että $\mathcal{L}$ on relaationaalinen kieli eli kieli, joka koostuu ainoastaan relaatiosymboleista.

Määritelmä 3.7. (Vrt. [2, s. 207].) Olkoon B Boolen algebra ja $\mathfrak{A} = \langle A, ||\cdot||^B \rangle$, missä A on joukko ja $||\cdot||^B$ funktio, joka kuvaa jokaisen $\mathcal{L}(A)$-lauseen algebran B alkioksi.

Sanomme, että $\mathfrak{A}$ on kielen $\mathcal{L}$ *Boolen arvoinen malli*, jos

1. kaikilla $a, b, c \in A$ pätee
   (a) $||a = a||^B = 1$;
   (b) $||a = b||^B = ||b = a||^B$;
   (c) $||a = b||^B \wedge ||b = c||^B \leq ||a = c||^B$;
2. kaikilla $R \in \mathcal{L}$ ja $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, missä n on relaatiosymbolin R paikkaluku, on voimassa
$$||R(a_1, \ldots, a_n)||^B \wedge ||a_1 = b_1||^B \wedge \cdots \wedge ||a_n = b_n||^B \leq ||R(b_1, \ldots, b_n)||^B;$$
3. kaikilla $\mathcal{L}(A)$-lauseilla σ, τ pätee
$$||\neg\sigma||^B = (||\sigma||^B)^*;$$
$$||\sigma \wedge \tau||^B = ||\sigma||^B \wedge ||\tau||^B;$$
4. aina, kun $\phi(x)$ on $\mathcal{L}(A)$-kaava, niin joukolla
$$\{x \in B \colon \exists a \in A(||\phi(a)||^B = x)\}$$
on olemassa supremum, ja
$$||\exists x \phi(x)||^B = \bigvee_{a \in A} ||\phi(a)||^B.$$

Jatkossa oletamme, että B on Boolen algebra ja $\mathfrak{A} = \langle A, ||\cdot||^B \rangle$ kielen $\mathcal{L}$ Boolen arvoinen malli. Voimme jättää funktiosta $||\cdot||^B$ merkin B pois ja käyttää yksinkertaisempaa merkintää $||\cdot||$, jos algebra B, johon funktio perustuu, on selvä asiayhteydestä.

Lause 3.6. *Olkoot σ ja τ $\mathcal{L}(A)$-lauseita ja $\phi(x)$ $\mathcal{L}(A)$-kaava. Silloin*

$$\begin{aligned} ||\sigma \vee \tau|| &= ||\sigma|| \vee ||\tau||; \\ ||\sigma \to \tau|| &= ||\sigma|| \Rightarrow ||\tau||; \\ ||\sigma \leftrightarrow \tau|| &= ||\sigma|| \Leftrightarrow ||\tau||; \\ ||\forall x \phi(x)|| &= \bigwedge_{a \in A} ||\phi(a)||. \end{aligned}$$

Todistus. Väite seuraa suoraan kuvauksen $|| \cdot ||$ määritelmästä. □

Määritelmä 3.8. Olkoon σ $\mathcal{L}(A)$-lause. Sanomme, että σ on *tosi* mallissa $\mathfrak{A}$ ja merkitsemme

$$\mathfrak{A} \models \sigma,$$

jos $||\sigma|| = 1$.

Lause 3.7. *Olkoon $\phi(x)$ $\mathcal{L}(A)$-kaava. Silloin $\mathfrak{A} \models \forall x \phi(x)$, jos ja vain jos kaikilla $a \in A$ pätee $\mathfrak{A} \models \phi(a)$.*

Todistus. Väite seuraa siitä, että

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A} \models \forall x \phi(x) \\ \Leftrightarrow & \bigwedge_{a \in A} ||\phi(a)|| = 1 \\ \Leftrightarrow & \mathfrak{A} \models \phi(a) \text{ kaikilla } a \in A. \end{aligned}$$

□

Lause 3.8. *Olkoot σ ja τ $\mathcal{L}(A)$-lauseita. Silloin $\mathfrak{A} \models \sigma \to \tau$, jos ja vain jos $||\sigma|| \leq ||\tau||$.*

Todistus. Seuraa lauseesta 3.1. □

Seuraus 3.9. *Olkoot σ ja τ $\mathcal{L}(A)$-lauseita. Silloin $\mathfrak{A} \models \sigma \leftrightarrow \tau$, jos ja vain jos $||\sigma|| = ||\tau||$.*

Seuraavan lauseen mukaan muodollisen päättelyn säännöt ovat voimassa myös Boolen arvoisissa malleissa. Muodollisessa päättelyssä sovelletaan predikaattilogiikan päättelysääntöjä ja identiteettiaksioomia äärellinen määrä kertoja. Päättelysäännöt ja identiteettaksioomat löytyvät esimerkiksi kirjasta [4, s. 98, 120].

Lause 3.10. *Olkoot $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau$ $\mathcal{L}(A)$-lauseita siten, että $||\sigma_i|| = 1$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$. Silloin, jos τ voidaan päätellä muodolllisesti kaavoista $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, niin $||\tau|| = 1$.*

Todistus. Käydään jokainen päättelysääntö ja identiteettiaksiooma läpi ja tarkistetaan, että väite on tosi jokaisen kohdalla, jolloin induktion perusteella väite on tosi. Emme esittele väitteen todistusta tarkemmin tilan puutteen vuoksi. □

Määritelmä 3.9. Sanomme, että Boolen arvoisessa mallisa $\mathfrak{A}$ on voimassa *maksimiperiaate*, jos jokaisella $\mathcal{L}(A)$-kaavalla $\phi(x)$ on olemassa sellainen $b \in A$, että

$$\bigvee_{a \in A} ||\phi(a)|| = ||\phi(b)||.$$

Lause 3.11. *Olkoon $\mathfrak{A} = \langle A, ||\cdot||\rangle$ Boolen arvoinen malli, jossa on voimassa maksimiperiaate. Olkoon $\phi(x)$ $\mathcal{L}$-kaava. Silloin $\mathfrak{A} \models \exists x\phi(x)$, jos ja vain jos jollakin $b \in A$ pätee $\mathfrak{A} \models \phi(b)$.*

Todistus. Väite seuraa siitä, että

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A} \models \exists x\phi(x) \\ \Leftrightarrow & \bigvee_{a \in A} ||\phi(a)|| = 1 \\ \text{(maksimiperiaate)} \Leftrightarrow & ||\phi(b)|| = 1 \text{ jollakin } b \in A \\ \Leftrightarrow & \mathfrak{A} \models \phi(b) \text{ jollakin } b \in A. \end{aligned}$$

□

3.3 Tekijämalli

Olkoon U algebran B ultrafiltteri. Määrittelemme relaation $=_U$ joukossa A asettamalla kaikilla $x, y \in A$:

$$x =_U y, \text{ jos ja vain jos } ||x = y|| \in U.$$

Lause 3.12. *Relaatio $=_U$ on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Olkoon $x, y, z \in A$. Boolen arvoisen mallin määritelmän mukaan $||x = x|| = 1$ ja $||x = y|| = ||y = x||$, joten relaatio $=_U$ on refleksiivinen ja symmetrinen. Jos $||x = y|| \in U$ ja $||y = z|| \in U$, niin $||x = z|| \in U$, koska $||x = y|| \wedge ||y = z|| \leq ||x = z||$ ja U on filtteri. Relaatio $=_U$ on siis transitiivinen ja täten ekvivalenssirelaatio. □

Merkintä x^U tarkoittaa ekvivalenssirelaation $=_U$ ekvivalenssiluokkaa.

Määritelmä 3.10. (Vrt. [1, s. 88].) Olkoon U algebran B ultrafiltteri. Boolen arvoisen mallin $\mathfrak{A} = \{A, ||\cdot||\}$ *tekijämalli* on $\mathcal{L}$-malli $\mathfrak{A}/U = \{A', I\}$, missä $A' = \{x^U : x \in A\}$ on sen perusjoukko ja I tulkintafunktio, jolla

$$I(R) = \{\langle a_1^U, \dots, a_n^U\rangle \in (A')^n : ||R(a_1, \dots, a_n)|| \in U\},$$

kun $R \in \mathcal{L}$ on n-paikkainen relaatiosymboli.

Tekijämalli on hyvinmääritelty, koska aina kun $a_1^U = b_1^U, \dots, a_n^U = b_n^U$, niin $||a_1 = b_1|| \in U, \dots, ||a_n = b_n|| \in U$, jolloin, koska U on filtteri, niin Boolen arvoisen mallin määritelmästä seuraa, että

$$||R(a_1, \dots, a_n)|| \in U \Leftrightarrow ||R(b_1, \dots, b_n)|| \in U.$$

Lause 3.13. *Olkoon $\mathfrak{A}$ Boolen arvoinen malli, jossa maksimiperiaate on voimassa, ja $\mathfrak{A}/U$ sen tekijämalli. Silloin jokaisella $\mathcal{L}$-kaavalla $\phi(x_1, \dots, x_n)$ ja alkioilla $a_1, \dots, a_n \in A$ pätee*

$$\mathfrak{A}/U \vDash \phi(a_1^U, \dots, a_n^U) \Leftrightarrow ||\phi(a_1, \dots, a_n)|| \in U.$$

Todistus. Olkoon $\phi(x_1, \dots, x_n)$ $\mathcal{L}$-kaava ja $a_1, \dots, a_n \in A$. Todistamme väitteen induktiolla kaavan pituuden suhteen. Jos $\phi = R(x_1, \dots, x_n)$ jollakin relaatiosymbolilla $R \in \mathcal{L}$, niin väite seuraa tekijämallin määritelmästä. Jos ϕ on muotoa $x = y$ ja $a, b \in A$, niin

$$a^U = b^U \Leftrightarrow a =_U b \Leftrightarrow ||a = b|| \in U$$

ekvivalenssirelaation $=_U$ määritelmän perusteella. Väite siis pätee, jos ϕ on $\mathcal{L}$-atomikaava. Jos $\phi = \neg\psi$ ja väite on tosi $\mathcal{L}$-kaavalla ψ, niin

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}/U \vDash \neg\psi(a_1^U, \dots, a_n^U)\\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A}/U \nvDash \psi(a_1^U, \dots, a_n^U)\\
\text{(i.o.) } &\Leftrightarrow ||\psi(a_1, \dots, a_n)|| \notin U\\
(U \text{ on ultrafiltteri }) &\Leftrightarrow ||\psi(a_1, \dots, a_n)||^* \in U\\
&\Leftrightarrow ||\neg\psi(a_1, \dots, a_n)|| \in U.
\end{aligned}$$

Jos $\phi = \psi \wedge \chi$ ja väite pätee $\mathcal{L}$-kaavoilla ψ ja χ, niin

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}/U \vDash (\psi(a_1^U, \dots, a_n^U) \wedge \chi(a_1^U, \dots, a_n^U))\\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}/U \vDash (\psi(a_1^U, \dots, a_n^U)) \wedge (\mathfrak{A}/U \vDash (\psi(a_1^U, \dots, a_n^U))\\
\text{(i.o.) } &\Leftrightarrow ||\psi(a_1, \dots, a_n)|| \in U \wedge ||\chi(a_1, \dots, a_n)|| \in U\\
&\Leftrightarrow ||\psi(a_1, \dots, a_n) \wedge \chi(a_1, \dots, a_n)|| \in U.
\end{aligned}$$

Jos $\phi = \exists x \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$ ja väite on tosi kaavalla $\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$, niin

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A}/U \vDash \exists x \psi(x, a_1^U, \ldots, a_n^U) \\
& \Leftrightarrow \mathfrak{A}/U \vDash \psi(a^U, a_1^U, \ldots, a_n^U) \text{ jollakin } a \in A \\
(\text{i.o.}) & \Leftrightarrow ||\psi(a, a_1, \ldots, a_n)|| \in U \text{ jollakin } a \in A \\
(\text{maksimiperiaate}) & \Leftrightarrow \bigvee_{a \in A} ||\psi(a, a_1, \ldots, a_n)|| \in U \\
& \Leftrightarrow ||\exists x \psi(x, a_1, \ldots, a_n)|| \in U.
\end{aligned}$$

□

3.4 Boolen arvoinen malli $M^{(B)}$

Oletamme jatkossa, että M on transitiivinen ZFC-malli ja $B \in M$ sellainen, että lause (B *on täydellinen Boolen algebra*)^M on tosi, jolloin sanomme, että B on *täydellinen Boolen algebra mallissa* M. Huomattakoon, että koska kaava x *on Boolen algebra* on Δ_0-kaava, niin B on Boolen algebra myös mallin M ulkopuolella, mutta ei ole välttämättä täydellinen.

Määritelmä 3.11. (Vrt. [1, s. 11].) Asetamme jokaisella ordinaalilla $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$:

$$\begin{aligned}
& M_0^{(B)} = \emptyset, \\
& M_{\alpha+1}^{(B)} = \{x \in M \colon \mathrm{Fun}(x) \wedge \mathrm{ran}(x) \subset B \wedge \mathrm{dom}(x) \subset M_\alpha^{(B)}\}, \\
& M_\alpha^{(B)} = \bigcup_{\gamma < \alpha} M_\gamma, \text{ kun } \alpha \text{ on rajaordinaali;}
\end{aligned}$$

ja määrittelemme

$$M^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}} M_\alpha^{(B)}.$$

Huomattakoon, että $M^{(B)} \subset M$.

Lause 3.14. *Jokaisella* $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ *pätee* $M_\alpha^{(B)} \in M$.

Todistus. Käytämme induktiota ordinaalin $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ suhteen. Selvästi $M_0^{(B)} \in M$. Olkoon $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ sellainen, että $M_\alpha^{(B)} \in M$. Huomaamme, että

$$M_{\alpha+1}^{(B)} = \{x \in \mathcal{P}^{(M)}(M_\alpha^{(B)} \times B) \colon \mathrm{Fun}(x) \wedge \mathrm{ran}(x) \subset B \wedge \mathrm{dom}(x) \subset M_\alpha^{(B)}\}.$$

Nyt, koska kaava

$$\mathrm{Fun}(x) \wedge \mathrm{ran}(x) \subset y \wedge \mathrm{dom}(x) \subset z$$

on Δ_0-kaava ja $\mathcal{P}^{(M)}(M_\alpha \times B) \in M$, niin seurauksen 2.16 perusteella $M_{\alpha+1}^{(B)} \in M$.

Induktioväite siis pätee seuraajaordinaaleilla. Todistamme, että se on voimassa myös rajaordinaaleilla. Jos α on rajaordinaali ja kaikilla $\gamma < \alpha$ pätee $M_\gamma \in M$, niin yhdisteaksiooman ja erään korvausaksiooman mallissa M voimassaolon perusteella

$$M_\alpha^{(B)} = \bigcup_{\gamma<\alpha} M_\gamma \in M,$$

koska $\bigcup x$ on Δ_0-kaava. □

Määritelmä 3.12. Määrittelemme funktion $\rho\colon M^{(B)} \to \mathrm{ORD}^{(M)}$ asettamalla

$$\rho(x) = \min\{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)} \colon x \in M_\alpha^{(B)}\}$$

kaikilla $x \in M^{(B)}$. Sanomme, että ordinaali $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ on joukon $x \in M^{(B)}$ *taso mallissa* $M^{(B)}$, jos $\rho(x) = \alpha$.

Lause 3.15 (Induktioperiaate)**.** *Olkoon $\phi(x)$ kaava. Silloin, jos kaikilla $u \in M^{(B)}$ pätee*

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(u)\phi(x)) \to \phi(u),$$

niin $\phi(u)$ kaikilla $u \in M^{(B)}$.

Todistus. Määrittelemme relaation $E \subset M^{(B)} \times M^{(B)}$ asettamalla kaikilla $u, x \in M^{(B)}$

$$\langle x, u\rangle \in E \Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(u).$$

Olkoon $A \subset M^{(B)}$ ja $\alpha = \min\{\rho(x)\colon x \in A\}$. Silloin on olemassa $v \in A$ siten, että $\rho(v) = \alpha$. Teemme vastaoletuksen, että $x \in \mathrm{dom}(v)$ jollakin $x \in A$. Silloin mallin $M^{(B)}$ määritelmän mukaan $x \in M_\xi$ jollakin $\xi < \alpha$, jolloin $\rho(x) < \alpha$, ristiriita. Näin ollen v on joukon A E-minimaalinen alkio, joten relaatio E on hyvinperustettu, mistä väite seuraa. □

Määritelmä 3.13. (Vrt. [1, s. 14].) Olkoon $\mathcal{L} = \{\in\}$ kieli, missä $\in$ on 2-paikkainen relaatiosymboli. Kutsumme kielen $\mathcal{L}(M^{(B)})$ lauseita ja kaavoja $M^{(B)}$*-lauseiksi* ja $M^{(B)}$*-kaavoiksi.* Määrittelemme funktion, joka kuvaa $M^{(B)}$-lauseet algebran B alkioiksi seuraavalla tavalla. Kaikilla $M^{(B)}$-lauseilla σ, τ ja $M^{(B)}$-kaavoilla $\phi(x)$ asetamme samoin kuin Boolen arvoisen mallin määritelmässä

$$||\sigma \wedge \tau||^B = ||\sigma||^B \wedge ||\tau||^B;$$
$$||\neg\sigma||^B = (||\sigma||^B)^*;$$
$$||\exists x\phi(x)||^B = \bigvee_{x\in M^{(B)}} ||\phi(x)||^B;$$

jos ϕ on $M^{(B)}$-atomikaava $u \in v$ tai $u = v$, niin asetamme

$$\begin{aligned} ||u \in v||^B &= \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \wedge ||u = y||^B \Big); \\ ||u = v||^B &= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||x \in v||^B \Big) \wedge \\ & \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \Rightarrow ||y \in u||^B \Big). \end{aligned}$$

Tarkastelemme funktion $||\cdot||^B$ määritelmää tarkemmin. Haluamme ensinnäkin osoittaa, että se on hyvinmääritelty, minkä lisäksi haluamme kaavan $||\phi(x)||^B = u$ olevan Δ_0-kaava, jotta $||\cdot||^B$ olisi sama myös mallin M sisällä määriteltynä.

