TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Sakari Penttinen

Martingaalit diskreetti- ja jatkuva-aikaisessa arbitraasiteoriassa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2011

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

PENTTINEN, SAKARI: Martingaalit diskreetti- ja jatkuva-aikaisessa arbitraasiteoriassa

Pro gradu -tutkielma 67 s.

Matematiikka

Toukokuu 2011

Tiivistelmä

Tämä pro gradu -tutkielma käsittelee arvopaperijohdannaisten hinnoittelussa käytettyjä matemaattisia työkaluja ja näiden työkalujen johtamista. Erityisen tarkastelun kohteena on jatkuva-aikainen arbitraasiteoria Tomas Björkin kirjaa Arbitrage theory in continuous time mukaillen. Todennäköisyysteorian tuloksia käsitellään Leonid B. Koralovin ja Yakov G. Sinain kirjan Theory of Probability and Random processes avulla.

Tutkielmassa läpikäydään ensin diskreettiaikaisen arbitraasiteorian perusteita. Tämän jälkeen esitellään todennäköisyysteorian käsitteitä ja tuloksia, joiden avulla johdetaan stokastisen integraalin käsite ja tähän liittyvä Itô-lause. Lopuksi johdetaan arvopaperijohdannaisten hinnoittelussa yleisesti käytettävä Black-Scholes-malli. Tutkielman keskeisiä tarkastelun kohteita ovat martingaaliprosessit ja erityisesti jatkuva-aikaisten martingaaliprosessien erityistapaukset Wiener-prosessit.

Tutkielman päätuloksiin kuuluu lause, jonka mukaan normitetun markkinamallin kaikki arvopaperit ovat martingaaleja riskineutraalin todennäköisyysmitan suhteen. Lause johdetaan diskreettiaikaisen markkinamallin pohjalta ja sen käyttöä laajennetaan myös jatkuva-aikaiseen tapaukseen. Toisen päätuloksen mukaan arvopaperijohdannaisten hinnoitteluun ei vaikuta arvopaperin tuotto, vaan ainoastaan arvopaperin volatiliteetti, markkinoiden lyhyt korko ja jäljelläoleva aika johdannaisen suoritushetkeen. Näiden tulosten todistamisessa seurataan pääosin kirjan Arbitrage theory in continuous time esitystä.

Asiasanat: arbitraasi, martingaali, Itô-lause, Black-Scholes-malli

Sisältö

1 Johdanto

Tämän pro gradu -tutkielman aiheena on tutkia rahoitusalalla käytettävien arvopaperijohdannaisten hinnoittelua stokastisen integraalilaskennan näkökulmasta. Tutkielman päälähteinä on käytetty kolmea lähdeteosta. Tutkielman alkupuolella käsittelemme diskreettiaikaista arbitraasiteoriaa pääosin *Financial economics* -teoksen lähtökohdista. Myöhemmän jatkuva-aikaisen tarkastelun lähteenä on käytetty Tomas Björkin kirjaa *Arbitrage theory in continous time*. Tutkielman lähtökohtana oli täyttää Björkin kirjassa olevat aukot – stokastisen integraalilaskennan työkaluja käsitellään lähdeteoksessa melko pinnallisesti. Stokastisen integraalilaskennan teorian tukena on käytetty kirjaa *Theory of probability and random processes*. Tutkielman lopputuloksena johdetaan mm. stokastisen integraalilaskennan Itô-lause ja arvopaperijohdannaisten hinnoittelussa käytettävä Black-Scholes-yhtälö ratkaisuineen. Tässä tutkielmassa on keskitytty ennenkaikkea jatkuva-aikaisen arbitraasiteorian ymmärtämisessä tarvittavaan todennäköisyysteoriaan. Lukijan on syytä tuntea todennäköisyyslaskentaa vähintään aineopintotasoisesti. Lisäksi lukijalta edellytetään syventävien opintojen tasoista analyysin hallintaa sekä aineopintotasoisia lineaarialgebran opintoja. Samoin mikrotalousteorian opinnot auttavat hahmottamaan arbitraasiteoriaa taloustieteen kannalta.

2 Talousmatematiikan ja arbitraasiteorian peruskäsitteitä

2.1 Arbitraasi ja sen määritelmä

Arbitraasi ja sen vastakohta arbitraasittomuus ovat nykyaikaisen talousmatematiikan peruskäsitteitä. Mallinnettaessa esimerkiksi arvopaperijohdannaisten hintaprosesseja markkinoilta oletetaan arbitraasittomuutta. Käsittelemme tässä luvussa arbitraasin ja arbitraasittomuuden käsitteitä ja arbitraasittomiin markkinoihin littyviä matemaattisia perustuloksia.

Tarkastellaan arbitraasittomuutta yhden periodin mallissa. Merkitään sijoitussalkkua S pystyvektorilla $S(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) & S_2(t) & \dots & S_n(t) \end{bmatrix}^T$, missä $t \in \mathbb{N}$ on ajanhetki ja $S_n(t)$ on salkkuun sisältyvän arvopaperin n arvo ajanhetkellä t. Merkitään sijoitusstrategiaa vaakavektorilla

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_n \end{bmatrix}, \sum_{i=0}^{n} \theta_n = 1.$$

Sijoitussalkun mahdollisia tiloja hetkellä 1 kuvataan matriisilla $S(1, \Omega)$, missä matriisin pystyrivit ovat salkun arvovektoreita todennäköisyyden tilassa

$\omega_i \in \Omega$ ja vaakavektorit arvopaperin S_i arvot eri todennäköisyyden tiloissa matriisin

$$S(1,\Omega) = \begin{bmatrix} S_1(1,\omega_1) & S_1(1,\omega_2) & \dots & S_1(1,\omega_m) \\ S_2(1,\omega_1) & S_2(1,\omega_2) & \dots & S_2(1,\omega_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n(1,\omega_1) & S_n(1,\omega_2) & \dots & S_n(1,\omega_m) \end{bmatrix} \tag{1}$$

mukaisesti. Käytämme jatkossa yhtälön (1) mukaista lyhennettyä merkintää $S(1,\Omega)$ koko todennäköisyysmatriisista ja merkintää $S_n(1,\Omega)$ tai $S_n(1)$ vastaavasta pystyvektorista.

Määritelmä 2.1. Markkinoilla sanotaan olevan arbitraasin mahdollisuus, mikäli on olemassa sellainen sijoitusstrategia θ, että

$$\theta S(0) \leq 0 \text{ ja } P(\theta S(1,\Omega) > 0) = 1.$$

Arvopaperimarkkinoiden sanotaan olevan arbitraasittomat, mikäli määritelmän 2.1 mukaisia arbitraasimahdollisuuksia ei ole olemassa. Arbitraasia ei ole esimerkiksi velaksi sijoittaminen, mikäli sijoitustoimintaan sisältyy riski. Konkreettisesti arbitraasin mahdollisuus saattaa esiintyä johdannaiskaupan yhteydessä. Tällöin markkinoiden perusarvopapereihin on liitetty sijoitusinstrumentteja, esimerkiksi osto- tai myyntioptioita, jotka mahdollistavat arbitraasin. Arbitraasiteorian perusoletuksiin kuuluu oletus markkinoiden tehokkuudesta. Tällöin oletetaan muun muassa, että kaikki taloudellinen informaatio on toimijoiden saatavilla ja että toimijat pyrkivät maksimoimaan hyötynsä. Tämän seurauksena kysyntä ja tarjonta korjaavat markkinat arbitraasittomiksi. Realistisena voidaan pitää oletusta *keskivahvasti tehokkaista markkinoista*, joilla mikään julkinen tieto ei auta tekemään hyviä sijoituksia. Käytännössä rahoitustalous ja reaalitalous ovat eriytyneet toisistaan ja lukijan on syytä huomata, että pelkkä rahoitustalouden tarkastelu voi johtaa harhaan reaalitalouden suhteen. Esimerkkinä mainittakoon, että vuoden 2008 finanssikriisin aikaan monet vakuutusyhtiöt joutuivat pakkomyymään osakesijoituksiaan lakisääteisistä syistä. Tämä johti käytännössä arvopaperien ylitarjontaan ja jopa selkeään alihinnoitteluun. Kuitenkaan tämänkaltaisessa kurssiheilahtelussa ei ole kyse arbitraasista.

2.2 Hyöty ja hyötyfunktio

Toinen talousmatematiikan perustyökaluihin kuuluva käsite on hyödyn ja hyötyfunktion käsite. Rahan ja varallisuuden sekä niiden odotusarvojen mittaaminen johtaa nopeasti umpikujaan tarkasteltaessa arvopaperimarkkinoiden todellisuutta. Yksittäisten toimijoiden päätöksentekoa mallinnettaessa on usein oleellisempaa mitata toimijan hyötyä kuin puhtaita rahamääriä. Hyötyfunktio määritellään usein seuraavasti.

Määritelmä 2.2. Hyötyfunktio, eli utiliteettifunktio kuvaa toimijan saavuttamaa hyötyä suhteessa saatuun rahamäärään. Olkoon muuttuja x toimijan rahamäärä. Silloin toimijan hyödyn ilmaisee vähintään kahdesti derivoituva funktio $u(x)$. Hyötyfunktiolta oletetaan yleensä, että toimijan saama hyöty rahan suhteen on kasvava ja rajahyöty vähenevä. Toisin sanoen funktio $u(x)$ on vähintään kahdesti derivoituva ja $u'(x) > 0$ ja $u''(x) < 0$.

Malliin liittyvä olettamus on, että toimija pyrkii aina maksimoimaan hyötynsä tai mahdollisen tulevan hyödyn odotusarvon.Vähenevän rajahyödyn käsitteen avulla voidaan selittää useita taloudellisia ilmiöitä. Valaisemme tässä asiaa kahdella esimerkillä.

Esimerkki 2.1. Toimija A haluaa vakuuttaa omaisuuttaan rahamäärän m arvosta. Todennäköisyys, että omaisuus tuhoutuu vahinkotapauksessa on p, $(0 < p < 1)$. Vakuutusyhtiö B on valmis vakuuttamaan kyseisen omaisuuden täydestä arvosta hinnalla, joka sisältää vahinkokorvausten odotusarvon ja riski- ja kululisän c. Pelkän varallisuuden odotusarvon maksimoinnin näkökulmasta tarkasteltuna vakuutussopimuksen syntyminen ei ole mahdollista, koska riski- ja kululisällä kuormitettu vakuutusmaksu on mahdollisen vahinkomenetyksen odotusarvoa suurempi.

Oletetaan, että toimijan A hyötyfunktio on muotoa $u(x) = \sqrt{x}$. Tällöin $u'(x) = (1/2)x^{-1/2} > 0$ ja $u''(x) = (-1/4)x^{-3/2} < 0$. Vakuutussopimus syntyy, kun

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(u(\text{vakuutus})) &\geq \mathrm{E}(u(\text{ei vakuutusta})) \\
\sqrt{(1-p)m - c} &\geq p\sqrt{0} + (1-p)\sqrt{m} \\
\sqrt{(1-p)m - c} &\geq (1-p)\sqrt{m} \\
(1-p)m - c &\geq (1-p)^2 m \\
c &\leq ((1-p) - (1-p)^2)m \\
c &\leq (p - p^2)m.
\end{aligned}$$

Jos oletetaan toimijan A vakuutetun omaisuuden arvoksi $m = 10000$ ja vahingon todennäköisyydeksi $p = 0,1$ vakuutussopimussyntyy, kun riski- ja kululisä on korkeintaan

$$\begin{aligned}
c &= (0,1 - 0,1^2)10000 \\
c &= 900.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.2. Oletetaan, että henkilö A heittää kolikkoa. Kolikko on harhaton ja henkilö A saa 2^{n-1} euroa, kun ensimmäinen klaava tulee heitolla numero n. Peli siis pysähtyy ensimmäiseen klaavaan. Nyt voimme kysyä, mikä on niin sanottu reilu hinta tälle satunnaisesti määräytyvälle voitolle. Eli haluamme tietää, mistä rahasummasta henkilön A kannattaa luopua lantinheitosta ja ottaa mielummin kiinteä summa rahaa tilalle. Yhtenä mittarina voidaan käyttää lantinheitosta saatavan voiton odotusarvoa. Voiton V odotusarvo on:

$$E(V) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \infty$$

Jos lantinheitosta saatavan rahamäärän arvon mittarina käytetään rahamäärän odotusarvoa ei mikään kiinteä rahasumma riitä maksuksi. Tämä lähtökohta on tietysti arkiajattelun lähtökohdasta järjetön. Joku saattaisi hyvin kysyä, mitä henkilö A tekisi äärettömällä summalla rahaa. Edelläesitelty hyötyfunktio on väline, jolla arkiajattelu saadaan taipumaan matemaattisiin mallinnuksiin sopiviksi. Oletetaan ensin, että henkilön A hyötyfunktio on muotoa $u(x) = \sqrt{x}$, missä x on rahamäärä esimerkiksi euroina. Tällöin hyödyn odotusarvoksi saadaan:

$$E(u(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^{n-1}}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2}-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

Ylläolevan kaltaisen rajoittamattoman hyötyfunktion tapauksessa voidaan konstruoida stokastinen kassavirta, jonka antaman hyödyn odotusarvo on ääretön. Tälläinen tapaus on kuitenkin arkijärjen vastainen. Hyötyfunktiosta saadaankin realistisempi, mikäli hyötyfunktioksi valitaan rajoitettu funktio. Luvussa 3 esiteltävin termein voitaisiin sanoa, että $u(x) \in L^{\infty}$. Esimerkki tälläisestä funktiosta on $u(x) = 1 - e^{-ax}$, missä $a > 0$. Nyt hyöty on selvästikin rajoitettu välille $0 \leq u(x) < 1$. Tällöin myös $0 \leq \mathrm{E}(u(x)) < 1$.

Edelläolevan esimerkin kaltaisia konstruktioita on käytetty esimerkkinä äärettömään odotusarvoon liittyvistä paradokseista. Tämäntyyppisen esimerkin esitti Bernoulli jo muutama sata vuotta sitten. Kun tarkastellaan hyödyn odotusarvoa voiton odotusarvon sijaaan, ei olekaan enää, Bernoullin sanoin, paradoksaalista, että henkilö A vaihtaisi näennäisesti äärettömän arvokkaan kassavirran vaikka 20 euron varmaan tuloon.

2.3 Arbitraasi ja todennäköisyys

Tarkastelemme uudelleen kappaleessa 2.1 esitettyä arbitraasin määritelmää. Yksinkertaisessa yhden periodin ja kahden arvopaperin mallissa voidaan riskilliselle arvopaperille määrittää arbitraasiton hinta. Oletamme jokaisen arvopaperimallin sisältävän yhden ja vain yhden riskittömän arvopaperin. Tämän riskittömän arvopaperin tuotto on hetkellisesti deterministinen. Riskittömään arvopaperiin voidaan myös viitata nimityksellä korko. Esitämme tähän liittyen seuraavan määritelmän.

