TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Sara Pääkkönen

Kokonaislukujen osituksista

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Syyskuu 2011

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

PÄÄKKÖNEN, SARA: Kokonaislukujen osituksista

Pro gradu -tutkielma, 32 s.

Matematiikka

Syyskuu 2011

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan kokonaislukujen osituksia ja niiden ominaisuuksia. Aluksi määritellään osituksen käsite ja tarkastellaan esimerkin avulla yhden luvun osituksia. Tämän jälkeen tarkastellaan sellaisia osituksia, joissa osien kokoa tai lukumäärää on rajoitettu. Näiden ositusten ominaisuuksia tarkastellaan mm. Ferresin diagrammien avulla. Tutkielman toisessa luvussa tutustutaan lyhyesti myös itselleen transponoituviin osituksiin ja tarkastellaan Eulerin pentagonaalisten lukujen lausetta.

Tutkielman kolmannessa luvussa tutkitaan ositusfunktioiden ylä- ja alarajoja. Siinä tarkastellaan rajoitettua ositusta vastaavan ositusfunktion $p_k(n)$ alarajaa sekä rajoittamatonta ositusta vastaavan ositusfunktion $p(n)$ ylä- ja alarajaa. Tälle alarajalle annetaan sekä melko karkea arvio että toteavaan sävyyn tarkempi, Hardy–Ramanujan -kaavaan perustuva, arvio.

Neljännessä luvussa perehdytään generoiviin funktioihin ja ositusten esittämiseen niiden avulla. Ensin määritellään generoiva funktio. Toisessa alaluvussa johdetaan lukujonon $\{p(n)\}$ generoiva funktio, jonka esitys tunnetaan myös Eulerin lauseena. Samassa alaluvussa tarkastellaan myös Eulerin identiteettinä tunnettua lausetta ja todistetaan se sekä generoivien funktioiden avulla että bijektiivisesti. Viimeisessä alaluvussa etsitään vielä generoivat funktiot lukujonoille $\{q_k(n)\}$ ja $\{p_k(n)\}$.

Tutkielman viimeisessä luvussa tutkitaan, kuinka osituksia voidaan käyttää hyväksi rationaalilukujen luetteloinnissa. Tarkastellaan sekä tiettyä positiivisista rationaaliluvuista koostuvaa jonoa että induktiivisesti määriteltyä murtolukupuuta.

Päälähteenä tutkielmassa on käytetty teosta Slomson A.: *An Introduction to Combinatorics*. Muita lähteitä ovat teos Andrews G.E., Eriksson K.: *Integer partitions* sekä verkkomateriaalit Haukkanen P.: *Kombinatoriikkaa* ja Wilf H.S.:*Lectures on Integer Partitions*.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan kokonaislukujen osituksia ja niiden ominaisuuksia. Tutkielman toisessa luvussa määritellään ensin osituksen käsite ja tarkastellaan esimerkin avulla yhden luvun osituksia. Tämän jälkeen tarkastellaan sellaisia osituksia, joissa osien kokoa tai lukumäärää on rajoitettu. Näiden ositusten ominaisuuksia tarkastellaan mm. Ferresin diagrammien avulla. Luvussa tutustutaan lyhyesti myös itselleen transponoituviin osituksiin. Viimeisessä alaluvussa tarkastellaan Eulerin pentagonaalisten lukujen lausetta.

Kolmannessa luvussa tutkitaanositusfunktioiden ylä- ja alarajoja. Siinä tarkastellaan rajoitettua ositusta vastaavan ositusfunktion $p_k(n)$ alarajaa sekä rajoittamatonta ositusta vastaavan ositusfunktion $p(n)$ ylä- ja alarajaa. Tälle alarajalle annetaan sekä melko karkea arvio että toteavaan sävyyn tarkempi, Hardy–Ramanujan -kaavaan perustuva, arvio.

Neljännessä luvussa perehdytään generoiviin funktioihin ja ositusten esittämiseen niiden avulla. Ensin määritellään generoiva funktio. Toisessa alaluvussa johdetaan lukujonon $\{p(n)\}$ generoiva funktio, jonka esitys tunnetaan myös Eulerin lauseena. Samassa alaluvussa tarkastellaan myös Eulerin identiteettinä tunnettua lausetta ja todistetaan se sekä generoivien funktioiden avulla että bijektiivisesti. Viimeisessä alaluvussa etsitään vielä generoivat funktiot lukujonoille $\{q_k(n)\}$ ja $\{p_k(n)\}$.

Tutkielman viimeisessä luvussa tutkitaan, kuinka osituksia voidaan käyttää hyväksi rationaalilukujen luetteloinnissa. Tarkastellaan sekä erästä positiivisista rationaaliluvuista koostuvaa jonoa että induktiivisesti määriteltyä murtolukupuuta.

Päälähteenä tutkielmassa on käytetty teosta Slomson A.: *An Introduction to Combinatorics*. Muita lähteitä ovat teos Andrews G.E., Eriksson K.: *Integer partitions* sekä verkkomateriaalit Haukkanen P.: *Kombinatoriikkaa* ja Wilf H.S.:*Lectures on Integer Partitions*.

Ellei toisin mainita, tutkielmassa käsiteltävät luvut ovat positiivisia kokonaislukuja. Lukijan oletetaan tuntevan analyysin perusteet.

2 Kokonaislukujen ositukset

Tässä luvussa määritellään ensin osituksen käsite ja tarkastellaan esimerkin avulla yhden luvun osituksia. Toisessa alaluvussa tarkastellaan sellaisia osituksia, joissa osien kokoa tai lukumäärää on rajoitettu. Näiden ositusten ominaisuuksia tarkastellaan mm. Ferresin diagrammien avulla. Luvun viimeisessä alaluvussa tutustutaan Eulerin pentagonaalisten lukujen lauseeseen.

2.1 Rajoittamaton ositus

Määritelmä 2.1. (Ks. [2, s. 36],[3, s. 29].) Positiivisen kokonaisluvun n *ositus* on luvun n esitys positiivisten kokonaislukujen summana. Osituksessa sama luku voi esiintyä monta kertaa ja yhteenlaskettavien järjestyksellä ei ole merkitystä. Osituksen yhteenlaskettavia kutsutaan osituksen *osiksi.* Luvun n kaikkien ositusten lukumäärästä käytetään merkintää $p(n)$. Funktio $p(n)$ on nimeltään *ositusfunktio.* Erityisesti sovitaan, että $p(0) = 1$.

Esimerkki 2.1. (Vrt.[2, s. 36],[3, s. 29].) Luvun 4 ositukset ovat

$$\begin{gathered} 4 \\ 3+1 \\ 2+2 \\ 2+1+1 \\ 1+1+1+1. \end{gathered}$$

Ositus $2 + 1 + 1$ on sama kuin ositukset $1 + 2 + 1$ ja $1 + 1 + 2$, mutta luvut on tapana kirjoittaa laskevassa järjestyksessä. Luvulla 4 on kaikkiaan viisi ositusta, eli $p(4) = 5$.

Määritelmä 2.2. Merkintä *k-osa* tarkoittaa sellaista jonkin kokonaisluvun osituksen osaa, joka on luvun k suuruinen.

Esimerkki 2.2. Luvun 4 ositus 2+1+1 koostuu yhdestä 2-osasta ja kahdesta 1-osasta.

2.2 Rajoitetut ositukset

Merkintä $p(n)$ tarkoittaa luvun n ositusten rajoittamatonta lukumäärää. Luvun n ositusten määrälle voidaan kuitenkin tehdä erilaisia rajoituksia. Yksi tällainen on osituksen osien määrän rajoittaminen.

Määritelmä 2.3. (Ks.[3, s. 30].) Merkintä $p_k(n)$ tarkoittaa niiden luvun n ositusten lukumäärää, joissa on enintään k osaa. Erityisesti on sovittu, että $p_k(0) = 1$.

Esimerkki 2.3. Edellisen määritelmän mukaiset lukumäärät luvulle 4 ovat $p_1(4) = 1$, $p_2(4) = 3$, $p_3(4) = 4$ ja $p_4(4) = 5$.
Esimerkiksi merkintää $p_2(4)$ vastaavat, luvun 4 korkeintaan kaksiosaiset ositukset ovat 4, $2 + 2$ ja $3 + 1$.

Huomautus Sekä seuraavassa lemmassa että myöhemminkin käytetty merkintä $\mathrm{int}(x)$ tarkoittaa luvun x kokonaislukuosaa.

Lemma 2.1. *Kaikille $n, k \in \mathbb{Z}^+$ on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(a) $$p_1(n) = 1,$$

(b) $$\forall k \geq n, \quad p_k(n) = p(n)$$

(c) $$p_2(n) = \mathrm{int}\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

Todistus. (Vrt. [3, s. 31].) Kohta (a) on triviaali, sillä luvun n ositus, jossa saa olla vain yksi osa, voi olla vain tämä luku itse. Kohta (b) pätee, sillä luvun n osituksessa voi olla korkeintaan n osaa. Tällöin kaikki osat ovat ykkösiä. Kohdassa (c) tarkastellaan erikseen tapauksia, joissa n on parillinen ja joissa n on pariton.

(1) Olkoon n parillinen, ts. $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Luvun $n = 2m$ ositukset, joissa on korkeintaan kaksi osaa, ovat tällöin

$$\begin{gathered} 2m \\ (2m-1)+1 \\ (2m-2)+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (2m-m)+m = m+m. \end{gathered}$$

Koska osituksissa toisena lukuna on vuorotellen kaikki välin $[2m, m]$ luvut, on erilaisia osituksia $2m - m + 1 = m + 1$ kappaletta. Tällöin

$$p_2(n) = m + 1 = \frac{2m}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1 = \mathrm{int}\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

(2) Olkoon n pariton, ts. $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Luvun n korkeintaan kaksiosaiset ositukset ovat tällöin

$$\begin{gathered} 2m+1 \\ (2m)+1 \\ (2m-1)+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (m+1)+m, \end{gathered}$$

jolloin erilaisia osituksia on jälleen $m + 1$ kappaletta. Tällöin

$$\begin{aligned} p_2(n) &= m+1 \\ &= \frac{2m+1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \text{ (joka on kokonaisluku, koska } n \text{ on pariton)} \\ &= \mathrm{int}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \mathrm{int}\left(\frac{n}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

Koska yhtälö on tosi sekä parillisilla että parittomilla luvun n arvoilla, on kohta (c) näin todistettu. $\square$

Ositusten määrää voidaan rajoittaa myös rajoittamalla osituksen osien kokoa.