Atomilauseiden tapauksessa funktion $||\cdot||^B$ määritelmä näyttää kehämääritelmältä. Todistamme, että se on hyvinmääritelty seuraavasti (vrt. [1, s. 14]). Määrittelemme relaation $\prec$ joukossa $M^{(B)} \times M^{(B)}$ asettamalla

$$\langle x, y \rangle \prec \langle u, v \rangle \Leftrightarrow (x \in \mathrm{dom}(u) \wedge y = v) \vee (x = u \wedge y \in \mathrm{dom}(v))$$

kaikilla $x, y, u, v \in M^{(B)}$. On helppo nähdä, että relaatio $\prec$ on hyvinperustettu.

Olkoon G seuraava funktio. Jos $\langle u, v \rangle \in M^{(B)} \times M^{(B)}$ ja $g \in M$ epätyhjä funktio, jolla $\mathrm{ran}(g) \subset B^3$ ja $\langle x, y \rangle \in \mathrm{dom}(g)$ kaikilla $\langle x, y \rangle \prec \langle u, v \rangle$, niin asetamme

$$\begin{aligned} G(\langle u, v \rangle, g) = \langle & \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \wedge \pi_3 g(u, y) \Big), \\ & \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \wedge \pi_3 g(x, v) \Big), \\ & \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow \pi_1 g(x, v) \Big) \\ \wedge & \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \Rightarrow \pi_2 g(u, y) \Big) \rangle, \end{aligned}$$

missä π_1, π_2, π_3 ovat projektioita eli sellaisia funktioita, että $\pi_1 \langle a, b, c \rangle = a$, $\pi_2 \langle a, b, c \rangle = b$ ja $\pi_3 \langle a, b, c \rangle = c$. Muuten asetamme $G(x, y) = \langle 0_B, 0_B, 1_B \rangle$. Huomattakoon, että funktio G on hyvinmääritelty, koska sen määritelmässä esiintyvät surpremumit ja infimumit ovat olemassa. Esimerkiksi joukko

$$\{ y \in \mathrm{dom}(v) \colon v(y) \wedge \pi_3 g(u, y) \}$$

on mallissa M lauseen 2.15 perusteella, joten koska (B on täydellinen Boolen algebra)^M, niin

$$\bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \wedge \pi_3 g(u, y) \Big)$$

on olemassa ja on mallin M joukko.

Nyt rekursioperiaatteen perusteella on olemassa yksikäsitteinen funktio F joukolta $M^{(B)} \times M^{(B)}$ siten, että kaikilla $\langle u, v\rangle \in \mathrm{dom}(F)$ pätee

$$F(u,v) = G(\langle u,v\rangle, F \restriction \{\langle x,y\rangle \colon \langle x,y\rangle \prec \langle u,v\rangle\}).$$

Todistamme induktiolla relaation $\prec$ suhteen, että $||\cdot||^B$ on hyvinmääritelty ja

$$F(u,v) = \langle ||u \in v||^B, ||v \in u||^B, ||u = v||^B\rangle.$$

Olkoon $\langle u, v\rangle \in M^{(B)} \times M^{(B)}$. Teemme induktio-oletuksen, että kaikilla $\langle x, y\rangle \prec \langle u, v\rangle$ funktio $||\cdot||^B$ on hyvinmääritelty ja

$$F(x,y) = \langle ||x \in y||^B, ||y \in x||^B, ||x = y||^B\rangle.$$

Jos $\langle u, v\rangle = \langle \emptyset, \emptyset\rangle$, niin

$$F(u,v) = G(\langle u,v\rangle, \emptyset) = \langle 0_B, 0_B, 1_B\rangle = \langle ||u \in v||^B, ||v \in u||^B, ||u = v||^B\rangle.$$

On helppo nähdä, että $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ on joukon $M^{(B)} \times M^{(B)}$ ainoa $\prec$-minimaalinen alkio, joten silloin, kun $\langle u, v\rangle \neq \langle \emptyset, \emptyset\rangle$, niin funktion G määritelmän perusteella

$$\begin{aligned}
F(u,v) &= G(\langle u,v\rangle, F \restriction \{\langle x,y\rangle \colon \langle x,y\rangle \prec \langle u,v\rangle\}) \\
&= \langle \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \wedge ||u = y||^B\Big), \\
&\quad \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \wedge ||x = v||^B\Big), \\
&\quad \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||x \in v||^B\Big) \\
&\quad \wedge \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \Rightarrow ||y \in u||^B\Big)\rangle \\
&= \langle ||u \in v||^B, ||v \in u||^B, ||u = v||^B\rangle.
\end{aligned}$$

Näin ollen atomilauseiden tapauksessa funktio $||\cdot||$ on hyvinmääritelty. Samoin näemme induktiolla relaation $\prec$ suhteen, että kaavat

$$u = ||x \in y||^B \text{ ja } u = ||x = y||^B$$

ovat Δ_0-kaavoja.

Todistamme loput induktiolla kaavan pituuden suhteen. Haluamme siis osoittaa, että funktio $||\cdot||^B$ on hyvinmääritelty ja $u = ||\phi(x)||^B$ on Δ_0-kaava kaikilla $M^{(B)}$-kaavoilla $\phi(x)$. Ainoa epätriviaali tapaus on kun kaava on muotoa $\exists x\phi(x)$. Teemme induktio-oletuksen, että $||\phi(x)||^B$ on hyvinmääritelty kaikilla $x \in M^{(B)}$ ja $u = ||\phi(x)||^B$ on Δ_0-kaava. Määrittelemme funktion f joukolta B asettamalla jokaisella $u \in B$:

$$f(u) = \min\{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)} \colon \exists x \in M_\alpha^{(B)}(u = ||\phi(x)||^B)\},$$

jos $||\phi(x)|| = u$ jollakin $x \in M^{(B)}$, ja $f(x) = \emptyset$ muuten. Silloin, koska induktio-oletuksen mukaan $u = ||\phi(x)||$ on Δ_0-kaava, niin lauseen 2.17 perusteella

$$\{f(u) \colon u \in B\} \in M.$$

Olkoon $\alpha = \bigcup\{f(u) \colon u \in B\}$, jolloin $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ ja

$$\begin{aligned} &\{u \in B \colon \exists x \in M^{(B)}(u = ||\phi(x)||^B)\} \\ = &\{u \in B \colon \exists x \in M_\alpha^{(B)}(u = ||\phi(x)||^B)\} \in M, \end{aligned}$$

jolloin

$$\bigvee_{x \in M^{(B)}} ||\phi(x)||^B = \bigvee_{x \in M_\alpha^{(B)}} ||\phi(x)||^B \in M,$$

joten $||\exists x\phi(x)||^B$ on hyvinmääritelty. Kaava $u = ||\exists x\phi(x)||^B$ on Δ_0-kaava, koska

$$\begin{aligned} &u = ||\exists x\phi(x)||^B \\ \Leftrightarrow\ &u = \bigvee_{x \in M_\alpha^{(B)}} ||\phi(x)||^B \\ \Leftrightarrow\ &u = \bigvee\{v \in B \colon \exists x \in M_\alpha^{(B)}(v = ||\phi(x)||^B)\}. \end{aligned}$$

Lause 3.16. *Pari $\langle M^{(B)}, ||\cdot||^B\rangle$ on Boolen arvoinen malli.*

Todistus. Tarkistamme, että Boolen arvoisen mallin määritelmän (määritelmä 3.7) ehdot ovat voimassa mallissa $\langle M^{(B)}, ||\cdot||^B\rangle$.

1(a). (Vrt. [1, s. 16].) Haluamme osoittaa, että $||u = u||^B = 1$ kaikilla $u \in M^{(B)}$. Olkoon $u \in M^{(B)}$. Teemme induktio-oletuksen, että $||x = x||^B = 1$ kaikilla $x \in \mathrm{dom}(u)$. Huomaamme, että silloin kaikilla $x \in \mathrm{dom}(u)$ pätee

$$||x \in u||^B = \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(u)} ||x = y||^B = 1,$$

joten kaikilla $x \in \mathrm{dom}(u)$ on voimassa $u(x) \leq ||x \in u||^B$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $(u(x) \Rightarrow ||x \in u||^B) = 1$. Näin ollen

$$||u = u||^B = \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||x \in u||^B\Big) = 1.$$

1(b). Jos $u, v \in M^{(B)}$, niin selvästi $||u = v||^B = ||v = u||^B$ Boolen algebran operaation $\wedge$ kommutatiivisuuden perusteella.

1(c). (Vrt. [1, s. 16].) Haluamme osoittaa, että $||u = v||^B \wedge ||v = w||^B \leq ||u = w||^B$ kaikilla $u, v, w \in M^{(B)}$. Olkoon $u \in M^{(B)}$. Teemme induktio-oletuksen, että kaikilla $x \in \mathrm{dom}(u)$ pätee

$$\forall v, w \in M^{(B)}\Big(||x = v||^B \wedge ||v = w||^B \leq ||x = w||^B\Big).$$

Olkoon $v, w \in M^{(B)}$. Silloin induktio-oletuksen perusteella kaikilla $x \in \mathrm{dom}(u)$, $y \in \mathrm{dom}(v)$, $z \in \mathrm{dom}(w)$ on voimassa

$$||x = y||^B \wedge ||y = z||^B \wedge w(z) \leq ||x = z||^B \wedge w(z),$$

jolloin

$$\bigvee_{z \in \mathrm{dom}(w)} \Big(||x = y||^B \wedge ||y = z||^B \wedge w(z)\Big) \leq \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(w)} \Big(||x = z||^B \wedge w(z)\Big),$$

mistä saamme

$$||x = y||^B \wedge ||y \in w||^B \leq ||x \in w||^B.$$

Toisaalta kuvauksen $||\cdot = \cdot||^B$ määritelmästä seuraa, että

$$||v = w||^B \leq \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(t) \Rightarrow ||t \in w||^B\Big),$$

jolloin

$$||v = w||^B \leq \Big(v(y) \Rightarrow ||y \in w||^B\Big)$$

eli

$$\Big(||v = w||^B \wedge v(y)\Big) \leq ||y \in w||^B,$$

ja edelleen

$$||v = w||^B \wedge v(y) \wedge ||x = y||^B \leq ||y \in w||^B \wedge ||x = y||^B \leq ||x \in w||^B.$$

Nyt, koska y on mielivaltainen joukon $\mathrm{dom}(v)$ alkio, niin

$$\bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(||v = w||^B \wedge v(y) \wedge ||x = y||^B\Big) \leq |x \in w||^B,$$

jolloin

$$||v = w||^B \wedge ||x \in v||^B \leq ||x \in w||^B.$$

Samoin kuvauksen $||\cdot = \cdot||^B$ määritelmästä seuraa myös

$$||u = v||^B \wedge u(x) \leq ||x \in v||^B,$$

joten

$$||u = v||^B \wedge u(x) \wedge ||v = w||^B \leq ||x \in v||^B \wedge ||v = w||^B \leq ||x \in w||^B$$

mistä seuraa, että

$$||u = v||^B \wedge ||v = w||^B \leq (u(x) \Rightarrow ||x \in w||^B),$$

jolloin

$$(2) \qquad ||u = v||^B \wedge ||v = w||^B \leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||x \in w||^B\Big).$$

Kirjoittamalla induktio-oletuksen muodossa

$$\forall v, w \in M^{(B)}\Big(||w = v||^B \wedge ||v = x||^B \leq ||w = x||^B\Big)$$

ja käyttämällä samaa päättelyä kuin edellä saamme myös

$$(3) \qquad ||u = v||^B \wedge ||v = w||^B \leq \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(w)} \Big(w(z) \Rightarrow ||z \in u||^B\Big).$$

Nyt, yhdistämällä kohdat 2 ja 3 saamme

$$\begin{aligned} ||u = v||^B \wedge ||v = w||^B \leq & \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||x \in w||^B\Big) \\ & \wedge \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(w)} \Big(w(z) \Rightarrow ||z \in u||^B\Big) \\ & = ||u = w||^B, \end{aligned}$$

joten induktioperiaatteen perusteella väite on tosi.

2. (Vrt. [1, s. 16].) Haluamme osoittaa, että

$$||u \in v||^B \wedge ||u = u'||^B \wedge ||v = v'||^B \leq ||u' \in v'||^B$$

kaikilla $u, v, u', v' \in M^{(B)}$. Osoitamme ensin, että kaikilla $u, v, u' \in M^{(B)}$ pätee $||u \in v||^B \wedge ||u = u'||^B \leq ||u' \in v||$. Olkoon $u, v, u' \in M^{(B)}$. Silloin tämän lauseen todistuksen edellisen kohdan perusteella

$$(4) \qquad \begin{aligned} & ||u \in v||^B \wedge ||u = u'||^B \\ = & \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(x) \wedge ||x = u||^B\Big) \wedge ||u = u'||^B \\ \leq & \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(x) \wedge ||x = u'||^B\Big) \\ = & ||u' \in v||^B. \end{aligned}$$

Osoitamme seuraavaksi, että kaikilla $u, v, v' \in M^{(B)}$ on voimassa

$$||u \in v||^B \wedge ||v = v'||^B \leq ||u \in v'||^B.$$

Kuvauksen $||\cdot = \cdot||^B$ määritelmästä seuraa, että

$$||v = v'||^B \wedge v(x) \leq ||x \in v'||^B$$

kaikilla $x \in \mathrm{dom}(v)$, jolloin

$$\begin{aligned} ||v = v'||^B \wedge v(x) \wedge ||x = u||^B &\leq ||x \in v'||^B \wedge ||x = u||^B \\ &\leq ||u \in v'||^B. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$||v = v'||^B \wedge \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(x) \wedge ||x = u||^B\Big) \leq ||u \in v'||^B,$$

jolloin

$$||v = v'||^B \wedge ||u \in v||^B \leq ||u \in v'||^B. \tag{5}$$

Yhdistämällä 4 ja 5 saamme

$$\begin{aligned} ||u \in v||^B \wedge ||u = u'||^B \wedge ||v = v'||^B &\leq ||u' \in v|| \wedge ||v = v'|| \\ &\leq ||u' \in v'||^B \end{aligned}$$

kaikilla $u, v, u', v' \in M^{(B)}$.

Olemme todistaneet nyt Boolen arvoisen mallin määritelmän kohdat 1 ja 2. Se, että kohdat 3 ja 4 ovat voimassa mallissa $\langle M^{(B)}, ||\cdot||^B\rangle$ seuraa suoraan funktion $||\cdot||^B$ määritelmästä. Näin ollen $\langle M^{(B)}, ||\cdot||^B\rangle$ on Boolen arvoinen malli. □

Käytämme jatkossa mallista $\langle M^{(B)}, ||\cdot||^B\rangle$ lyhyempää merkintää $M^{(B)}$ ja kuvauksesta $||\cdot||^B$ merkintää $||\cdot||$, mikäli se ei aiheuta sekaannusta.

Lause 3.17. *Olkoon $u \in M^{(B)}$. Silloin kaikilla $x \in \mathrm{dom}(u)$ pätee*

$$u(x) \leq ||x \in u||.$$

Todistus. Olkoon $x \in \mathrm{dom}(u)$. Silloin

$$u(x) = u(x) \wedge ||x = x|| \leq \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(y) \wedge ||x = y||\Big) = ||x \in u||.$$

□

Lause 3.18. *Olkoon $\phi(x)$ $M^{(B)}$-kaava. Olkoon $u \in M^{(B)}$. Silloin*

$$||\exists x \in u\phi(x)|| = \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \wedge ||\phi(x)||\Big);$$
$$||\forall x \in u\phi(x)|| = \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||\phi(x)||\Big).$$

Todistus. Ks. [1, s. 19]. □

3.5 Mallin $M^{(B)}$ kanoniset alkiot

Määritelmä 3.14. (Vrt. [1, s. 22].) Määrittelemme rekursiivisesti funktion $\hat{\cdot}$ joukolta M asettamalla

$$\hat{x} = \{\langle \hat{y}, 1\rangle : y \in x\}$$

jokaisella $x \in M$.

Huomattakoon, että jokaisella $x \in M$ pätee $\hat{x} \in M^{(B)}$. Sanomme, että $\hat{x}$ on mallin $M^{(B)}$ *kanoninen* alkio, joka vastaa mallin M alkiota x.

Apulause 3.19. *Jos $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ on Δ_0-kaava ja $a_1, \ldots, a_n \in M$, niin*

$$||\phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)|| \in \{0, 1\}.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 22].) Todistamme väitteen ensin atomikaavoille. Olkoon $v \in M$. Teemme induktio-oletuksen, että kaikilla $y \in v$ pätee

$$\begin{aligned}
&\forall u \in M(||\hat{u} \in \hat{y}|| \in \{0, 1\}),\\
&\forall u \in M(||\hat{u} = \hat{y}|| \in \{0, 1\}),\\
&\forall u \in M(||\hat{y} \in \hat{u}|| \in \{0, 1\}).
\end{aligned}$$

Olkoon $u \in M$. Silloin induktio-oletuksesta seuraa

$$\begin{aligned}
||\hat{u} \in \hat{v}|| &= \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(\hat{v})} \hat{v}(y) \wedge ||\hat{u} = y||\\
&= \bigvee_{y \in v} ||\hat{u} = \hat{y}|| \in \{0, 1\},\\
||\hat{u} = \hat{v}|| &= \bigwedge_{z \in u} ||\hat{z} \in \hat{v}|| \wedge \bigwedge_{y \in v} ||\hat{y} \in \hat{u}||\\
&= \bigwedge_{z \in u} \Big(\bigvee_{y \in v} ||\hat{z} = \hat{y}||\Big) \wedge \bigwedge_{y \in v} ||\hat{y} \in \hat{u}|| \in \{0, 1\},\\
||\hat{v} \in \hat{u}|| &= \bigvee_{z \in u} ||\hat{v} = \hat{z}||\\
&= \bigvee_{z \in u} \Big(\bigwedge_{y \in v} ||\hat{y} \in \hat{z}|| \wedge \bigwedge_{x \in z} ||\hat{x} \in \hat{v}||\Big)\\
&= \bigvee_{z \in u} \Big(\bigwedge_{y \in v} ||\hat{y} \in \hat{z}|| \wedge \bigwedge_{x \in z} \Big(\bigvee_{y \in v} ||\hat{x} = \hat{y}||\Big)\Big) \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Näin ollen induktioperiaatteen perusteella kaikilla $u, v \in M$ on voimassa $||\hat{u} \in \hat{v}|| \in \{0,1\}$ ja $||\hat{u} = \hat{v}|| \in \{0,1\}$.