Määritelmä 2.3. Jokaista riskittömän arvopaperin sisältävää markkinamallia $\mathbf{S}(t)$ vastaa normitettu markkinamalli $\mathbf{Z}(t)$, missä $S_0(t)$ on riskitön arvopaperi ja

$$Z_n(t) = \frac{S_n(t)}{S_0(t)}.$$

Esimerkki 2.3. Oletetaan kahden arvopaperin markkinat, joilla

$$\mathbf{S}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{S}(1, \Omega) = \begin{bmatrix} 1+k & 1+k \\ a & y \end{bmatrix},$$

missä a ja y ovat sellaisia epänegatiivisia reaalilukuja, että $a < y$ ja k on riskittömän lyhyen koron arvopaperin tuottama korko. Tässä luvut a ja y ilmaisevat yksinkertaisesti arvopaperin arvonmuutosta alas tai ylös. Oletetaan, että malli on arbitraasiton. Silloin ei ole olemassa sellaista sijoitusstrategiaa, että $\theta_1 + \theta_2 \leq 0$ ja $\theta\mathbf{S}(1) > 0$. Valitaan $\theta_1 = -\theta_2$, $\theta_2 > 0$, jolloin sijoitussalkun $\mathbf{S}(0)$ arvo on

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & -\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \end{pmatrix} = \theta_1 S_1(0) - \theta_1 S_2(0).$$

Määritelmän 2.1 perusteella täytyy olla

$$P(\theta_1 S_0(1) - \theta_1 S_1(1) > 0) < 1 \text{ eli} \tag{2}$$

$$P(\theta_1 S_0(1) - \theta_1 S_1(1) \leq 0) > 0. \tag{3}$$

Koska $a < y$, ehdon (3) perusteella $P((a - (1+k)\theta_1) < 0$. Tästä saadaan helposti määriteltyä riskillisen arvopaperin S_1 minimituoton a ylärajaksi $a < 1+k$. Näin on todettu, että arbitraasittomilla markkinoilla riskillisen arvopaperin minimituoton tulee olla riskittömän arvopaperin tuottoa pienempi. Samalla tavoin saadaan laskettua riskillisen arvopaperin maksimituoton alarajaksi $y > 1+k$. Näin on saatu muodostettua riskillisen arvopaperin tuotolle rajat

$$a < 1 + k < y,$$
$$\text{eli } \frac{a}{1+k} < 1 < \frac{y}{1+k}.$$

Valaistaan asiaa seuraavaksi hieman konkreettisemmalla esimerkillä.

Esimerkki 2.4. Oletetaan seuraavanlainen, normitettu binomiaalinen markkinamalli.

$$\mathbf{S}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{S}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.8 & 1.4 \end{bmatrix}$$

Selvästikin markkinamalli on arbitraasiton. Markkinamalliin liittyvät todennököisyydet ovat

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} = 0.1 \text{ ja } P \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4 \end{bmatrix} = 0.9.$$

Laskemme tästä riskillisen arvopaperin S_1 tuoton odotusarvon.

$$E^P(S_1(1)) = 0.1 \cdot 0.8 + 0,9 \cdot 1.4 = 1.34$$

Käyttämällä luonnollista todennäköisyyttä riskillisen arvopaperin tuoton odotusarvo on korkeampi, mitä arvopaperin hinta hetkellä 0 antaisi odottaa. Voimme laskea niin sanotun *riskineutraalin* todennäköisyysjakauman Q arvopaperille S_1. Eli toisin sanoen laskemme, millainen todennäköisyysjakauma olisi, jos markkinoinatoimijat olisivat riskineutraaleja. Riskineutraalin toimijan hyötyfunktio on lineaarinen eli muotoa $u(x) = ax$, missä $a \in \mathbb{R}_+$.

$$E^Q(S_1(1)) = S_1(0)$$

$$\begin{cases} 0.8q^1 + 1.4q^2 = 1, q^1, q^2 \leq 0 \\ q^1 + q^2 = 1 \end{cases}$$

$$q^1 = \frac{2}{3} \text{ ja } q^2 = \frac{1}{3}$$

Tulemme seuraavassa kappaleessa todistamaan, että arbitraasittomuus on yhtäpitävää sen kanssa, että markkinoilla on olemassa sellainen todennäköisyysmitta Q, että $E^Q(\mathbf{S}(1)) = \mathbf{S}(0)$.

2.4 Arbitraasittomuus ja Farkas'n lemma

Arbitraasiteorian kannalta tärkeä tulos on lause, joka tunnetaan nimellä *Farkas'n lemma*. Ennen kuin esittelemme Lemman tarvitsemme avuksi *erottavan hypertason lauseen.*

Lause 2.1. *Oletetaan konveksi joukko $A \in \mathbb{R}^N$. Tällöin jokaiselle pisteelle $c \notin A$ on olemassa sellainen $N-1$-ulotteinen origon sisältävä hypertaso K, että jokaiselle pisteelle $a \in A$ pisteiden a ja c välinen jana $[a, c]$ leikkaa tason K. Toisin sanoen jokaiselle pisteelle c on olemassa sellainen origon sisältävä hypertaso K, joka jakaa avaruuden $\mathbb{R}^N$, että joukko A ja piste c ovat tason eri puolilla.*

Todistus. Valitaan sellainen piste $a' \in \bar{A}$, jolle etäisyys $d(a', c)$ on minimaalinen. Joukon A konveksiuden nojalla a' on yksikäsitteinen. Nyt voidaan valita sellainen hypertaso K, että $a' \in K$ ja $\vec{ac} \perp K$. Nyt selvästikin $d(a', c) = d(K, c)$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että on olemassa sellainen piste $b \in \bar{A}$, että $[b, c] \cap K = \emptyset$. Silloin konveksiuden nojalla $[a', b] \subset \bar{A}$. Nyt janalla $[a', b]$ on olemassa pisteen c projektio, eli toisin sanoen piste b', joka minimoi etäisyyden $d(b', c)$. Koska $[b', c] \perp [a', b']$ pitää paikkansa, että

$$d(a', c) = \sqrt{(d(a', b'))^2 + (d(b', c))^2} > d(b', c).$$

Tästä vastaoletuksesta seuraa looginen ristiriita ja siten alkuperäinen oletus on tosi. □

Lemmasta on monia erilaisia keskenään ekvivalentteja muotoja, joista esitämme nyt Tomas Björkin kirjassaan Arbitrage theory in continous time esittämän muodon.

Lause 2.2. *Oletetaan sellaiset k-paikkaiset pystyvektorit $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n$, että $\boldsymbol{d}_m \in \mathbb{R}^n_+$. Tällöin toinen ja vain toinen seuraavista ehdoista on voimassa.*

1. *On olemassa sellaiset positiiviset reaaliluvut $z_0, z_1, \ldots, z_n$, että*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{d}_0$$

2. *On olemassa sellainen vaakavektori h, että $h\boldsymbol{d}_0 < 0$ ja että jokaiselle $\boldsymbol{d}_m$ pätee $h\boldsymbol{d}_m \geq 0$.*

[1, s. 27]

Todistus. Määritellään uusi joukko K, jolle

$$K = \{\sum_{i=1}^{j} a_i d_i, a_i \geq 0, a_i \in \mathbb{R}_+\}.$$

Selvästikin K on origon sisältävä konveksi kartio. Nyt voimme käyttää avuksi edellä todistettua erottavan hypertason lausetta 2.1. Oletetaan ensin, että d_0 kuuluu joukkoon K. Silloin ensimmäinen tapaus pitää paikkansa. Oletetaan seuraavaksi, että d_0 ei kuulu joukkoon K. Valitaan nyt sellainen hypertaso A, että $d_0 \perp A$ ja sellainen vektori h, että A erottaa vektorit h ja d_0. Nyt selvästikin $hd_0 < 0$, mutta myös joukon K konveksiuden nojalla on oltava olemassa sellainen d_j, että $hd_j < 0$. Oletetaan seuraavaksi, että $d_0 \notin K$. Silloin on lauseen 2.1 perusteella olemassa joukon K ja vektorin d_0 erottava $N-1$-ulotteinen hypertaso B. Valitaan sellainen vektori h joukon K puolelta, että $h \perp B$. Nyt selvästikin $hd_0 < 0$, mutta jokaiselle d_i pätee $hd_i \geq 0$. □

Määrittelemme todennäköisyysmitan myöhemmissä luvuissa ja oletamme nyt diskreetin todennäköisyysmitan ominaisuudet tunnetuiksi. Kun lisäämme Farkas'n lemmassa esiteltyyn vektoriavaruuteen ulottuvuuden lisää sekä vektoriin $\mathbf{d}_0$ alkion $d_{0,0} = 1$ ja vektoreihin $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ alkion $d_{m,0} = (\sum_{i=1}^n z_i)^{-1}$, voimme samaistaa lemmassa käytetyn mallin arvopaperimarkkinamalliin. Tällöin

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{d}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(0) \text{ ja } \left[\begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n z_i)^{-1} \\ \mathbf{d}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n z_i)^{-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n z_i)^{-1} \\ \mathbf{d}_n \end{bmatrix} \right] = \mathbf{S}(1, \Omega).$$

Edelleen voimme merkitä

$$q_m = \frac{z_m}{\sum_{i=1}^n z_i}, \text{ jolloin } \sum_{i=1}^n q_i = 1 \text{ ja } q_m > 0.$$

Tämän perusteella voidaan todeta, että joukko $Q = \{\bigcup_{i=1}^n q_i\}$ on diskreetti todennäköisyysjakauma. Edelläesitetty arvopaperimarkkinamalliksi laajennettu vektorimalli toteuttaa edelleen Farkas'n lemman alkuedellytykset. Esitämme nyt seuraavan seurauslauseen.

Lause 2.3. *Yhden periodin markkinamalli on arbitraasiton, jos ja vain jos on olemassa sellainen todennäköisyysmitta Q, että*

$$\frac{E^Q(\boldsymbol{S}(1))}{S_0(1)} = \boldsymbol{S}(0).$$

Toisin sanoen, vastaava normitettu markkinamalli on arbitraasiton, jos ja vain jos on olemassa sellainen todennäköisyysmitta Q, että

$$E^Q(\boldsymbol{Z}(1)) = \boldsymbol{Z}(0).$$

Todistus. Totesimme aikaisemmin, että $S_0(1) = (\sum_{i=1}^n z_i)^{-1}$, missä z_i ovat Farkas'n lemmaan liittyvät positiiviset kertoimet. Arbitraasittomuuden perusteella on olemassa kertoimet $q_i = z_i/(\sum_{i=1}^n z_i)$. Selvästikin $\sum_{i=1}^n q_i = 1$. Kertoimet q_i ovat myös aidosti positiiviset, joten niitä voidaan käyttää todennäköisyysjakauman kertoimina. Tällöin arbitraasittomassa mallissa pätee

$$\frac{\sum_{i=1}^n q_i \mathbf{S}(1, \omega_i)}{1/\sum_{i=1}^n z_i} = \frac{\mathrm{E}^Q[\mathbf{S}(1)]}{S_0(1)} = \mathbf{S}(0)$$

$\square$

Menemällä vielä askelen pidemmälle voimme esittää lauseen 2.3 seuraavassa muodossa.

Lause 2.4. *Yhden periodin markkinamalli on arbitraasiton, jos ja vain jos on olemassa sellainen todennäköisyysmitta Q, jota käytettäessä kaikkien arvopapereiden normitetut hintaprosessit ovat martingaaleja.*

Lukijan on syytä huomata, että todennäköisyysmitta Q ei välttämättä ole yksikäsitteinen. Palaamme tähän tulokseen tarkemmin luvussa 3, kun olemme määritelleet martingaaliprosessin käsitteen.

2.5 Tilahintavektori

Käsittelemme seuraavaksi lyhyesti diskreettiaikaisessa arbitraasiteoriassa käytettyä apukäsitettä. Tilahinta-vektorin käsite on keskeisessä osassa kirjan *Financial economics* tarkasteluja. Suuressa osassa lähteitä tilahintavektori kuitenkin ohitetaan. Lukijan on syytä huomata, että *Financial economics* -kirjaan verrattuna kaikki matriisit ja vektorit ovat transponoituja.

Määritelmä 2.4. Äärellisessä tai korkeintaan numeroituvassa todennäköisyysavaruudessa voidaan määritellä *tilahinta-vektori*. Tilahinta-vektori on aidosti positiivinen pystyvektori Ψ, joka toteuttaa ehdon

$$S(0) = S(1)\Psi.$$

Arbitraasiteorian ensimmäinen päälause esitetään monesti tilahintavektorin avulla.

Lause 2.5. *Yhden periodin malli on arbitraasiton, jos ja vain jos mallissa on tilahintavektori.*

Todistus. Käytämme todistuksessa apuna Farkas'n lemmaa. Olemme edellä todenneet, että vektorit d_0 ja d_m voidaan samaistaa vektoreihin $S(0)$ ja $\mathbf{S}(1, \omega_m)$. Tällöin riittää todeta, että arbitraasittomilla markkinoilla on olemassa kertoimet z_i, eli tilahintavektori $\Psi = [z_1, \ldots, z_n]^T$. $\square$

Seuraava esimerkki osoittaa, että arbitraasittomilla markkinoilla voi olla useita tilahintavektoreita.

Esimerkki 2.5. Oletetaan yhden periodin markkinamalli, jolle

$$\mathbf{S}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 0.8 & 1.5 & 2.0 \\ 1.25 & 1.25 & 1.25 \end{bmatrix}.$$

Haluamme nyt tietää, mitkä kaikki vektorit Ψ toteuttavat yhtälön $\mathbf{S}(0) = \mathbf{S}(1)\Psi$. Toisin sanoen,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 1,5 & 2,0 \\ 1,25 & 1,25 & 1,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.6\Psi_1 + 1.0\Psi_2 + 2.1\Psi_3 = 1 \\ 1.2(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3) = 1 \end{cases}$$

Tällä yhtälöparilla on ratkaisu.

$$\begin{cases} \Psi_1 = t \\ \Psi_2 = 1 - 2.4t \\ \Psi_3 = 1.4t + 0,25 \end{cases} \tag{4}$$

Muistamme vielä lisäehdon, jonka mukaan tilahintavektorin tulee olla positiivinen ja asetamme parametrille t lisäehdot $0 < t < \frac{15}{28}$. Tällä lisäehdolla varustettuna ratkaisu (4) määrittelee kaikki tilahintavektorit Ψ, joilla ylläesitetty malli on arbitraasiton.

Tässä kyseisessä esimerkissä tilahintavektoreita ja sitä myötä riskineutraaleita todennäköisyysjakaumia on ääretön määrä.Nyt voimmekin muotoilla seuraavan lauseen.

Lause 2.6. *Markkinamallissa voi olla vain joko nolla, yksi tai ääretön kappaletta tilahintavektoreita.*

Todistus. Mikäli mallissa on arbitraasin mahdollisuus lauseen 2.4 mukaisesti markkinoilla ei voi olla tilahintavektoria. Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasittomat. Tällöin markkinoilla on vähintään yksi tilahintavektori. Oletetaan edelleen, että markkinoilla on vähintään kaksi erillistä tilahintavektoria Ψ_1 ja Ψ_2. Nyt pätee

$$S(1)\Psi_1 = S(0) = S(1)\Psi_2 \tag{5}$$

Valitaan nyt sellaiset vakiot α ja β, että $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ja $\alpha + \beta = 1$. Yhtälön (5) perusteella pätee

$$\alpha S(1)\Psi_1 + \beta S(1)\Psi_2 = S(0),$$
$$S(1)(\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2) = S(0).$$

Selvästikin vektorit $\Psi_\epsilon = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$ ovat positiivisia ja vakiot α ja β voidaan valita äärettömän monella tavalla. Tällöin vektorit Ψ_ϵ ovat markkinamallin tilahintavektoreita ja niitä on ääretön määrä. Itse asiassa meidän tulisi vielä osoittaa, että on olemassa markkinamalleja, joissa on vähintään kaksi tilahintavektoria. Tämä osa todistuksesta tulee osoitettua lauseen 2.8 todistuksessa. $\square$

2.6 Markkinoiden täydellisyys

Yhden periodin mallissa arvopapereiden hinnoitteluun vaikuttaa ratkaisevasti se, onko tilahintavektoreita yksi vai äärettömän monta. Esitämme seuraavaksi kirjan *Financial economics* mukaisen täydellisten markkinoiden määritelmän.