Määritelmä 2.4. (Vrt.[3, s. 32].) Merkintä $q_k(n)$ tarkoittaa niiden luvun n ositusten lukumäärää, joissa osituksen suurin osa on korkeintaan luvun k suuruinen.

Esimerkki 2.4. Edellisen määritelmän mukaiset lukumäärät luvulle 4 ovat $q_1(4) = 1$, $q_2(4) = 3$, $q_3(4) = 4$, $q_4(4) = 5$.
Esimerkiksi merkintää $q_2(4)$ vastaavat, luvun 4 ne ositukset, joiden suurin osa on korkeintaan 2, ovat $2 + 2$, $2 + 1 + 1$ ja $1 + 1 + 1 + 1$.

Esimerkeistä 2.3 ja 2.4 voi huomata, että $p_k(4) = q_k(4)$. Seuraavaksi tarkastellaan Ferresin diagrammeja ja niiden avulla todistettavaa lausetta 2.3, joiden perusteella todetaan tämän yhtäsuuruuden pätevän kaikille luvuille n.

Tarkastellaan esimerkkinä luvun 8 joitakin osituksia. Luvun 8 osituksen $4 + 3 + 1$ Ferresin diagrammi on

$$\begin{array}{llll} * & * & * & * \\ * & * & * & \\ * & & & \end{array}$$

Jos diagrammi käännetään niin, että sen rivit vaihtuvat sarakkeiksi, saadaan sen transpoosi

$$\begin{array}{lll} * & * & * \\ * & * & \\ * & * & \\ * & & \end{array}$$

jota vastaa osituksen $4 + 3 + 1$ duaali, ositus $3 + 2 + 2 + 1$.

Huomautus Seuraavassa lemmassa käytetty merkintä $|X|$ tarkoittaa joukon X alkioiden lukumäärää.

Lemma 2.2. *Osituksen*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_s, \text{ jossa } k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s,$$

duaali on ositus

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_t,$$

jossa $t = k_1$, ja kun $1 \leq i \leq t$,

$$l_i = |\{j : 1 \leq j \leq s \text{ ja } k_j \geq i\}|. \tag{2.1}$$

Todistus. (Ks. [3, s. 33].) Osituksen duaalin osien lukumäärä on sama kuin alkuperäisen Ferresin diagrammin sarakkeiden lukumäärä, joka on sama kuin tätä diagrammia vastaavan osituksen suurin luku. Siis $t = k_1$. Luku l_i (2.1) on alkuperäisen diagrammin i:nnen sarakkeen pisteiden lukumäärä, ja se on yhtä suuri kuin tämän diagrammin vähintään i pisteestä koostuvien rivien määrä. Siitä seuraa erityisesti, että $l_1 = s$. □

Lemmasta 2.2 seuraa, että luvun n tietyn osituksen osien lukumäärä on sama kuin tämän osituksen duaalin suurin luku. Näin ollen on olemassa bijektio niiden luvun n ositusten, joissa on korkeintaan k osaa, ja niiden, joissa osien koko on korkeintaan k, välillä. Tämä todistaa myös seuraavan lauseen.

Lause 2.3. *Luvun n korkeintaan k-osaisia osituksia on yhtä paljon kuin osituksia, joissa osien koko on korkeintaan k. Eli*

$$p_k(n) = q_k(n) \qquad \forall k, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Lause 2.4. *Kaikille $k, n \in \mathbb{Z}^+$, joilla $k \leq n$, on voimassa*

(a) $$q_k(n) = q_{k-1}(n) + q_k(n-k)$$

(b) $$p_k(n) = p_{k-1}(n) + p_k(n-k).$$

Todistus. (Ks. [3, s. 34]). (a) Jaetaan luvun n ositukset, joiden osien koko on korkeintaan k, kahteen joukkoon. Koostukoon ensimmäinen joukko niistä osituksista, jotka eivät sisällä lukua k. Tällöin tämä joukko koostuu niistä luvun n osituksista, joiden osien koko on korkeintaan $k-1$. Tässä joukossa on siis $q_{k-1}(n)$ ositusta. Koostuukoon toinen joukko niistä osituksista, joiden osista ainakin yksi on k. Nyt, jos tämä osa poistetaan, jäljelle jää luvun $n-k$ sellaiset ositukset, joiden osien koko on korkeintaan k. Käänteisesti, jos näihin luvun $n-k$ osituksiin lisätään luku k, saadaan luvun n sellaiset ositukset, joiden suurin osa on k. Tällöin tällä joukolla on yksi-yhteen vastaavuus luvun $n-k$ osituksiin, joiden suurin osa on korkeintaan k, joten toinen joukko sisältää $q_k(n-k)$ ositusta. Nämä kaksi joukkoa ovat erilliset ja sisältävät kaikki mahdolliset luvun n ne ositukset, joiden suurin osa on korkeintaan k. Näin ollen kohta (a) on todistettu. Kohta (b) seuraa tästä ja lauseesta 2.3. □

Lause 2.5. *Kaikille luvuille $k, n \in \mathbb{Z}^+$, joilla $k \leq n$, on voimassa*

(a) $$\begin{aligned} q_k(n) = & q_{k-1}(n) + q_{k-1}(n-k) + q_{k-1}(n-2k) \\ & + \cdots + q_{k-1}(n-sk) \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} p_k(n) = & p_{k-1}(n) + p_{k-1}(n-k + p_{k-1}(n-2k) \\ & + \cdots + p_{k-1}(n-sk), \end{aligned}$$

joissa $s = \operatorname{int}\left(\frac{n}{k}\right)$.

Todistus. (Vrt. [3, s. 34 – 35].) Lauseen 2.4 perusteella

$$q_k(n) = q_{k-1}(n) + q_k(n-k). \tag{2.2}$$

Oletetaan, että $2k \leq n$, ja sovelletaan lausetta 2.4 luvulle $n-k$, jolloin

$$q_k(n-k) = q_{k-1}(n-k) + q_k(n-2k). \tag{2.3}$$

Nyt yhtälöiden (2.2) ja (2.3) perusteella

$$q_k(n) = q_{k-1}(n) + q_{k-1}(n-k) + q_k(n-2k).$$

Jatkamalla samalla tavalla saadaan lopulta

$$\begin{aligned} q_k(n) = & \, q_{k-1}(n) + q_{k-1}(n-k) + q_k(n-2k) \\ & + \cdots + q_k(n-sk). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Koska $s = \text{int}\left(\frac{n}{k}\right)$, $n - sk$ on jakojäännös, kun n jaetaan luvulla k. Siis $n - sk < k$. Siksi luvulla $n - sk$ ei ole sellaisia osituksia, jotka sisältäisivät luvun k tai sitä isomman luvun. Tästä seuraa, että

$$q_k(n-sk) = q_{k-1}(n-sk). \tag{2.5}$$

Kohta (a) seuraa yhtälöistä (2.4) ja (2.5) ja kohta (b) siitä ja lauseesta 2.3. □

Osituksen suurimman osan koon lisäksi osituksia voidaan rajoittaa myös niiden pienimmän osan koon mukaan. Tarkastellaan seuraavaksi joitakin osituksen pienimmän osan mukaan rajoitettujen ositusten ominaisuuksia.

Määritelmä 2.5. (Vrt.[3, s. 35 harj. 3.2.2.].) Merkintä $s_k(n)$ tarkoittaa niiden luvun n ositusten lukumäärää, joiden pienin osa on k.

Esimerkki 2.5. Edellisen määritelmän mukaiset lukumäärät luvulle 4 ovat $s_1(4) = 3, s_2(4) = 1, s_3(4) = 0$ ja $s_4(4) = 1$. Esimerkiksi merkintää $s_1(4)$ vastaavat, luvun 4 ne ositukset, joiden pienin osa on 1, ovat $1+1+1+1$, $2+1+1$ ja $3+1$.

Lause 2.6. *Kaikilla luvuilla $n \in \mathbb{N}^+$,*

$$p(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\text{int}(n/2)} s_k(n).$$

Todistus. (Ks.[3, s. 218].) Jaotellaan luvun n ositukset niiden pienimmän osan koon mukaan. Lemman 2.1 mukaan luvulla n on täsmälleen yksi ositus, jossa on vain yksi osa, nimittäin luku n itse. Muissa luvun n osituksissa on vähintään kaksi osaa, ja pienin osa näissä on korkeintaan luvun $n/2$ suuruinen. Luvun n ositusten lukumäärä on siis yhtä suurempi kuin niiden luvun n ositusten lukumäärien summa, joiden pienin osa on k, kun $1 \leq k \leq \text{int}(n/2)$. Kun tähän summaan lisätään yksi, saadaan yhtäsuuruus luvun n kaikkien ositusten ja niiden ositusten, joiden pienin osa on k, välille. □

Esimerkki 2.6. Konkretisoidaan lausetta 2.6 luvulla 4. Esimerkissä 2.1 laskettiin, että $p(4) = 5$, ja

$$\begin{aligned}1 + \sum_{k=1}^{\mathrm{int}(4/2)} s_k(4) &= 1 + \sum_{k=1}^{2} s_k(4) \\ &= 1 + s_1(4) + s_2(4) \\ &= 1 + 3 + 1 \\ &= 5,\end{aligned}$$

joten $p(4) = 1 + \sum_{k=1}^{\mathrm{int}(4/2)} s_k(4)$.