Todistamme loput induktiolla kaavan pituuden suhteen. Olkoot $\phi(x_1, \dots, x_n)$ ja $\psi(x_1, \dots, x_n)$ Δ_0-kaavoja, joilla väite on tosi. Silloin

$$\begin{aligned}
||\neg\phi(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)|| &= ||\phi(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)||^* \in \{0,1\}, \\
||\phi(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n) \wedge \psi(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)|| &= ||\phi(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)|| \wedge ||\psi(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)|| \in \{0,1\}, \\
||\exists x \in \hat{a}_1 \phi(x, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)|| &= \bigvee_{x \in a_1} ||\phi(\hat{x}, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)|| \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

□

Lause 3.20. *Jos $\phi(x_1, \dots, x_n)$ on Δ_0-kaava ja $a_1, \dots, a_n \in M$, niin*

$$M^{(B)} \models \phi(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n), \text{ jos ja vain jos } \phi(a_1, \dots, a_n).$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 23].) Todistamme väitteen ensin atomikaavoille. Olkoon $y \in M$. Teemme induktio-oletuksen, että kaikilla $z \in y$ on voimassa

$$\begin{aligned}
&\forall x (x \in z \leftrightarrow ||\hat{x} \in \hat{z}|| = 1), \\
&\forall x (x = z \leftrightarrow ||\hat{x} = \hat{z}|| = 1), \\
&\forall x (z \in x \leftrightarrow ||\hat{z} \in \hat{x}|| = 1),
\end{aligned}$$

jolloin saadaan, kun $x \in M$

$$\begin{aligned}
& ||\hat{x} \in \hat{y}|| = 1 \\
& \Leftrightarrow \bigvee_{z \in y} ||\hat{x} = \hat{z}|| = 1 \\
\text{(lause 3.19)} \quad & \Leftrightarrow ||\hat{x} = \hat{z}|| = 1 \text{ jollakin } z \in y \\
\text{(i.o.)} \quad & \Leftrightarrow x = z \text{ jollakin } z \in y \\
& \Leftrightarrow x \in y,
\end{aligned}$$

minkä lisäksi

$$\begin{aligned}
& ||\hat{x} = \hat{y}|| = 1 \\
& \Leftrightarrow \bigwedge_{u \in x} ||\hat{u} \in \hat{y}|| \wedge \bigwedge_{z \in y} ||\hat{z} \in \hat{x}|| = 1 \\
& \Leftrightarrow \bigwedge_{u \in x} \Big(\bigvee_{z \in y} ||\hat{u} = \hat{z}|| \Big) \wedge \bigwedge_{z \in y} ||\hat{z} \in \hat{x}|| = 1 \\
\text{(i.o.)} \quad & \Leftrightarrow \forall u \in x \exists z \in y (z = u) \wedge \forall z \in y (z \in x) \\
& \Leftrightarrow \forall u \in x (u \in y) \wedge \forall z \in y (z \in x) \\
& \Leftrightarrow x = y
\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
& ||\hat{y} \in \hat{x}|| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \bigvee_{u \in x} ||\hat{y} = \hat{u}|| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \bigvee_{u \in x} \Big(\bigwedge_{z \in y} ||\hat{z} \in \hat{u}|| \wedge \bigwedge_{v \in u} ||\hat{v} \in \hat{y}|| \Big) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \bigvee_{u \in x} \Big(\bigwedge_{z \in y} ||\hat{z} \in \hat{u}|| \wedge \bigwedge_{v \in u} \Big(\bigvee_{z \in y} ||\hat{v} = \hat{z}|| \Big) \Big) = 1 \\
\text{(i.o.)} \quad \Leftrightarrow\ & \exists u \in x (\forall z \in y (z \in u) \wedge \forall v \in u (\exists z \in y (v = z)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists u \in x (\forall z \in y (z \in u) \wedge \forall v \in u (v \in y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists u \in x (y = u) \\
\Leftrightarrow\ & y \in x,
\end{aligned}
$$

joten kaikilla $x, y \in M$ pätee

$$
\begin{aligned}
x \in y, &\text{ jos ja vain jos } ||\hat{x} \in \hat{y}|| = 1, \\
x = y, &\text{ jos ja vain jos } ||\hat{x} = \hat{y}|| = 1.
\end{aligned}
$$

Todistamme loput induktiolla kaavan pituuden suhteen. Olkoot

$$
\phi(x_1, \ldots, x_n) \text{ ja } \psi(x_1, \ldots, x_n)
$$

kaavoja, joilla väite on tosi, ja $a_1, \ldots, a_n \in M$. Silloin

$$
\begin{aligned}
& ||\neg\phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)|| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & ||\phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)||^* = 1 \\
\Leftrightarrow\ & ||\phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)|| = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \neg\phi(a_1, \ldots, a_n)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
& ||\phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) \wedge \psi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)|| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & ||\phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)|| = 1 \wedge ||\psi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)|| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \phi(a_1, \ldots, a_n) \wedge \psi(a_1, \ldots, a_n)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
& ||\exists x \in \hat{a}_1 \phi(x, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)|| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \bigvee_{x \in a_1} ||\phi(\hat{x}, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)|| = 1 \\
\text{(lause 3.19)} \quad \Leftrightarrow\ & ||\phi(\hat{x}, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)|| = 1 \text{ jollakin } x \in a_1 \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \in a_1 \phi(x, a_2, \ldots, a_n).
\end{aligned}
$$

□

3.6 Maksimiperiaate on voimassa mallissa $M^{(B)}$

Määritelmä 3.15. Boolen algebran B osajoukko A on *antiketju* algebrassa B, jos $a \wedge b = 0$ aina, kun $a, b \in A$ ja $a \neq b$.

Apulause 3.21. *Olkoon $A \in M$ antiketju Boolen algebrassa B ja $f \in M$ funktio joukolta A joukkoon $M^{(B)}$. Silloin on olemassa sellainen $u \in M^{(B)}$, että $a \leq ||u_a = u||$ kaikilla $a \in A$, missä $u_a = f(a)$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 25].) Määrittelemme alkion $u \in M^{(B)}$ asettamalla

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(u) &= \bigcup\{\mathrm{dom}(u_a) \colon a \in A\}; \\ u(x) &= \bigvee_{a \in A} \Big(a \wedge ||x \in u_a||\Big), \text{ kun } x \in \mathrm{dom}(u). \end{aligned}$$

Olkoon $a \in A$ ja $x \in \mathrm{dom}(u)$. Silloin

$$\begin{aligned} a \wedge u(x) &= a \wedge \bigvee_{b \in A} \Big(b \wedge ||x \in u_b||\Big) \\ &= \bigvee_{b \in A} \Big(a \wedge b \wedge ||x \in u_b||\Big) \\ (A \text{ on antiketju}) &= a \wedge ||x \in u_a|| \\ &\leq ||x \in u_a||, \end{aligned}$$

joten $a \leq u(x) \Rightarrow ||x \in u_a||$ kaikilla $x \in \mathrm{dom}(u)$, mistä seuraa, että

$$a \leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||x \in u_a||\Big). \tag{6}$$

Olkoon nyt $x \in \mathrm{dom}(u_a)$. Silloin

$$a \wedge u_a(x) \leq a \wedge ||x \in u_a|| \leq u(x) \leq ||x \in u||,$$

joten

$$a \leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u_a)} \Big(u_a(x) \Rightarrow ||x \in u||\Big).$$

Yhdistämällä tämän kohdan (6) kanssa saamme

$$\begin{aligned} a &\leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||x \in u_a||\Big) \\ &\wedge \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u_a)} \Big(u_a(x) \Rightarrow ||x \in u||\Big) \\ &= ||u_a = u||. \end{aligned}$$

□

Lause 3.22. *Maksimiperiaate on voimassa Boolen arvoisessa mallissa $M^{(B)}$ eli kaikilla kaavoilla $\phi(x)$ on olemassa $u \in M^{(B)}$ siten, että*

$$\bigvee_{x \in M^{(B)}} ||\phi(x)|| = ||\phi(u)||.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 27].) Olkoon

$$D = \{||\phi(u)||\colon u \in M^{(B)}\}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} D &= \{a \in B\colon \exists u \in M \exists \alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}(u \in M_\alpha^{(B)} \wedge ||\phi(u)|| = a)\} \\ &= \{a \in B\colon (\exists u \exists \alpha \in \mathrm{ORD}(u \in M_\alpha^{(B)} \wedge ||\phi(u)|| = a\}))^M\}, \end{aligned}$$

joten lauseen 2.15 nojalla $D \in M$. Olkoon f sellainen funktio joukolta D, että kaikilla $a \in D$:

$$f(a) = \{u \in M_\gamma^{(B)}\colon ||\phi(u)|| = a\},$$

missä

$$\gamma = \min\{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}\colon \exists u \in M_\alpha^{(B)}(||\phi(u)|| = a)\},$$

jolloin $f \in M$. Koska valinta-aksiooma on tosi mallissa M, niin on olemassa valintafunktio $G \in M$ joukolta $\mathrm{ran}(f)$. Merkitsemme $u_a = G(f(a))$, jolloin siis $a = ||\phi(u_a)||$ jokaisella $a \in D$, ja koska $G \in M$, niin $\{u_a\colon a \in D\} \in M$. Lisäksi valinta-aksiooman voimassaolosta mallissa M seuraa, että joukko $\{u_a\colon a \in D\}$ voidaan hyvinjärjestää mallissa M eli jollakin ordinaalilla $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ on olemassa bijektio $g \in M$ joukolta α joukolle $\{u_a\colon a \in D\}$. Merkitsemme $u_\xi = g(\xi)$ jokaisella $\xi < \alpha$, jolloin

$$\{||\phi(u_\xi)||\colon \xi < \alpha\} = \{||\phi(u_a)||\colon a \in D\} = \{||\phi(u)||\colon u \in M^{(B)}\},$$

mistä seuraa

$$\bigvee_{x \in M^{(B)}} ||\phi(x)|| = \bigvee_{\xi < \alpha} ||\phi(u_\xi)||. \tag{7}$$

Asetamme jokaisella ordinaalilla $\xi < \alpha$

$$a_\xi = ||\phi(u_\xi)|| \wedge \bigwedge_{\eta < \xi} ||\phi(u_\eta)||^*.$$

Silloin joukko $\{a_\xi\colon \xi < \alpha\}$ kuuluu malliin M ja on antiketju, koska kaikilla ordinaaleilla $\mu < \nu < \alpha$ pätee

$$a_\nu \wedge a_\mu \leq ||\phi(u_\mu)|| \wedge ||\phi(u_\mu)||^* = 0.$$

Nyt haluamme todistaa, että

$$\bigvee_{\xi<\alpha} a_\xi = \bigvee_{\xi<\alpha} ||\phi(u_\xi)||.$$

Olkoon $\gamma < \alpha$. Teemme induktio-oletuksen, että

$$\bigvee_{\xi<\gamma} a_\xi = \bigvee_{\xi<\gamma} ||\phi(u_\xi)||.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
\bigvee_{\xi\leq\gamma} a_\xi &= \bigvee_{\xi<\gamma} a_\xi \vee a_\gamma \\
&= \bigvee_{\xi<\gamma} ||\phi(u_\xi)|| \vee \Big(||\phi(u_\gamma)|| \wedge \bigwedge_{\xi<\gamma} ||\phi(u_\xi)||^*\Big) \\
&= \Big(\bigvee_{\xi<\gamma} ||\phi(u_\xi)|| \vee ||\phi(u_\gamma)||\Big) \wedge \Big(\bigvee_{\xi<\gamma} ||\phi(u_\xi)|| \vee \bigwedge_{\xi<\gamma} ||\phi(u_\xi)||^*\Big) \\
&= \bigvee_{\xi\leq\gamma} ||\phi(u_\xi)|| \wedge \Big(\bigvee_{\xi<\gamma} ||\phi(u_\xi)|| \vee \Big(\bigvee_{\xi<\gamma} ||\phi(u_\xi)||\Big)^*\Big) \\
&= \bigvee_{\xi\leq\gamma} ||\phi(u_\xi)||.
\end{aligned}$$

Näin ollen kaikilla $\gamma < \alpha$ pätee

$$\bigvee_{\xi\leq\gamma} a_\xi = \bigvee_{\xi\leq\gamma} ||\phi(u_\xi)||$$

ja edelleen

$$||\phi(u_\gamma)|| \leq \bigvee_{\xi\leq\gamma} ||\phi(u_\xi)|| = \bigvee_{\xi\leq\gamma} a_\xi \leq \bigvee_{\xi<\alpha} a_\xi,$$

mistä seuraa

$$\bigvee_{\xi<\alpha} ||\phi(u_\xi)|| \leq \bigvee_{\xi<\alpha} a_\xi,$$

ja koska selvästi $a_\xi \leq ||\phi(u_\xi)||$ kaikilla $\xi < \alpha$, niin

$$\bigvee_{\xi<\alpha} a_\xi = \bigvee_{\xi<\alpha} ||\phi(u_\xi)||.$$

Näin ollen apulauseen 3.21 ja kohdan (7) perusteella

$$\begin{aligned}
\bigvee_{x\in M^{(B)}} ||\phi(x)|| = \bigvee_{\xi<\alpha} ||\phi(u_\xi)|| &= \bigvee_{\xi<\alpha} a_\xi \\
&\leq \bigvee_{\xi<\alpha} \Big(||\phi(u_\xi)|| \wedge ||u = u_\xi||\Big) \\
&\leq ||\phi(u)||
\end{aligned}$$

jollakin $u \in M^{(B)}$, ja koska myös selvästi

$$||\phi(u)|| \leq \bigvee_{x \in M^{(B)}} ||\phi(x)||,$$

niin

$$||\phi(u)|| = \bigvee_{x \in M^{(B)}} ||\phi(x)||.$$

□

Apulause 3.23. *Olkoon $\phi(x)$ sellainen $M^{(B)}$-kaava, että $M^{(B)} \vDash \exists x \phi(x)$. Silloin jokaisella $v \in M^{(B)}$ on olemassa sellainen $u \in M^{(B)}$, että $||\phi(u)|| = 1$ ja $||\phi(v)|| = ||u = v||$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 28].) Olkoon $v \in M^{(B)}$. Maksimiperiaatteen perusteella on olemassa sellainen $w \in M^{(B)}$, että $||\phi(w)|| = 1$. Apulauseen 3.21 nojalla on olemassa $u \in M^{(B)}$ siten, että $||\phi(v)|| \leq ||u = v||$ ja $||\phi(v)||^* \leq ||u = w||$, jolloin

$$1 = ||\phi(v)|| \vee ||\phi(v)||^* \leq ||u = v \wedge \phi(v)|| \vee ||u = w \wedge \phi(w)|| \leq ||\phi(u)||,$$

ja

$$||u = v|| = ||u = v|| \wedge ||\phi(u)|| \leq ||\phi(v)|| \leq ||u = v||.$$

Väite on siis tosi. □

Lause 3.24. *Olkoon $\phi(x)$ sellainen $M^{(B)}$-kaava, että $M^{(B)} \vDash \exists x \phi(x)$, ja $\psi(x)$ sellainen $M^{(B)}$- kaava, että kaikilla $u \in M^{(B)}$ ehdosta $M^{(B)} \vDash \phi(u)$ seuraa $M^{(B)} \vDash \psi(u)$. Silloin $M^{(B)} \vDash \forall x(\phi(x) \to \psi(x))$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 28].) Olkoon $v \in M^{(B)}$. Lauseen 3.23 perusteella on olemassa sellainen $u \in M^{(B)}$, että $||\phi(u)|| = 1$ ja $||u = v|| = 1$, jolloin myös $||\psi(u)|| = 1$, joten

$$||\phi(v)|| = ||u = v|| = ||u = v|| \wedge ||\psi(u)|| \leq ||\psi(v)||,$$

mistä väite seuraa. □

3.7 $M^{(B)}$ on ZFC-malli

Osoitamme seuraavaksi, että jokainen ZFC-aksiooma on tosi mallissa $M^{(B)}$, jolloin lauseen 3.10 perusteella jokainen ZFC-teoreema on myös tosi mallissa $M^{(B)}$.

3.7.1 Extensionaalisuusaksiooma

Lause 3.25. *Ekstensionaalisuusaksiooma on tosi Boolen arvoisessa mallissa $M^{(B)}$ eli*

$$M^{(B)} \models \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

Todistus. Olkoot $x, y \in M^{(B)}$ ja

$$M^{(B)} \models \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y).$$

Silloin $||z \in x|| = ||z \in y||$ kaikilla $z \in M^{(B)}$, joten

$$||x = y|| = \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(z) \Rightarrow ||z \in y|| \Big) \wedge \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(y)} \Big(y(z) \Rightarrow ||z \in x|| \Big) = 1$$

lauseen 3.17 perusteella. □

3.7.2 Erotteluaksioomat

Lause 3.26. *Erotteluaksioomat ovat tosia mallissa $M^{(B)}$ eli jokaisella $M^{(B)}$-kaavalla $\phi(x)$ pätee*

$$M^{(B)} \models \forall u \exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow x \in u \wedge \phi(x))$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 30].) Olkoon $u \in M^{(B)}$. Määrittelemme alkion $v \in M^{(B)}$ asettamalla

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(v) &= \mathrm{dom}(u); \\ v(x) &= u(x) \wedge ||\phi(x)||, \text{ kun } x \in \mathrm{dom}(v). \end{aligned}$$

Olkoon $x \in M^{(B)}$. Silloin

$$\begin{aligned} ||x \in v|| &= \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \wedge ||x = y|| \Big) \\ &= \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(y) \wedge ||\phi(y)|| \wedge ||x = y|| \Big) \\ &= \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(y) \wedge ||\phi(x)|| \wedge ||x = y|| \Big) \\ &= ||x \in u|| \wedge ||\phi(x)||, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

3.7.3 Korvausaksioomat

Määritelmä 3.16. (Vrt. [2, s. 65].) *Kokoelmaperiaateskeema* on muotoa

$$\forall p(\forall u \exists v \forall x \in u(\exists y \phi(x,y,p) \to \exists y \in v \phi(x,y,p))),$$

olevien lauseiden joukko, missä $\phi(x,y,p)$ on mielivaltainen kaava.