Määritelmä 2.5. Arbitraasittoman markkinamallin sanotaan olevan täydellinen, mikäli jokaiselle stokastiselle kassavirralle $X(1, \Omega)$ on olemassa sellainen sijoitusstrategia θ, että

$$\theta S(1, \Omega) = X(1, \Omega).$$

[2, s. 192]

Täydellisillä markkinoilla jokainen uusi arvopaperi voidaan siis replikoida käyttämällä muita arvopapereja. Tästä saamme helposti johdettua myös seuraavat lauseet.

Lause 2.7. *Jokaisella uudella arvopaperilla X on täydellisillä markkinoilla yksikäsitteinen arbitraasiton hinta.*

Todistus. Markkinoiden täydellisyyden perusteella on olemassa sellainen sijoitusstrategia θ, että

$$\theta S(1, \Omega) - X(1, \Omega) = \mathbf{0}.$$

Arbitraasittomuuden määritelmästä seuraa, että tällöin myös

$$\begin{aligned} \theta S(0) - X(0) &= 0, \\ \theta S(0) &= X(0). \end{aligned}$$

Arbitraasittomuuden perusteella tämä hinta on myös yksikäsitteinen. □

Lause 2.8. *Täydellisessä, arbitraasittomassa yhden periodin markkinamallissa on yksi ja vain yksi tilahintavektori.*

Todistus. Tarkastellaan markkinamallin hetkeä 1 kuvaavaa matriisia $\mathbf{S}(1, \Omega)$. Oletetaan, että mallissa on n kappaletta arvopapereita. Markkinoiden täydellisyyden perusteella jokainen uusi arvopaperi S_{n+1} voidaan replikoida. Toisin sanoen on olemassa sellainen lineaarikombinaatio arvopapereista $S_{i \leq n}$, että

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S_n(t, \Omega) = S_{n+1}(t, \Omega), \alpha \in \mathbb{R}, t \in \{0, 1\}.$$

Tämä on selvästikin yhtäpitävää sen kanssa, että matriisi $S(1, \Omega)$ on täyttä astetta ja siten myös kääntyvä. Arbitraasittomuuden perusteella voimme käyttää hyödyksi määritelmää 2.4 niin, että

$$
\begin{aligned}
S(1,\Omega)\Psi =& S(0),\\
S(1,\Omega)^{-1}S(1,\Omega)\Psi =& S(1,\Omega)^{-1}S(0),\\
\Psi =& S(1,\Omega)^{-1}S(0).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Edelläesitetyn perusteella yhtälön (6) oikea puoli on määritelty ja yksikäsitteinen. □

Voimme todeta vielä lisäksi, että normitetussa markkinamallissa täydellisillä markkinoilla on yksikäsitteinen lauseen 2.4 mukainen todennäköisyysmitta Q. Markkinoiden täydellisyyden käsitteleminen on mielekästä tietyissä erikoistapauksissa. Itse asiassa koko arbitraasiteorian ydinkysymyksiä on niin sanottujen arvopaperijohdannaisten hinnoittelu. Määrittelemme seuraavaksi eurooppalaisen option.

Määritelmä 2.6. Eurooppalaisen osto-option K haltijalla on oikeus ostaa yksi kappale optioon liitettyä arvopaperia S ajan hetkellä T ennaltamäärättyyn hintaan τ . Eurooppalaisen myyntioption P haltijalla on oikeus myydä yksi kappale optioon liitettyä arvopaperia S ajan hetkellä T hintaan τ.

Arvopaperiin $S_1(t)$ liitetyn eurooppalaisen osto-option K arvo päättymishetkellä T on $\max(\tau - S_1(T), 0)$ ja vastaavasti myyntioption P arvo $\max(S_1(T) - \tau, 0)$. Eurooppalaisten optioiden matemaattiseen teoriaan liittyvät seuraavat reunaehdot:

- Arvopapereilla voidaan käydä vapaasti kauppaa millä tahansa määrillä.
- Käsitellyllä aikavälillä arvopapereille ei makseta osinkoja tai kuponkimaksuja.
- Myynti- ja ostotapahtumista ei makseta välityspalkkioita eikä muita sivukuluja.
- Arvopapereita on sallittu myydä lyhyeksi.
- Markkinamalli on arbitraasiton.

Neljäs ehto ei ole pelkästään teoreettinen konstruktio. Niin sanottu shorttaaminen eli lyhyeksi myyminen on käytäntönä tapauksissa, joissa yksittäinen meklari hallinnoi useampien asikkaiden sijoitussalkkuja. Viimeinen ehto johtaa yhtälöön, joka tunnetaan nimellä myynti-osto-pariteetti (engl. *put-call parity*).

Lause 2.9. *Olkoon S_0 riskitön arvopaperi tuotolla i, S_1 osake, jolle $S_1(0) = r$ ja $0 < S_1(1)$, S_2 eurooppalainen myyntioptio ja S_3 eurooppalainen osto-optio. Optioiden hinnat hetkellä 0 ovat $S_2(0) = p$ ja $S_3(0) = q$ ja τ optioihin liittyvä myynti- ja ostohinta päättymishetkellä T. Arbitraasittomilla markkinoilla pätee ns. myynti-osto -pariteetti (engl. put-call parity)*

$$r + p = \frac{\tau}{1+i} + q. \tag{7}$$

Todistus. Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasittomat. Silloin jokaiselle sijoitusstrategialle θ pätee

$$\theta \mathbf{S}(T, \Omega) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \theta \mathbf{S}(0) = 0, \text{ jokaiselle } \omega \in \Omega.$$

Markkinamallilla voi hetkellä T olla kaksi mahdollista tilaa riippuen siitä, mikä on osakkeen S_1 arvo hetkellä T.

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ a & y \\ \tau - a & 0 \\ 0 & y - \tau \end{bmatrix},$$

missä $a \leq \tau \leq y$. Jokainen mallin neljästä arvopaperista voidaan replikoida käyttämällä kolmea muuta, joten malli on selvästikin täydellinen ja jokaisella arvopaperilla on vain yksi arbitraasiton hinta hetkellä 0. Valitaan nyt sijoitusstrategia

$$\theta = \begin{bmatrix} \frac{\tau}{1+i} & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin $\theta \mathbf{S}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$. Arbitraasittomuudesta seuraa lauseen 2.1 perusteella, että $\theta \mathbf{S}(0) = 0$, eli

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\tau}{1+i} & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ p \\ q \end{bmatrix} &= 0, \\ \frac{\tau}{1+i} - r - p + q &= 0, \\ r + p &= \frac{\tau}{1+i} + q. \end{aligned}$$

□

Osto-myynti -pariteettia voidaan käyttää testattaessa johdannaismarkkinoiden tai johdannaisia hinnoittelevien mallien arbitraasittomuutta. Yhtälö (7) ei kuitenkaan anna välineitä laskea niin sanottua reilua hintaa eurooppalaisille optioille. Edelläosoitetun perusteella, jokaisen stokastisen kassavirran $X(t)$ arbitraasittomassa hinnoittelussa pitäisi päteä yhtälö

$$X(0) = \frac{\mathrm{E}^Q[X(1)]}{S_0(1)}.$$

Vaikka johdannaismarkkinat olisivat täydelliset ja mitta Q silloin yksikäsitteinen, meillä ei ole työkaluja mitan Q eksplisiittiseen määrittelemiseen. Käsittelemmekin seuraavassa luvussa todennäköisyysteorian työkaluja, joita tulemme tarvitsemaan johdannaisten arbitraasittomassa hinnoittelussa.

3 Todennäköisyysteoriaa

3.1 Todennäköisyysteorian peruskäsitteitä

Käsitelläksemme arbitraasiteoriaa syvällisemmin tarvitsemme kohtuullisen määrän todennäköisyysteorian käsiteitä ja tuloksia. Edellisessä luvussa saimme johdettua alustavia tuloksia liittyen arbitraasittomilla markkinoilla esiintyvää riskineutraaliin todennäköisyysmittaan. Esittelemme tässä luvussa todennäköisyysteorian peruskäsitteitä ja tuloksia, joiden avulla voimme käsitellä edellisen luvun aiheita eksaktimmin ja yleisemmin. Aloitamme määrittelemällä todennäköisyysteorian peruskäsitteet sigma-algebran ja todennäköisyysmitan.

Määritelmä 3.1. Olkoon Ω epätyhjä joukko ja joukkoperhe $\mathcal{F}$ sen osajoukkojen kokoelma. Joukkoperhe F on sigma-algebra, jos se toteuttaa seuraavat ehdot.

$$\begin{aligned} &\emptyset \in \mathcal{F}, \\ &A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}, \\ &A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Sigma-algebra määrittää itsessään sen, mitkä tapahtumat ovat mitallisia eli mihin tapahtumiin voidaan liittää todennäköisyys. Valaisemme asiaa seuravalla esimerkillä.

Esimerkki 3.1. Heitetään kuusisivuista noppaa. Esimerkin kannalta on merkityksetöntä, onko noppa harhaton vai painotettu. Riittää olettaa, että jokaisella heitolla saadaan joku silmäluku yhdestä kuuteen. Olkoon P nopanheittoon liittyvä mitta ja $\mathcal{F}$ sigma-algebra, jossa P on määritelty. Äärimmäinen

tapaus on triviaali sigma-algebra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$. Tällöin mitallisia ovat ainoastaan tapaukset Ω, tulee jokin numero yhdestä kuuteen, tai tapaus $\emptyset$, ei tule numeroa yhdestä kuuteen. Vastaavasti, jos sigma-algebra
$\mathcal{F} = \{\{1,3,5\},\{2,4,6\},\emptyset,\Omega\}$, ovat edellisten tapausten lisäksi mitallisia myös tapaukset, joissa nopanheiton tulos on pariton tai parillinen.

Jokaiselle numeroituvalle joukolle A on olemassa yksikäsitteinen maksimaalinen sigma-algebra, joka on joukon A potenssijoukko $\mathcal{P}(A)$. Ylinumeroituvien perusjoukkojen, kuten joukkojen $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_+$ ja niiden osajoukkojen tapauksessa ei ole välttämättä mahdollista muodostaa maksimaalista sigma-algebraa. Itse asiassa voidaan todistaa, että joukossa $\mathbb{R}$ on olemassa joukkoja, jotka eivät ole Lebesgue-mitallisia.

Todennäköisyysteoriassa käytetään usein niin sanottujen *Borel-joukkojen* muodostamaa *Borel-algebraa*.

Määritelmä 3.2. Olkoon Γ niiden sigma-algebrojen kokoelma, jotka sisältävät joukon $\mathbb{R}^n$ kaikki avoimet joukot. Tällöin voidaan määritellä sellainen minimaalinen sigma-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, että

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_i \Gamma_i, \Gamma_i \in \Gamma.$$

Tätä sigma-algebraa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kutsutaan joukon $\mathbb{R}^n$ Borel-algebraksi ja sen alkioita joukon $\mathbb{R}^n$ Borel-joukoiksi.

Borel-algebra joukossa $\mathbb{R}^n$ määritellään myös usein joukon $\mathbb{R}^n$ avoimien n-ulotteisten pallojen virittämänä sigma-algebrana. Voimme nyt määritellä todennäköisyysmitan käsitteen.

Määritelmä 3.3. Kuvausta $P(A), A \in \mathcal{F} \colon \Omega \to [0,1]$ sanotaan todennäköisyysmitaksi, jos se täyttää seuraavat ehdot:

$$\begin{aligned}
&P(\emptyset) = 0 \\
&P(\Omega) = 1 \\
&P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i, \text{ kun } \bigcap_{i \neq j} A_i = \emptyset.
\end{aligned}$$

Selvästikin todennäköisyysmitan määritelmästä seuraa sen monotonisuus. Toisin sanoen

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2).$$

Todennäköisyysmitan erikoistapaus on niin sanottu Diracin pistemitta P_δ, jossa todennäköisyys on keskittynyt yhteen pisteeseen.

$$P_\delta(A) = 1, \text{ jos ja vain jos } a \in A.$$

Todennäköisyysmitat voidaan jakaa kolmeen luokkaan:

1. **Singulaarinen todennäköisyysmitta**
   Todennäköisyysmitta, joka saa nollasta poikkeavia arvoja äärellisessä tai enintään numeroituvasti äärettömässä joukossa. Singulaarinen todennäköisyysmitta P voidaan ilmaista Diracin pistemittojen δ_i painotettuna summana. Toisin sanoen

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_i, \text{ missä } \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1.$$

2. **Singulaarisesti jatkuva todennäköisyysmitta**
   Todennäköisyysmitta, joka on keskittynyt ylinumeroituvaan, mutta Lebesgue-nollamittaiseen joukkoon. Toisin sanoen on olemassa sellainen $A \in \Omega$, että

$$\|A\| = \aleph_1, P(A) = 1 \text{ ja } \mathrm{Leb}(A) = 0.$$

3. **Jatkuva todennäköisyysmitta**
   Todennäköisyysmitta, jolle jokaisen Lebesgue-nollamittaisen joukon A todennäköisyys $P(A) = 0$.

Jokainen todennäköisyysmitta voidaan ilmaista näiden kolmen perusmittatyypin summana. Tässä tutkielmassa käsittelemme ensimmäistä ja kolmatta tapausta toisen tapauksen jäädessä matemaattiseksi kuriositeetiksi. Esitämme seuraavaksi kaksi todennäköisyysavaruuksiin liittyvää perustavaa laatua olevaa tulosta, joita tarvitsemme jatkossa. Ensimmäinen lause tunnetaan nimellä Borel-Cantelli-lemma ja toinen nimellä Tsebysevin epäyhtälö.

Lause 3.1. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus ja $\{A\}_n$, $A_n \subseteq \Omega$ sellainen ääretön jono tapahtumia, että*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Määritellään

$$A = \{\omega : \text{ on olemassa sellainen ääretön jono } n_i(\omega), \text{ että } \omega \in A_{n_i}, i = 1, 2, \dots\}.$$

Tällöin $P(A) = 0$.

Todistus. Voimme määritellä joukon A seuraavalla tavalla:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Tällöin $P(A) \leq P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)$. Tulos seuraa nyt siitä, että

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = 0.$$

[3, s. 102] $\square$

Lause 3.2. *Olkoon satunnaismuuttuja $\xi \geq 0$ ja odotusarvo $E(\xi)$ äärellinen. Tällöin jokaiselle $t > 0$ pätee*

$$P(\xi \geq t) \leq \frac{E(\xi)}{t}.$$

Todistus. Koska $\xi \geq 0$ pätee,

$$\begin{aligned} P(\xi \geq t) &= \sum_{\omega:\, \xi(\omega)\geq t} p(\omega) \leq \frac{1}{t} \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)p(\omega) \\ &= \frac{\mathrm{E}(\xi)}{t}. \end{aligned}$$

[3, s. 11] $\square$

3.2 L^p-avaruudet

Kolmikkoa perusjoukko, sigma-algebra, todennäköisyysmitta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi. Satunnaismuuttujan $X(\omega)$ odotusarvo ja varianssi määritellään seuraavasti.