Lause 2.7. *Kaikille $k, n \in \mathbb{N}^+$, joilla $2k \leq n$, pätee*

$$s_k(n) = \sum_{t=k}^{n-k} s_t(n-k).$$

Todistus. (Ks.[3, s. 218].) Kun luvun n niistä osituksista, joiden pienin osa on k, poistetaan yksi k-osa, syntyy sellaisia luvun $n-k$ osituksia, joiden pienin osa on t, ja $k \leq t \leq n-k$.

□

Esimerkki 2.7. Havainnollistetaan lausetta 2.7 luvulla 4. Nyt

$$\begin{aligned}s_1(4) &= 3 \\ &= \sum_{t=1}^{4-1} s_t(4-1) \\ &= \sum_{t=1}^{3} s_t(3) \\ &= s_1(3) + s_2(3) + s_3(3) \\ &= 2 + 0 + 1 \\ &= 3.\end{aligned}$$

Lause 2.8. *Kaikille $n \in \mathbb{N}^+$ on voimassa*

$$p(n) = s_1(n+1).$$

Todistus. (Ks.[3, s. 218].) Jos luvun n johonkin ositukseen lisätään 1-osa, saadaan aikaan luvun $n+1$ ositus, jonka pienin osa on 1. Vastaavasti, jos jostain luvun $n+1$ osituksesta, jonka pienin osa on 1, poistetaan tämä 1-osa, saadaan jokin luvun n ositus. Näin saadaan määriteltyä bijektio luvun n kaikkien ositusten ja luvun $n+1$ niiden ositusten, joiden pienin osa on 1, välille. Tästä seuraa, että $p(n) = s_1(n+1)$. □

Lause 2.9. *Kaikilla $k, n \in \mathbb{N}^+$, on voimassa*

$$s_k(n) = s_k(n-k) + s_{k+1}(n+1).$$

Todistus. (Ks.[3, s. 218].) Jaetaan luvun n ositukset, joiden pienin osa on k, kahteen toisistaan erilliseen luokkaan. Koostukoon ensimmäinen luokka niistä osituksista, joissa on vähintään kaksi k-osaa. Jos yksi näistä poistetaan, saadaan sellainen luvun $n-k$ ositus, jonka pienin osa on k. Vastaavasti, jos luvun $n-k$ ositukseen, jonka pienin osa on k, lisätään yksi k-osa, saadaan luvun n ositus, jossa on vähintään kaksi k-osaa. Tähän luokkaan kuuluu siis $s_k(n-k)$ ositusta.

Koostukoon toinen luokka niistä luvun n osituksista, joissa on täsmälleen yksi k-osa. Jos tähän k-osaan lisätään luku 1, saadaan luvun $n+1$ ositus, jonka pienin osa on $k+1$. Sama voidaan tehdä myös toisin päin. Luvun $n+1$ ositus, jonka pienin osa on $k+1$, muuntuu luvun n ositukseksi, jonka pienin osa on k, kun sen pienimmästä osasta, luvusta $k+1$, vähennetään luku 1. Tällöin uudessa osituksessa on täsmälleen yksi k-osa. Näin ollen toisessa luokassa on $s_{k+1}(n+1)$ ositusta.

Näihin kahteen luokkaan kuuluvat kaikki luvun n ositukset, joiden pienin osa on k. Näin ollen näihin luokkiin kuuluvien ositusten summa on yhtä suuri kuin $s_k(n)$ eli $s_k(n) = s_k(n-k) + s_{k+1}(n+1)$. Lause on näin todistettu. □

Esimerkki 2.8. Tehdään esimerkki todistuksen kulkua seuraten. Valitaan $n = 4$ ja $k = 1$, ja siis $s_1(4) = 3$. Nyt todistuksessa määriteltyyn ensimmäiseen luokkaan kuuluvat ne luvun 4 ositukset, joissa on vähintään kaksi 1-osaa, eli ositukset $2+1+1$ ja $1+1+1+1$. Jos näistä osituksista poistetaan yksi 1-osa, jää jäljelle ositukset $2+1$ ja $1+1+1$, jotka ovat luvun 3 ne ositukset, joiden pienin osa on 1, joten tässä luokassa on $s_1(4-1)$ ositusta.

Toiseen luokkaan kuuluvat ne luvun 4 ositukset, joissa on täsmälleen yksi 1-osa, eli ositus $3+1$. Jos tämän osituksen 1-osaan lisätään luku 1, saadaan ositus $3+2$, joka taas on luvun 5 se ositus, jonka pienin osa on 2, ja näin ollen tässä luokassa on $s_{1+1}(4+1)$ ositusta.

Nyt näihin kahteen luokkaan kuuluvat kaikki luvun 4 kolme ositusta, joiden pienin osa on 1, eli $s_1(4) = s_1(3) + s_2(5)$.

2.3 Itselleen transponoituvat ositukset

(Ks.[1, s. 18].) Osituksen sanotaan olevan itselleen transponoituva, jos se on itsensä duaali, eli osituksen Ferresin diagrammi on itsensä transpoosi. Tällaisia osituksia ovat esimerkiksi luvun 12 ositukset $6+2+1+1+1+1$,

$5+3+2+1+1$ ja $4+4+2+2$, joiden Ferresin diagrammit ovat

$$
\begin{array}{llllll}
* & * & * & * & * & * \\
* & * & & & & \\
* & & & & & \\
* & & & & & \\
* & & & & & \\
* & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
* & * & * & * & * \\
* & * & * & & \\
* & * & & & \\
* & & & & \\
* & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
* & * & * & * \\
* & * & * & * \\
* & * & & \\
* & * & &
\end{array}
$$

On olemassa luonnollinen muunnos itselleen transponoituvista osituksista sellaisiin osituksiin, joiden osat ovat erisuuria ja parittomia. Tämä muunnos voidaan todentaa Ferresin diagrammien avulla. Tarkastellaan esimerkkinä edellistä, luvun 12 ositusta $4+4+2+2$. Yhdistetään ensin sen ensimmäisen rivin ja ensimmäisen sarakkeen pisteet (mustat pisteet alla olevassa kuvassa) ja luodaan niistä uusi rivi. Tämän jälkeen yhdistetään ne pisteet, jotka ovat jäljellä toisesta rivistä ja toisesta sarakkeesta (valkoiset pisteet alla olevassa kuvassa), ja luodaan niistä toinen uusi rivi. Jos pisteitä olisi enemmän, jatkettaisiin samalla tavalla, kunnes kaikki pisteet olisi käytetty. Koska itselleen transponoituvat ositukset ovat symmetrisiä luode–kaakko -suuntaisen akselin suhteen, ovat yhdistettävät rivi ja sarake aina saman mittaisia, ja koska ne jakavat yhden yhteisen pisteen, on muodostetun uuden rivin pituus aina kaksi kertaa alkuperäisen rivin pituus, josta vähennetään yksi. Tällöin uusien rivien pituus on aina myös pariton. Uudet rivit ovat aina myös eripituisia, sillä kaikissa yhdistettävissä riveissä ja sarakkeissa on aina vähemmän pisteitä kuin edellisissä, koska jokainen rivi vie yhden pisteen seuraavasta sarakkeesta ja jokainen sarake ve yhden rivin seuraavasta rivistä.

$$
\begin{array}{llll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \circ & \circ & \circ \\
\bullet & \circ & & \\
\bullet & \circ & &
\end{array}
\quad \mapsto \quad
\begin{array}{lllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & &
\end{array}
$$

Käänteisesti, jos aloitetaan erillisistä parittomista osista koostuvan osituksen Ferresin diagrammista, voidaan jokainen rivi taivuttaa symmetriseksi suoraksi kulmaksi, ja nämä kulmat sopivat toistensa sisään muodostaen itselleen transponoituvan Ferresin diagrammin. Tämä bijektio todistaa yhtälön

$$p(n : \text{itselleen transponoituva}) = p(n : \text{osat erisuuria ja parittomia}).$$

2.4 Eulerin pentagonaalisten lukujen lause

Tässä alaluvussa tarkastellaan sen nimen mukaisesti Eulerin pentagonaalisten lukujen lausetta, jossa yhdistetään lukumäärällisesti toisiinsa luvun n parillisesta määrästä erisuuria osia ja parittomasta määrästä erisuuria osia koostuvat ositukset. Ennen varsinaista lausetta tarkastellaan lauseeseen liittyviä triangulaarisia ja pentagonaalisia lukuja. Tämä alaluku perustuu kokonaan lähteeseen [1, s. 25–27].

Määritelmä 2.6. *Triangulaarisia lukuja* ovat $1, 3, 6, 10, \ldots$, ja ne viittaavat pisteistä muodostuvien, kooltaan kasvavien kolmioiden pisteiden lukumäärään:

```
*     *        *           *
     * *      * *         * *
             * * *       * * *
                        * * * *
```

Täsmällisemmin sanoen j. triangulaarinen luku on $1+2+3+\cdots+j = \frac{j(j+1)}{2}$.

Määritelmä 2.7. *Pentagonaalisia lukuja* ovat $1, 5, 12, 22, \ldots$, ja ne viittaavat pisteistä muodostuvien, kooltaan kasvavien viisikulmioiden pisteiden määrään:

```
*     *        *           *
     * *      * *         * *
     * *     * * *       * * *
             * * *      * * * *
             * * *      * * * *
                        * * * *
                        * * * *
```

Nyt siis j. viisikulmio koostuu j. kolmiosta, joka on sellaisen suorakulmion päällä, jonka leveys on j ja korkeus $j-1$. Näin ollen j. pentagonaalinen luku on $\frac{j(j+1)}{2} + j(j-1) = \frac{j(3j-1)}{2}$.

Kun määritelmän 2.7 viisikulmiot käännetään sivuttain ja tasataan kolmioiden pisteet suoriksi riveiksi, saadaan seuraavanlaisia Ferresin diagrammeja:

```
*   * * *   * * * * *   * * * * * * *
    * *     * * * *     * * * * * *
            * * *       * * * * *
                        * * * *
```

Nämä ovat seuraavien, erisuurista osista koostuvien ositusten, Ferresin diagrammeja: $1, 3+2, 5+4+3, 7+6+5+4$, jne. Nämä ositukset esiintyvät erityistapauksina seuraavassa Eulerin pentagonaalisten lukujen lauseen todistuksessa. Eulerin pentagonaalisten lukujen lause sanoo, että luvun n sellaisia osituksia, jotka koostuvat parillisesta määrästä erisuuria osia, on yhtä paljon kuin luvun n osituksia, jotka koostuvat parittomasta määrästä erisuuria osia, paitsi jos n on pentagonaalinen luku $n = (j(3j \pm 1)/2$, jolloin parittomaan erisuurista osista koostuvien ositusten lukumäärään lisätään $(-1)^j$.