Lause 3.27. *Kokoelmaperiaateskeema on yhtäpitävä korvausaksioomaskeeman kanssa.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 65].) Osoitamme ensin, että kokoelmaperiaateskeeman jokainen lause on tosi ZFC:ssä. Olkoot p, u joukkoja ja $\phi(x,y,p)$ kaava. Asetamme jokaisella $x \in u$:

$$\alpha_x = \min\{\rho(y) \colon \phi(x,y,p)\}$$

ja

$$C_x = \{y \in V_{\alpha_x+1} \colon \phi(x,y,p)\}.$$

Silloin erään korvausaksiooman perusteella $\{C_x \colon x \in u\}$ on joukko, jolloin myös $v = \bigcup\{C_x \colon x \in u\}$ on joukko. Olkoon $x \in u$ sellainen, että $\exists y \phi(x,y,p)$ pätee. Silloin selvästi pätee myös $\exists y \in v \phi(x,y,p)$. Kokoelmaperiaate on siis voimassa.

Seuraavaksi osoitamme, että korvausaksioomaskeema seuraa kokoelmaperiaateskeemasta. Olkoon F (luokka)funktio ja u joukko. Kokoelmaperiaatteen mukaan on olemassa joukko v siten, että $F(x) \in v$ jokaisella $x \in u$, joten erään erotteluaksiooman perusteella

$$\begin{aligned} &\{F(x) \colon x \in u\} \\ = &\{y \in v \colon \exists x \in u(F(x) = y)\} \end{aligned}$$

on myös joukko. □

Lause 3.28. *Olkoon $\phi(x,y)$ $M^{(B)}$-kaava. Silloin*

$$M^{(B)} \models \forall u \exists v \forall x \in u(\exists y \phi(x,y) \to \exists y \in v \phi(x,y))$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 31].) Olkoon $u \in M^{(B)}$. Osoitimme aiemmin (s. 40), että jokaisella $x \in \mathrm{dom}(u)$ on olemassa ordinaali $\alpha_x \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ siten, että

$$\bigvee_{y \in M^{(B)}} ||\phi(x,y)|| = \bigvee_{y \in M^{(B)}_{\alpha_x}} ||\phi(x,y)||.$$

Olkoon $\alpha = \bigcup\{\alpha_x \colon x \in \mathrm{dom}(u)\}$, jolloin $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$, koska funktio $x \mapsto \alpha_x$ kuuluu malliin M. Määrittelemme alkion $v \in M^{(B)}$ asettamalla

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(v) &= M_\alpha^{(B)} \\ v(x) &= 1, \text{ kun } x \in \mathrm{dom}(v), \end{aligned}$$

jolloin saamme

$$\begin{aligned} ||\exists y \phi(x,y)|| &= \bigvee_{y \in M^{(B)}} ||\phi(x,y)|| \\ &= \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(y) \wedge ||\phi(x,y)|| \Big) = ||\exists y \in v \phi(x,y)||, \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} &||\forall x \in u(\exists y \phi(x,y) \to \exists y \in v \phi(x,y))|| \\ &= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(x) \Rightarrow ||\exists y \phi(x,y) \to \exists y \in v \phi(x,y)|| \Big) = 1. \end{aligned}$$

□

Seuraus 3.29. *Korvausaksioomat ovat tosia mallissa $M^{(B)}$.*

Todistus. Seuraa edellisestä lauseesta lauseen 3.27 perusteella. □

3.7.4 Yhdisteaksiooma

Lause 3.30. *Yhdisteaksiooma on tosi mallissa $M^{(B)}$ eli*

$$M^{(B)} \vDash \forall u \exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow \exists y \in u(x \in y)).$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 32].) Olkoon $u \in M^{(B)}$. Määrittelemme alkion $v \in M^{(B)}$ asettamalla

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(v) &= \bigcup\{\mathrm{dom}(z) \colon z \in \mathrm{dom}(u)\}; \\ v(w) &= ||\exists z \in u(w \in z)||, \text{ kun } w \in \mathrm{dom}(v). \end{aligned}$$

Olkoon $x \in M^{(B)}$. Silloin

$$\begin{aligned} ||x \in v|| &= \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(w) \wedge ||w = x|| \Big) \\ &= \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(v)} \Big(||\exists z \in u(w \in z)|| \wedge ||w = x|| \Big) \\ &\le \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(v)} ||\exists z \in u(x \in z)|| \\ &= ||\exists z \in u(x \in z)|| \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
||\exists z \in u(x \in z)|| &= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(z) \wedge ||x \in z|| \Big) \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(z) \wedge \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(z)} \Big(z(w) \wedge ||w = x|| \Big)\Big) \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(z)} \Big(u(z) \wedge z(w) \wedge ||w = x|| \Big) \\
&\leq \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(v)} \Big(u(z) \wedge ||w \in z|| \wedge ||w = x|| \Big) \\
&= \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(v)} \Big(\bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(z) \wedge ||w \in z|| \Big) \wedge ||w = x|| \Big) \\
&= \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(v)} \Big(||\exists z \in u(w \in z)|| \Big) \wedge ||w = x|| \Big) \\
&= \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(w) \wedge ||w = x|| \Big) \\
&= ||x \in v||,
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

3.7.5 Potenssijoukkoaksiooma

Lause 3.31. *Potenssijoukkoaksiooma on tosi mallissa $M^{(B)}$ eli*

$$M^{(B)} \models \forall u \exists v \forall x (x \in v \leftrightarrow \forall y \in x (y \in u)).$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 33].) Merkitsemme

$$||x \subset u|| = ||\forall y \in x (y \in u)||,$$

jolloin

$$||x \subset u|| = \bigwedge_{y \in M^{(B)}} \Big(||y \in x|| \Rightarrow ||y \in u|| \Big).$$

Olkoon $u \in M^{(B)}$. Määrittelemme alkion $v \in M^{(B)}$ asettamalla

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(v) &= B^{\mathrm{dom}(u)}; \\
v(x) &= ||x \subset u||, \text{ kun } x \in \mathrm{dom}(v).
\end{aligned}$$

Olkoon $x \in M^{(B)}$, jolloin

$$\begin{aligned}
||x \in v|| &= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(v)} \Big(||z \subset u|| \wedge ||x = z|| \Big) \\
&\leq \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(v)} ||x \subset u|| \\
&= ||x \subset u||.
\end{aligned} \tag{8}$$

Määrittelemme alkion $z \in M^{(B)}$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(z) &= \mathrm{dom}(u);\\ z(w) &= ||w \in x||, \text{ kun } w \in \mathrm{dom}(z),\end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned}||x = z|| = &\bigwedge_{w \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(w) \Rightarrow ||w \in z||\Big)\\ &\wedge \bigwedge_{w \in \mathrm{dom}(u)} \Big(||w \in x|| \Rightarrow ||w \in x||\Big)\\ = &\bigwedge_{w \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(w) \Rightarrow ||w \in z||\Big).\end{aligned}$$

Nyt huomaamme, että

$$\begin{aligned}||y \in u|| \wedge ||y \in x|| &= \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(u)} (u(w) \wedge ||w = y|| \wedge ||y \in x||)\\ &\leq \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(u)} (||w = y|| \wedge ||w \in x||)\\ &= \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(z)} (||w = y|| \wedge z(w))\\ &= ||y \in z||\end{aligned}$$

kaikilla $y \in M^{(B)}$, mistä seuraa

$$\begin{aligned}||x \subset u|| &= \bigwedge_{y \in M^{(B)}} \Big(||y \in x|| \Rightarrow ||y \in u||\Big)\\ &\leq \bigwedge_{y \in M^{(B)}} \Big(||y \in x|| \Rightarrow ||y \in z||\Big)\\ &\leq \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(y) \Rightarrow ||y \in z||\Big)\\ &= ||x = z||,\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}||x \subset u|| &= ||x \subset u|| \wedge ||x = z||\\ &\leq ||z \subset u|| \wedge ||x = z||\\ &= v(z) \wedge ||x = z||\\ &\leq ||z \in v|| \wedge ||x = z||\\ &\leq ||x \in v||,\end{aligned}$$

koska $z \in \mathrm{dom}(v)$ alkion z määritelmän mukaan. Yhtälön toinen suunta on osoitettu kohdassa 8, joten väite on tosi. $\square$

3.7.6 Äärettömyysaksiooma

Lause 3.32. *Äärettömyysaksiooma on tosi mallissa $M^{(B)}$ eli*

$$M^{(B)} \vDash \exists u(\emptyset \in u \wedge \forall x \in u \exists y \in u(x \in y)).$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 35].) Koska kaava

$$\phi(u) := \emptyset \in u \wedge \forall x \in u \exists y \in u(x \in y))$$

on Δ_0-kaava, jolla $\phi(\omega)$ on tosi, niin lauseen 3.20 perusteella

$$1 = ||\phi(\hat{\omega})|| \leq ||\exists u \phi(u)||,$$

mistä väite seuraa. $\square$

3.7.7 Säännöllisyysaksiooma

Lause 3.33. *Säännöllisyysaksiooma on tosi mallissa $M^{(B)}$ eli*

$$M^{(B)} \vDash \forall u(u \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in u \forall z \in y(z \notin u)).$$

Todistus. (Vrt. [2, s. 214].) Olkoon $u \in M^{(B)}$. Teemme vastaoletuksen, että

$$||\exists y(y \in u) \wedge \forall y \in u \exists z \in y(z \in u)|| = b \neq 0.$$

Silloin

$$||\exists y(y \in u)|| \wedge b \neq 0$$

eli

$$\bigvee_{y \in M^{(B)}} \Big(||y \in u|| \wedge b\Big) \neq 0,$$

mistä seuraa, että $||y \in u|| \wedge b \neq 0$ jollakin $y \in M^{(B)}$. Olkoon α pienin mallin M ordinaali siten, että on olemassa $y \in M_\alpha^{(B)}$, jolla $||y \in u|| \wedge b \neq 0$. Koska $\mathrm{dom}(y) \subset M_\alpha^{(B)}$, niin kaikilla $z \in \mathrm{dom}(y)$ pätee $||z \in u|| \wedge b = 0$. Nyt

$$\begin{aligned} b \wedge ||y \in u|| &\leq ||\exists z \in y(z \in u)|| \\ &= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} \Big(y(z) \wedge ||z \in u||\Big), \end{aligned}$$

jolloin

$$b \wedge \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} \Big(y(z) \wedge ||z \in u||\Big) \neq 0,$$

mistä seuraa, että

$$\bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} \Big(y(z) \wedge ||z \in u|| \wedge b\Big) \neq 0,$$

mikä on ristiriita, koska kaikilla $z \in \mathrm{dom}(y)$ pätee $||z \in u|| \wedge b = 0$. $\square$

3.7.8 Valinta-aksiooma

Määritelmä 3.17. Olkoon X joukko ja $\leq_X$ relaatio joukossa X. Sanomme, että $\leq_X$ on joukon X *osittaisjärjestys*, jos kaikilla $a, b, c \in X$ pätee

1. $a \leq_X a$;

2. $a \leq_X b \wedge b \leq_X a \rightarrow a = b$;

3. $a \leq_X b \wedge b \leq_X c \rightarrow a \leq_X c$.

Joukko $C \subset X$ on *ketju*, jos kaikilla $a, b \in C$ on voimassa $a \leq_X b$ tai $b \leq_X a$. Alkio $c \in X$ on *maksimaalinen*, jos kaikilla $a \in X$ pätee $c \leq_X a \rightarrow c = a$.

Lause 3.34 (Zornin lemma)**.** *Jos osittainjärjestetyn joukon X jokaisella ketjulla on olemassa yläraja joukossa X, niin joukolla X on maksimaalinen alkio.*

Todistamme, että Zornin lemma on tosi mallissa $M^{(B)}$. Koska Zornin lemma on yhtäpitävä valinta-aksiooman kanssa, niin silloin valinta-aksiooma on myös tosi mallissa $M^{(B)}$.

Todistuksessa käytämme *ytimen* käsitettä, jota määrittelemme seuraavaksi.

Määritelmä 3.18. (Vrt. [1, s. 29].) Olkoon $u \in M^{(B)}$. Sanomme, että joukko $v \subset M^{(B)}$ on alkion u *ydin*, jos

1. $v \in M$;

2. $||x \in u|| = 1$ jokaisella $x \in v$;

3. jokaisella $y \in M^{(B)}$ siten, että $||y \in u|| = 1$, on olemassa yksikäsitteinen $x \in v$, jolla $||x = y|| = 1$.

Lause 3.35. *Jokaisella $u \in M^{(B)}$ on olemassa ydin v. Lisäksi, jos $M^{(B)} \models u \neq \emptyset$, niin $v \neq \emptyset$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 29].) Olkoon $u \in M^{(B)}$. Määrittelemme jokaisella $x \in M^{(B)}$ funktion $f_x \in M^{(B)}$ asettamalla

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f_x) &= \mathrm{dom}(u); \\ f_x(z) &= ||z = x||, \text{ kun } z \in \mathrm{dom}(f_x). \end{aligned}$$

Huomaamme, että jokaisella $x \in M^{(B)}$ pätee $f_x \in M_\alpha^{(B)}$, missä α on sellainen ordinaali, että $u \in M_\alpha^{(B)}$, joten kokoelmaperiaatteen nojalla (lause 3.27) on olemassa $w \in M$ siten, että jokaisella $y \in M^{(B)}$ on $x \in w$, jolla $f_x = f_y$. Olkoon

$$w' = \{x \in w \colon ||x \in u|| = 1\}.$$

Määrittelemme ekvivalenssirelaation $\sim$ joukossa w' asettamalla

$$x \sim y, \text{ jos ja vain jos } ||x = y|| = 1.$$

Olkoon v joukko, joka on saatu valitsemalla relaation $\sim$ jokaisesta ekvivalenssiluokasta yksi alkio. Silloin $v \in M$ ja $||x \in u|| = 1$ jokaisella $x \in v$ eli joukko v täyttää ytimen määritelmän ehdot 1. ja 2. Todistamme nyt, että myös ehto 3. on voimassa. Olkoon $y \in M^{(B)}$ sellainen, että $||y \in u|| = 1$. Silloin on olemassa $x \in w$ siten, että $f_x = f_y$ eli jokaisella $z \in \mathrm{dom}(u)$ pätee $||x = z|| = ||y = z||$. Nyt

$$\begin{aligned}
1 = ||y \in u|| &= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(z) \wedge ||y = z|| \Big) \\
&\leq \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} ||y = z|| \\
&= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \Big(||y = z|| \wedge ||x = z|| \Big) \\
&\leq ||y = x||,
\end{aligned}$$

ja koska

$$1 = ||y = x|| \wedge ||y \in u|| \leq ||x \in u||,$$

niin $x \in w'$, mistä seuraa, että on olemassa yksikäsitteinen $x' \in v$ siten, että $||x' = y|| = 1$.

Jos $M^{(B)} \vDash u \neq \emptyset$, niin $M^{(B)} \vDash \exists x(x \in u)$ eli $\bigvee_{x \in M^{(B)}} ||x \in u|| = 1$, jolloin maksimiperiaatteen perusteella $||x \in u|| = 1$ jollakin $x \in M^{(B)}$, joten alkion u ydin on silloin epätyhjä. □

Apulause 3.36. *Olkoon $u \in M^{(B)}$ sellainen, että $M^{(B)} \vDash u \neq \emptyset$, ja v alkion u ydin. Silloin jokaisella $x \in M^{(B)}$ on olemassa $y \in v$ siten, että $||x = y|| = ||x \in u||$.*

Todistus. Väite seuraa suoraan lauseesta 3.23. □

Lause 3.37. *Zornin lemma on tosi mallissa $M^{(B)}$ eli*

$$M^{(B)} \vDash \forall X, \leq_X (\phi(X, \leq_X) \to \psi(X, \leq_X)),$$

missä

$$\begin{aligned}\phi(X, \leq_X) = X \neq \emptyset \wedge \forall a, b, c \in X((a \leq_X a) \wedge (a \leq_X b \wedge b \leq_X a \to a = b)\\ \wedge (a \leq_X b \wedge b \leq_X c \to a \leq_X c))\\ \wedge \forall y((y \subset X \wedge \forall a, b \in y(a \leq_X b \vee b \leq_X a)\\ \to \exists c \in X \forall a \in y(a \leq_X c))\end{aligned}$$

ja

$$\psi(X, \leq_X) = \exists c \in X \forall b \in X(c \leq_X b \to c = b).$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 36].) Koska $M^{(B)} \vDash \exists X, \leq_X \phi(X, \leq_X)$, mikä on helppo tarkistaa asettamalla $X = \hat{1} = \{\langle \emptyset, 1 \rangle\}$ ja $\leq_X = \langle \emptyset, \emptyset \rangle\hat{}$, niin lauseen 3.24 mukaan väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että kaikilla $X, \leq_X \in M^{(B)}$ ehdosta $M^{(B)} \vDash \phi(X, \leq_X)$ seuraa $M^{(B)} \vDash \psi(X, \leq_X)$.

Olkoon $M^{(B)} \vDash \phi(X, <_X)$. Olkoon Y alkion X ydin, jolloin $Y \neq \emptyset$. Määrittelemme relaation $\leq_Y$ joukossa Y asettamalla

$$x \leq_Y y, \text{ jos ja vain jos } ||x \leq_X y|| = 1,$$

kun $x, y \in Y$. On helppo tarkistaa, että $\leq_Y$ on osittaisjärjestys joukossa Y.

Osoitamme ensin, että jokaisella joukon Y ketjulla on olemassa yläraja. Olkoon C joukon Y ketju. Merkitsemme $C' = \{\langle x, 1 \rangle : x \in C\}$. Nyt, koska $C \subset Y$ ja Y on alkion X ydin, niin

$$||C' \subset X|| = \bigwedge_{x \in C} ||x \in X|| = 1$$

ja

$$||\forall a, b \in C'(a \leq_X b \vee b \leq_X a)|| = \bigwedge_{a,b \in C} \Big(||a \leq_X b|| \vee ||b \leq_X a||\Big) = 1,$$

jolloin siis

$$M^{(B)} \vDash C' \subset X \wedge \forall a, b \in C'(a \leq_X b \vee b \leq_X a)$$

eli

$$M^{(B)} \vDash C' \textit{ on joukon } X \textit{ ketju},$$

jolloin oletuksen $M^{(B)} \vDash \phi(X, \leq_X)$ perusteella pätee

$$M^{(B)} \vDash \exists c \in X \forall a \in C'(a \leq_X c),$$

mistä maksimiperiaatteen nojalla seuraa, että on olemassa $u \in M^{(B)}$ siten, että

$$M^{(B)} \vDash u \in X \wedge \forall a \in C'(a \leq_X u).$$

Nyt, koska Y on alkion X ydin ja $||u \in X|| = 1$, niin ytimen määritelmän perusteella on olemassa $w \in Y$ siten, että $||w = u|| = 1$. Voidaan helposti nähdä, että w on silloin ketjun C yläraja.