Määritelmä 3.4.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X(\omega)] &= \int_{\omega\in\Omega} X(\omega) dP, \\ \mathrm{Var}[X(\omega)] &= \int_{\omega\in\Omega} (X(\omega) - \mathrm{E}[X])^2 dP. \end{aligned}$$

Odotusarvon ja varianssin määritelmästä seuraa luonnollisesti, että varianssin olemassaolosta seuraa odotusarvon olemassaolo ja äärellisyys. Käytämme tämän määrittelyssä niin sanottuja L^p-avaruuksia.

Määritelmä 3.5. Sanomme, että satunnaismuuttuja $X(\omega)$ kuuluu $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$-avaruuteen , jos

$$\left(\int_{\omega\in\Omega} |X|^p(\omega) dP \right)^{1/p} < \infty \text{ ja } p \geq 1.$$

Selvästikin muuttujan X odotusarvon olemassaolon ja äärellisyyden kanssa yhtäpitävää on $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Samoin varianssin olemassaolon ja äärellisyyden kanssa yhtäpitävää on $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Voimme myös käyttää muuttujasta X vastaavasti ilmaisuja integroituva ja neliöintegroituva. Kolmas erityistapaus on $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$-avaruus,

$$X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \Leftrightarrow \lim_{s \to \infty} \left(\int_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|^s dP \right)^{1/s} < \infty.$$

Kun muuttuja $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sanomme, että muuttuja X on tasaisesti integroituva.

L^p-avaruudet määritellään usein L^p-normin avulla. Voidaksemme määritellä kyseisen normin eksaktisti meidän täytyy funktioiden tai satunnaismuuttujien sijasta käsitellä niiden ekvivalenssiluokkia. Merkitsemme, että $f(\omega) \sim g(\omega)$, mikäli $P\left(f(\omega) \neq g(\omega)\right) = 0$.

Määritelmä 3.6. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ funktion f L^p-normi määritellään seuraavasti.

$$\|f(\omega)\|_p = \left(\int_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|^p dP \right)^{1/p}.$$

Kun samaistamme ekvivalenssiluokkien edustajat toistensa kanssa, täyttää L^p-normi kolme vaadittua ehtoa:

1. $a\|f(\omega)\| = \|af(\omega)\|$ seuraa suoraan integraalin lineaarisuudesta,

2. $\|f(\omega) + g(\omega)\| \leq \|f(\omega)\| + \|g(\omega)\|$ seuraa myös integraalin ominaisuuksista,

3. $\|f(\omega)\| = 0 \Leftrightarrow f(\omega) = 0$ (m.v.)

Kun rajoitumme todennäköisyysavaruuksiin, saamme seuraavan L^p-avaruuksia ja -normeja koskevan tuloksen.

Lause 3.3. *Todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *pitää aina paikkansa, että*

$$X \in L^u(\Omega, \mathcal{F}, P) \Rightarrow X \in L^s(\Omega, \mathcal{F}, P), \ \textit{kun } 1 \leq s \leq u.$$

Todistus. Todennäköisyysavaruudessa pätee aina $P(\Omega) = 1$. Jokaiselle $s < \infty$ pätee

$$\left(\int_\Omega X^s dP\right)^{1/s} < \infty \Rightarrow \int_\Omega X^s dP < \infty.$$

Voimme nyt jakaa integroitavan perusjoukon Ω kahteen osaan Ω_A ja Ω_B, joille

$$\Omega_A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) < 1\} \text{ ja } \Omega_B = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq 1\}.$$

Voimme nyt kirjoittaa L^u-normin muodossa

$$\left[\int_A X^u dP + \int_B X^u dP\right]^{1/u},$$

missä $\int_A X^u dP \leq 1$, joten

$$\int_B X^s dP \leq \int_B X^u DP < \infty,$$

joten tämän perusteella voimme todeta, että

$$\left(\int_A X^s dP + \int_B X^s dP\right)^{1/s} = \|X\|_s < \infty.$$

Olemme näin määritelmään 3.5 perustuen todenneet, että

$$\|X\|^u < \infty \Rightarrow \|X\|^s < \infty, \text{ kun } 1 \leq s \leq u$$

eli toisin sanoen

$$X \in L^u(\Omega, \mathcal{F}, P) \Rightarrow X \in L^s(\Omega, \mathcal{F}, P), \text{ kun } 1 \leq s \leq u.$$

$\square$

3.3 Dominoitu konvergenssi

Määrittelemme nyt yleisimmät todennäköisyysteoriassa käytetyt suppenemislajit ja johdamme sen jälkeen tärkeän lauseen, jota kutsutaan Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseeksi. Käytämme tässä apuna kirjan *Theory of probability and random processes* määritelmiä. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus sekä f ja f_n, $n \in \mathbb{N}$ P-mitallisia funktioita. Tällöin voimme määritellä seuraavat konvergenssit, eli suppenemislajit.

Määritelmä 3.7. Funktiojonon f_n sanotaan suppenevan tasaisesti kohti rajafunktiota f, mikäli

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| = 0.$$

Määritelmä 3.8. Funktiojonon f_n sanotaan suppenevan kohti rajafunktiota f todennäköisyysmielessä, jos mille tahansa $\delta > 0$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} P(|f_n - f| > \delta) = 0.$$

Määritelmä 3.9. Funktiojonon f_n sanotaan suppenevan melkein varmasti kohti rajafunktiota f, mikäli on olemassa P-mitallinen joukko A, jolle $P(A) = 1$ ja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega), \text{ kun } \omega \in A.$$

Määritelmä 3.10. Funktiojonon f_n sanotaan L^p-suppenevan kohden rajafunktiota f, mikäli

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

[3, s. 49]

Lauseen 3.3 perusteella L^2-suppenemisesta seuraa L^1-suppeneminen. Selvästikin tasainen suppeneminen on kaikista lajeista voimakkainta ja siitä seuraavat kaikki muut suppenemismuodot. Todennäköisyysmielessä suppeneminen seuraa L^1-suppenemisesta, kuten seuraavaksi todistamme.

Lause 3.4. *Määritelmän 3.10 mukaisesta L^1-suppenemisesta seuraa määritelmän 3.8 mukainen suppeneminen todennäköisyysmielessä.*

Todistus. Tsebysevin epäyhtälön 3.2 mukaan

$$P(|X_n - X| < \epsilon) \le \frac{1}{\epsilon}\mathrm{E}(|X_n - X|)$$

kaikilla $\epsilon > 0$. [4, s. 84] □

Lause 3.5. *Olkoon X_n jono satunnaismuuttujia, joka L^1-suppenee kohden rajafunktiota f. Tällöin voimme valita jonosta X_n osajonon X_{n_k}, joka suppenee kohden satunnaismuuttujaa X melkein varmasti.*

Todistus. Olkoon (n_k) jonon (n) osajono. Konstruoimme jonon (n_k) seuraavalla tavalla. Olkoon $n_1 = 1$. Valitsemme sitten indeksit n_k seuraavalla tavalla:

$$n_k = \min\left\{n_m \colon n_m > n_{k-1} \wedge P\left((X_{n_k} - X) > \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Toisin sanoen n_k on pienin indeksiä n_{k-1} aidosti suurempi indeksi, joka toteuttaa ylläolevan todennäköisyysehdon. Koska todistimme lauseessa 3.4, että L^1-suppenemisesta seuraa suppeneminen todennäköisyysmielessä on indeksi n_k olemassa jokaiselle k. Voimme nyt käyttää Borel-Cantelli-lausetta 3.1 apuna, sillä

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{2^k}) < \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Tällöin

$$P(\limsup_{k\to\infty} |X_{n_k} - X| > \frac{1}{2^k}) = 0.$$

Nyt kaikille $\epsilon > 0$ pätee

$$P(|X_{n_k} - X| > \epsilon) \leq P(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{2^k}) = 0.$$

Koska ϵ on mielivaltainen

$$\lim_{k\to\infty} P(|X_{n_k} - X| = 0) = 1,$$

mikä tarkoittaa määritelmän 3.9 mukaista melkein varmaa suppenemista. [4, s. 85] □

Todistamme seuraavaksi todennäköisyysteorian kannalta tärkeän tuloksen, Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen käyttämällä apuna kirjan *Theory of probability and random processes* esitystä. Aloitamme todistamalla apulauseen, joka tunnetaan *Egorov-lauseena.*

Lause 3.6. *Jos funktiojono f_n suppenee kohden funktiota f melkein varmasti, on jokaiselle $\delta > 0$ on olemassa sellainen mitallinen joukko $\Omega_\delta \subset \Omega$, että $\mu(\Omega_\delta) \geq \mu(\Omega) - \delta$. Tällöin myös jono f_n suppenee tasaisesti kohden funktiota f joukossa Ω_δ.*

Todistus. Olkoon δ kiinteä ja olkoot

$$\Omega_n^m = \bigcap_{i\geq n} \{\omega\colon |f_i(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{m}\} \text{ ja}$$
$$\Omega^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^m.$$

Mitan jatkuvuuden perusteella jokaiselle m on sellainen $n_0(m)$, että

$$\mu(\Omega^m \backslash \Omega_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Määrittelemme nyt joukon $\Omega_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega^m_{n_0(m)}$. Näin määriteltynä Ω_δ lauseen vaatimukset. Funktiojonon f_n suppeneminen on tasaista joukossa Ω_δ, sillä

$$|f_i(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{m}, \text{ kaikille } \omega \in \Omega_\delta, \text{ jos } i > n_0(m).$$

On syytä huomata, että $f_n(\omega)$ ei suppene kohden funktiota $f(\omega)$, mikäli $\omega \notin \Omega^m$, jollekin m. Tämän perusteella $\mu(\Omega \backslash \Omega^m) = 0$. Tästä seuraa taas

$$\mu(\Omega \backslash \Omega^m_{n_0(m)}) = \mu(\Omega^m \backslash \Omega^m_{n_0(m)}) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Voimme nyt päättää todistuksen toteamalla, että

$$\mu(\Omega \backslash \Omega_\delta) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (\Omega \backslash \Omega^m_{n_0(m)})\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\Omega \backslash \Omega^m_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

[3, s. 49-50] □

Voimme nyt näillä työkaluilla todistaa jatkon kannalta tärkeän tuloksen, joka tunnetaan nimellä *Lebesguen dominoidun konvergenssin lause.*

Lause 3.7. *Jos jono f_n mitallisia funktioita suppenee kohden mitallista funktiota f ja $|f_n| \leq \varphi$, missä φ on integroituva perusjoukossa Ω, funktio f on integroituva perusjoukossa Ω ja*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$ kiinteä. On helppo todeta, että $|f(\omega)| \leq \varphi$. Muuten olisimme tilanteessa, jossa $P\left(|f(\omega)| \geq \varphi + k\right) > 0$, ja toisaalta $|f_n(\omega)| \leq \varphi$, jolloin $f_n(\omega)$ ei suppene kohden funktiota f. Tämän perusteella funktio f on integroituvan funktion φ rajoittamana myös integroituva. Olkoon nyt $\Omega_k = \{\omega\colon k-1 \leq \varphi(\omega) < k\}$. Integraalin sigma-additiivisuuden perusteella voimme kirjoittaa

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \varphi d\mu.$$

Olkoon nyt $m > 0$ sellainen, että

$$\sum_{k=m}^{\infty} \int_{\Omega_k} \varphi d\mu < \frac{\epsilon}{5}.$$

Määrittelemme lisäksi joukon

$$A = \bigcup_{k=m}^{\infty} \Omega_k.$$

Lauseen 3.6 perusteella voimme nyt valita sellaisen joukon $B \subseteq \Omega \backslash A$, että $\mu(B) \leq \frac{\epsilon}{5}$, ja että f_n suppenee tasaisesti kohden funktiota f joukossa $C = (\Omega \backslash A) \backslash B$. Voimme nyt tehdä yläarvion

$$\left| \int_\Omega f_n d\mu - \int_\Omega f d\mu \right| \leq \left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| +$$
$$\left| \int_B f_n d\mu - \int_B f d\mu \right| + \left| \int_C f_n d\mu - \int_C f d\mu \right|.$$

Epäyhtälön oikean puolen ensimmäistä termiä voidaan arvioida ylhäältäpäin:

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \frac{2\epsilon}{5},$$

sillä

$$\int_A |f_n| \, d\mu \leq \int_A \varphi d\mu, \quad \int_A |f| \, d\mu \leq \int_A \varphi d\mu < \frac{\epsilon}{5}.$$

Toista termiä voimme arvioida myös ylhäältäpäin:

$$\left| \int_B f_n d\mu - \int_B f d\mu \right| \leq \mu(B) \sup_{\omega \in B} (|f_n(\omega)| + |f_n(\omega)|) \leq \frac{2\epsilon}{5}.$$

Viimeiselle termille on tasaisen suppenemisen perusteella joukossa C olemassa jokaiselle $\frac{\epsilon}{5} > 0$ indeksi n_ϵ, jolle pätee

$$\left| \int_C f_{n_\epsilon} d\mu - \int_C f d\mu \right| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Näin jokaiselle ϵ on olemassa sellainen indeksi n, että

$$\left| \int_\Omega f_n d\mu - \int_\Omega f d\mu \right| < \epsilon.$$

[3, s. 50] □

Esitämme nyt todistamatta dominoidun konvergenssin lauseen kaksi seurauslausetta.

Lause 3.8. *Olkoon f_n melkein varmasti nouseva jono mitallisia funktioita. Oletetaan, että funktioiden f_n integraalit ovat rajoitettuja. Toisin sanoen*

$$\int_\Omega f_n d\mu \leq K, \ \textit{jokaiselle } n.$$

Tällöin melkein varmasti on olemassa äärellinen raja-arvo

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega),$$

funktio f on integroituva ja

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

[3, s. 51]

Lause 3.9. *Olkoon f_n jono epänegatiivisia mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu \leq \infty.$$

[3, s. 51]

3.4 Radon-Nikodym-lause

Esitämme seuraavaksi arbitraasiteorian kannalta oleellisen lauseen, jota kutsutaan Radon-Nikodym -lauseeksi. Sitä ennen on kuitenkin syytä esitellä muutamia apumääritelmiä ja eräs funktioanalyysin tulos, jota kutsutaan nimellä *Rieszin esityslause*. Käytämme seuraavassa todistusketjussa apuna Tomas Björkin kirjan *Arbitrage theory in continuous time* esitystapaa. Seuraavissa todistuksissa käytämme apuna seuraavan määritelmän mukaista *indikaattorifunktiota*.

Määritelmä 3.11. Olkoon funktio χ_A joukon A indikaattorifunktio perusjoukossa Ω. Indikaattorifunktio χ_A määritellään seuraavasti:

$$\begin{cases} \chi_A(\omega) = 1, \text{ kun } \omega \in A, \\ \chi_A(\omega) = 0, \text{ kun } \omega \notin A. \end{cases}$$

Määritelmä 3.12. Sisätuloavaruus H on Hilbertin avaruus, kun se on täydellinen sisätulon normin $\|\cdot\|_2$ suhteen. [1, s. 409]

Määritelmän 3.5 mukainen $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -avaruus on tärkeä esimerkki Hilbertin avaruuksista. Määrittelemme seuraavaksi lineaarifunktionaalin ja esitämme tärkeän Hilbertin avaruuksia koskevan *projektiolauseen*.