Lause 2.10 (Eulerin pentagonaalisten lukujen lause)**.**

$$\begin{aligned} &p(n : \textit{parillinen määrä erisuuria osia}\ ) \\ &= p(n : \textit{pariton määrä erisuuria osia}\ ) + e(n), \end{aligned}$$

missä

$$e(n) = \begin{cases} (-1)^j, & \textit{kun } n = \frac{j(3j\pm 1)}{2}, \quad j \in \mathbb{Z} \\ 0, & \textit{muulloin.} \end{cases}$$

Todistus. Etsitään bijektio niiden luvun n ositusten, joissa on parillinen määrä erisuuria osia, sekä niiden luvun n ositusten, joissa on pariton määrä erisuuria osia, välille. Tähän tarkoitukseen sopiva työkalu on kääntyvä muunnos, joka muuttaa osituksen osien lukumäärää yhdellä säilyttäen kuitenkin osien erisuuruuden. Tarkastellaan kolmen esimerkin avulla, mitä tapahtuu, kun poistetaan osituksen pienin osa, eli Ferresin diagrammissa alin rivi, ja jaetaan sen pisteet jäljelle jääneisiin riveihin yksi jokaiseen riivin. Siirtyviä osia kuvataan tässä mustilla pisteillä. Esimerkit ovat

$$(1) \qquad \begin{array}{lllllll} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * & & \\ \bullet & \bullet & & & & & \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{llllllll} * & * & * & * & * & * & * & \bullet \\ * & * & * & * & * & * & \bullet & \\ * & * & * & * & * & & & \end{array}$$

$$(2) \qquad \begin{array}{lllllll} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{llllllll} * & * & * & * & * & * & * & \bullet \\ * & * & * & * & * & * & \bullet & \\ * & * & * & * & \bullet & & & \end{array}$$

$$(3) \qquad \begin{array}{lllllll} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{llllllll} * & * & * & * & * & * & * & \bullet \\ * & * & * & * & * & * & \bullet & \\ \bullet & & & & & & & \\ \bullet & & & & & & & \end{array}$$

Tämä muunnos säilyttää osien erisuuruuden, jos rivejä on vähintään yhtä monta kuin pisteitä poistetussa osassa, kuten kohdissa (1) ja (2). Sen sijaan kohdassa (3), jossa siirtyviä pisteitä on enemmän kuin rivejä, osien erisuuruus ei säily. Muunnos ei tällaisenaan ole kuitenkaan kääntyvä edes kohdissa (1) ja (2), sillä niissä on lopputuloksena sama ositus. Tarvitaan siis lisämäärittelyjä.

Tehtäessä muunnosta vastakkaiseen suuntaan otetaan yhdet pisteet joistakin pisimmistä riveistä ja muodostetaan niistä uusi lyhyin rivi. Pisteitä voidaan poistaa niistä pisimmistä riveistä, jotka eroavat toisistaan yhden pisteen verran, aloittaen pisimmästä rivistä. Toisin sanoen, poistetaan oikeanpuoleisin vinorivi Ferresin diagrammista ja luodaan sen pisteistä uusi lyhin rivi:

$$\begin{array}{lllllll} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * & & \\ \bullet & \bullet & & & & & \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{llllllll} * & * & * & * & * & * & * & \bullet \\ * & * & * & * & * & * & \bullet & \\ * & * & * & * & * & & & \end{array}$$

Tarvitaan vielä sääntö, joka kertoo, milloin poistetaan lyhin rivi ja milloin oikeanpuoleisin vinorivi. Oikeanpuoleisimman vinorivin poisto tehdään silloin, kun se on lyhyempi kuin diagrammin lyhin rivi ja muulloin poistetaan lyhin rivi ja jaetaan sen pisteet muille riveille.

Jos diagrammin lyhin rivi on saman mittainen tai yhden pisteen pidempi kuin vinorivi ja lyhimmän rivin piste sisältyy vinoriviin, kuten seuraavissa diagrammeissa, ei muunnoksessa synny käypää Ferresin diagrammia, sillä osien erisuuruus ei säily.

$$
\text{(a)} \quad \begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & & \end{matrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{matrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & & \end{matrix}
$$

Tapauksessa (a) Ferresin diagrammi on pentagonaalista lukua 12 vastaava viisikulmio, jonka koko on $\frac{j(3j-1)}{2}$ pistettä ja jota tarkasteltiin aiemmin määritelmässä 2.7. Tapauksessa (b) viisikulmiolla on ylimääräinen sarake suorakulmio-osassaan, jolloin viisikulmion koko on $\frac{j(3j+1)}{2}$ pistettä. Lukuunottamatta näitä pentagonaalisia osituksia edellä kuvattu muunnos yhdistää pareiksi jokaisen luvun n osituksen, jossa on pariton määrä erisuuria osia ja jokaisen luvun n osituksen, joissa on parillinen määrä erisuuria osia. Näin ollen yhtälö

$$
\begin{aligned}
&p(n : \text{parillinen määrä erisuuria osia })\\
&= p(n : \text{pariton määrä erisuuria osia }) + e(n),
\end{aligned}
$$

jossa $e(n) = 0$, paitsi jos $n = \frac{j(3j\pm 1)}{2}$ jollakin kokonaisluvulla j, jolloin $e(n) = 1$ jos osien lukumäärä j on parillinen ja $e(n) = -1$ jos osien lukumäärä on pariton, on voimassa, ja Eulerin pentagonaalisten lukujen lause on todistettu.

$\square$

3 Ositusfunktioiden ylä- ja alarajoja

Tässä luvussa tarkastellaan rajoitettua ositusta vastaavan ositusfunktion $p_k(n)$ alarajaa sekä rajoittamatonta ositusta vastaavan ositusfunktion $p(n)$ ylä- ja alarajaa.

3.1 Funktion $p_k(n)$ alaraja

Tässä alaluvussa todistetaan matemaattista induktiota käyttäen epäyhtälö, joka antaa alarajan funktiolle $p_k(n)$. Todistuksen induktioaskeleessa tarvitaan lemman 3.1 epäyhtälöä.

Lemma 3.1. *Jos $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $a \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$ ja $s = int\left(\frac{a}{b}\right)$, niin*

$$
a^{m-1} + (a-b)^{m-1} + (a-2b)^{m-1} + \cdots + (a-sb)^{m-1} > \frac{a^m}{bm}.
$$

Todistus. Ks. [3, s. 40]. Todistuksessa käytetään integraalia. □

Lause 3.2. *Kaikilla k,n* $\in \mathbb{Z}^+$ *on voimassa*

$$p_k(n) \geq \frac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}. \tag{3.1}$$

Todistus. (Vrt.[3, s. 41].) Todistetaan, että epäyhtälö pätee kaikille $k \in \mathbb{Z}^+$ käyttämällä matemaattista induktiota. Perusaskeleessa (1°) osoitetaan ensin väite oikeaksi, kun $k = 1$. Sen jälkeen, induktioaskeleessa (2°), oletetaan, että epäyhtälö pätee, kun $k = m$ (induktio-oletus), ja lopuksi osoitetaan, että epäyhtälö pätee, kun $k = m + 1$ (induktioväite).
1° Perusaskel ($k = 1$)
Nyt epäyhtälön vasen puoli on $p_1(n)$, joka saa lemman 2.1 perusteella arvon 1. Epähtälön oikea puoli on $\frac{n^0}{0!1!}$, joka saa myös arvon 1. Epäyhtälö siis pätee, kun $k = 1$.
2° Induktioaskel
Induktio-oletus: Oletetaan, että epäyhtälö pätee, kun $k = m$, eli

$$p_m(n) \geq \frac{n^{m-1}}{(m-1!)m!}. \tag{3.2}$$

Induktioväite: Osoitetaan epäyhtälö oikeaksi arvolla $k = m + 1$. Lauseen 2.5 perusteella

$$p_{m+1}(n) = p_m(n) + p_m(n-(m+1)) + \cdots + p_m(n-s(m+1)), \tag{3.3}$$

jossa $s = \text{int}\left(\frac{n}{(m+1)}\right)$. Tähän kaavaan voidaan nyt soveltaa induktio-oletusta, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} p_{m+1}(n) &\geq \frac{n^{m-1}}{(m-1!)m!} + \frac{(n-(m+1))^{m-1}}{(m-1!)m!} + \cdots + \frac{(n-s(m+1))^{m-1}}{(m-1!)m!} \\ &= \frac{1}{(m-1)!m!}\left(n^{m-1} + (n-(m+1))^{m-1} + \cdots + (n-s(m+1))^{m-1}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sijoittamalla lemman 3.1 epäyhtälöön $a = n$ ja $b = m + 1$, saadaan

$$n^{m-1} + (n-(m+1))^{m-1} + \cdots + (n-s(m+1))^{m-1} > \frac{n^m}{m(m+1)}. \tag{3.5}$$

Nyt kaavojen (3.4) ja (3.5) perusteella

$$p_{m+1}(n) \geq \frac{1}{(m-1)!m!} \cdot \frac{n^m}{m(m+1)} = \frac{n^m}{m!(m+1)!},$$

eli epäyhtälö pätee myös kun $k = m+1$. Induktion perusteella epäyhtälö siis pätee kaikille $k \geq 1$. Lause on näin todistettu. □

3.2 Ositusfunktion $p(n)$ yläraja

Todistetaan ensin, että $p(n)$ kasvaa, kun n kasvaa. Käytetään todistuksessa apuna Ferresin diagrammeja.