Näin ollen jokaisella joukon Y ketjulla on olemassa yläraja, joten Zornin lemman perusteella joukossa Y on olemassa maksimaalinen alkio c, jolloin $||c \in X|| = 1$. Nyt haluamme todistaa, että

$$M^{(B)} \models \forall b \in X(c \leq_X b \to c = b)$$

eli

$$M^{(B)} \models c \textit{ on joukon } X \textit{ maksimaalinen alkio.}$$

Olkoon $x \in M^{(B)}$. Apulauseen 3.36 perusteella on olemassa $y \in Y$ siten, että $||x \in X|| = ||x = y||$. Lauseen 3.21 perusteella on olemassa sellainen $v \in M^{(B)}$, että

$$\begin{aligned} ||c \leq_X y|| &\leq ||v = y||; \\ ||c \leq_X y||^* &\leq ||v = c||. \end{aligned}$$

Silloin

$$\begin{aligned} 1 = \ & ||c \leq_X y|| \vee ||c \leq_X y||^* \\ & \leq ||v = y \wedge y \in X|| \vee ||v = c \wedge c \in X|| \\ & \leq ||v \in X||, \end{aligned}$$

joten ytimen määritelmän nojalla on olemassa $z \in Y$ siten, että $||v = z|| = 1$. Nyt

$$\begin{aligned} 1 = \ & ||c \leq_X y|| \vee ||c \leq_X y||^* \\ \leq \ & ||c \leq_X y \wedge v = y|| \vee ||v = c|| \\ \leq \ & ||c \leq_X v||, \end{aligned}$$

jolloin

$$1 = ||c \leq_X v|| \wedge ||v = z|| \leq ||c \leq_X z||,$$

joten $c \leq_Y z$, ja koska c on joukon Y maksimaalinen alkio, niin $c = z$. Näin ollen $||v = c|| = 1$, joten

$$\begin{aligned} ||c \leq_X y|| \leq \ & ||y = v|| \wedge ||v = c|| \\ \leq \ & ||y = c||, \end{aligned}$$

mistä saamme

$$\begin{aligned}||c \leq_X x \wedge x \in X|| = &\ ||c \leq_X x \wedge x = y|| \\ \leq &\ ||c \leq_X y|| \wedge ||x = y|| \\ \leq &\ ||y = c|| \wedge ||x = y|| \\ \leq &\ ||c = x||.\end{aligned}$$

Näin ollen

$$M^{(B)} \models \forall b \in X(c \leq_X b \rightarrow c = b),$$

joten

$$M^{(B)} \models \psi(X, <_X)$$

ja väite on todistettu. □

3.8 Mallin $M^{(B)}$ ordinaaleista

Tulemme tarvitsemaan myöhemmin seuraavaa mallien $M^{(B)}$ ja M ordinaalien välisestä suhteesta kertovaa tulosta.

Lause 3.38. *Olkoon $u \in M^{(B)}$. Silloin*

$$||\operatorname{Ord}(u)|| = \bigvee_{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}} ||u = \hat{\alpha}||.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 38].) Koska $\operatorname{Ord}(x)$ on Δ_0-kaava, niin lauseen 3.20 perusteella jokaisella ordinaalilla $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ pätee $||\operatorname{Ord}(\hat{\alpha})|| = 1$, jolloin

$$||u = \hat{\alpha}|| = ||u = \hat{\alpha}|| \wedge ||\operatorname{Ord}(\hat{\alpha})|| \leq ||\operatorname{Ord}(u)||.$$

Näin ollen saamme

$$\bigvee_{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}} ||u = \hat{\alpha}|| \leq ||\operatorname{Ord}(u)||.$$

Seuraavaksi todistamme, että tämä epäyhtälö pätee myös käänteisesti. Asetamme jokaisella $x \in \operatorname{dom}(u)$

$$D_x = \{\xi \in \mathrm{ORD}^{(M)} \colon ||x = \hat{\xi}|| \neq 0\}.$$

Määrittelemme jokaisella $x \in \operatorname{dom}(u)$ funktion f_x asettamalla

$$f_x(\xi) = ||x = \xi||$$

kaikilla $\xi \in D_x$. Huomaamme, että jokainen f_x on injektio, koska jos $\xi, \nu \in D_x$ ja $\xi \neq \nu$, niin $||x = \hat{\xi}|| \wedge ||x = \hat{\nu}|| \leq ||\hat{\xi} = \hat{\nu}|| = 0$, jolloin $f_x(\xi) \wedge f_x(\nu) = 0$, mistä seuraa, että $f_x(\xi) \neq f_x(\nu)$. Merkitsemme $A_x = \mathrm{ran}(f_x)$. Silloin $A \in M$, ja koska f_x^{-1} on funktio joukolta A_x joukolle D_x, niin $D_x \in M$. Voimme siis päätellä, että

$$D = \bigcup_{x \in \mathrm{dom}(u)} D_x \in M,$$

jolloin on olemassa ordinaali $\alpha_0 \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ siten, että $\xi < \alpha_0$ jokaisella $\xi \in D$. Koska $\alpha_0 \notin D$, niin $||x = \hat{\alpha}_0|| = 0$ kaikilla $x \in \mathrm{dom}(u)$, joten

$$||\hat{\alpha}_0 \in u|| = \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(u)} (u(x) \wedge ||\hat{\alpha}_0 = x||) = 0.$$

Seuraava lause on ZFC-teoreema:

$$\forall u, v((\mathrm{Ord}(u) \wedge \mathrm{Ord}(v)) \rightarrow (u \in v \vee u = v \vee v \in u)),$$

joten koska jokainen ZFC-teoreema on tosi mallissa $M^{(B)}$, niin

$$||\,\mathrm{Ord}(u)|| = ||\,\mathrm{Ord}(u)|| \wedge ||\,\mathrm{Ord}(\hat{\alpha}_0)|| \leq ||u \in \hat{\alpha}_0|| \vee ||u = \hat{\alpha}_0|| \vee ||\hat{\alpha}_0 \in u||.$$

Nyt, koska $||\hat{\alpha}_0 \in u|| = 0$, niin

$$\begin{aligned} ||\,\mathrm{Ord}(u)|| &\leq ||u \in \hat{\alpha}_0|| \vee ||u = \hat{\alpha}_0|| \\ &= (\bigvee_{\xi < \alpha_0} ||u = \hat{\xi}||) \vee ||u = \hat{\alpha}_0|| \\ &\leq \bigvee_{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}} ||u = \hat{\alpha}||. \end{aligned}$$

□

4 Numeroituvan transitiivisen ZFC-mallin geneerinen laajennus

4.1 Geneerinen malli $M[U]$

4.1.1 M-geneerinen ultrafillteri U ja geneerinen laajennus $M[U]$

Oletamme tässä luvussa, että M on transitiivinen ZFC-malli ja $B \in M$ täydellinen Boolen algebra mallissa M, jolloin voimme myös muodostaa Boolen arvoisen mallin $M^{(B)}$.

Määritelmä 4.1. Sanomme, että algebran B ultrafiltteri U on M*-geneerinen*, jos kaikilla $X \in \mathcal{P}^{(M)}(B) = \mathcal{P}(B) \cap M$ on voimassa

$$\bigvee X \in U \Rightarrow X \cap U \neq \emptyset.$$

Olkoon U algebran B ultrafiltteri. Lauseen 3.13 mukaan mallin $M^{(B)}$ tekijämalli $\langle M^{(B)}/U, \in_U \rangle$ on ZFC-malli. Jos relaatio $\in_U$ on hyvinperustettu, niin Mostowskin romautuslemman (lause 2.10) perusteella tämä malli on isomorfinen yksikäsitteisen transitiivisen mallin kanssa. Seuraavan lauseen mukaan $\in_U$ on hyvinperustettu silloin, kun U on M-geneerinen ultrafilteri.

Lause 4.1. *Olkoon U algebran B ultrafillteri ja $\langle M^{(B)}/U, \in_U \rangle$ mallin $M^{(B)}$ tekijämalli. Silloin, jos U on M-geneerinen, niin relaatio $\in_U$ on hyvinperustettu.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 90].) Olkoon U M-geneerinen. Osoitamme ensin, että aina, kun x^U on ordinaali mallissa $M^{(B)}/U$ eli

$$M^{(B)}/U \vDash \mathrm{Ord}(x^U),$$

niin on olemassa sellainen ordinaali $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)} = \mathrm{ORD} \bigcap M$, että $x^U = \hat{\alpha}^U$. Olkoon x^U ordinaali mallissa $M^{(B)}/U$. Silloin $|| \mathrm{Ord}(x)|| \in U$, joten lauseen 3.38 perusteella saamme

$$\bigvee_{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}} ||x = \hat{\alpha}|| \in U.$$

Nyt, koska U on M-geneerinen filtteri (ja $\{||x = \hat{\alpha}||\colon \alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}\} \in M$), niin $||x = \hat{\alpha}|| \in U$ jollakin $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$, joten $x^U = \hat{\alpha}^U$.

Nyt voimme todistaa lauseen. Olkoon ρ mallin $M^{(B)}/U$ rank-funktio (määritelmä 2.26) eli

$$M^{(B)}/U \vDash \rho \text{ on rank-funktio.}$$

Määrittelemme funktion $\rho' \colon M^{(B)}/U \to \mathrm{ORD}^{(M)}$ asettamalla

$$\rho'(x) = \min\{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)} \colon M^{(B)}/U \vDash \rho(x) = \hat{\alpha}^U\},$$

kaikilla $x \in M^{(B)}/U$. Olkoon A joukon $M^{(B)}/U$ osajoukko. Todistamme, että joukossa A on $\in_U$-minimaalinen alkio. Olkoon $A' = \{\rho'(x) \colon x \in A\}$. Koska joukko $\mathrm{ORD}^{(M)}$ on hyvinjärjestetty, niin joukossa A' on $\in$-minimaalinen alkio α. Olkoon $x \in A$ sellainen, että $\rho'(x) = \alpha$. Teemme vastaoletuksen, että $y \in_U x$ jollakin $y \in A$. Silloin

$$M^{(B)}/U \vDash \rho(y) \in \rho(x),$$

jolloin

$$M^{(B)}/U \vDash \hat{\beta}^U \in \hat{\alpha}^U,$$

missä $\beta \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ on sellainen, että $\rho'(y) = \beta$. Nyt, koska $||\hat{\beta} \in \hat{\alpha}|| \in U$, niin $\beta \in \alpha$ lauseiden 3.19 ja 3.20 perusteella, jolloin $\rho'(y) \in \rho'(x) = \alpha$ ja $y \in A$ eli α ei ole joukon A' $\in$-minimaalinen alkio, ristiriita. Alkio x on siis joukon A $\in_U$-minimaalinen alkio, joten relaatio $\in_U$ on hyvinperustettu. $\square$

Näin ollen, jos U on M-geneerinen ultrafiltteri, niin malli $M^{(B)}/U$ on isomorfinen yksikäsitteisen transitiivisen mallin kanssa.

Määritelmä 4.2. Olkoon U algebran B M-geneerinen ultrafillteri. Merkintä $M[U]$ tarkoittaa sitä yksikäsitteistä transitiivista mallia, jonka kanssa tekijämalli $M^{(B)}/U$ on isomorfinen.

Jos U on algebran B M-geneerinen ultrafiltteri, niin mallien $M^{(B)}/U$ ja $M[U]$ välinen isomorfismi h on silloin seuraava:

$$h(x^U) = \{h(y^U) \colon y^U \in_U x^U\} = \{h(y^U) \colon ||y \in x|| \in U\}$$

kaikilla $x^U \in M^{(B)}/U$, mikä tulee ilmi Mostowskin romautuslemman (lause 2.10) todistuksessa.

Kuvaus $h \colon M^{(B)}/U \to M[U]$ on siis bijektio, jolla

$$x^U \in_U y^U, \text{ jos ja vain jos } h(x^U) \in h(y^U).$$

4.1.2 Kanoninen kuvaus $i \colon M^{(B)} \to M[U]$

Oletamme jatkossa, että U on algebran B M-geneerinen ultrafillteri. Voimme tutkia mallin $M[U]$ ominaisuuksia Boolen arvoisen mallin $M^{(B)}$ avulla. Tätä varten määrittelemme *kanonisen kuvauksen* i_U joukolta $M^{(B)}$ joukolle $M[U]$ asettamalla

$$i_U(x) = h(x^U)$$

kaikilla $x \in M^{(B)}$, missä h on mallien $M^{(B)}/U$ ja $M[U]$ välinen isomorfismi.

Silloin

$$i_U(x) = \{i_U(y) \colon ||y \in x|| \in U\}.$$

Merkitsemme kanonista kuvausta i_U usein myös pelkällä kirjaimella i. Haluamme korostaa, että jokaisella $x \in M[U]$ on siis olemassa sellainen $u \in M^{(B)}$, että $x = i(u)$ eli

$$M[U] = \{i(u) \colon u \in M^{(B)}\}.$$

Lause 4.2. *Jokaisella kaavalla $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ja kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in M^{(B)}$ on voimassa*

$$\phi(i(a_1), \ldots, i(a_n))^{M[U]} \Leftrightarrow ||\phi(a_1, \ldots, a_n)|| \in U.$$

Todistus. Koska $M[U]$ on isomorfinen mallin $M^{(B)}/U$ kanssa, niin väite seuraa lauseesta 3.13. □

$\mathcal{L}(M[U])$-lauseen $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ totuusarvo mallissa $M[U]$ siis riippuu $M^{(B)}$-lauseen $\phi(u_1, \ldots, u_n)$ Boolen arvosta mallissa $M^{(B)}$, missä $u_1, \ldots, u_n$ ovat sellaisia, että $i(u_1) = a_1, \ldots, i(u_n) = a_n$.

4.1.3 Kuvaus $j \colon M \to M[U]$

Määrittelemme kuvauksen $j \colon M \to M[U]$ asettamalla

$$j(x) = i(\hat{x})$$

kaikilla $x \in M$. Silloin j on $\in$-isomorfismi $M \to j[M]$, koska

$$\begin{aligned}
&j(x) \in j(y)\\
\Leftrightarrow\ & i(\hat{x}) \in i(\hat{y})\\
\Leftrightarrow\ & i(\hat{x}) \in \{i(z) \colon ||z \in \hat{y}|| \in U\}\\
\Leftrightarrow\ & ||\hat{x} = z|| \in U \text{ ja } ||z \in \hat{y}|| \in U \text{ jollakin } z \in M^{(B)}\\
\Leftrightarrow\ & ||\hat{x} = z|| \wedge ||z \in \hat{y}|| \in U \text{ jollakin } z \in M^{(B)}\\
\Leftrightarrow\ & x \in y.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi todistamme, että j on identtinen kuvaus.

Lause 4.3. *Jokaisella $x \in M$ pätee*

$$j(x) = x.$$

Todistus. Olkoon $y \in M$ ja $x \in j(y)$. Silloin, koska $M[U]$ on transitiivinen, niin $x \in M[U]$, joten $x = i(x')$ jollakin $x' \in M^{(B)}$. Näin ollen $i(x') \in j(y) = i(\hat{y})$, mistä seuraa, että $||x' \in \hat{y}|| \in U$, joten

$$\bigvee_{z \in y} ||x' = \hat{z}|| \in U.$$

Nyt, koska U on M-geneerinen, niin $||x' = \hat{z}|| \in U$ jollakin $z \in y$, joten $x = i(x') = i(\hat{z}) = j(z)$ jollakin $z \in M$. Joukko $j[M]$ on siis transitiivinen, joten koska j on $\in$-isomorfismi, niin $j(x) = \{j(y) \colon y \in x\}$ jokaisella $x \in M$.

Olkoon nyt $x \in M$. Teemme induktio-oletuksen, että $j(y) = y$, kun $y \in x$. Silloin $j(x) = \{j(y) \colon y \in x\} = \{y \colon x \in y\} = x$, joten $j(x) = x$ kaikilla $x \in M$. □

Seuraus 4.4. *$M \subset M[U]$ ja jokaisella $x \in M$ pätee $i(\hat{x}) = x$.*

4.1.4 Mallin $M[U]$ ominaisuudet

Seuraava lause kuvaa mallin $M[U]$ keskeisiä Boolen algebran ja sen ultrafiltterin valinnasta riippumattomia ominaisuuksia.

Lause 4.5. *Seuraavat väitteet ovat voimassa:*

1. *$M[U]$ on transitiivinen* ZFC*-malli;*
2. *$M \subset M[U]$ ja $U \in M[U]$;*
3. *$\mathrm{ORD}^{(M[U])} = \mathrm{ORD}^{(M)}$;*
4. *jos N on transitiivinen* ZFC*-malli siten, että $M \subset N$ ja $U \in N$, niin $M[U] \subset N$.*

Todistus.