Määritelmä 3.13. Lineaarikuvausta $F\colon H \to \mathbb{R}$ kutsutaan lineaarifunktionaaliksi. Lineaarifunktionaalin sanotaan olevan rajoitettu, jos on olemassa sellainen vakio K, että

$$|F(f)| \leq K\|f\|, \text{ jokaiselle } f \in H.$$

[1, s. 409]

Lause 3.10. *Olkoon avaruus M Hilbertin avaruuden H suljettu lineaarinen aliavaruus. Olkoon f kiinteä vektori avaruudessa H. Tällöin optiomointiongelmalla*

$$\min_{g \in M} \|f - g\|_2$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $\hat{g}$, jolle pätee

$$f - \hat{g} \perp M.$$

Tällöin avaruus H voidaan jakaa sellaisiin ortogonaalisiin aliavaruuksiin M ja $M^\perp$, että

$$H = M \oplus M^\perp, \text{ missä } H = M + M^\perp \text{ ja } M \cap M^\perp = \{0\}.$$

Lauseen todistus ohitetaan.

Lause 3.11. *Olkoon*

$$F \colon H \to \mathbb{R}$$

rajoitettu lineaarifunktionaali. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen $g \in H$, että jokaiselle $f \in H$ pätee

$$F(f) = (f, g).$$

Todistus. Olkoon M funktionaalin F ydin. Toisin sanoen

$$M = \{f \in H; F(f) = 0\}.$$

Näin ollen M on suljettu aliavaruus ja voimme ilmaista lauseen 3.10 perusteella ilmaista avaruuden H muodossa $H = M + M^\perp$. Merkitsemme $\hat{F}$ Funktionaalin F rajoittumaa avaruuteen $M^\perp$. Edellämääritellyn perusteella $\ker[\hat{F}] = 0$, joten funktionaali $\hat{F}$ on vektori-isomorfismi avaruuksien $M^\perp$ ja $\mathbb{R}$ välillä. Koska $\mathbb{R}$ on yksiulotteinen, on myös $M^\perp$ yksiulotteinen ja voimme ilmaista avaruuden $M^\perp$ muodossa $M^\perp = \mathbb{R}g_0$, jollekin $g_0 \in M^\perp$. Määrittelemme nyt funktion g asettamalla

$$g = \frac{F(g_0)}{\|g_0\|^2} g_0. \tag{8}$$

Voimme nyt kirjoittaa yhtälön (8) muodossa

$$\begin{aligned}(g, g_0) =& \frac{F(g_0)}{\|g_0\|^2} \|g_0\|^2 \\ (g, g_0) =& F(g_0).\end{aligned}$$

Nyt lineaarisuuden perusteella $F(f) = (f, g)$ kaikille $f \in M^\perp$. Määrittelimme edellä avaruuden M niin, että $F(f) = 0$ avaruudessa M. Tämän perusteella lause pitää paikkansa myös avaruudessa $H = M + M^\perp$. [1, s. 410] □

Tomas Björkin kirjassa *Arbitrage theory in continuous time* absoluuttinen jatkuvuus ja Radon-Nikodym -lause esitetään seuraavalla tavalla.

Määritelmä 3.14. Oletetaan mitta-avaruus $(X, \mathcal{F})$, jossa on määritelty kaksi erillistä mittaa μ ja ν. Mikäli ehto

$$\forall A \in \mathcal{F}\colon \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

pitää paikkansa, sanotaan mitan ν olevan absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen sigma-algebrassa $\mathcal{F}$. Tätä merkitään $\nu \ll \mu$. Mikäli $\mu \ll \nu$ ja $\nu \ll \mu$ sanotaan mittojen μ ja ν olevan keskenään ekvivalentit ja tätä merkitään $\mu \sim \nu$.

Lause 3.12. *Olkoon $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus, missä μ on äärellinen. Toisin sanoen $\mu(X) < \infty$. Olkoon ν sellainen mitta avaruudessa $(X, \mathcal{F})$, että $\mu \sim \nu$ sigma-algebrassa $\mathcal{F}$. Tällöin on olemassa ei-negatiivinen $f\colon\ \colon X \to \mathbb{R}$, jolla*

$$\begin{aligned} f \ &\textit{on } \mathcal{F}\textit{-mitallinen}, \\ &\int_X f(x) d\mu < \infty, \\ \nu(A) = &\int_A f(x) d\mu(x), \forall A \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Kyseistä funktiota f kutsutaan mitan ν Radon-Nikodym -derivaataksi mitan μ suhteen. Derivaatta voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x) = \frac{d\nu(x)}{d\mu(x)},$$

tai vaihtoehtoisesti

$$d\nu(x) = f(x) d\mu(x).$$

Todistus. Määritellään uusi mitta λ asettamalla $\lambda(A) = \mu(A) + \nu(A)$, jokaiselle $A \in \mathcal{F}$. Mille tahansa $g \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ voidaan määritellä lineaarikuvaus $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\Phi(g) = \int_X g(x) d\nu(x).$$

Cauchy-Schwartz-epäyhtälöstä ja kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$|\Phi| = |\int_X g d\nu| \leq \int_X |g| d\lambda \leq \sqrt{\lambda(X)}\, \|g\|_{L^2(X, \mathcal{F}, \lambda)}.$$

Tämän yläarvion perusteella lineaarikuvaus Φ on sekä rajoitettu että hyvinmääritelty. Nyt voimme käyttää hyväksi Rieszin esityslausetta 3.11, jonka mukaan integraali $\Phi(g)$ voidaan esittää sisätulomuodossa (g, f). Muodollisemmin ilmaistuna on olemassa sellainen $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, että

$$\int_X g\nu = \int_X gfd\lambda, \forall g \in L^2(X, \mathcal{F}; \mu). \tag{9}$$

Nyt voimme kirjoittaa funktion $\Phi(g)$ muodossa

$$\Phi(g) = \int_X gfd\lambda = \int_X gd\nu = \int_X gfd\nu + \int_X gfd\mu.$$

Koska todistuksen alussa totesimme, että funktio g voidaan valita vapaasti, pätee jokaiselle $g \in L^2(X, \mathcal{F}, \lambda)$

$$\int_X g(1 - f)d\nu = \int_X gfd\mu.$$

Koska funktio g on valittavissa vapaasti, sen tilalle voidaan sijoittaa mikä tahansa indikaattorifunktio, joten

$$(1 - f)d\nu = fd\mu. \tag{10}$$

Tästä seuraava askel on tietysti jakaa yhtälö puolittain termillä $(1 - f)$. Radon-Nikodym -derivaatta saadaan tällöin itse asiassa lausekkeesta

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1 - f}.$$

Todistuksen päättämiseksi meidän täytyy nyt näyttää, että kyseinen derivaatta pätee kaikissa joukoissa nollamittaisia joukkoja lukuunottamatta. Toisin sanoen, meidän täytyy osoittaa, että joukolle$B = \{x \in X; f(x) = 1\}$ pitää paikkansa $\mu(B) = \nu(B) = 0$. Ehdosta $0 \leq \nu(A) \leq \lambda(A)$ seuraa, että $0 \leq f \leq 1$. Tämä voidaan todeta helposti asettamalla yhtälöön (9) funktion g paikalle indikaattorifunktio I_A, missä A on mielivaltainen perusjoukon X osajoukko. Nyt valitsemme funktion g paikalle indikaattorifunktion I_B. Näin saamme

$$\int_X I_B f d\mu = \int_X I_B(1 - f)d\nu = \int_B (1 - 1)d\nu = 0,$$

joten derivaatan nimittäjä on nolla korkeintaan nollamittaisessa joukossa. Näin on lopulta todistettu Radon-Nikodym -derivaatan olemassaolo ja se, että kyseinen derivaatta pätee melkein kaikkialla. □

Absoluuttinen jatkuvuus ja mittojen jatkuvuus ovat aina sidoksissa sigma-algebraan, joten kyseessä olevat ominaisuudet eivät välttämättä päde laajennetun sigma-algebran suhteen.

3.5 Ekvivalentit mitat ja Radon-Nikodym-muunnos

Radon-Nikodym -derivaatta on keskeisessä osassa määriteltäessä yhteyttä luonnollisen todennäköisyysmitan P ja riskineutraalin todennäköisyysmitan Q välillä.

Lause 3.13. *Todennäköisyysmitat P ja Q avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos*

$$P(A) = 1 \Leftrightarrow Q(A) = 1; \forall A \in \mathcal{F}.$$

Todistus. Todistus itsessään on melkein triviaali. Mitat Q ja P ovat ekvivalentit jos ja vain jos niillä on samat nollamittaiset joukot. Tällöin

$$P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A^c) = 0 \Leftrightarrow Q(A^c) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 1.$$

Ensimmäinen ja viimeinen ekvivalenssi seuraavat itse todennäköisyysmitan määritelmästä. [1, s. 438] □

Radon-Nikodym -lauseesta seuraa, että mitat P ja Q ovat ekvivalentit, jos ja vain jos on olemassa sellainen $\mathcal{F}$-mitallinen kuvaus $\Omega \to \mathbb{R}_+$, että

$$\int_A dQ(\omega) = \int_A L(\omega) dP(\omega); \forall A \in \mathcal{F}.$$

Eli toisin sanoen $\mathrm{E}^P[L] = 1$.

3.6 Jensenin epäyhtälö

Lause 3.14. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus ja f reaaliarvoinen konkaavi funktio ja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tällöin pätee seuraava* Jensenin epäyhtälö*:*

$$E(f(X)) \leq f(E(X)).$$

Todistus. Todistetaan ensin, että mikäli funktio f on lineaarinen on epäyhtälö itse asiassa yhtälö. Odotusarvon määritelmän perusteella $\mathrm{E}(X) = \int_\Omega X(\omega) dP$. Tällöin, mikäli funktio f on muotoa $f(x) = kx$; $k \in \mathbb{R}$, pitää paikkansa

$$\mathrm{E}(f(x)) = \int_\Omega k(x) dP = k \int_\Omega X dP = f(E(x)).$$

Oletetaan seuraavaksi, että funktio f on aidosti konkaavi eli että funktio on vähintään kahdesti derivoituva jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ ja että $f'(x) > 0$ ja $f''x(x) < 0$. Tällöin selvästikin

$$f'(x_0) > \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{11}$$

kaikilla $x \neq x_0$. Olkoon nyt g reaaliarvoinen ja P-integroituva funktio todennäköisyysavaruudessa. Määrittelemme seuraavat vakiot:

$$\begin{aligned} x_0 =& \int_\Omega g dP = \mathrm{E}(g), \\ a =& f'(x_0), \\ b =& f(x_0) - x_0 f'(x_0). \end{aligned}$$

Nyt, koska epäyhtälö (11) voidaan kirjoittaa muodossa

$$x f'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0) > f(x),$$

kaikilla $x \neq x_0$ pätee $ax + b > f(x)$. Selvästikin $ax_0 + b = f(x_0)$. Termi $f(x_0)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x_0) = ax_0 + b = a \int_\Omega g dP + b = \int_\Omega (ag + b)\, dP = \mathrm{E}[ag + b].$$

Erityisesti pätee

$$f(\mathrm{E}(g)) = a \int_\Omega g dP + b = \int_\Omega (ag + b) dP \geq \int_\Omega f(g) dP = \mathrm{E}(f(g)).$$

Satunnaismuuttujan X ollessa reaaliarvoinen, funktio $g(X) = X$ on reaaliarvoinen ja P-integroituva. Näin pätee myös epäyhtälö $f(\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(f(X)$. Lukijan on syytä huomata että yhtäsuuruus on voimassa ainoastaan silloin, kun funktio f on lineaarinen. $\square$

3.7 Ehdollinen todennäköisyys

Todennäköisyysteorian perusmääritelmiin kuuluu ehdollisen todennäköisyyden käsite. Käytämme nyt apunamme kirjassa *Theory of Probability and Random processes* esitettyjä määritelmiä. Kun oletetaan todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja kaksi tapahtumaa $A, B \in \mathcal{F}$ voimme määritellä tapahtuman A ehdollisen todennäköisyyden ehdolla B

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Samaten määrittelemme ehdollisen odotusarvon satunnaismuuttujalle $X(\omega)$ ehdolla B

$$\mathrm{E}[X \mid B] = \frac{\int_B X(\omega) dP(\omega)}{P(B)}.$$

Tähän määritelmään sisältyy luonnollinen olettamus, että $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja että $P(B) > 0$. Nämä ehdollisen todennäköisyyden ja odotusarvon määritelmät voidaan ilmaista yleisemmin käyttämällä apuna sigma-alialgebroja. Näin voimme monissa tapauksissa käsitellä myös ehdollisia todennäköisyyksiä ja jakaumia tapauksessa $P(B) = 0$.

Määritelmä 3.15. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus, $\mathcal{G}$ sellainen sigma-alialgebra, että $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ja $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ehdollinen todennäköisyys $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{G}]$ on sellainen satunnaismuuttuja $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$, että jokaiselle $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A X dP = \int_A Y dP.$$

Satunnaismuuttujan Y olemassaolo ja yksikäsitteisyys seuraa suoraan Radon-Nikodym-lauseesta. [3, s. 181]

3.8 Stokastiset prosessit ja martingaalit

Määrittelimme edellä luvussa 3.1 satunnaismuuttujan käsitteen. Voimme määritellä edelleen tämän avulla satunnaisprosessin käsitteen. Satunnaisprosessi on yleensä määritelty määritelty yksiulotteisessa diskreetissä tai jatkuvassa indeksijoukossa $\mathbb{T}$. Yleisimmin $\mathbb{T}$ on $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+$ tai $\mathbb{R}$. Käytämme yksiulotteisesta indeksijoukosta, joka on reaaliakselin osajoukko, nimitystä aika. Määrittelemme ensin satunnaisprosesseihin kiinteästi liittyvän käsitteen *suodatus*. Satunnaisprosesseihin liitetään yleisesti oletus, että informaatio ei vähene ajan kuluessa. Tämän olettamuksen voimmekin muotoilla matemaattisesti suodatuksen avulla.

Määritelmä 3.16. Olkoon $(\Omega, \underline{\mathcal{F}})$ todennäköisyysavaruus. Jono $\{\mathcal{F}_t\}$ on mitta-avaruuden $(\Omega, \underline{\mathcal{F}})$ suodatus, mikäli se täyttää seuraavat ehdot:

- $t_1 \leq t_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$,
- $\mathcal{F}_t \subseteq \underline{\mathcal{F}}$, jokaiselle $t \in \mathbb{T}$.

Voimme nyt määritellä satunnaismuuttujan $X_t(\omega)$ sellaisena kahden muuttujan (t, ω) funktiona, että $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, jokaiselle $t \in \mathbb{T}$. Usein myös edellytetään, että satunnaisprosessi on *adaptoitu* johonkin suodatukseen.

Määritelmä 3.17. Satunnaismuuttujan $X_t(\omega)$ sanotaan olevan adaptoitu suodatukseen $\mathcal{F}_t$, jos prosessi $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen jokaiselle $t \in \mathbb{T}$.

Suodatukseen kuuluu olennaisena osana se, että aloitushetkeä $t = 0$ lukuunottamatta jokaisella prosessin tilalla on historia. Toisin sanoen suodatus $\mathcal{F}_t$ on puumaisesti haarautuva prosessi, jossa $\mathcal{F}_0$ on puun juuri ja sigma-algebrat $\mathcal{F}_t$ puun tasoja ajan hetkellä t. Puun tason t poikkileikkauksen tapahtumat virittävät näin ollen sigma-algebran $\mathcal{F}_t$. Jokaiselle tapahtumalle tasolla t on olemassa yksikäsitteinen historia $\mathcal{H}$, eli sellainen ketju tasolta t puun juureen niin, että ketju sisältää täsmälleen yhden tapahtuman jokaisesta sigma-algebrasta $\mathcal{F}_k$, $k \in [0, t]$.