Lause 3.3. *Kaikilla* $n \geq 2$

$$p(n) > p(n-1).$$

Todistus. (Vrt.[1, s. 19–20].) Verrataan esimerkiksi luvun 3 osituksia ja niiden Ferresin diagrammeja:

$$\begin{array}{l} * \\ * \\ * \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} * & * \\ * & \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} * & * & * \\ & & \\ & & \end{array}$$

luvun 4 ositusten Ferresin diagrammeihin:

$$\begin{array}{l} * \\ * \\ * \\ * \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} * & * \\ * & \\ * & \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} * & * & * \\ * & & \\ & & \\ & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} * & * \\ * & * \\ & \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{llll} * & * & * & * \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

Diagrammeista huomataan, että jokaista luvun 3 ositusta vastaa luvun 4 ositus, joka on saatu lisäämällä yksi piste diagrammin ensimmäisen sarakkeen viimeiseksi. Tämä pätee yleisemminkin, sillä jokaiselle luvun $n-1$ ositukselle löydetään vastaava luvun n ositus lisäämällä yksi piste diagrammin ensimmäisen sarakkeen alimmaiseksi. Vastaavasti, jokaisesta sellaisesta luvun n osituksesta, jossa alimmaisena on yksittäisen pisteen muodostama rivi, saadaan luvun $n-1$ ositus poistamalla tämä rivi. Nyt siis

$$p(n-1) = p(n : \text{vähintään yksi 1-osa})$$

ja tästä seurauksena

$$p(n) = p(n-1) + p(n : \text{ei yhtään 1-osaa}) > p(n-1) \quad \forall n \geq 2, \tag{3.6}$$

joten $p(n)$ on kasvava funktio. $\square$

Ositusfunktion $p(n)$ kasvuvauhtia voidaan arvioida esimerkiksi Fibonaccin lukujen avulla (ks.[1, s.21]). Fibonaccin luvut $F_0, F_1, F_2, \ldots$ märitellään rekursiivisesti kaavoilla

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \text{ja } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Jotta ositusfunktion $p(n)$ kasvuvauhtia voitaisiin arvioida Fibonaccin lukujen avulla, täytyy yhtälöstä (3.6) selvittää, millainen lukumäärä $p(n$: ei yhtään 1-osaa) on verrattuna lukumäärään $p(n-2)$. Ensin huomataan, että

$p(n-2) = p(n$:ainakin yksi 2-osa), sillä 2-osan lisääminen tai poistaminen on bijektio niiden osien välillä, joihin se kohdistuu. Toisaalta huomataan, että mikä tahansa ositus, jossa ei ole 1-osia, voidaan muuttaa sellaiseksi ositukseksi, jossa on vähintään yksi 2-osa hajottamalla pienin osa (joka on vähintään 2) yhteen 2-osaan ja nollaan tai useampaan 1-osaan.

Tarkastellaan esimerkkinä tilannetta, jossa $n = 6$. Luku $n-2$ on tällöin 4, ja sen ositukset ovat

$$\begin{array}{l} \ast \\ \ast \\ \ast \\ \ast \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast \\ \ast \\ \ast \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast\ \ast \\ \ast \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast\ \ast\ \ast \\ \\ \\ \end{array}$$

Nyt ensimmäinen bijektio, eli 2-osan lisääminen luvun $n-2$ osituksiin, muuttaa ne seuraavanlaisiksi:

$$\begin{array}{l} \ast\ \ast \\ \ast \\ \ast \\ \ast \\ \ast \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \\ \ast \\ \ast \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \\ \ast \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast\ \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \\ \\ \\ \end{array}$$

Kaikkien 1-osien ja yhden 2-osan yhdistäminen uudeksi pienimmäksi osaksi on mahdollista kaikille muille näistä diagrammeista, paitsi toiselle vasemmalta. Näin yhdistämällä saadaan luvun 6 ne neljä ositusta, joissa ei ole 1-osia:

$$\begin{array}{l} \ast\ \ast\ \ast\ \ast\ \ast\ \ast \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast\ \ast \\ \ast\ \ast\ \ast \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ast\ \ast\ \ast\ \ast \\ \ast\ \ast \\ \end{array}$$

Näistä diagrammeista nähdään, että

$$p(n-2) = P(n : \text{ei yhtään 1-osaa}) + p(n-2 : \text{pienin ei 1-osa} < 2 + |\text{1-osat}|), \tag{3.7}$$

jossa viimeinen termi on aina ei-negatiivinen. Nyt yhtälöistä (3.6) ja (3.7) seuraa Fibbonaccin lukujen määritelmän kaltainen epäyhtälö

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2), \quad \text{kun } n \geq 2. \tag{3.8}$$

Nyt voimme todistaa ositusfunktion $p(n)$ ylärajan matemaattista induktiota käyttäen.

Lause 3.4. *Kaikilla $n \geq 0$, ositusfunktio $p(n)$ on pienempi tai yhtä suuri kuin $(n+1)$. Fibonaccin luku F_{n+1}, eli*

$$p(n) \leq F_{n+1}.$$

Todistus. (Vrt.[1, s. 22].)
1° Perusaskel
Osoitetaan, että väite pätee, kun $n = 0$ ja $n = 1$. Nyt $p(0) = F_1 = p(1) = F_2 = 1$, joten väite pätee, kun $n = 0$ ja $n = 1$.
2° Induktioaskel
Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaikille $n < k$, kun $k \geq 2$. Oletetaan siis, että $p(k) \leq F_{k+1}$, jolloin erityisesti $p(k-1) \leq F_k$ ja $p(k-2) \leq F_{k-1}$. Nyt

$$
\begin{aligned}
&\text{(3.8)} && p(k) \leq p(k-1) + p(k-2) \\
&\text{(induktio-oletus)} && \quad\;\; \leq F_k + F_{k-1} \\
&(F_k\text{:n määritelmä)} && \quad\;\; = F_{k+1}
\end{aligned}
$$

Induktion perusteella väite pätee aina, kun $n \geq 0$. □

3.3 Ositusfunktion $p(n)$ alaraja

Funtion $p(n)$ alarajaa määritettäessä käytetään Stirlingin approksimaatiota luvulle $n!$. Sen todistus kuitenkin sivuutetaan tässä yhteydessä, sillä todistuksessa käytetään analyysin työkaluja, joihin perehtyminen ei tässä ole tarkoituksenmukaista. Stirlingin aproksimaatiota käsiteltäessä on lisäksi tarpeen määritellä relaatio $f(n) \sim g(n)$.

Määritelmä 3.1. (Ks.[3, s. 44].) Relaatio $f(n) \sim g(n)$ funkioiden f ja g välillä tarkoittaa, että nämä funktiot ovat *asymptoottisesti yhtäsuuret*, eli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Lause 3.5 (Stirlingin approksimaatio kertomalle $n!$)**.**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Todistus. (Ks.[3, s. 47–52].) Sivuutetaan. □

Lemma 3.6. *(Vrt.[3, s.47] harj 4.1.2.) Kun f ja g ovat sellaisia funktioita, että $f(n) \sim g(n)$ ja g ei voi saada arvoa 0, on olemassa sellainen vakio C, että aina, kun $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f(n)| < C\,|g(n)|\,.$$

Todistus. (Ks.[3, s. 221–222]). Sivuutetaan. □

Seuraavaksi etsitään alaraja funktiolle $p(n)$. (Ks.[3, s. 55–57].) Stirlingin approksimaatiosta (lause 3.5) ja lemmasta 3.6 seuraa, että on olemassa sellainen vakio C, että kun $n \in \mathbb{N}$, niin

$$n! < C\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Käytetään apuna lausetta 3.2, sillä sopivalla k:n valinnalla sen avulla voidaan löytää alaraja funktiolle $p(n)$. Nyt

$$\begin{aligned}\frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!} &= \frac{kn^{k-1}}{(k!)^2} \\ &\geq \frac{kn^{k-1}}{C^2\left(\frac{k}{e}\right)^{2k}2\pi k} \\ &= \frac{n^{k-1}e^{2k}}{2\pi C^2k^{2k}}.\end{aligned}$$

Nyt lauseesta 3.2 seuraa, että kaikilla niillä $k \in \mathbb{N}$, joilla $p(n) \geq p_k(n)$, on voimassa epäyhtälö

$$p(n) \geq \frac{n^{k-1}e^{2k}}{2\pi C^2k^{2k}} = \left(\frac{1}{2\pi nC^2}\right)\frac{n^k e^{2k}}{k^{2k}}. \tag{3.9}$$

Valitaan nyt k siten, että epäyhtälön (3.9) oikean puolen tulontekijä $\frac{n^k e^{2k}}{k^{2k}}$ saa mahdollisimman suuren arvon. Lasku sivuutetaan, mutta kun $x > 0$, funktio

$$f(x) = \frac{n^x e^{2x}}{x^{2x}}$$

saa suurimman arvonsa, kun $x = \sqrt{n}$. Koska epäyhtälössä (3.9) luvun k pitää olla kokonaisluku, valitaan

$$k = \text{int}(\sqrt{n}).$$

Tästä seuraa, että $\sqrt{n} - 1 < k$ ja $k^2 \leq n$. Tällöin

$$\frac{n^k e^{2k}}{k^{2k}} > \frac{(k^2)^k e^{2(\sqrt{n}-1)}}{k^{2k}} = \frac{e^{2\sqrt{n}}}{e^2}.$$

Nyt epäyhtälön (3.9) nojalla, kun $n \in \mathbb{N}$,

$$p(n) > \frac{1}{2\pi C^2 e^2}\left(\frac{e^{2\sqrt{n}}}{n}\right).$$

Tämä funktion $p(n)$ alaraja on melko karkea arvio, sillä se on löydetty yksinkertaisilla menetelmillä. Ositusfunktion $p(n)$ arvoille on kuitenkin olemassa hyvinkin tarkka, *Hardy-Ramanujan -kaava*, jonka ensimmäisestä termistä tekijät johtivat asymptoottisen kaavan funktiolle $p(n)$:

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{e^{\pi\sqrt{(2/3)n}}}{n}\right).$$

Varsinainen *Hardy-Ramanujan -kaava* koostuu useasta termistä, ja sen antamasta lukumäärän $p(n)$ approksimaatiosta käytetään lyhennettä $HR_k(n)$. Hardy ja Ramanujan todistivat, että kaikille positiivisille realiluvuille a on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N, että kaikilla $n \geq N$,

$$p(n) = \text{int}\,(HR_k(n)),$$

missä $k = \text{int}(a\sqrt{n})$ ja HR_k tarkoittaa k ensimmäisen termin summaa Hardy-Ramanujan kaavassa. Seuraavaksi esitetään taulukoituna joidenkin luvun n ositusten laskettuja sekä HR_2 kaavan avulla approksimoituja lukumääriä.

n	$p(n)$	$HR_2(n)$
1	1	$1,04038$
7	15	$15,04265$
10	42	$42,06952$
50	204226	$204226,7970$
100	190569292	$190569293,7$

Taulukko 1: Hardy–Ramanujan approksimaatiota lukumääräfunktiolle $p(n)$.