1. Malli $M[U]$ on ZFC-malli, koska se on isomorfinen mallin $M^{(B)}/U$ kanssa, joka on ZFC-malli.
2. (Vrt. [1, s. 94].) Se, että $M \subset M[U]$ on todistettu lauseessa 4.3. Todistamme, että $U \in M[U]$. Määrittelemme joukon $U_* \in M^{(B)}$ asettamalla

$$\mathrm{dom}(U_*) = \{\hat{x} \colon x \in B\} = \mathrm{dom}(\hat{B});$$
$$U_*(\hat{x}) = x \text{ kaikilla } x \in B.$$

Haluamme osoittaa, että $i(U_*) = U$. Huomaamme, että kaikilla $x \in M^{(B)}$ pätee

$$\begin{aligned} ||x \in U_*|| \in U \;&\Leftrightarrow \bigvee_{y \in B} (y \wedge ||x = \hat{y}||) \in U \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B(y \wedge ||x = \hat{y}|| \in U) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in U(||x = \hat{y}|| \in U) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in U(i(x) = i(\hat{y})), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} i(U_*) &= \{i(x) \colon ||x \in U_*|| \in U\} \\ &= \{i(\hat{y}) \colon y \in U\} \\ &= \{j(y) \colon y \in U\} \\ &= \{y \colon y \in U\} = U. \end{aligned}$$

3. (Vrt. [1, s. 98].) Olkoon $y \in M[U]$. Silloin $y = i(x)$ jollakin $x \in M^{(B)}$ ja

$$\begin{aligned} & && y \in \mathrm{ORD}^{(M[U])} \\ & && \Leftrightarrow \mathrm{Ord}^{M[U]}(i(x)) \\ &\text{(lause 4.2)} && \Leftrightarrow ||\operatorname{Ord}(x)|| \in U \\ &\text{(lause 3.38)} && \Leftrightarrow \bigvee_{\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}} ||x = \hat{\alpha}|| \in U \\ &(U \text{ on } M\text{-geneerinen}) && \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}(||x = \hat{\alpha}|| \in U) \\ & && \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}(i(x) = i(\hat{\alpha})) \\ &\text{(lause 4.3)} && \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}(y = \alpha) \\ & && \Leftrightarrow y \in \mathrm{ORD}^{(M)}. \end{aligned}$$

4. (Vrt. [1, s. 97].) Osoitamme ensin, että jokaisella $x \in M^{(B)}$ pätee

$$i(x) = \{i(y) \colon y \in \operatorname{dom}(x) \wedge ||y \in x|| \in U\}. \tag{9}$$

Olkoon $y \in M^{(B)}$ sellainen, että $||y \in x|| \in U$. Silloin

$$\bigvee_{z \in \operatorname{dom}(x)} \Big(x(z) \wedge ||z = y|| \Big) \in U.$$

Nyt, koska U on M-geneerinen, niin $x(z) \wedge ||z = y|| \in U$ jollakin $z \in \operatorname{dom}(x)$, ja koska U on filtteri, niin $||z \in x|| \in U$ ja $||z = y|| \in U$, jolloin lauseen 4.2 perusteella $i(z) \in i(x)$ ja $i(z) = i(y)$, mistä (9) seuraa. Edelleen kohdasta (9) seuraa, että jokaisella $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$, $x \in M_\alpha^{(B)}$ pätee

$$i(x) = \{i(y)\colon y \in M_\gamma^{(B)} \wedge ||y \in x|| \in U\},$$

missä $\gamma < \alpha$ on sellainen, että $z \in M_\gamma^{(B)}$ aina, kun $z \in \mathrm{dom}(x)$.

Määrittelemme kaavan $\phi(x, y)$ asettamalla

$$\begin{aligned}\phi(x,y) := \exists\alpha \in \mathrm{ORD}\,\exists\gamma < \alpha\exists f(x \in M_\alpha^{(B)} \wedge \forall z \in \mathrm{dom}(x)(z \in M_\gamma^{(B)})\\ \wedge f = i \restriction M_\gamma^{(B)} \wedge y = \{f(z)\colon z \in M_\gamma^{(B)} \wedge ||z \in x|| \in U\})).\end{aligned}$$

Huomaamme, että jokaisella $f \in M$ pätee

$$\begin{aligned}&f = i \restriction M_\gamma^{(B)}\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = M_\gamma^{(B)} \wedge\\ &\forall x \in \mathrm{dom}(f)(f(x) = \{f(y)\colon y \in M_\gamma^{(B)} \wedge ||y \in x|| \in U\})\\ \Leftrightarrow\ &(f = i \restriction M_\gamma^{(B)})^N,\end{aligned}$$

joten kaikilla $x \in M^{(B)}$ ja y on voimassa

$$\phi^N(x, y) \Leftrightarrow y = i(x).$$

Olkoon $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$. Teemme induktio-oletuksen, että $i \restriction M_\gamma^{(B)} \in N$ kaikilla $\gamma < \alpha$. Silloin

$$\mathrm{ran}(i \restriction M_\alpha^{(B)}) = \{y\colon x \in M_\alpha^{(B)} \wedge \phi^N(x, y)\},$$

jolloin lauseen 2.17 perusteella $\mathrm{ran}(i \restriction M_\alpha^{(B)}) \in N$, ja koska

$$i \restriction M_\alpha^{(B)} = \{\langle x, y\rangle \in M_\alpha^{(B)} \times \mathrm{ran}(i \restriction M_\alpha^{(B)})\colon \phi^N(x, y)\},$$

niin $i \restriction M_\alpha^{(B)} \in N$. Induktioperiaatteen nojalla siis $i \restriction M_\alpha^{(B)} \in N$ kaikilla $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ joten, koska

$$M[U] = \bigcup\{\mathrm{ran}(i \restriction M_\alpha^{(B)})\colon \alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}\},$$

niin $M[U] \subset N$.

$\square$

Edellisen lauseen perusteella voimme siis lisätä transitiiviseen ZFC-malliin M uuden joukon U silloin, kun U on mallissa M täydellisen Boolen algebran M-geneerinen ultrafiltteri, jolloin saatu laajennus $M[U]$ on pienin transitiivinen ZFC-malli, joka sisältää sekä mallin M alkiot, että joukon U. Kutsumme mallia $M[U]$ mallin M *geneeriseksi laajennukseksi*.

4.2 Pakotuskäsite ja geneerinen laajennus $M[G]$

Edellisessä luvussa muodostimme transitiivisen ZFC-mallin M laajennuksen $M[U]$ mallissa M täydellisen Boolen algebran B ultrafiltterin U avulla ja esittelimme sen Boolen algebran valinnasta riippumattomia ominaisuuksia. Seuraavaksi esitämme keinon sopivan Boolen algebran B muodostamiseksi siten, että laajennuksen $M[U]$ ominaisuuksia voidaan tutkia. Tämä onnistuu lähtemällä liikkeelle osittaisesta järjestyksestä $\langle P, \leq \rangle \in M$, jota kutsumme *pakotuskäsitteeksi*. Voimme laajentaa järjestyksen $\langle P, \leq \rangle$ mallissa M täydelliseksi Boolen algebraksi B siten, että laajennuksen $M[U]$ ominaisuudet määräytyvät pakotuskäsitteen $\langle P, \leq \rangle$ mukaan.

4.2.1 Osittain järjestetyn joukon Boolen täydennys

Määritelmä 4.3. Olkoon $\langle P, \leq \rangle$ osittainen järjestys ja $p, q \in P$. Sanomme, että p on *yhteensopiva* alkion q kanssa (tai että p ja q ovat yhteensopivat) ja merkitsemme $\mathrm{Comp}(p, q)$, jos on olemassa sellainen $r \in P$, että $r \leq p$ ja $r \leq q$.

Määritelmä 4.4. Osittainen järjestys $\langle P, \leq \rangle$ on *separatiivinen*, jos aina, kun $p, q \in P$ ja $p \nleq q$, on olemassa $r \leq p$, joka ei ole yhteensopiva alkion q kanssa.

Määritelmä 4.5. Olkoon B Boolen algebra. Merkitsemme $B^+ = B - \{0_B\}$.

Määritelmä 4.6. Joukko $D \subset P$ on *tiheä osittain järjestetyssä joukossa* P, jos jokaisella $p \in P$ on olemassa sellainen $d \in D$, että $d \leq p$. Joukko $D \subset B^+$ on *tiheä Boolen algebrassa* B, jos se on tiheä osittain järjestetyssä joukossa $\langle B^+, \leq \rangle$, missä $\leq$ on algebran B operaatioiden määrittämä osittainen järjestys (ks. määritelmä 3.2).

Lause 4.6. *Olkoon P separatiivinen osittain järjestetty joukko. Silloin on olemassa sellainen täydellinen Boolen algebra B ja kuvaus $h\colon P \to B$, että*

1. *h on järjestysisomorfismi joukolta P joukolle $h[P]$;*

2. *$h[P]$ on tiheä algebrassa B.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 205].) Sanomme, että joukko $U \subset P$ on *leikkaus*, jos kaikilla $p, q \in P$ ehdoista $p \leq q$ ja $q \in U$ seuraa $p \in U$. Merkitsemme $U_p = \{x \in P \colon x \leq p\}$. Sanomme, että leikkaus U on *säännöllinen*, jos aina kun $p \notin U$, niin on olemassa $q \leq p$ siten, että $U_q \cap U = \emptyset$.

Olkoon B kaikkien joukon P säännöllisten leikkausten joukko. Määrittelemme osittaisen järjestyksen joukossa B seuraavasti:

$$u \leq v, \text{ jos ja vain jos } u \subset v$$

kun $u, v \in B$. Väitämme, että B on täydellinen Boolen algebra, jonka operaatiot vastaavat edellä määriteltyä osittaista järjestystä.

Ensinnäkin selvästi pätee $\emptyset \in B$ ja $P \in B$, minkä lisäksi $\emptyset$ on joukon B pienin ja P suurin alkio. Todistamme seuraavasti, että mielivaltaisilla joukon B alkioilla u ja v on olemassa suurin alaraja ja pienin yläraja. On helppo nähdä, että $u \cap v$ on säännöllinen leikkaus, joten se on joukon B alkio, joka on alkioiden u ja v suurin alaraja. Sen osoittamiseksi, että alkioilla u ja v on olemassa myös pienin yläraja, todistamme ensin, että jokaisella leikkauksella $U \subset P$ on olemassa pienin sen sisältävä säännöllinen leikkaus. Merkitsemme jokaisella leikkauksella U:

$$\overline{U} = \bigcap \{U' \in B \colon U \subset U'\}.$$

Joukko $\overline{U}$ on selvästi leikkaus. Todistamme, että $\overline{U}$ on säännöllinen. Olkoon $p \notin \overline{U}$. Silloin on olemassa säännöllinen leikkaus U' siten, että $U \subset U'$ ja $p \notin U'$. Nyt, koska U' on säännöllinen ja $p \notin U'$, niin jollakin $q \leq p$ pätee $U_q \cap U' = \emptyset$, jolloin, koska $\overline{U} \subset U'$, niin myös $U_q \cap \overline{U} = \emptyset$, joten $\overline{U}$ on säännöllinen. On myös selvää, että $\overline{U}$ on *pienin* säännöllinen leikkaus, joka sisältää leikkauksen U, joten, koska $u \cup v$ on leikkaus, niin $\overline{u \cup v}$ on alkioiden u ja v pienin yläraja.

Lopuksi jokaisella $u \in B$ asetamme $u^* = \{p \in P \colon U_p \cap u = \emptyset\}$, jolloin on helppo nähdä, että u^* on säännöllinen leikkaus.

Joukon B operaatiot ovat siis seuraavat:

$$\begin{aligned}
u \wedge v &= u \cap v; \\
u \vee v &= \overline{u \cup v}; \\
u^* &= \{p \in P \colon U_p \cap u = \emptyset\}; \\
1_B &= P; 0_B = \emptyset; \\
\bigwedge X &= \bigcap X; \\
\bigvee X &= \overline{\bigcup X}.
\end{aligned}$$

On helppo nähdä, että jokaisella leikkauksella $U \subset P$ pätee

$$\overline{U} = \{p \in P \colon \forall q \leq p (U_q \cap U \neq \emptyset)\}.$$

Tätä tietoa käyttämällä voidaan suoraviivaisesti tarkistaa, että B on todellakin täydellinen Boolen algebra.

Todistamme seuraavaksi, että $U_p \in B$ jokaisella p eli toisin sanoen U_p on säännöllinen jokaisella $p \in P$. Olkoon $p \in P$ ja $r \notin U_p$. Silloin $r \nleq p$, ja koska P on separatiivinen, niin on olemassa $q \in U_r$ siten, että q ei ole yhteensopiva alkion r kanssa eli $U_p \cap U_q = \emptyset$. Joukko U_p on siis säännöllinen.

Määrittelemme kuvauksen $h\colon P \to B$ asettamalla

$$h(p) = U_p.$$

Silloin h on järjestysisomorfismi joukolta P joukolle $h[P]$ ja $h[P]$ on tiheä algebrassa B.

$\square$

Sanomme, että edellisen lauseen pari $\langle B, h\rangle$ on joukon P *Boolen täydennys*. Seuraavaksi todistamme, että Boolen täydennys on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen.

Apulause 4.7. *(Vrt. [1, s. 50].) Olkoon P separatiivinen osittainjärjestetty joukko ja $\langle B, h\rangle$ sen Boolen täydennys. Silloin jokaisella $x \in B$ pätee*

$$x = \bigvee\{h(p)\colon p \in P \wedge h(p) \leq x\}.$$

Todistus. Olkoon $x \in B$. Teemme vastaoletuksen, että jollakin $y \in B$ pätee

$$\bigvee\{h(p)\colon p \in P \wedge h(p) \leq x\} \lneq y \lneq x.$$

Silloin

$$x = (y \vee y^*) \wedge x = (y \wedge x) \vee (y^* \wedge x).$$

Jos olisi $y^* \wedge x = 0$, niin olisi $y \wedge x = x$ eli $x \leq y$, joten $y^* \wedge x \neq 0$. Merkitsemme $z = y^* \wedge x$. Koska $h[P]$ on tiheä algebrassa B, niin $h(p) \leq z$ jollakin $p \in P$. Nyt, jos olisi $h(p) \leq y$, niin olisi

$$h(p) \leq z \wedge y = x \wedge y^* \wedge y = 0,$$

mikä on mahdotonta, koska $h[P] \subset B^+$. Näin ollen

$$\bigvee\{h(p)\colon p \in P \wedge h(p) \leq x\} \nleq y,$$

ristiriita, joten väite on tosi. $\square$

Lause 4.8. *Olkoon P separatiivinen osittainjärjestetty joukko. Olkoot $\langle B, h\rangle$ ja $\langle B', h'\rangle$ joukon P Boolen täydennykset. Silloin on olemassa isomorfismi $f\colon B \to B'$ siten, että jokaisella $p \in P$ pätee $f(h(p)) = h'(p)$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 50].) Määrittelemme funktion $f\colon B \to B'$ asettamalla jokaisella $x \in B$

$$f(x) = \bigvee\{h'(p)\colon p \in P \wedge h(p) \leq x\}.$$

Silloin on helppo nähdä, että

$$h(p) \leq x \Leftrightarrow h'(p) \leq f(x)$$

kaikilla $x \in B$, $p \in P$. Tätä tietoa käyttämällä on suoraviivaista osoittaa, että f on etsitty isomorfismi. $\square$

Jos osittainjärjestetty joukko ei ole separatiivinen, niin voimme muodostaa sitä vastaavan yksikäsitteisen separatiivisen joukon.

Lause 4.9. *Olkoon* $\langle P, < \rangle$ *osittainen järjestys. Silloin on olemassa (isomorfiaa vaille) yksikäsitteinen separatiivinen osittainen järjestys* $\langle Q, \prec \rangle$ *ja yksikäsitteinen kuvaus* j *joukolta* P *joukolle* Q *siten, että*

1. $j(p) \preceq j(q)$*, aina, kun* $p \leq q$*;*

2. $\mathrm{Comp}(p, q) \Leftrightarrow \mathrm{Comp}(j(p), j(q))$ *kaikilla* $p, q \in P$*.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 51].) Määrittelemme ekvivalenssirelaation joukossa P asettamalla

$$p \backsim q, \text{ jos ja vain jos } \forall r(\mathrm{Comp}(r, p) \Leftrightarrow \mathrm{Comp}(r, q)).$$

Okoon $Q = P/\backsim$. Määrittelemme osittaisjärjestyksen $\preceq$ joukossa Q asettamalla

$$[p] \preceq [q], \text{ jos ja vain jos } \forall r \leq p \, \mathrm{Comp}(r, q).$$

Todistamme, että tämä osittaisjärjestys on hyvinmääritelty. Olkoot p,$q \in P$ sellaiset, että $\forall r \leq p \, \mathrm{Comp}(r, q)$, ja olkoot p',$q' \in P$ sellaiset, että $p' \backsim p$ ja $q' \backsim q$. Jos $r \leq p'$, niin $\mathrm{Comp}(r, p)$ eli on olemassa $s \in P$ siten, että $s \leq r$ ja $s \leq p$, jolloin $\mathrm{Comp}(s, q)$, mistä seuraa $\mathrm{Comp}(s, q')$ ja edelleen $\mathrm{Comp}(r, q')$. Näin ollen pätee $\forall r \leq p' \, \mathrm{Comp}(r, q')$, joten osittaisjärjestys $\preceq$ on hyvinmääritelty.

Määrittelemme kuvauksen $j \colon P \to Q$ asettamalla

$$j(p) = [p]$$

kaikilla $p \in P$. On helppo todeta, että j on silloin etsitty yksikäsitteinen kuvaus.

□

Määritelmä 4.7. Kutsumme edellisen lauseen joukkoa Q joukon P *separatiiviseksi kumppaniksi* ja kuvausta j *kanoniseksi* kuvaukseksi.

Nyt voimme määritellä myös ei-separatiivisen osittain järjestetyn joukon P Boolen täydennyksen sen separatiivisen kumppanin Boolen täydennyksenä:

Lause 4.10. *(Vrt. [2, s. 206].) Olkoon* P *osittain järjestetty joukko. Silloin on olemassa isomorfiaa vaille yksikäsitteinen Boolen algebra* B *ja kuvaus* $e \colon P \to B^+$ *siten, että kaikilla* $p, q \in P$

1. jos $p \leq q$, niin $e(p) \leq e(q)$;

2. p ja q ovat yhteensopivat, jos ja vain jos $e(p) \wedge e(q) \neq 0$;

3. $e[P]$ on algebran B tiheä osajoukko.

Todistus. Määrittelemme kuvauksen $e\colon P \to B^+$ asettamalla

$$e(p) = h(j(p)),$$

missä j on lauseen 4.9 kuvaus ja h lauseen 4.6 kuvaus. On helppo nähdä, että silloin e täyttää vaaditut ehdot. □

Edellisen lauseen perusteella voimme laajentaa *Boolen täydennyksen* määritelmää myös ei-separatiivisille joukoille. Uusi määritelmä ei ole ristiriidassa edellisen kanssa, koska separatiivisen joukon P separatiivinen kumppani on joukko P itse.

Määritelmä 4.8. Olkoon P osittain järjestetty joukko. Kutsumme edellisen lauseen paria $\langle B, e\rangle$ joukon P *Boolen täydennykseksi* ja merkitsemme $B(P) = B$.