Määriteltyämme suodatuksen ja stokastisen prosessin käsitteet olemme valmiit määrittelemään arbitraasiteorian avainkäsitteen *martingaalin.*

Määritelmä 3.18. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suodatettu todennäköisyysavaruus ja $X_t(\omega)$ tähän suodatukseen adaptoitu satunnaisprosessi. Satunnaisprosessia X_t kutsutaan martingaaliksi, mikäli se täyttää seuraavat ehdot:

- $X_t(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jokaiselle t
- $X_s = \mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s)$, kun $s \leq t$.

Jos vaihdamme yhtäläisyysmerkin tilalle merkin $\leq$ tai $\geq$ prosessia kutsutaan vastaavasti ali- tai ylimartingaaliksi.

Selvästikin mikäli $X_t \in L^2$ ja X_t on martingaali, on X_t^2 alimartingaali.

3.9 Arbitraasiteorian tuloksia

Palaamme nyt lyhyesti luvussa 2 esitettyihin arbitraasiteorian perusteisiin ja tarkastelemme niitä nyt todennäköisyysteorian työkalujen avulla. Jensenin epäyhtälön avulla voidaan osoittaa seuraava arvopaperimarkkinoihin liittyvä ominaisuus.

Lause 3.15. *Oletetaan yhden periodin markkinamalli, jossa markkinatoimijat ovat riskinkarttajia, toisin sanoen toimijoiden hyötyfunktioille pätee*

$$u'(x) > 0 \text{ ja } u(x)'' < 0.$$

Oletamme samoin, että jokaisen toimijan hyötyfunktio on ylhäältä rajoitettu. Tällöin arbitraasittomilla markkinoilla pätee lauseen 2.3 perusteella

$$E^Q[Z_n(1)] = Z_n(0)$$

ja lisäksi myös

$$E^P[Z_n(1)] \geq Z_n(0).$$

jokaiselle riskilliselle arvopaperille S_n, missä Z_n ovat määritelmän 2.3 mukaisia normitettuja arvopapereita.

Todistus. Jensenin epäyhtälön perusteella

$$u(Z_n(0)) = \mathrm{E}^P[u(Z_n(1))] \leq u(\mathrm{E}^P[Z_n(1)]).$$

Toimijan hyötyfunktion määrittelyjoukko on $\mathrm{Dom}(u(x)) = [0, \infty)$ ja se saa arvoja väliltä $\mathrm{Ran}(u(x)) = [0, 1)$. Monotonisuuden perusteella funktio $u(x)$ on kääntyvä ja käänteisfunktiolle

$$\mathrm{Dom}(u^{-1}(x)) = [0, 1) \text{ ja } \mathrm{Ran}(u^{-1}(x)) = [0, \infty).$$

Käänteisfunktion aidon kasvavuuden perusteella pätee

$$Z_n(0) = u^{-1}\left(\mathrm{E}^P[u(Z_n(1))]\right) \leq \mathrm{E}^P[Z_n(1)].$$

□

Martingaalien avulla voimme palata tarkemmin lauseen 2.4 sisältöön. Totesimme, että arbitraasittomassa yhden periodin mallissa on olemassa todennäköisyysmitta Q, jota käytettäessä kaikkien arvopapereiden normitetut hintaprosessit ovat martingaaleja. Tarkastelemalla normitettuja hintaprosesseja ja tulosta $\mathrm{E}^Q[Z_n(1)] = Z_n(0)$ voimme todeta, että muutamin heikoin lisäoletuksin lause todellakin pitää paikkansa. Saamme odotusarvon äärellisyysoletuksen katettua, jos oletamme toimijoille eksponentiaalisen hyötyfunktion $u(x) = 1 - e^{-ax}$, $a > 0$. Nyt voimme martingaaliprosessin ja suodatuksen määritelmän avulla todistaa tärkeän arbitraasittomuuteen liittyvän lauseen.

Lause 3.16. *Useamman periodin arbitraasittomassa mallissa jokainen osaperiodi on arbitraasiton.*

Todistus. Tämän lauseen voi todistaa monilla toisistaan poikkeavilla tavoilla. Eleganteinta on kuitenkin todistaa lause käyttämällä apuna martingaaliprosesseja. Totesimme aikaisemmin, että arbitraasittomassa yhden periodin mallissa on olemassa todennäköisyysmitta Q, jota käytettäessä kaikkien arvopapereiden normitetut hintaprosessit ovat martingaaleja. Merkitsemme usean periodin mallin alkupistettä $n = 0$ ja loppupistettä $n = N$ sekä markkinamallin arvopapereiden normitettua hintavektoria $\mathbf{Z}(n) = [Z_1(n), \ldots, Z_k(n)]^T$. Tällöin olemassa sigma-algebrat $\mathcal{F}_0$ ja $\mathcal{F}_N$. Arbitraasittomuuden perusteella prosessi $\mathbf{Z}(n)$ on Q-mitallinen sigma-algebrassa $\mathcal{F}_N$ ja triviaalisti sigma-algebrassa $\mathcal{F}_0$. Martingaaliprosessit $\mathbf{Z}(n)$ eivät pelkästään ole adaptoituja johonkin suodatukseen $\mathcal{F}$, vaan voimme myös tarkastella minimaalista suodatusta $\overline{\mathcal{F}}$, joka itsessään on prosessin $\mathbf{Z}(n)$ virittämä. Tällöin jokainen sigma-algebra $\overline{\mathcal{F}}_k$ toteuttaa ehdon $\overline{\mathcal{F}}_k \subseteq \overline{\mathcal{F}}_N$, kun $k \leq N$. Tämän perusteella vektorit $\mathbf{Z}(k)$ ovat Q-mitallisia, kun $k \leq N$. Tämä on lauseen 2.3 perusteella yhtäpitävää arbitraasittomuuden kanssa. □

4 Jatkuva-aikaiset stokastiset prosessit

4.1 Brownin liike ja Wiener-prosessit

Olemme edellä olettaneet, että arbitraasittomilla markkinoilla on olemassa vain yksi arvopaperi, jonka hintakehitystä voidaan kuvata deterministisillä prosesseilla. Käsittelemme tässä luvussa stokastisia prosesseja, joita käytetään arvopaperien hintaprosessien mallinnuksessa. Diskreettiaikaisiin satunnaisprosesseihin kuuluu niin sanottu satunnaiskävely.

Määritelmä 4.1. Oletetaan sellainen satunnaismuuttuja $Y_n(\omega)$, että

$$Y_n(\Omega_n) = \begin{cases} Y_n(\omega_{n,1}) = -1, \\ Y_n(\omega_{n,2}) = 1, \end{cases}$$

jokaiselle $n \in \mathbb{N}_+$. Tällöin summaprosessi

$$X_n = \begin{cases} X_0 = 0, \\ X_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$$

on itsessään satunnaismuuttuja, jota kutsutaan satunnaiskävelyksi.

Satunnaiskävelylle X_n minimaalisen sigma-algebran $\mathcal{F}_n$ virittää tulojoukko $\{\Omega_0 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n\}$. Sigma-algebra $\mathcal{F}_n$ on määritelmän suodatus, johon satunnaiskävely X_n on adaptoitu. Jos nyt pätee lisäksi $P(\omega_{n,1}) = P(\omega_{n,2}) = \frac{1}{2}$, kaikille $n \in \mathbb{N}_+$, on prosessi X_n itse asiassa diskreettiaikainen martingaali. Tämä symmetrinen satunnaiskävely on symmetrisesti binomijakautunut nollan ympärille. Satunnaismuuttujalle X_n pätee $\mathrm{E}[X_n] = 0$ ja $\mathrm{Var}[X_n] = n$. Todennäköisyyslaskennan klassisen tuloksen mukaan binomijakauma lähestyy normaalijakaumaa. Voimme määritellä satunnaiskävelylle jatkuva-aikaisen vastineen *Brownin liikkeen*. Jatkuva-aikaista normitettua Brownin liikettä kutsutaan myös *Wiener-prosessiksi*. Käytämme apuna kirjan *Arbitrage theory in continous time* määritelmää.

Määritelmä 4.2. Satunnaisprosessia W_t kutsutaan Wiener-prosessiksi, mikäli se täyttää seuraavat ehdot:

1. $W_0 = 0$

2. Prosessin W_t lisäykset ovat toisistaan riippumattomat. Eli, kun $r < s \leq t < u$, ovat $W_u - W_t$ ja $W_s - W_r$ toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia.

3. Kun $s < t$ satunnaismuuttuja $W_u - W_s$ on normaalijakautunut parametrein $N[0, u-s]$, missä $u - s$ on satunnaismuuttujan varianssi σ^2.

4. Prosessin W_t kuvaajat ovat jatkuvia melkein varmasti.

[1, s. 36]

Wiener-prosessin lisäysten riippumattomuudesta seuraa, että Wiener-prosessin kuvaajat ovat melkein kaikkialla ei-derivoituvia. Todistamatta toteamme, että tämän perusteella Wiener-prosessin kuvaajat ovat myös jokaisella äärellisellä välillä äärettömän pitkiä.

4.2 Johdantoa stokastiseen integraalilaskentaan

Esittelemme seuraavaksi tärkeän lauseen, jota tarvitsemme stokastisen integraalin johtamisessa. Tämä lause tunnetaan diskreettiaikaisena nimellä *Doob-hajotelma* ja jatkuva-aikaisena nimellä *Doob-Meyer-hajotelma*. Lauseen todistamiseksi tarvitsemme myös *pysäytysajan* käsitteen.

Määritelmä 4.3. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus ja parametrijoukko $\mathbb{T}$ joukon $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{Z}$ osajoukko. Olkoon myös τ satunnaismuuttuja, joka saa arvoja joukossa $\mathbb{T}$. Satunnaismuuttuja τ on suodatuksen $\mathcal{F}_t$ pysäytysaika, jos $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ jokaiselle $t \in \mathbb{T}$. [3, s. 187]

Parametrijoukko $\mathbb{T}$ voidaan laajentaa käsittämään myös äärettömän pitkät pysäytysajat. Toisin sanoen tällöin $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Pysäytysajoista käytetään usein esimerkkeinä uhkapelurin pelisuunnitelmaa. Ajatellaan peluria, joka aikoo pelata vain yhden kierroksen rulettia. Tällöin pelurin varallisuus X_n on diskreettiaikainen stokastinen prosessi pelattujen rulettikierrosten n suhteen ja $n = 1$ prosessin X_n deterministinen pysäytysaika. Mikäli peluri taas pelaa niin kauan, kunnes on saanut kaksinkertaistettua alkuvarallisuutensa tai vaihtoehtoisesti, kunnes on menettänyt koko alkuvarallisuutensa on pysäytysaika τ aidosti stokastinen muuttuja.

Määriteltyämme pysäytysajan käsitteen esittelemme ja todistamme nyt ensin diskreettiaikaisen Doob-hajotelma -lauseen.

Lause 4.1. *Olkoot X_n diskreettiaikainen alimartingaali, $\mathcal{F}_n$ alimartingaalin virittämä suodatus ja S_a kaikkien a:n rajaamien pysäytysaikojen joukko. Oletamme, että jokaiselle $a > 0$ satunnaismuuttujien joukko $\{X_\tau\}_{\tau \in S_a}$ tasaisesti integroituva. Tällöin on olemassa sellaiset jatkuvat satunnaisprosessit M_t ja A_t, että*

1. $X_n = M_n + A_n$, jokaiselle $n \geq 0$ melkein varmasti.

2. M_n on suodatukseen $\mathcal{F}_n (n \in \mathbb{N})$ adaptoitu martingaali.

3. $A_0 = 0$, $A_n (n \in \mathbb{N})$ on adaptoitu suodatukseen $\mathcal{F}_n$

4. A_n on $\mathcal{F}_{n-1}$-mitallinen.

5. A_n on kasvava, toisin sanoen $A_k(\omega) \leq A_m(\omega)$, jos $k \leq m$ jokaiselle ω.

Pari M_t, A_t on yksikäsitteinen niin, että jos on olemassa toinen pari $\overline{M}_t, \overline{A}_t$, joka täyttää samat ehdot, niin $M_t = \overline{M}_t$ ja $A_t = \overline{A}_t$ kaikille t melkein varmasti. [3, s. 190]

Todistus. Oletamme, että on olemassa edelläesitelty pari M_n ja A_n. Tällöin voimme kirjoittaa ensimmäisen yhtälön muodossa

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= M_{n-1} + A_{n-1}, \\ X_n &= M_n + A_n, \end{aligned}$$

kun $n \geq 1$. Lukijan on syytä huomata, että lähdeteoksen merkinnästä poikkeavasti määrittelemme, että $0 \in \mathbb{N}$. Vähentämällä yhtälöt puolittain toisistaan ja ottamalla ehdollisen odotusarvon sigma-algebran $\mathcal{F}_{n-1}$ suhteen saamme

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathrm{E}(A_n - A_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\mathrm{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} = A_n - A_{n-1}. \end{aligned}$$

Nyt voimme todeta, että prosessi X_n ja satunnaismuuttuja A_{n-1} määrittelevät satunnaismuuttujan A_n yksikäsitteisesti, koska suodatus $\mathcal{F}_n$ on luonnollinen, eli prosessin X_n virittämä. Tällöin myös martingaali M_n on yksikäsitteinen, sillä $M_n = X_n - A_n$. Koska $A_0 = 0$ pitää myös paikkansa, että $X_0 = M_0$. Käyttämällä induktiota voimme todeta, että pari M_n ja A_n on yksikäsitteinen. Nyt ottamalla ehdollisen odotusarvon $\mathcal{F}_{n-1}$:n suhteen yhtälöstä $M_n = X_n - A_n$ saamme

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) =& \mathrm{E}(X_n - A_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ =& \mathrm{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - A_n = X_{n-1} + (A_n - A_{n-1}) - A_n \\ =& X_{n-1} - A_{n-1} = \qquad M_{n-1},\ n \geq 1. \end{aligned}$$

Tämä osoittaa, että ehto 2. täyttyy. Toisin sanoen prosessi M_n on martingaali. Seuraavaksi voimme käyttää hyväksi yhtälöitä

$$\begin{aligned} &M_0 = X_0, A_0 = 0, \\ &A_n = \mathrm{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} + A_{n-1}, M_n = X_n - A_n,\ n \geq 1 \end{aligned}$$

määritelläksemme prosessit M_n ja A_n induktion avulla. Selvästikin olemme osoittaneet, että prosessit A_n ja M_n täyttävät diskreettiaikaisen hajotelman ehdot 1,4 ja 5. [3, s. 190] $\square$

Doob-hajotelman jatkuva-aikainen muoto tunnetaan nimellä *Doob-Meyer-hajotelma.*

Lause 4.2. *Olkoon X_t suodatukseen $\mathcal{F}_t, (t \in \mathbb{R}_+)$ adaptoitu jatkuva alimartingaali. Olkoon S_a kaikkien pysäytysaikojen joukko, joita a rajoittaa. Oletetaan, että jokaiselle $a > 0$ satunnaismuuttujat X_τ, $(\tau \in S_a)$ ovat tasaisesti integroituvia. Tällöin on olemassa kaksi jatkuvaa satunnaisprosessia M_t ja A_t, joille pätee:*

1. *$X_t = M_t + A_t$, melkein varmasti jokaiselle $t \geq 0$.*
2. *M_t on martingaali suodatuksen $\mathcal{F}_t$ suhteen.*
3. *$A_0 = 0$ ja A_t on adaptoitu suodatukseen $\mathcal{F}_t$.*
4. *A_t on kasvava, eli $A_s(\omega) \leq A_u(\omega)$, kun $s \leq u$, jokaiselle ω.*

Mikäli on olemassa toinen pari $\overline{M}_t$ ja $\overline{A}_t$, joka toteuttaa samat ehdot, niin silloin on olemassa sellainen täyttä mittaa oleva joukko Ω', että

$$\overline{M}_t = M_t \text{ ja } \overline{A}_t = A_t, \text{ jokaiselle } t \in \mathbb{R}_+ \text{ ja } \omega \in \Omega'.$$

[3, s. 174, 194]

Lauseen todistus ohitetaan. Toinen lause, jota tulemme tarvitsemaan jatkossa on *Vaihtoehtoisen näytteenoton lause.* Tämä lause ilmaisee, että prosessin martingaaliominaisuuden toteutuminen ei riipu näytteenottohetkestä.