Taulukosta voi huomata, että esimerkiksi $p(50) = \text{int}(HR_2(50))$.
(Ks.[3, s. 73–75].)

4 Kokonaislukujen ositusten esittäminen generoivien funktioiden avulla

Tässä luvussa tarkastellaan kokonaislukujen ositusten esittämistä generoivien funktioiden avulla. Samalla johdetaan lukujonon $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ generoiva funktio, jonka esitys tunnetaan myös Eulerin lauseena. Leonhard Euler oli sveitsiläinen matemaatikko, joka kehitti kyseisen generoivan funktion. Tässä luvussa tarkastellaan myös Eulerin identiteettiä, joka osoittaa, että kokonaisluvulla on yhtä paljon osituksia, joiden osat ovat erisuuria, kuin osituksia, joiden osat ovat parittomia.

4.1 Määritelmä

(Vrt.[2, s. 32–37].) Lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ generoiva funktio on

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Jonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ generoivasta funktiosta voidaan myös käyttää merkintää $A(x)$ (vrt.[3, s. 63]), eli

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{4.1}$$

Symbolille x ei anneta lukuarvoja, vaan symbolin x potenssi kertoo sen kertoimen paikan lukujonossa. Generoiva funktio on siis lukujonon uudenlainen esitysmuoto, jota on joissakin tilanteissa helppo käsitellä.

Jos lukujonon jokin jäsen $a_k = 0$, niin termi jätetään kaavan (4.1) oikeanpuoleisesta lausekkeesta pois, ja jos $a_k = 1$, niin merkitään $a_k x^k = x^k$. Esimerkiksi jonon $(5, 3, 1, 0, 2, 0, 0, ...)$ generoiva funktio on $5+3x+x^2+2x^3$.

4.2 Eulerin lause ja Eulerin identiteetti

Tarkastellaan tuloa

$$(*) \qquad (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)\cdots$$

joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$(4.2) \qquad \left(\sum_{c_1=0}^{\infty} x^{c_1}\right)\left(\sum_{c_2=0}^{\infty} x^{2c_2}\right)\cdots\left(\sum_{c_k=0}^{\infty} x^{kc_k}\right)\cdots$$

Tarkastellaan esimerkiksi termiä x^4. Jos valitaan x^2 ensimmäisistä suluista, x^2 toisista suluista ja 1 lopuista, muodostuu yhden kerran termi x^4. Voidaan myös valita termi x^4 toisista suluista, ja 1 kaikista muista, jolloin saadaan eri tavalla yhden kerran termi x^4. Merkitköön tulon $(*)$ k. suluista valitun polynomin $1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots$ termit luvun k esiintymiskertoja osituksessa. Jos valitaan monomi x^{kc_k} k. suluista, luku k esiintyy osituksessa c_k kertaa. Jokainen erilainen monomien valinta lisää kertoimen x^n määrää yhdellä, ja jokainen näistä on muotoa $x^{1c_1}\cdot x^{2c_2}\cdot x^{3c_3}+\cdots = x^{c_1+2c_2+3c_3+\cdots}$. Edellä esitetty tapa on siis vain toisenlainen tapa merkitä lukujen osituksia. Tätä voi havainnollistaa esimerkiksi esittämällä ositus $24 = 5+4+4+3+2+2+2+1+1$ tavalla $24 = 5(1)+4(2)+3(1)+2(3)+1(2)$.(Vrt.[4, s. 6–7], [2, s. 32–37]).

Esimerkki 4.1. (Vrt.[2, s. 36].) Luku c_k on siis luvun k lukumäärä jossain luvun n osituksessa. Nyt $p(n)$ on yhtälön

$$n = 1c_1+2c_2+\cdots+nc_n, \quad c_1, c_2, \ldots, c_n \geq 0,$$

ratkaisujen lukumäärä.

Olkoon $n = 4$. Nyt siis $4 = 1c_1+2c_2+3c_3+4c_4$, jonka ratkaisut voivat olla

$$\begin{aligned} 4 &= 1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 0 \\ &= 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 0+4\cdot 0 \\ &= 1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot 0+4\cdot 0 \\ &= 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 0 \\ &= 1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 1 \end{aligned}$$

Erilaisia ratkaisuja on siis viisi kappaletta, ja näin ollen $p(4) = 5$.

On siis löydetty bijektio niiden monomien, joiden tulo on x^n, valinnan tulosta $(*)$ ja luvun n ositusten välillä. Olkoon n nyt kiinteä. Etsitään $p(n)$ generoivan funktion avulla. Koska luku 1 voi esiintyä osituksessa korkeintaan n kertaa, niin kaavan 4.2 summa yli indeksin c_1 voidaan rajoittaa arvoihin $c_1 = 0, 1, \ldots, n$. Yleisemmin summa yli indeksin c_k voidaan rajoittaa arvoihin $c_k = 0, 1, \ldots, \mathrm{int}\left(\frac{n}{k}\right)$. Jos erikoisesti $k \geq n+1$, niin $c_k = 0$, jolloin summat saavat arvon 1, ja ne voidaan jättää tulosta pois. Nyt siis $p(n)$ on polynomin

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{c_k=0}^{int\left(\frac{n}{k}\right)} x^{kc_k} \right) \tag{4.3}$$

potenssin x^n kerroin.

Esimerkki 4.2. (Ks.[2, s. 37].) Olkoon $n = 3$. Silloin 4.3 on muotoa

$$\prod_{k=1}^{3} \left(\sum_{e_k=0}^{int\left(\frac{3}{k}\right)} x^{ke_k} \right) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2)(1 + x^3). \tag{4.4}$$

Kun tulo kerrotaan auki, saadaan

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7 + x^8,$$

joten, koska potenssin x^3 kerroin on 3, $p(3) = 3$.

Kaavan (4.4) oikean puolen termeistä ensimmäisen potenssit kertovat ykkösten määrän, toiset kakkosten ja kolmannet kolmosten määrän osituksessa, ja potenssien summaksi tulee aina n, joka tässä tapauksessa on siis 3. Luvun 3 ositusta $1 + 1 + 1$ vastaa siis kertolasku $x^3 \cdot 1 \cdot 1$, ositusta $1 + 2$ kertolasku $x \cdot x^2 \cdot 1$ ja ositusta 3 kertolasku $1 \cdot 1 \cdot x^3$.

Tulosta $(*)$ voidaan huomata, että jokainen tulontekijä on geometrinen sarja, jonka suhdeluku on x^k, missä k on tulontekijän järjestysluku. Geometristen sarjojen summakaavan perusteella $(*)$ voidaan esittää muodossa

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots$$

Jos tätä tuloa käsitellään algebrallisesti, ei tarvitse pohtia sarjojen suppenemista.

Edellisten havaintojen perusteella saadaan Eulerin lause:

Lause 4.1 (Eulerin lause)**.** *(Vrt.[4, s. 7], [2, s. 38].)*

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &=^{def} \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n. \end{aligned}$$

Määritelmä 4.1. Merkintä $p_d(n)$ tarkoittaa sellaisten luvun n ositusten lukumäärää, joiden kaikki osat ovat erisuuria.

Esimerkki 4.3. (Vrt. [2, s. 38] Esimerkki 8.4.3, [1, s. 43–44].) Etsitään jonon $\{p_d(n)\}$ generoiva funktio. Nyt voidaan kaavan $(*)$ k. suluista valita vain osat 1 tai x^k, jolloin luvun k kerroin on nolla tai yksi ja tätä lukua esiintyy osituksessa korkeintaan sallitun yhden kerran. Jonon $\{p_d(n)\}$ generoivaksi gunktioksi muodostuu siis

$$P_d(x) = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^k)\dots = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$$

Esimerkki 4.4. (Vrt. [2, s. 38] harj.) Etsitään generoivan funktion avulla luvun 7 ne ositukset, joiden osat ovat erisuuria. Tarvittava generoivan funktion osa on

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{7} p_d(n)x^n &= \prod_{k=1}^{7}(1+x^k)\\ &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7).\end{aligned}$$

Mahdollisia kertolaskuja ja niitä vastaavia osituksia ovat nyt

$$\begin{aligned}&1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot x^7, \text{ jota vastaa ositus } 7\\ &1\cdot x^2\cdot 1\cdot 1\cdot x^5\cdot 1\cdot 1, \text{ jota vastaa ositus } 2+5\\ &1\cdot 1\cdot x^3\cdot x^4\cdot 1\cdot 1\cdot 1, \text{jota vastaa ositus } 3+4\\ &x\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot x^6\cdot 1, \text{ jota vastaa ositus } 1+6\\ &x\cdot x^2\cdot 1\cdot x^4\cdot 1\cdot 1\cdot 1, \text{ jota vastaa ositus } 1+2+4\end{aligned}$$

Määritelmä 4.2. Merkintä $p_o(n)$ tarkoittaa luvun n sellaisten ositusten lukumäärää, joissa kaikki osat ovat parittomia.