Koska lause 4.10 on ZFC-teoreema, niin se myös pätee mielivaltaisessa transitiivisessa ZFC-mallissa M. Käytämme silloin osittaisen järjestyksen $\langle P, <\rangle \in M$ Boolen täydennykselle mallissa M merkintää $\langle B(P)^{(M)}, e^{(M)}\rangle$.

4.2.2 Geneerinen filtteri

Määritelmä 4.9. Olkoon $\langle P, <\rangle$ osittainen järjestys. Sanomme, että joukon P osajoukko G on *filtteri*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. jos $x \in G$, $y \in P$ ja $x < y$, niin $y \in G$;
2. kaikilla $x, y \in G$ on olemassa sellainen $z \in G$, että $z \leq x$ ja $z \leq y$.

Määritelmä 4.10. Olkoon M transitiivinen ZFC-malli ja $\langle P, <\rangle \in M$ osittainen järjestys. Sanomme, että joukon P filtteri G on *M-geneerinen*, jos aina, kun $D \in M$ on joukon P tiheä osajoukko, niin $D \cap G \neq \emptyset$.

Lause 4.11. *(Vrt. [1, s. 105].) Olkoon M transitiivinen* ZFC*-malli, $\langle P, \leq\rangle \in M$ osittainen järjestetys ja $\langle B, e\rangle$ järjestyksen $\langle P, <\rangle$ Boolen täydennys mallissa M. Olkoon G joukon P M-geneerinen filtteri. Silloin*

$$\overline{G} = \{x \in B\colon e(p) \leq x \text{ jollakin } p \in G\}$$

on algebran B M-geneerinen ultrafiltteri.

Todistus. Todistamme ensin, että $\overline{G}$ on ultrafiltteri. On helppo nähdä, että se on filtteri. Olkoon $x \in \overline{G}$ ja

$$D = \{p \in P \colon e(p) \leq x \vee e(p) \leq x^*\}.$$

Silloin $D \in M$ lauseen 2.15 nojalla. Väitämme, että D on joukon P tiheä osajoukko. Olkoon $q \in P$. Silloin

$$0 \neq e(q) = e(q) \wedge (x \vee x^*) = (e(q) \wedge x) \vee (e(q) \wedge x^*),$$

joten $e(q) \wedge x \neq 0$ tai $e(q) \wedge x^* \neq 0$. Nyt, koska $e[P]$ on tiheä, niin on olemassa $p \in P$ siten, että $e(p) \leq e(q) \wedge x$ tai $e(p) \leq e(q) \wedge x^*$, jolloin $p \leq q$ ja $p \in D$. Joukko D on siis tiheä, ja koska G on M-geneerinen, niin $D \cap G \neq \emptyset$, joten $x \in \overline{G}$ tai $x^* \in \overline{G}$. Joukko $\overline{G}$ on siis algebran B ultrafiltteri.

Seuraavaksi todistamme, että $\overline{G}$ on M-geneerinen. Olkoon $X \in \mathcal{P}^{(M)}(B)$ ja $\bigvee X \in \overline{G}$. Silloin $e(p) \leq x$ joillakin $p \in G$, $x \in X$, jolloin $x \in \overline{G}$. Joukko $\overline{G}$ on siis algebran B M-geneerinen ultrafiltteri. □

Oletamme jatkossa, että M on transitiivinen ZFC-malli, $\langle P, \leq \rangle \in M$ osittainen järjestys, G joukon P M-geneerinen ultrafiltteri ja B järjestyksen $\langle P, \leq \rangle$ Boolen täydennys mallissa M.

Määritelmä 4.11. Merkitsemme

$$M[G] = M[\overline{G}],$$

missä $\overline{G}$ on sama kuin lauseessa 4.11. Kutsumme joukkoa P *pakotusjoukoksi* ja joukon P alkikoita *pakotusehdoiksi*.

Merkinnän $M[G]$ käyttöönotto on perusteltua, koska lauseen 4.5 ominaisuudet ovat voimassa silloin, kun korvaamme algebran B M-geneerisen ultrafillterin U joukon P M-geneerisellä filtterillä G. Osoitamme tämän seuraavasti. Lauseen 4.5 kohdat 1. ja 3. ovat selvästi voimassa mallissa $M[G]$. Lisäksi selvästi $M \subset M[G]$. On helppoa nähdä, että $G = \{p \in P \colon e(p) \in \overline{G}\}$, mistä lauseen 2.15 perusteella seuraa $G \in M[\overline{G}] = M[G]$. Lopuksi, jos N on transitiivinen ZFC-malli, jolla $M \subset N$ ja $G \in N$, niin lauseen 2.15 nojalla myös $\overline{G} \in N$, jolloin $M[G] \subset N$. Näin ollen $M[G]$ on mallin M *geneerinen* laajennus, joka saadaan lisäämällä siihen geneerinen joukko G samaan tapaan kuin edellä kuvatun mallin $M[U]$ tapauksessa.

Seuraavaksi määrittelemme *pakotusrelaation*, joka on hyödyllinen mallin $M[G]$ ominaisuuksien tutkimisessa.

Määritelmä 4.12. Olkoon $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ kaava ja $a_1, \ldots, a_n \in M[G]$. Sanomme, että ehto $p \in P$ *pakottaa* lauseen $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ ja merkitsemme

$$p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n),$$

jos $e(p) \leq ||\phi(u_1), \ldots, \phi(u_n)||^B$, missä $u_1, \ldots, u_n \in M^{(B)}$ ovat sellaiset, että $a_1 = i(u_1), \ldots, a_n = i(u_n)$.

Lause 4.12. *Olkoon $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ kaava ja $a_1, \ldots, a_n \in M[G]$. Silloin*

$$\phi^{M[G]}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n)).$$

Todistus. Olkoot $u_1, \ldots, u_n \in M^{(B)}$ sellaisia, että $a_1 = i(u_1), \ldots, a_n = i(u_n)$. Silloin

$$\begin{aligned}
&\phi^{M[G]}(a_1, \ldots, a_n) \\
\Leftrightarrow\ & ||\phi(u_1, \ldots, u_n)||^B \in \overline{G} \\
\Leftrightarrow\ & e(p) \leq ||\phi(u_1, \ldots, u_n)||^B \text{ jollakin } p \in G \\
\Leftrightarrow\ & p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ jollakin } p \in G.
\end{aligned}$$

□

Lause 4.13. *Kaikilla lauseilla ϕ ja ψ on voimassa*

1. *jos $p \Vdash \phi$ ja $q \leq p$, niin $q \Vdash \phi$;*
2. *ei ole olemassa sellaista $p \in P$, että $p \Vdash \phi$ ja $p \Vdash \neg\phi$;*
3. *jokaisella $p \in P$ on olemassa $q \leq p$ siten, että $q \Vdash \phi$ tai $q \Vdash \neg\phi$;*
4. *$p \Vdash \neg\phi$, jos ja vain jos millään $q \leq p$ ei päde $q \Vdash \phi$;*
5. *$p \Vdash \phi \wedge \psi$, jos ja vain jos $p \Vdash \phi$ ja $p \Vdash \psi$;*
6. *$p \Vdash \phi \vee \psi$, jos ja vain jos jokaisella $q \leq p$ on olemassa sellainen $r \leq q$, että $r \Vdash \phi$ tai $r \Vdash \psi$;*
7. *$p \Vdash \phi \rightarrow \psi$, jos ja vain jos kaikilla $q \leq p$ pätee*

   $$(q \Vdash \phi) \rightarrow \exists r \leq q(r \Vdash \psi);$$

8. *$p \Vdash \forall x\phi(x)$, jos ja vain jos $p \Vdash \phi(a)$ jokaisella $a \in M[G]$;*
9. *$p \Vdash \exists x\phi(x)$, jos ja vain jos kaikilla $q \leq p$ on olemassa sellainen $r \leq q$, että jollakin $a \in M[G]$ pätee $r \Vdash \phi(a)$;*

10. jos $p \Vdash \exists x\phi(x)$, *niin* $p \Vdash \phi(a)$ *jollakin* $a \in M[G]$;

11. $||\phi||^B = 1$, *jos ja vain jos* $p \Vdash \phi$ *kaikilla* $p \in P$.

12. $||\phi||^B = 0$, *jos ja vain jos ei ole olemassa sellaista* $p \in P$, *että* $p \Vdash \phi$;

13. jos $a \in M$, *niin* $p \Vdash \forall x \in a\phi(x)$, *jos ja vain jos* $p \Vdash \phi(x)$ *kaikilla* $x \in a$;

14. jos $a \in M$, *niin* $p \Vdash \exists x \in a\phi(x)$, *jos ja vain jos jokaisella* $q \leq p$ *on olemassa sellainen* $r \leq q$, *että* $r \Vdash \phi(x)$ *jollain* $x \in a$;

Todistus. Kohdat 1 - 6, 8 ja 9 on todistettu kirjassa [2, s. 215]. Todistetaan tässä loput.

7. Olkoot ϕ ja ψ lauseita ja $p \in P$. Silloin

$$\begin{aligned}
&p \Vdash \phi \rightarrow \psi \\
\Leftrightarrow\ &p \Vdash \neg\phi \vee \psi \\
\Leftrightarrow\ &\forall q \leq p \exists r \leq q(r \Vdash \neg\phi \vee r \Vdash \psi) \\
\Leftrightarrow\ &\forall q \leq p(\exists r \leq q(r \Vdash \neg\phi) \vee \exists r \leq q(r \Vdash \psi) \\
\Leftrightarrow\ &\forall q \leq p(\neg(\forall r \leq q(r \Vdash \phi)) \vee \exists r \leq q(r \Vdash \psi)) \\
\Leftrightarrow\ &\forall q \leq p(\forall r \leq q(r \Vdash \phi) \rightarrow \exists r \leq q(r \Vdash \psi)) \\
\Leftrightarrow\ &\forall q \leq p(q \Vdash \phi \rightarrow \exists r \leq q(r \Vdash \psi).
\end{aligned}$$

10. Olkoon $p \Vdash \exists x\phi(x)$. Tehdään vastaoletus: $p \Vdash \neg\phi(a)$ kaikilla $a \in M[G]$. Silloin $p \Vdash \forall x\neg\phi(a)$, joten $p \Vdash \neg\exists x\phi(x)$, mikä on ristiriita.

11. Olkoon ϕ lause. Silloin

$$\begin{aligned}
&||\phi||^B = 1 \\
\Rightarrow\ &e(p) \leq ||\phi||^B \text{ jokaisella } p \in P \\
\Leftrightarrow\ &p \Vdash \phi \text{ jokaisella } p \in P.
\end{aligned}$$

    Oletamme, että $e(p) \leq ||\phi||^B$ jokaisella $p \in P$. Jos olisi $||\phi||^B \neq 1$, niin olisi $||\neg\phi|| \neq 0$, jolloin, koska $e[P]$ on tiheä algebrassa B, niin olisi sellainen $p \in P$, että $e(p) \leq ||\neg\phi||$ eli $p \Vdash \neg\phi$, ristiriita.

12. Olkoon ϕ lause. Silloin

$$\begin{aligned}
&||\phi||^B = 0 \\
\Leftrightarrow\ &||\neg\phi||^B = 1 \\
\Leftrightarrow\ &p \Vdash \neg\phi \text{ jokaisella } p \in P \\
\Leftrightarrow\ &\text{ei ole olemassa sellaista } p \in P, \text{ että } p \Vdash \phi.
\end{aligned}$$

13. Olkoon $a \in M$. Sillon lauseen 3.20 perusteella $||\hat{x} \in \hat{a}||^B = 1$, jos $x \in a$, ja $||\hat{x} \in \hat{a}||^B = 0$, jos $x \notin a$; joten, jos $x \in a$, niin jokaisella $q \in P$ pätee $q \Vdash x \in a$, ja jos $x \notin a$, niin millään $q \in P$ ei päde $q \Vdash x \in a$. Näin ollen saamme

$$
\begin{aligned}
& p \Vdash \forall x \in a \phi(x) \\
\Leftrightarrow\ & p \Vdash x \in a \to \phi(x) \text{ kaikilla } x \in M[G] \\
\Leftrightarrow\ & \forall q \le p(q \Vdash x \in a \to \exists r \le q(r \Vdash \phi(x))) \text{ kaikilla } x \in M[G] \\
\Leftrightarrow\ & \forall q \le p \exists r \le q(r \Vdash \phi(x)) \text{ kaikilla } x \in a \\
\Leftrightarrow\ & p \Vdash \phi(x) \text{ kaikilla } x \in a.
\end{aligned}
$$

14. Samoin kuin edellisessä kohdassa

$$
\begin{aligned}
& p \Vdash \exists x \in a \phi(x) \\
\Leftrightarrow\ & p \Vdash \exists x(x \in a \land \phi(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall q \le p \exists r \le q \exists x \in M[G](x \in a \land \phi(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall q \le p \exists r \le q \exists x \in \phi(a).
\end{aligned}
$$

□

4.2.3 Geneerisen filtterin olemassaolosta

Oletamme tässä aliluvussa, että M on transitiivinen ZFC-malli ja $\langle P, \le \rangle \in M$ osittainen järjestys. Olemme edellä osoittaneet, että malli M voidaan laajentaa malliksi $M[G]$ silloin, kun G on joukon P M-geneerinen filtteri. Emme kuitenkaan vielä tiedä onko tämä G olemassa. Osoitamme tässä aliluvussa, että joukolla P on M-geneerinen filtteri, jos M on numeroituva.

Lause 4.14. *Olkoon B täydellinen Boolen algebra mallissa M. Jos M on numeroituva, niin algebralla B on olemassa M-geneerinen ultrafiltteri.*

Todistus. Oletamme, että M on numeroituva, jolloin $\mathcal{P}^{(M)}(B)$ on myös numeroituva. Olkoon $\{T_n : n \in \omega\}$ joukon $\mathcal{P}^{(M)}(B) - \{\emptyset\}$ alkioiden numerointi. Jokaisella $n \in \omega$ asetamme

$$t_n = \bigvee T_n.$$

Olkoon $b \neq 0_B \in B$. Jos $t_0 = 0_B$, niin olkoon $b_0 = 0_B$; jos $t_0 \neq 1_B$ ja $t_0 \neq 0_B$, niin olkoon b_0 joukon T_0 mielivaltainen alkio siten, että $b_0 \neq 0_B$; ja jos $t_0 = 1_B$, niin olkoon b_0 sellainen joukon T_0 alkio, että $b_0 \neq 0_B$ ja $b_0 \neq b^*$, joka on selvästi olemassa. Teemme vastaoletuksen, että

$$b \land (t_0 \Rightarrow b_0) = 0_B.$$

Silloin

$$b \wedge (t_0^* \vee b_0) = 0_B,$$

mistä seuraa

$$(b \wedge t_0^*) \vee (b \wedge b_0) = 0_B,$$

jolloin $(b \wedge t_0^*) = 0_B$ ja $(b \wedge b_0) = 0_B$. Nyt, koska $b \neq 0_B$, niin on oltava $t_0^* = 0_B$ tai $t_0^* = b^*$. Jos olisi $t_0^* = 0_B$, niin olisi $b_0 \neq 0_B$ ja $b_0 \neq b^*$, jolloin olisi $(b \wedge b_0) \neq 0_B$. Jos taas olisi $t_0^* = b^*$, niin olisi $t_0 = b$, jolloin olisi $t_0 \wedge b_0 = 0_B$, ja koska $b_0 \leq t_0$, niin olisi $b_0 = 0_B$, mistä seuraisi, että $t_0 = 0_B$ ja edelleen $b = 0_B$. Siis molemmassa tapauksessa saamme ristiriidan, joten

$$b \wedge (t_0 \Rightarrow b_0) \neq 0_B.$$

Samalla tavalla voimme valita $b_n \in T_n$ jokaisella $n \in \omega$, jolloin induktion perusteella jokaisella $n \in \omega$ pätee $(t_0 \Rightarrow b_0) \wedge \cdots \wedge (t_n \Rightarrow b_n) \neq 0$. Näin ollen lauseiden 3.4 ja 3.5 perusteella on olemassa algebran B ultrafiltteri U, jolla

$$\{t_n \Rightarrow b_n \colon n \in \omega\} \subset U.$$

Olkoon $t_n \in U$. Silloin $t_n \wedge (t_n \Rightarrow b_n) = t_n \wedge (t_n^* \vee b_n) \in U$, joten $(t_n \wedge t_n^*) \vee (t_n \wedge b_n) \in U$. Tästä seuraa, että $t_n \wedge b_n \in U$, joten $b_n \in U$. Ultrafiltteri U on siis M-geneerinen. □

Lause 4.15. *Jos M on numeroituva, niin joukolla P on olemassa M-geneerinen filtteri.*

Todistus. Oletamme, että M on numeroituva. Olkoon B järjestyksen $\langle P, \leq \rangle$ Boolen täydennys mallissa M. Silloin edellisen lauseen perusteella algebralla B on M-geneerinen ultrafiltteri U. On helppo nähdä, että joukko $e^{-1}[U]$ on joukon P M-geneerinen filtteri. □

Oletus, että M on numeroituva on tärkeä, koska silloin, kun M on ylinumeroituva, on mahdollista löytää osittain järjestetty joukko $Q \in M$, jolla ei ole M-geneeristä filtteriä (ks [1, s. 107]).

5 Kardinaalien romautus

Tässä luvussa tarkastelemme transitiivisen ZFC-mallin M ja sen geneerisen laajennuksen $M[G]$ kardinaaleja. Kardinaali on ordinaali, jolla ei ole bijektiota sitä pienemmän ordinaalin kanssa. Aiemmin osoitimme, että mallien M ja $M[G]$ ordinaalit ovat samat. Mallin M kardinaali ei kuitenkaan ole välttämättä kardinaali laajennuksessa $M[G]$, koska se saattaa sisältää bijektion mallin M kardinaalin ja sitä pienemmän ordinaalin välillä.

Olkoot λ ja κ mallin M kardinaalit eli sellaiset ordinaalit, että

$$(\mathrm{Card}(\lambda) \wedge \mathrm{Card}(\kappa))^M$$

on tosi, ja $\kappa < \lambda$. Silloin, jos

$$(|\kappa| = |\lambda|)^{M[G]},$$

niin sanomme, että kardinaali λ *romahtaa* kardinaaliksi κ laajennuksessa $M[G]$. Tarkastelemme seuraavaksi sitä, miten pakotusjoukon valinta vaikuttaa kardinaalien romahtamiseen.