Lause 4.3. *Olkoon $X_n, (n \in \mathbb{N})$ suodatukseen $\mathcal{F}_n$ adaptoitu alimartingaali ja olkoot τ ja ρ kaksi suodatuksen $\mathcal{F}_n$ sellaista pysäytysaikaa, että $\tau \leq \rho \leq k$, jollekin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee*

$$X_\tau \leq E(X_\rho \mid \mathcal{F}_\tau).$$

Mikäli kyseessä on martingaali- tai ylimartingaaliprosessi, voidaan merkki $\leq$ korvata vastaavasti merkillä $=$ tai $\geq$.

Todistus. Voimme keskittyä todistuksessamme tapaukseen, jossa prosessi X_n on alimartingaali. Valitsemalla prosessin $-X_n$ saamme ylimartingaalin ja valitsemalla prosessin, joka on sekä ali- että ylimartingaali, saamme todistuksen martingaalitapaukselle. Olkoon nyt $A \in \mathcal{F}_\tau$. Määrittelemme joukot

$$A_m = A \bigcap \{\tau = m\}, A_{m,n} = A_m \bigcap \{\rho = n\},$$
$$B_{m,n} = A_m \bigcap \{\rho > n\}, C_{m,n} = A_m \bigcap \{\rho \geq n\},$$

missä $1 \leq m \leq n$. On syytä huomata, että $\{\rho > n\}$ on $\mathcal{F}_n$-mitallinen, sillä sen komplementti $\{\rho \leq n\}$ on $\mathcal{F}_n$-mitallinen. Alimartingaalin määritelmän perusteella voimme nyt kirjoittaa

$$\int_{B_{m,n}} X_n dP \leq \int_{B_{m,n}} X_{n+1} dP.$$

Märittelimme edellä, että $C_{m,n} = A_{m,n} \bigcup B_{m,n}$, jolloin

$$\int_{C_{m,n}} X_n dP \leq \int_{A_{m,n}} X_n dP + \int_{B_{m,n}} X_{n+1} dP.$$

Määritelmän mukaan $B_{m,n} = C_{m,n+1}$, jolloin

$$\int_{C_{m,n}} X_n dP - \int_{C_{m,n+1}} X_{n+1} dP \leq \int_{A_{m,n}} X_n dP.$$

Ottamalla nyt summan

$$\sum_{n=m}^{k} \left(\int_{C_{m,n}} X_n dP - \int_{C_{m,n+1}} X_{n+1} dP \right) \leq \sum_{n=m}^{k} \int_{A_{m,n}} X_n dP,$$

jossa vasemmalla puolella vierekkäiset termit kumoavat toisensa, saamme tulokseksi

$$\int_{A_m} X_m dP \leq \int_{A_m} X_\rho dP,$$

kun huomaamme, että itse asiassa $A_m = C_{m,m}$. Nyt ottamalla summan

$$\sum_{m=1}^{k} \int_{A_m} X_m dP \leq \sum_{m=1}^{k} \int_{A_m} X_\rho dP,$$

saamme tulokseksi

$$\int_A X_\tau dP \leq \int_A X_\rho dP.$$

Koska joukko $A \in \mathcal{F}_\tau$ voidaan valita mielivaltaisesti pätee silloin myös

$$X_\tau \leq \mathrm{E}(X_\rho \mid \mathcal{F}_\tau).$$

[3, s. 191] □

Toteamme todistamatta, että ylläesitetty vaihtoehtoisen näytteenoton lause pätee myös jatkuva-aikaisessa tapauksessa.

Vaihtoehtoisen näytteenoton lauseen avulla voimme muotoilla kaksi apulausetta, joita tarvitsemme jatkossa käsitellessämme stokastisia integraaleja. Esitystavan selkeyden vuoksi käytämme merkintöjä $\min(a, b) = a \wedge b$ ja $\max(a, b) = a \vee b$.

Lause 4.4. *Olkoon $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ oikealta jatkuva martingaali ja τ suodatuksen $\mathcal{F}_t$ pysäytysaika. Tällöin, mikäli $Y_t = X_{t\wedge\tau}$, on $(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ myös oikealta jatkuva martingaali.*

Todistus. Meidän tulee osoittaa, että $\mathrm{E}(Y_t - Y_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$, kun $s \leq t$. Voimme nyt merkitä

$$\mathrm{E}(Y_t - Y_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathrm{E}(X_{t\wedge\tau} - X_{s\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_s) = \mathrm{E}((X_{(t\wedge\tau)\vee s)} - X_s) \mid \mathcal{F}_s) = 0.$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa suoraan määritelmistä ja viimeinen vaihtoehtoisen näytteenoton lauseesta. Olemme näin todistaneet, että Y_t on martingaali. Funktio $\tau \wedge t$ on muuttujan t jatkuva funktio. Täten myös $Y_t = X_{t\wedge\tau}$ perii prosessin X_t oikeanpuoleisen jatkuvuuden. [3, s. 191] □

Lause 4.5. *Olkoon $(X_t, \mathcal{F}_t)$ oikealta jatkuva alimartingaali. Tällöin kaikille $t \in \mathbb{R}_+$ ja mille tahansa $\lambda > 0$ pätee*

$$\lambda P(A(\lambda, t)) \leq \int_{A(\lambda,t)} X_t dP \leq E[\max(X_t, 0)],$$

missä $A(\lambda, t) = \{\omega\colon \sup_{0\leq s\leq t} X_s(\omega) \geq \lambda\}$. [3, s. 194]

4.3 Martingaaliprosessin neliöhajonta

Aloitamme Stokastisen integraalin johtamisen määrittelemisen määrittelemällä neliöhajonnan käsitteen martingaaliprosessille. Rajoitumme tarkastelussamme neliöintegroituvien martingaalien luokkaan. Tämä luokka määritellään kirjassa *Theory of probability and random processes* seuraavasti.

Määritelmä 4.4. Olkoon $\mathcal{F}_t$ suodatus todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Määritellään ekvivalenssiluokkien avaruus $\mathcal{M}_2^c$ seuraavasti. Ekvivalenssiluokkaa edustava prosessi $X_t \in \mathcal{M}_2^c$,mikäli

- X_t on martingaali
- $X_0 = 0$ melkein varmasti
- Prosessin X_t kuvaajat ovat jatkuvia melkein varmasti
- X_t on neliöintegroituva, eli $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

[3, s. 292]

Oletetaan nyt martingaaliprosessi X_t, joka kuuluu avaruuteen $\mathcal{M}_2^c$, eli neliöintegroituvien ja jatkuvien martingaalien avaruuteen. Prosessi X_t^2 voidaan ilmaista funktion $f(x) = x^2$ avulla muodossa $X_t^2 = f(X_t)$. Martingaaliominaisuuden ja lauseen 4.3 perusteella

$$X_m = \mathrm{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m), \text{ jokaiselle } m, n.$$

Koska funktio x^2 on konveksi, pätee Jensenin epäyhtälön 3.14 perusteella

$$f(\mathrm{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq \mathrm{E}(f(X_n \mid \mathcal{F}_m)), \text{ jokaiselle parille } m \leq n.$$

Tämän perusteella prosessi X_t^2 on alimartingaali ja käyttämällä Doob-Meyer hajotelmaa, voimme määritellä sellaiset yksikäsitteiset prosessit A_t ja M_t, että $X_t^2 = M_t + A_t$, missä M_t on martingaali ja A_t kasvava prossessi. On syytä huomata, että Doob-Meyer-hajotelman käyttämiseksi meidän täytyy tehdä lisäoletuksia satunnaismuuttujan X_t tasaisesta integroituvuudesta. Ohitamme tämän todistuksen.

Esitämme nyt yleisen neliöhajonnan käsitteen ja todistamme sen jälkeen Wiener-prosessin neliöhajontaa koskevan lauseen.

Määritelmä 4.5. Olkoon funktio f määritelty reaaliakselin välillä $[a, b]$. Tällöin funktion neliöhajonta ositukselle σ määritellään

$$V_{[a,b]}^2(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^2 \,,$$

missä σ on välin $[a, b]$ sellainen ositus, että $\sigma = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$. Osituksen normi $\delta(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq n}(t_i - t_{i-1})$.

Lause 4.6. *Olkoon W_t normaalimuotoinen Wiener-prosessi todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tällöin*

$$\lim_{\delta(\sigma) \to 0} V_{[0,t]}^2(W_s(\omega), \sigma) = t, \text{ avaruudessa } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Todistus. Voimme määritelmän 4.5 perusteella kirjoittaa

$$\mathrm{E}(V_{[0,t]}^2(W_s(\omega), \sigma) - t)^2 = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})])^2$$

Odotusarvon lineaarisuuden perusteella voimme kirjoittaa lausekkeen muodossa

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})])^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})]^2,$$

sillä termi $\mathrm{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})((W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})) = 0$, kun $i \neq j$. Arvioimme nyt lauseketta ylhäältäpäin

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})]^2 \leq& \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^4 + \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 \\ =& 4\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 \\ \leq& 4 \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) \sum_{i=1}^{n}(t_1 - t_{i-1}) \\ =& 4t\delta(\sigma) \to 0, \text{ kun } \delta(\sigma) \to 0.\end{aligned}$$

[3, s. 271] □

Määritelmä 4.6. Prosessia A_t hajotelmassa $X_t^2 = M_t + A_t$ kutsutaan nimellä *martingaaliprosessin neliöhajonta* ja sitä merkitään $A_t = \langle X_t \rangle$.

Voimme nyt lauseen 4.6 perusteella lyhyesti todeta, että koska $\mathrm{E}(W_t^2) = t$ on prosessi $W^2 - t$ martingaali ja $\langle W \rangle_t = t$ Doob-Meyer-hajotelman yksikäsitteisyyden perusteella. [3, s. 292]

4.4 Integrandit

Määrittelemme nyt integroitavien funktioiden luokkien avaruuden. Seuraamme tässä *Theory of probability and random processes* -kirjan lukua 20.2. Tavoitteena on löytää merkitys lausekkeelle $I_t(X) = \int_0^t X_s dM_s$. Lukijan on syytä huomata, että integraalia ei voi määritellä perinteisen Lebesgue-Stieltjes-integraalin avulla, koska prosessi M_s ei ole rajoitetusti heilahteleva millään määrittelyvälillä. Ainoa poikkeus on tapaus $\langle M_s \rangle = 0$, joka on ilmiselvän triviaali. Oletamme jatkossa, että $M_t \in \mathcal{M}_2^c$.

Määrittelemme nyt mittaperheen μ_t, jolle

$$\mu_t(A) = \mathrm{E} \int_0^t \chi_A(\omega, s) d \langle M_s \rangle .$$

Toisin sanoen,

$$\mu_t(A) = \int_{\omega \in \Omega} \int_0^t \chi_A(\omega, s) d \langle M_s \rangle \, dP.$$

Odotusarvo on olemassa, sillä sitä voidaan arvioida alhaalta- ja ylhäältäpäin

$$0 \leq \int_{\omega \in \Omega} \int_0^t \chi_A(\omega, s) d \langle M_s \rangle \, dP \leq \int_0^t 1 d \langle M_s \rangle = \langle M_t \rangle < \infty.$$

Mitan sigma-additiivisuus seuraa Levyn monotonisen konvergenssin lauseesta 3.8. Esimerkiksi tapauksessa $A = [2, \infty[$, $\mu_t(A)$ kertoo odotuspituuden sille yhteenlasketulle ajanjaksolle välillä $[0, t]$, jonka aikana prosessi M_t saa arvoja väliltä $[2, \infty[$. Riittävä rajoitus joukoille A on

$$A \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, t]).$$

Oletetaan nyt joukossa $\Omega \times [0, t]$ määritelty $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, t])$-mitallinen funktio f. Voimme nyt määritellä integraalin

$$\int_{\Omega \times [0,t]} f d\mu_t = \mathrm{E} \int_0^t f(\omega, s) d \langle M_s \rangle (\omega).$$

Kuten edellä esitimme pitää tämä yhtälö paikkaansa indikaattorifunktioille ja sigma-additiivisuuden nojalla silloin myös yksinkertaisille funktioille $g \in \mathcal{Y}$, jotka saavat korkeintaan äärellisen määrän arvoja.

$$g(\omega, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[u_{i-1}, u_i]}, a_i \in \mathbb{R}_+ \cup 0, u_i \in [0, t]$$

Ei-negatiivisia funktioita voidaan Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen 3.5 perusteella arvioida suppenevalla yksinkertaisen funktioiden jonolla. Toisin sanoen valitsemme mielivaltaisen ei-negatiivisen funktion f_+. Tällöin on olemassa sellainen monotonisesti kasvava jono yksinkertaisia funktioita g_n, että

$$\lim_{n \to \infty} g_n = f_+.$$

Integraali on määritelty myös ei-positiivisille funktioille, sillä kaikki funktiot f voidaan ilmaista kahden positiivisen funktion erotuksena,

$$f(\omega, s) = \max(h_1(\omega, s), 0) - (-\min(h_2(\omega, s), 0).$$

Tämän perusteella ylläesitetty integraali on hyvinmääritelty.

Määritelmä 4.7. Olkoon avaruus $\mathcal{H}_t = L^2(\Omega \times [0, t], \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, t]), \mu_t)$. Täten siis, mikäli funktio $f \in \mathcal{H}_t$, sen rajoittuma välille $[0, t]$ on mitallinen sigma-algebran $\mathcal{F}_t$ ja välin $(0, t)$ Borel-joukkojen muodostamassa karteesisessa tulojoukossa sekä neliöintegroituva. Tarkemmin ilmaistuna avaruuden alkiot eivät ole funktioita, vaan funktioluokkia. Näiden funktioluokkien edustajat ovat melkein varmasti yhtäsuuria, mitan μ_t suhteen. Määrittelemme lisäksi, että $f \in \mathcal{H}$, jos $f \in \mathcal{H}_t$, jokaiselle $t \geq 0$.

Määrittelemme seuraavaksi normin ja metriikan avaruudessa $\mathcal{H}$.