Esimerkki 4.5. (Vrt. [2, s. 38] Harj.(h).) Etsitään jonon $\{p_o(n)\}$ generoiva funktio. Tulosta $(*)$ voidaan nyt valita vain ne sulut, joiden järjestysluku on pariton, jolloin jonon $\{p_o(n)\}$ generoivaksi funktioksi muodostuu

$$P_o(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)\dots = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}}.$$

Esimerkki 4.6. Etsitään generoivan funktion avulla luvun 7 ne ositukset, joiden osat ovat parittomia. Tarvittava generoivan funktion osa on nyt

$$\sum_{n=0}^{7} p_o(n)x^n = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^3+x^6)(1+x^5)(1+x^7).$$

Mahdollisia kertolaskuja ja niitä vastaavia osituksia ovat nyt

$$
\begin{aligned}
&1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^7, \text{ jota vastaa ositus } 7\\
&x^2 \cdot 1 \cdot x^5 \cdot 1, \text{ jota vastaa ositus } 1+1+5\\
&x \cdot x^6 \cdot 1 \cdot 1, \text{jota vastaa ositus } 1+3+3\\
&x^4 \cdot x^3 \cdot 1 \cdot 1, \text{ jota vastaa ositus } 1+1+1+1+3\\
&x^7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1, \text{ jota vastaa ositus } 1+1+1+1+1+1+1.
\end{aligned}
$$

Esimerkeistä 4.4 ja 4.6 voi huomata, että $p_d(7) = p_o(7)$. Seuraavaksi todistetaan, että tämä pätee kaikille luvuille n.

Lause 4.2 (Eulerin identiteetti)**.** *Luvun n erisuurista osista koostuvia osituksia on yhtä monta kuin luvun n parittomista osista koostuvia osituksia, eli*

$$p_d(n) = p_o(n).$$

Todistus. (Vrt.[1, s. 47].)

$$
\begin{aligned}
P_d(x) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)\\
&= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\dots\\
&= \left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^4}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^6}{1-x^3}\right)\left(\frac{1-x^8}{1-x^4}\right)\left(\frac{1-x^{10}}{1-x^5}\right)\left(\frac{1-x^{12}}{1-x^6}\right)\cdots\\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}\\
&= \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}}\\
&= P_o(x).
\end{aligned}
$$

Koska generoiville funktioille pätee $A(x) = B(x) \Leftrightarrow a_k = b_k$, kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$ (ks. [2, s.32] kaava 8.3), on kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$ voimassa myös $P_d(x) = P_o(x) \Leftrightarrow p_{d_k} = p_{o_k}$, missä p_{d_k} ja p_{o_k} ovat jonojen kertoimet. Lause on näin todistettu. □

Eulerin identiteetti voidaan todistaa myös bijektiivisesti. Tällöin etsitään muunnos, joka yhdistää jokaisen parittomista osista koostuvan osituksen johonkin erisuurista osista koostuvaan ositukseen. Todistetaan Eulerin identiteetti seuraavaksi bijektiivisesti.

Todistus. (Vrt.[4, s. 10].) Erisuurista osista koostuva ositus voidaan kirjoittaa muodossa

$$n = d_1 + d_2 + \cdots + d_k, \tag{4.5}$$

jossa jokainen kokonaisluku d_i voidaan ilmaista luvun 2 potenssien ja parittomien lukujen tulona. Näin ollen

$$n = 2^{a_1}O_1 + 2^{a_2}O_2 + 2^{a_3}O_3 + \cdots + 2^{a_k}O_k, \tag{4.6}$$

missä O_i on pariton luku. Jos parittomat luvut ryhmitellään, saadaan

$$n = (2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \cdots) \cdot 1 + (2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \cdots) \cdot 3 + (2^{\gamma_1} + 2^{\gamma_2} + \cdots) \cdot 5 + \cdots \tag{4.7}$$

$$= \mu_1 \cdot 1 + \mu_2 \cdot 3 + \mu_3 \cdot 5 \cdots \tag{4.8}$$

Jokaisessa sarjassa $(2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \cdots)$ eksponentit α_i ovat erisuuria, koska osituksessa 4.5 luvut olivat erisuuria, jolloin yhtälössä (4.7) saman parittoman luvun kerroin ei voi olla sama luvun 2 potenssi. Näin ollen tämä summa on jonkin luvun μ_j kaksikantainen esitys. Nyt nähdään, mitkä luvun n parittomista osista koostuvat ositukset vastaavat tämän bijektion mukaisesti erisuurista osista koostuvaa ositusta 4.5. Se on ositus, jossa on μ_1 kappaletta ykkösiä, μ_3 kappaletta kolmosia jne. □

Esimerkki 4.7. (Vrt. [4, s. 10].) Etsitään luvun 6 erillisistä osista koostuvan osituksen $6 = 3 + 2 + 1$ bijektiivinen vastinpari luvun 6 parittomista osista koostuvien ositusten joukosta. Siis

$$\begin{aligned} 6 &= 3 + 2 + 1 \\ &= 2^0 \cdot 3 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 \\ &= (2^0 + 2^1) \cdot 1 + (2^0) \cdot 3 \\ &= \text{kolme ykköstä ja yksi kolmonen} \\ &= 3 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

4.3 Lukujonojen $\{q_k(n)\}$ ja $\{p_k(n)\}$ generoivat funktiot

Määritelmä 4.3. Merkintä $\beta_k(n)$ tarkoittaa niiden luvun n ositusten lukumäärää, joissa on täsmälleen k osaa.

Määritelmä 4.4. Merkintä $\gamma_k(n)$ tarkoittaa niiden luvun n ositusten lukumäärää, joissa suurin osa on täsmälleen luvun k suuruinen.

Lause 4.3. *(Ks.[2, s. 39].) Luvun n täsmälleen k-osaisia osituksia on yhtä paljon kuin osituksia, joissa suurin osa on täsmälleen luvun k suuruinen, eli*

$$\beta_k(n) = \gamma_k(n) \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Todistus. (Ks. lause 2.3.) □

Etsitään jonon $\{\gamma_k(n)\}$ generoiva funktio (vrt. [2, s. 40] Esim. 8.4.6, [4, s. 13]). Nyt sallituissa luvun n osituksissa on välttämättä vähintään yksi k-osa, joten generoivan funktion k. termissä ei voi olla x:n potenssia 0, eli lukua 1, vaan ensimmäinen yhteenlaskettava on x^k. Tällöin muutettaessa summia geometristen sarjojen suppenemiskaavan avulla tulee osoittajaksi niin ikään x^k. Siis

$$\begin{aligned}\Gamma_k(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)\cdots(x^k + x^{2k} + \cdots)\\ &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdots\frac{x^k}{1-x^k}\\ &= \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}.\end{aligned}$$

Jonon $\{\gamma_k(n)\}$ generoiva funktio ei ole sama kuin jonon $\{q_k(n)\}$, sillä lukumäärään $q_k(n)$ sisältyvät myös ne ositukset, joissa suurin osa on pienempi kuin k, ja näin ollen generoivassa funktiossa voidaan vain rajoittaa mukaan otettavien osien kokoa. Jonon $\{q_k(n)\}$ generoivaksi funktioksi muodostuu siis

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} q_k(n)x^n &= \Big(1 + x + x^2 + \cdots\Big)\Big(1 + x^2 + x^4 + \cdots\Big)\cdots\Big(1 + x^k + x^{2k} + \cdots\Big)\\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)} = \prod_{t=1}^{k}\frac{1}{1-x^t}.\end{aligned}$$

Lauseesta 2.3 seuraa, että edellinen on myös jonon $\{p_k(n)\}$ generoiva funktio (vrt. [3, s. 63] esimerkki 4).

Lause 4.4. *(Vrt.[2, s. 39].) Jonon $\{q_k(n)\}$ generoiva funktio toteuttaa relaation*

$$(1 - x^k)Q_k(x) = Q_{k-1}(x).$$

Todistus. (Tekijän itse laatima.)

$$\begin{aligned}Q_k(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{k-1})(1-x^k)}\\ &= \frac{1}{1-x^k}\cdot\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{k-1})}\\ &= \frac{1}{1-x^k}\cdot Q_{k-1}(x),\end{aligned}$$

jolloin siis $(1 - x^k)Q_k(x) = Q_{k-1}(x)$. □

5 Rationaalilukujen luettelointia

Tässä kappaleessa tarkastellaan sitä, miten kokonaislukujen osituksia voidaan käyttää rationaalilukujen luettelemiseen. Koko kappale perustuu lähteeseen [4, s. 30–32].

Tarkastellaan seuraavanlaista positiivisista rationaaliluvuista koostuvaa jonoa:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, \frac{7}{5}, \ldots$$

Tällä jonolla on joitakin erikoisia ominaisuuksia:
1. Kunkin murtoluvun nimittäjä on seuraavan luvun osoittaja. Tällöin jonon n. luku on muotoa $\frac{b(n)}{b(n+1)}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, missä b on tietty ei-negatiivisten kokonaislukujen funktio, jonka arvot ovat

$$\{b(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, 4, 7, \ldots\}.$$

2. $b(n)$ on niiden tapojen lukumäärä, joilla voidaan ilmoittaa kokonaisluku n luvun 2 potenssien summana siten, että jokaista potenssia käytetään korkeintaan kahdesti. Esimerkiksi luku 5 voidaan ilmaista $5 = 4 + 1 = 2 + 2 + 1$, joten näitä tapoja on kaksi, ja $b(5) = 2$. Voidaan sanoa, että $b(n)$ on kokonaislukuvun n hyperbinääristen esitysten lukumäärä.
3. Funktion b peräkkäiset arvot ovat keskenään jaottomia, joten jokainen jonon rationaaliluku on sievennetyssä muodossa.
4. Jokainen postiviivinen rationaaliluku esiintyy jonossa täsmälleen yhden kerran.