5.1 Kardinaaleja romauttava pakotuskäsite

Ensimmäisenä esitämme esimerkin pakotuskäsitteestä, joka romauttaa mallin M kardinaalin $\omega_1^{(M)}$ kardinaaliksi $\omega^{(M)} = \omega$, jolloin mallin M ylinumeroituvasta joukosta tulee numeroituva sen geneerisessä laajennuksessa.

Esimerkki 5.1. (Vrt. [2, esim.14.3, s. 202].) Olkoon M numeroituva transitiivinen ZFC-malli. Määrittelemme pakotuskäsitteen $\langle P, \leq \rangle \in M$ seuraavasti. Olkoon P joukko, jolla $p \in P$, jos ja vain jos $p \in M$ on funktio, jolla

1. $\mathrm{dom}(p) = n$ jollakin $n \in \omega = \omega^{(M)}$;
2. $\mathrm{ran}(p) \subset \omega_1^{(M)}$.

Olkoon $\leq$ osittainen järjestys joukossa P siten, että kaikilla $p, q \in P$:

$$p \leq q, \text{ jos ja vain jos } q \subset p.$$

Silloin

$$P = \{f \in \mathcal{P}^{(M)}(\omega \times \omega_1^{(M)}) \colon \mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \in \omega\}$$

ja

$$\{\leq\} = \{\langle p, q \rangle \in P \times P \colon q \subset p\},$$

joten $\langle P, \leq \rangle \in M$ lauseen 2.15 perusteella.

Olkoon G joukon P M-geneerinen filtteri (joka on olemassa lauseen 4.15 perusteella). Olkoon $f = \bigcup G$, jolloin $f \in M[G]$. Todistamme, että f on funktio. Joukko f on selvästi relaatio. Olkoon $\langle \alpha, \beta_1 \rangle$, $\langle \alpha, \beta_2 \rangle \in f$. Silloin $\langle \alpha, \beta_1 \rangle \in p_1$ ja $\langle \alpha, \beta_2 \rangle \in p_2$ joillakin p_1, $p_2 \in G$. Nyt, koska G on filtteri, niin on olemassa $p \in G$ siten, että $p_1 \subset p$ ja $p_2 \subset p$, joten, koska p on funktio, niin $\beta_1 = \beta_2$. Joukko f on siis funktio.

On helppoa nähdä, että jokaisella $n \in \omega$ joukko

$$D_n = \{p \in P \colon n \in \operatorname{dom}(p)\}$$

on tiheä ja kuuluu selvästi malliin M, jolloin $G \cap D_n \neq \emptyset$, koska G on M-geneerinen. Tästä seuraa, että $\operatorname{dom}(f) = \omega$. Myös jokaisella $\alpha < \omega_1^{(M)}$ joukko

$$E_\alpha = \{p \in P \colon \alpha \in \operatorname{ran}(p)\}$$

on tiheä, joten $\operatorname{ran}(f) = \omega_1^{(M)}$. Näin ollen ordinaali $\omega_1^{(M)}$ on numeroituva mallissa $M[G]$.

Esimerkki 5.2. (Vrt. [2, s. 237].) Edellinen esimerkki voidaan yleistää mielivaltaisille mallin M äärettömille kardinaaleille. Olkoot κ, λ sellaiset mallin M kardinaalit, että $\kappa < \lambda$. Määrittelemme joukon P siten, että $p \in P$, jos ja vain jos $p \in M$ on funktio ja

1. $\operatorname{dom}(p) \subset \kappa$, $|\operatorname{dom}(p)| < \kappa$;

2. $\operatorname{ran}(p) \subset \lambda$.

Määrittelemme osittaisen järjestyksen joukossa P asettamalla kaikilla $p, q \in P$:

$$p \leq q, \text{ jos ja vain jos } q \subset p.$$

Huomaamme, että $\langle P, \leq \rangle \in M$. Olkoon G joukon P M-geneerinen filtteri. Voimme todistaa samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä, että $f = \bigcup G$ on funktio, jolla $\operatorname{dom}(f) = \kappa$ ja $\operatorname{ran}(f) = \lambda$, mistä seuraa

$$(|\kappa| \geq |\lambda|)^{M[G]}.$$

Toisaalta, koska $\kappa < \lambda$ kaikissa transitiivisissa malleissa, niin myös

$$(|\kappa| \leq |\lambda|)^{M[G]},$$

joten

$$(|\kappa| = |\lambda|)^{M[G]}.$$

Sanomme, että pakotuskäsite $\langle P, \leq \rangle$ *romauttaa* kardinaalin λ kardinaaliksi κ.

5.2 Kardinaaleja säilyttävät laajennukset

Tässä aliluvussa esitämme pakotuskäsitettä koskevan ehdon, joka takaa sen, että kardinaalit pysyvät samoina geneerisessä laajennuksessa.

Määritelmä 5.1. Olkoon P osittain järjestetty joukko. Sanomme, että $C \subset P$ on *antiketju*, jos aina, kun $x, y \in C$ ja $x \neq y$, niin ei ole olemassa sellaista $z \in C$, että $z \leq x$ ja $z \leq y$.

Lause 5.1. *Olkoon M transitiivinen* ZFC*-malli, $\langle P, \leq \rangle \in M$ sellainen pakotuskäsite, että jokainen joukon P antiketju on numeroituva mallissa M, ja G joukon P M-geneerinen filtteri. Silloin kaikilla $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ pätee*

$$\mathrm{Card}(\alpha)^M \Leftrightarrow \mathrm{Card}(\alpha)^{M[G]}.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 43].) Selvästi kaikilla $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ pätee

$$\mathrm{Card}(\alpha)^{M[G]} \Rightarrow \mathrm{Card}(\alpha)^M,$$

koska jos ordinaalilla α ei ole bijektiota ordinaalin $\beta < \alpha$ kanssa mallissa $M[G]$, niin sitä ei ole myöskään mallissa M. Todistamme, että myös

$$\mathrm{Card}(\alpha)^M \Rightarrow \mathrm{Card}(\alpha)^{M[G]}.$$

Olkoon α ordinaali. Väite on selvästi tosi, jos $\alpha \leq \omega$. Olkoon $\alpha > \omega$ ja $\mathrm{Card}(\alpha)^M$, jolloin $(|\alpha| > \aleph_0)^M$ eli α on ylinumeroituva mallissa M. Teemme vastaoletuksen, että on olemassa sellaiset $f \in M[G]$ ja $\beta < \alpha$, että

$$(f \text{ on bijektio } \beta \to \alpha)^{M[G]}.$$

Silloin

$$p \Vdash f \text{ on bijektio } \beta \to \alpha,$$

jollakin $p \in G$. Jokaisella $\xi < \beta$ asetamme

$$X_\xi = \{\eta < \alpha \colon \exists q \in P(q \Vdash \mathrm{Fun}(f) \land f(\xi) = \eta)\},$$

jolloin $X_\xi \in M$. Olkoon $\eta < \alpha$. Silloin

$$p \Vdash \exists \xi < \beta(\mathrm{Fun}(f) \land f(\xi) = \eta),$$

joten on olemassa $q \leq p$ ja $\xi < \beta$ siten, että

$$q \Vdash \mathrm{Fun}(f) \land f(\xi) = \eta.$$

Näin ollen

$$\alpha = \bigcup_{\xi<\beta} X_\xi.$$

Teemme vastaoletuksen, että kaikilla $\xi < \beta$ joukko X_ξ on numeroituva mallissa M eli $(|X_\xi| = \aleph_0)^M$. Koska valinta-aksiooma on tosi mallissa M, niin on olemassa funktio $F \in M$ siten, että jokasella $\xi < \beta$ on $F(\xi) = f_\xi$, missä $f_\xi \in M$ on bijektio $\omega \to X_\xi$. Näin ollen mallissa M on funktio

$$\langle \xi, n\rangle \mapsto f_\xi(n)$$

joukolta $\beta \times \omega$ joukolle α, jolloin

$$(|\alpha| \leq |\beta| \cdot \aleph_0 = \max\{|\beta|, \aleph_0\})^M,$$

ristiriita.

Joukko X_ξ on siis ylinumeroituva mallissa M jollakin $\xi < \beta$. Käytämme taas valinta-aksioomaa. Olkoon $G \in M$ valintafunktio. Jokaisella $\eta < \alpha$ merkitsemme

$$p_\eta = G(\{q \in P\colon q \Vdash \mathrm{Fun}(f) \wedge f(\xi) = \eta\}),$$

ja asetamme

$$C = \{p_\eta\colon \eta \in X_\xi\},$$

jolloin $(|C| = |X_\xi|)^{M[G]}$. Olkoon $q, r \in C$ ja $q \neq r$. Silloin

$$q \Vdash \mathrm{Fun}(f) \wedge f(\xi) = \eta;$$
$$r \Vdash \mathrm{Fun}(f) \wedge f(\xi) = \nu.$$

joillakin $\eta, \nu \in X_\xi$, $\eta \neq \nu$, joten ei ole olemassa sellaista $s \in P$, että $s \leq q$ ja $s \leq r$. Joukko C on siis mallissa M ylinumeroituva antiketju, mikä on ristiriita. Näin ollen $\mathrm{Card}(\alpha)^{M[G]}$, joten väite on tosi.

$\square$

6 Cohenin reaalit ja kontinuumhypoteesi

Tässä luvussa tarkastelemme transitiivisen ZFC-mallin M geneerisiä laajennuksia, jotka sisältävät uusia joukon ω osajoukkoja, joita ei ole mallissa M. Tällaisia joukkoja kutsutaan *Cohenin reaaleiksi* pakottamismenetelmän keksijän Paul Cohenin mukaan. Luvun lopussa todistamme, että kontinuumhypoteesia ei voi johtaa ZFC-aksioomista.

Seuraavassa esimerkissä esittelemme pakotuskäsitteen, joka lisää ainakin yhden uuden reaalin malliin M.

Esimerkki 6.1. Olkoon M numeroituva transitiivinen ZFC-malli. Olkoon P sellainen joukko, että $p \in P$, jos ja vain jos $p \in M$ on funktio, jolla

1. $\mathrm{dom}(p) \in \omega$;
2. $\mathrm{ran}(p) \subset \{0, 1\}$.

Määrittelemme osittaisen järjestyksen joukossa P asettamalla

$$p \leq q, \text{ jos ja vain jos } q \subset p$$

kaikilla $p, q \in P$. Sillon $\langle P, \leq \rangle \in M$.

Olkoon G joukon P M-geneerinen filtteri. Silloin $f = \bigcup G$ on funktio ja $f \in M[G]$. Koska jokaisella $n \in \omega$ joukko

$$D_n = \{p \in P \colon n \in \mathrm{dom}(p)\}$$

on tiheä ja $D_n \in M$, niin $\mathrm{dom}(f) = \omega$.

Olkoon $g \in M$ funktio $\omega \to \{0, 1\}$. Silloin joukko

$$D_g = \{p \in P \colon p \nsubseteq g\}$$

on tiheä ja $D_g \in M$, joten $f \neq g$. Näin ollen $f \notin M$. Olkoon

$$A = \{n \in \omega \colon f(n) = 1\}.$$

Silloin $A \in M[G]$, ja koska $f \notin M$, niin $A \notin M$. Joukko $A \subset \omega$ on siis luonnollisten lukujen joukko joka on mallissa $M[G]$, mutta ei ole mallissa M.

Esimerkki 6.2. (Vrt. [2, s. 225].) Olkoon M numeroituva transitiivinen ZFC-malli ja $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$. Määrittelemme pakotuskäsitteen $\langle P, \leq \rangle$ seuraavasti. Olkoon P joukko, jolla $p \in P$, jos ja vain jos $p \in M$ on sellainen funktio, että

1. $\mathrm{dom}(p)$ on äärellinen joukon $\omega_\alpha^{(M)} \times \omega$ osajoukko;

2. $\text{ran}(p) \subset \{0, 1\}$.

Määrittelemme osittaisen järjestyksen $\leq$ joukossa P asettamalla

$$p \leq q \Leftrightarrow q \subset p$$

kaikilla $p, q \in P$. Silloin $\langle P, \leq \rangle \in M$.

Olkoon G joukon P M-geneerinen filtteri ja $f = \bigcup G$. Silloin f on funktio, ja koska kaikilla $\xi < \omega_\alpha^{(M)}$, $n \in \omega$ joukko

$$D_{\xi n} = \{p \in P \colon \langle \xi, n \rangle \in \text{dom}(p)\}$$

on tiheä ja $D_{\xi n} \in M$, niin $\text{dom}(f) = \omega_\alpha^{(M)} \times \omega$.

Määrittelemme jokaisella ordinaalilla $\xi < \omega_\alpha^{(M)}$ funktion $f_\xi \colon \omega \to \{0, 1\}$ asettamalla

$$f_\xi(n) = f(\xi, n).$$

Olkoon $\xi, \eta < \omega_\alpha^{(M)}$ ja $\xi \neq \eta$. Olkoon

$$D = \{p \in P \colon p(\xi, n) \neq p(\eta, n) \text{ jollakin } n \in \omega\}.$$

Joukko $D \in M$ on tiheä, joten $f_\xi \neq f_\eta$.

Näin ollen joukot

$$a_\xi = \{n \in \omega \colon f_\xi(n) = 1\}$$

ovat mallin $M[G]$ joukon ω eri osajoukkoja, joten mallissa $M[G]$ on ainakin $\aleph_\alpha^{(M)}$ Cohenin reaalia.

Nyt haluamme todistaa, että näin muodostettu laajennus säilyttää kardinaalit, jolloin $\aleph_\alpha^{(M)} = \aleph_\alpha^{(M[G])}$. Sen osoittamiseksi tarvitsemme seuraavaa apulausetta.

Apulause 6.1. *Olkoon W ylinumeroituva joukko, jonka alkiot ovat äärellisiä joukkoja. Silloin on olemassa ylinumeroituva joukko $Z \subset W$ ja äärellinen joukko S siten, että $X \cap Y = S$ kaikilla $X, Y \in Z$, $X \neq Y$.*

Todistus. Ks. [2, s. 118]. □

Lause 6.2. *Olkoon M numeroituva transitiivinen* ZFC*-malli ja $\langle P, \leq \rangle$ samanlainen pakotuskäsite kuin esimerkissä 6.2. Silloin, jos G on joukon P M-geneerinen filtteri, niin laajennus $M[G]$ säilyttää kardinaalit eli*

$$\text{Card}(\alpha)^M \Leftrightarrow \text{Card}(\alpha)^{M[G]}.$$

Todistus. Olkoon $F \subset P$ ylinumeroituva mallissa M. Olkoon

$$W = \{\mathrm{dom}(p) \colon p \in F\}.$$

Silloin $W \in M$ on joukko, jonka alkiot ovat äärellisiä. Koska jokaisella $x \in W$ funktioiden $x \to \{0,1\}$ määrä on äärellinen, niin joukon W on oltava ylinumeroituva mallissa M, jolloin apulauseen 6.1 perusteella on olemassa mallissa M ylinumeroituva joukko $Z \subset W$, $Z \in M$ ja äärellinen joukko $S \in M$ siten, että $X \cap Y = S$ kaikilla $X, Y \in Z$, $X \neq Y$. Olkoon

$$G = \{p \in F \colon \ \mathrm{dom}(p) \in Z\}.$$

Koska funktioiden $S \to \{0,1\}$ määrä on äärellinen, niin on olemassa funktiot $p, q \in G$, $p \neq q$ siten, että $p \restriction S = q \restriction S$, jolloin $r = p \cup q \in P$. Näin ollen $p, q \in F$, $r \leq p$ ja $r \leq q$, joten F ei ole antiketju. Joukon P kaikki antiketjut ovat siis numeroituvia mallissa M, joten lauseen 5.1 perusteella laajennus $M[G]$ säilyttää kardinaalit. □

Lause 6.3. *Olkoon M numeroituva transitiivinen* ZFC*-malli ja* $\alpha \in \mathrm{ORD}^{(M)}$ *sellainen, että* $\alpha \geq 2$. *Olkoon* $\langle P, \leq \rangle$ *samanlainen pakotuskäsite kuin esimerkissä 6.2, jolloin P siis koostuu kaikista sellaisista funktioista p, että*

1. $\mathrm{dom}(p)$ *on äärellinen joukon* $\omega_\alpha^{(M)} \times \omega$ *osajoukko;*
2. $\mathrm{ran}(p) \subset \{0,1\}$,

minkä lisäksi

$$p \leq q \Leftrightarrow q \subset p$$

kaikilla $p, q \in P$. Olkoon G joukon P M-geneerinen filtteri. Silloin kontinuumhypoteesi on epätosi mallissa $M[G]$ eli

$$(\aleph_1 < 2^{\aleph_0})^{M[G]}.$$

Todistus. Esimerkin 6.2 mukaan on olemassa injektio $\omega_\alpha^{(M)} \to \mathcal{P}^{(M[G])}(\omega)$, joten

$$\aleph_\alpha^{(M)} \leq (2^{\aleph_0})^{(M[G])},$$

ja koska $\aleph_\alpha^{(M)} = \aleph_\alpha^{(M[G])}$ lauseen 6.2 perusteella, niin

$$\aleph_1^{(M[G])} < \aleph_\alpha^{(M[G])} = \aleph_\alpha^{(M)} \leq (2^{\aleph_0})^{(M[G])},$$

mistä väite seuraa. □

Seuraus 6.4. *Kontinuumhypoteesia ei voi johtaa* ZFC*-aksioomista, jos ne ovat ristiriidattomia.*

Todistus. Jos kontinuumhypoteesi olisi johdettavissa ZFC-aksioomista, niin predikaattilogiikan eheyslauseen perusteella (lause 2.1) kontinuumhypoteesi olisi tosi kaikissa ZFC-malleissa. Edellisen lauseen malli $M[G]$ on kuitenkin ZFC-malli, jossa kontinuumhypoteesi on epätosi. Näin ollen kontinuumhypoteesia ei voi johtaa ZFC-aksioomista, jos ne ovat ristiriidattomia. Tarkempi selitys löytyy luvusta 2.7. $\square$

Viitteet

[1] Bell, J. L., *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* Second edition. Clarendon Press, Oxford, 1985.

[2] Jech, T., *Set Theory, 3rd edition.* Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* Elsevier Science Publishers, 1980.

[4] Salminen, H., Väänänen, J., *Johdatus logiikkaan.* 7. painos. Gaudeamus, 2005.