Seuraavaksi unohdetaan hetkeksi edellinen tapa listata murtolukuja, ja kuvitellaan murtolukujen kasvavan murtolukupuussa, joka voidaan määritellä induktiivisesti seuraavasti:
1. $\frac{1}{1}$ on puun juuressa ja

2. jokaisella solmulla $\frac{i}{j}$ on kaksi lasta: vasemmanpuoleinen lapsi on muotoa $\frac{i}{i+j}$ ja oikeanpuoleinen muotoa $\frac{i+j}{j}$. Tällöin puulla on seuraavat, lauseina esitettävät ominaisuudet:

Lause 5.1. *Jokaisessa solmussa osoittaja ja nimittäjä ovat keskenään jaottomia.*

Todistus. Lause pätee triviaalisti luvulle $\frac{1}{1}$. Todistetaan lause vastaoletuksen avulla muille luvuille. Oletetaan, että luku r/s on korkein mahdollinen solmu, jolle lause ei päde. Jos r/s on vasemmanpuoleinen lapsi, on sen vanhempi muotoa $r/(s-r)$, joka ei myöskään olisi tällöin sievennetyssä muodossaan, ja olisi tällöin ylempänä kuin r/s, mikä on ristiriita. Jos r/s on oikeanpuoleinen lapsi, on sen vanhempi muotoa $(r-s)/s$, mikä johtaa samaan ristiriitaan. Tällöin luvun r/s osoittajan ja nimittäjän on siis oltava keskenään jaottomia. □

Lause 5.2. *Jokainen sievennetyssä muodossa oleva rationaaliluku esiintyy jossain solmussa.*

Todistus. (Poikkeaa lähteen todistuksesta.) Luku 1 esiintyy määritelmän mukaan. Todistetaan lause muille luvuille vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että luku r/s ei esiinny missään solmussa ja että se on näistä luvuista se (tai mahdollisesti yksi niistä), jolle $r + s$ on pienin. Nyt luku $r/(s - r)$ ei myöskään voi esiintyä puussa, sillä luku r/s olisi sen vasemmanpuoleinen lapsi, ja $r + (s - r) = s < r + s$. Tämä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan r/s oli se luku, jolle osoittajan ja nimittäjän summa on pienin. Näin ollen jokainen sievennetyssä muodossa oleva rationaaliluku esiintyy jossain solmussa. □

Lause 5.3. *Mikään sievennetyssä muodossa oleva rationaaliluku ei esiinny useammassa kuin yhdessä solmussa.*

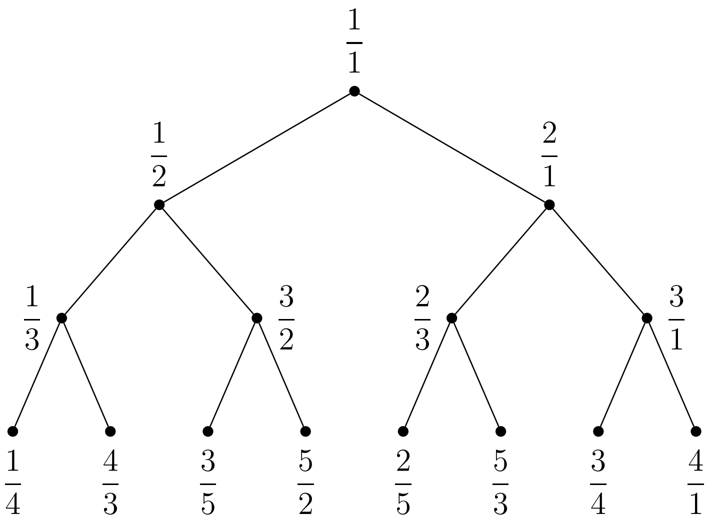
Todistus. (Poikkeaa lähteen todistuksesta.) Todistetaan lause vastaoletuksen avulla ensin luvulle 1 ja sitten muille luvuille. Luku 1 esiintyy vain puun juuressa. Jos se esiintyisi muualla, se olisi jonkun luvun r/s lapsi, jolloin sen pitäisi olla joko muotoa $r/(r + s)$ tai muotoa $(r + s)/s$, joista kumpikaan ei kuitenkaan voi olla luku 1, sillä r ja s ovat positiivisia kokonaislukuja.

Tarkastellaan sitten muita lukuja. Olkoon r/s useammin kuin kerran esiintyvistä luvuista se (tai mahdollisesti yksi niistä), jolle summa $r + s$ on pienin. Jos kaikki luvut r/s ovat oikeanpuoleisia lapsia, ovat niiden vanhemmat muotoa $(r - s)/s$. Tällöin kuitenkin $(r - s) + s = r < r + s$. Tämä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan luku r/s on se luku, jolle $r + s$ on pienin.

Jos kaikki luvut r/s ovat vasemmanpuoleisia lapsia, ovat niiden vanhemmat muotoa $r/(s-r)$, ja $r+(s-r) = s$. Koska $s < r+s$, päädytään samaan ristiriitaan kuin oikeanpuoleisten lasten tapauksessa.

Tarkastellaan vielä tilannetta, jossa useammin kuin kerran esiintyvistä luvuista r/s kaksi ovat eri vanhempien oikean- ja vasemmanpuoleiset lapset. Tällöin näistä vasemmanpuoleisen lapsen vanhempi on muotoa $r/(s - r)$ ja oikeanpuoleisen lapsen vanhempi muotoa $(r - s)/s$. Nyt näistä vanhemmista ensimmäisen nimittäjä ja jälkimmäisen osoittaja ovat toistensa vastalukuja, jolloin toinen niistä on negatiivinen. Tällöin koko tämä vanhempi olisi negatiivinen, mikä on ristiriita, sillä murtolukupuussa on vain positiivisia lukuja. Näin ollen mikään rationaaliluku ei voi esiintyä useammassa kuin yhdessä solmussa. □

Tästä seuraa, että kaikki positiiviset rationaaliluvut, joista jokainen esiintyy täsmälleen kerran, voidaan listata aloittamalla puun juuresta, luvusta $1/1$, ja lisäämällä sitten kunkin puun tason murtoluvut vasemmalta oikealle. Näin listaamallla saadaan murtolukujono, jossa edellisen luvun nimittäjä on seuraavan luvun osoittaja. Tämä on selvää, jos kaksi peräkkäistä lukua ovat samojen vanhempien vasemman- ja oikeanpuoleiset lapset. Jos edellinen luku taas on oikeanpuoleinen lapsi, sen nimittäjä on sama kuin sen vanhemman



Kuva 1: Murtolukupuu.

nimittäjä ja seuraavan luvun osoittaja on sama kuin tämän luvun vanhemman osoittaja. Näin ollen tämä tulos seuraa alaspäin menevällä induktiolla puun tasoilla. Jokaisen rivin oikeanpuoleisimmassa solmussa nimittäjänä on 1 ja vasemmanpuoleisimmassa solmussa osoittajana on niin ikään 1.

Listaamalla puun luvut saadaan lukujono, joka on muotoa $\{f(n)/f(n+1)\}_{n\geq 0}$, jollain funktiolla f. Nyt jonkin luvun $f(n)/f(n+1)$ lapset ovat $f(2n+1)/f(2n+2)$ ja $f(2n+2)/f(2n+3)$. Nyt murtolukupuun määritelmän mukaan on oltava

$$f(2n+1) = f(n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

ja

$$f(2n+2) = f(n) + f(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

Nyt yhtälöiden (5.1), (5.2) ja määritelmän $f(0) = 1$ avulla on määritelty funktio f kaikille ei-negatiivisille kokonaisluvuille.

Seuraavaksi pohditaan funktion $f(n)$ ja aiemmin esitellyn funktion $b(n)$ välistä yhteyttä. Todistetaan, että $f(n) = b(n)$. Kun $n = 0$, yhtälö on tosi, sillä määritelmän mukaan $f(0) = 1 = b(0)$. Oletetaan seuraavaksi, että yhtälö pätee kaikille kokonaisluvuille $0, 1, \ldots, 2n$. Nyt $b(2n+1) = b(n)$, koska jos meille annetaan hyperbinäärinen esitys $2n+1$, luvun 1 täytyy esiintyä siinä, jolloin vähentämällä luku 1 molemmilta puolilta ja jakamalla kahdella saadaan luvun n hyperbinäärinen esitys. Vastaavasti, jos tietyn luvun n hyperbinäärisen esityksen kaikki osat kerrotaan kahdella ja lisätään loppuun luku 1, saadaan luvun $2n+1$ esitys.

Myös $b(2n+2) = b(n) + b(n+1)$, sillä hyperbinäärinen esitys $2n+2$ sisältää joko kaksi tai ei yhtään ykköstä. Jos ykkösiä on kaksi, poistamalla ne ja jakamalla luvulla 2 saadaan luvun n esitys. Jos ykkösiä ei ole yhtään, jakamalla luvulla 2 saadaan luvun $n+1$ esitys. Nämä muunnokset ovat käännettävissä ja todistavat väitteen. Tästä seuraa, että $b(n)$ ja $f(n)$ täyttävät samat palautuskaavat ja niillä on samat alkuarvot, joten ne ovat samat kaikille ei-negaatiivisille kokonaisluvuille. Seuraava lause on siis voimassa.

Lause 5.4. *n. rationaaliluku sievennetyssä muodossaan voidaan kirjoittaa muodossa $b(n)/b(n+1)$, jossa $b(n)$ on ei-negatiivisen kokonaisluvun n hyperbinääristen esitysten lukumäärä. Tällöin $b(n)$ ja $b(n+1)$ ovat keskenään jaottomia, ja jokainen positiivinen sievennetty rationaaliluku esiintyy täsmälleen kerran jonossa $b(0)/b(1), b(1)/b(2), \ldots$*

Viitteet

[1] Andrews G.E., Eriksson K. *Integer partitions*. Cambridge University Press, 2004.

[2] Haukkanen P. *Kombinatoriikkaa*. Opetusmoniste. Tampereen yliopisto. URL http://mtl.uta.fi/Opetus/Kombinatoriikka/HaukkanenKomb.pdf [Viitattu 19.9.2011].

[3] Slomson A. *An Introduction to Combinatorics*. London: Chapman and Hall, 1991.

[4] Wilf H.S.*Lectures on Integer Partitions*. University of Pennsylvania, 2000. URL http://www.math.upenn.edu/~wilf/PIMS/PIMSLectures.pdf [Viitattu 19.9.2011].