Määritelmä 4.8. Olkoon $f \in \mathcal{H}_t$ ja $0 \leq t < \infty$. Tällöin funktion f $\mathcal{H}_t$-normi määritellään

$$\|f\|_{\mathcal{H}_t} = \sqrt{\int_{\omega \in \Omega} f^2(\omega, t) d\mu_t}.$$

Määritelmä 4.9. Olkoot $f, g \in \mathcal{H}$. Tällöin

$$d_{\mathcal{H}}(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(\|f - g\|_{\mathcal{H}_n}, 1).$$

Avaruus $\mathcal{H}$ metriikalla $d_{\mathcal{H}}$ on myös täydellinen. [3, s. 296]

4.5 Yksinkertaiset prosessit

Käytämme stokastisten integraalien johtamisessa samanlaista lähestymistapaa, mikä on käytössä Lebesgue-integraalia määriteltäessä. Määrittelemme ensin niin sanotun *yksinkertaisen prosessin.*

Määritelmä 4.10. Stokastista prosessia X_t sanotaan yksinkertaiseksi, mikäli on olemassa sellainen aidosti kasvava reaalilukujen t_n jono, että

$$t_0 = 0, \lim_{n \to \infty} t_n = \infty$$

ja sellainen rajoitettu jono satunnaismuuttujia ξ_n, että jokainen ξ_n on $\mathcal{F}_{t_n}$-mitallinen ja että

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega)\chi_{\{0\}}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega)\chi_{]t_n, t_{n+1}]}(t), \text{ kun } \omega \in \Omega, t \geq 0.$$

Merkitsemme yksinkertaisten prosessien luokkaa $\mathcal{L}_0$ ja kaikkien jatkuvien stokastisten prosessien luokkaa $\mathcal{L}^*$.[3, s. 297].

Kaikki diskreettiaikaiset prosessit, kuten esimerkiksi diskreettiaikainen satunnaiskävely, ovat yksinkertaisia prosesseja. Käyttääksemme apuna yksinkertaisten prosessien luokkaa määritellessämme stokastisia integraaleja meidän täytyy ensin todistaa, että jokaista stokastista prosessia luokassa $\mathcal{L}^*$ vastaa Cauchy-jono luokassa $\mathcal{L}_0$.

Lause 4.7. *Yksinkertaisten prosessien joukko $\mathcal{L}_0$ on tiheä joukossa $\mathcal{L}^*$ avaruuden $\mathcal{H}$ metriikalla $d_{\mathcal{H}}$.*

Todistus. Todistamme lauseen ainoastaan tapauksessa, jossa prosessit X_t ovat jatkuvia. Arbiraasiteorian näkökulmasta on riittävää tarkastella prosesseja, jotka ovat melkein varmasti jatkuvia. Lauseen mukaan jokaista jatkuvaa prosessia $X_t \in \mathcal{L}^*$ kohden on olemassa sellainen jono yksinkertaisia prosesseja $X_t^n \in \mathcal{L}_0$, että $\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{H}}(X_t, X_t^n) = 0$. Metriikan $d_{\mathcal{H}}$ määritelmän perusteella riittää todistaa jokaiselle luonnolliselle luvulle m, että on olemassa jono yksinkertaisia prosesseja, joille

$$\lim_{n\to\infty} \|X_t^n - X_t\|_{\mathcal{H}_m} = 0.$$

Lauseen pitäessä paikkansa on siis olemassa yksinkertainen prosessi $X^{(m)}$, joka toteuttaa ehdon $\left\|X_t^{(m)} - X_t\right\|_{\mathcal{H}_m} < \frac{1}{m}$ jokaiselle luonnolliselle luvulle m. Voimme nyt määritellä (lisää ehkä) yksinkertaisen prosessin

$$X_t^n(\omega) = X_0(\omega)\chi_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} X_{km/n}(\omega)\chi_{(km/n,(k+1)m/n]}(t).$$

Olemme nyt konstruoineet jonon määritelmän 4.10 mukaisia yksinkertaisia prosesseja, jotka "ottavat näytteitä"prosessista X_t hetkillä km/n. Koska prosessi X_t on melkein varmasi jatkuva, suppenee jono $X_t^{(m)}$ melkein varmasti uniformisti sitä kohden välillä $[0, m]$. Mikäli on olemassa sellainen c, että $|X_t(\omega)| \leq c$, jokaiselle $\omega \in \Omega$, välillä $[0, m]$ - toisin sanoen, mikäli $X_t(\omega)$ on rajoitettu - voimme lauseen 3.5 nojalla todeta, että

$$\lim_{n\to} \|X_t^n - X_t\|_{\mathcal{H}_n} = 0.$$

Mikäli X_t ei ole rajoitettu, voimme konstruoida niin sanotun leikatun prosessin $Y_t^n(\omega)$ määrittelemällä

$$Y_t^n(\omega) = \begin{cases} -n, \text{ kun } X_t(\omega) < -n \\ X_t(\omega), \text{ kun } |X_t(\omega)| \leq n \\ n, \text{ kun } X_t(\omega) > n. \end{cases}$$

Nyt jokainen prosessi Y_t^n on jatkuva, mitallinen ja rajoitettu välillä $[0, m]$. Voimme nyt käyttää yksinkertaisia prosesseja arvioitaessa prosesseja Y_t^n ja taas prosesseja Y_t^n arvioitaessa prosessia X_t, sillä $\lim_{n\to\infty} \|Y_t^n - X_t\|_{\mathcal{H}_m} = 0$. Näin olemme todistaneet, että jokaiselle mitalliselle, melkein varmasti jatkuvalle prosessille X_t on olemassa sellainen jono yksinkertaisia prosesseja X_t^n, että $\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{H}}(X_t^n, X_t) = 0$. Näin ollen joukko $\mathcal{L}^0$ on tiheä joukossa $\mathcal{L}^*$. $\square$

4.6 Itô-kaava

Esittelemme nyt tämän pitkähkön johdannon jälkeen Itô-kaavan, joka on keskeisessä osassa tutkittaessa jatkuva-aikaista arbitraasiteoriaa.

Määritelmä 4.11. Olkoon $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ suodatukseen $\mathcal{F}_t$ adaptoitu stokastinen prosessi. Tällöin $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ on jatkuva semimartingaali, mikäli se voidaan esittää muodossa

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

missä $M_t \in \mathcal{M}^c$ ja A_t jatkuva samaan suodatukseen adaptoitu prosessi, jolle $A_0 = 0$ melkein varmasti. Lisäksi oletamme, että prosessin A_t kokonaishajonta on äärellinen jokaisella rajoitetulla välillä melkein varmasti.

Voimme arbitraasiteorian näkökulmasta kiristää ehtoja olettamalla, että $M_t \in \mathcal{M}_2^c$ ja käyttää tästä erikoistapausta

$$X_t = X_0 + W_t + A_t,$$

missä W_t on suodatukseen $\mathcal{F}_t$ adaptoitu Wiener-prosessi.

Lause 4.8. *Olkoon $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ja olkoon $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ edelläesitetyn mukainen jatkuva semimartingaali. Tällöin yhtälö*

(12)
$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\left\langle M\right\rangle_s$$

pitää melkein varmasti paikkansa kaikille $t \geq 0$.

Todistus. Todistamme lauseen tapauksessa, jossa $M_t = W_t$ ja funktio f samoin kuin sen ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat rajoitettuja. Oletamme nyt siis, että

$$X_t = X_0 + W_t + A_t.$$

Tällöin yhtälö (12) saa muodon

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dW_s + \int_0^t f'(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)ds. \tag{13}$$

Jaamme nyt välin $[0,t]$ n kappaleeseen välejä ja merkitsemme tätä ositusta $\sigma = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ ja tämän osituksen normia $\|\sigma\| = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$.

Nyt siis $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = t$. Taylorin kaavan perusteella voimme kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^{n} (f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}})) \\
&= f(X_0) + \sum_{i=1}^{n} f'(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

missä valitsemme muuttujat ξ_i niin, että ne toteuttavat ehdot

$$
\begin{aligned}
&\min(X_{t_{i-1}}, X_{t_i}) \leq \xi_i \leq \max(X_{t_{i-1}}, X_{t_i}), \\
&f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}}) = f'(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} f(\xi_i)(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2
\end{aligned}
$$

Määrittelemme nyt uuden satunnaisprosessin $Y_s = f'(X_s)$,
$0 \leq s \leq t$. Oletimme edellä, että $f \in C^{1,2}$, joten koska prosessi X_s on melkein varmasti jatkuva, on myös prosessi Y_s melkein varmasti jatkuva. Voimme nyt määritelmän 4.10 mukaisella tavalla muodostaa yksinkertaisen prosessin Y_s^σ merkitsemällä

$$
Y_s^\sigma = f'(X_0)\chi_{\{0\}}(s) + \sum_{i=1}^{n} f'(X_{t_{i-1}})\chi_{(t_{i-1}, t_i)}(s), \text{ kun } 0 \leq s \leq t. \qquad (15)
$$

Totesimme edellä, että $Y_s(\omega)$ on melkein varmasti jatkuva, joten silloin pitää myös melkein varmasti paikkansa $\lim_{\|\sigma\| \to 0} Y_s^\sigma(\omega) = Y_s(\omega)$, missä suppeneminen on tasaista välillä $[0, t]$. Voimme nyt hajottaa yhtälössä (14) esiintyvän ensimmäisen derivaatan summatermin osiin käyttämällä identtistä yhtälöä $X_t = X_0 + W_t + A_t$:

$$
\sum_{i=1}^{n} f'(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} f'(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^{n} f'(X_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}).
$$

Tämä yhtälö voidaan edelleen kirjoittaa yksinkertaisten funktioiden (15) avulla integraalimuodossa

$$
\sum_{i=1}^{n} f'(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) = \int_0^t Y_s^\sigma dW_s + \int_0^t Y_s^\sigma dA_s.
$$

Lukijan on syytä huomata, että tämä kirjoitusasun muutos integraalimuotoon säilyttää funktion täysin identtisenä, koska funktio Y_s^σ on diskreetti jokaiselle $\|\sigma\| > 0$. Meillä on nyt kaksi erilaista prosessia käsiteltävänä.

Jälkimmäinen integraali on Lebesgue-Stieltjes -integraali, joka voidaan ilmaista kahden Lebesgue-integraalin erotuksena. Näin ollen voimme käyttää apuna Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta 3.5. Tämän perusteella

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \int_0^t Y_s^\sigma dA_s = \int_0^t Y_s dA_s \text{ melkein varmasti.}$$

Voimme todeta stokastisen integraalin $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suppenemisen

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \int_0^t Y_s^\sigma dW_s = \int_0^t Y_s dW_s$$

kirjoittamalla

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \mathrm{E}\left[\left(\int_0^t (Y_s^\sigma - Y_s)dW_s\right)^2\right] = \lim_{\|\sigma\|\to 0} \mathrm{E}\left[\int_0^t (Y_s^\sigma - Y_s)^2 ds\right] = 0.$$

Voimme oikeuttaa tämän askelen muistamalla, että integraalin diskreetissä summamuodossa

$$\mathrm{E}\left((W_{t_i} - Wt_{i-1})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right) = 0,$$

aina, kun $i \neq j$ lisäysten riippumattomuuden perusteella. Sen lisäksi olemme edellä todenneet, että $W_s^2 = s$, joten tämän perusteella myös $(dW_s)^2 = ds$. Tarkastelemme nyt yhtälön (14) jälkimmäistä osaa. Voimme samalla tavalla hajottaa toisen derivaatan summatermin osiin

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} + A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 \tag{17}$$

$$+ \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})$$

Haarukoimalla kahta viimeistä summatermiä saamme

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2| \\
=& |f''(\xi_i)\sum_{i=1}^n \left\{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2\right\}| \\
\leq& \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|(\max_{1\leq i\leq n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| + \frac{1}{2}\max_{1\leq i\leq n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|)\sum_{i=1}^n |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|
\end{aligned}$$

Voimme todeta helposti, että melkein varmasti

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \max_{1\le i\le n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| = 0 \text{ ja } \lim_{\|\sigma\|\to 0} \max_{1\le i\le n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| = 0 \tag{18}$$

$$\text{sekä } \sum_{i=1}^{n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| < K, \text{ jollekin } K \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Yhtälöt (18) seuraavat suoraan prosessien A_t ja W_t jatkuvuudesta ja yhtälö (19) siitä, että prosessin A_t hajonta on rajoitettu. Tämän perusteella voimme päätellä, että melkein varmasti

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|(\max_{1\le i\le n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| + \frac{1}{2} \max_{1\le i\le n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|) \sum_{i=1}^{n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| = 0,$$

joten myös melkein varmasti

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 = 0.$$

Nyt on riittävää tarkastella yhtälön (17) ensimmäistä summatermiä, koska kaksi jälkimmäistä termiä häviävät. Valitsimme termit ξ_i niin, että

$$\xi_i = X_{t_k}, \text{ jollekin } t_k \in [t_{i-1}, t_i].$$

Todistamme nyt, että jakoa tihennettäessä $\lim_{\|\sigma\|\to 0} \xi_i = X_{t_{i-1}}$ johtaa tulokseen

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_i})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2,$$
$$\text{avaruudessa } L^1(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Otamme ensin odotusarvon termien erotuksen itseisarvosta ja arvioimme sitä ylhäältäpäin käyttäen Cauchy-Schwarz epäyhtälöä

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right|\right] \\
=&\mathrm{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n}(f''(\xi_i) - f''(X_{t_{i-1}}))(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right|\right] \\
\le&\mathrm{E}\left[\max |f''(\xi_i) - f''(X_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^{n} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right] \\
\le&\sqrt{\mathrm{E}[\max_{1\le i\le n} |f''(\xi_i) - f''(X_{t_{i-1}})|]^2} \sqrt{\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2]^2}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Edellämääritellyn perusteella f'' on jatkuva ja rajoitettu. Tästä seuraa, että jaon tihentyessä $\lim_{\|\sigma\|\to 0} f''(\xi_i) - f''(X_{t_{i-1}}) = 0$ melkein varmasti, joten myös yhtälön (20) ensimmäinen neliöjuuritermi lähenee silloin nollaa. Suppenemisen todistamiseksi riittää nyt osoittaa, että jälkimmäinen neliöjuurilauseke on rajoitettu. Voimme tehdä tämän arvioimalla lauseketta ylhäältäpäin.

$$\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2]^2 = 3\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 + \sum_{i\neq j}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \tag{21}$$

$$\leq 3(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}))(\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = 3t^2. \tag{22}$$

Tutkimme nyt erotuksen

$$\sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})$$

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$-suppenemista. Arvioimme erotuksen odotusarvon neliötä jälleen ylhäältäpäin.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[(f''(X_{t_{i-1}})^2)((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}))^2] \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)^2| (\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]^4 + \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2) \\
&= 4\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|^2 \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 \leq 4\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|^2 \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\
&= 4\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|^2 t\, \|\sigma\| \to 0, \text{ kun } \|\sigma\| \to 0 (L^2).
\end{aligned}$$

Huomaamme, että olemme käsitelleet jo varsin samanlaista suppenemista lauseessa 4.6 ja itse asiassa voimme perustella suppenemistarkastelut myös täsmälleen samoilla, lauseen 4.6 argumenteilla. Selvästikin myös melkein varmasti pätee

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d_s. \tag{23}$$

Voimme nyt koota palaset yhteen seuraamalla lähdeteoksen menettelyä. Merkitsemme

(24)
$$f(X_t) = f(X_0) + S_1^\sigma + S_2^\sigma + (S_3^\sigma - \tilde{S}_3^\sigma) + (\tilde{S}_3^\sigma - \overline{S}_3^\sigma) + \overline{S}_3^\sigma + S_4^\sigma + S_5^\sigma, \text{ missä}$$

$$\begin{cases} S_1^\sigma = \int_0^t Y_s^\sigma dW_s, \; S_2^\sigma = \int_0^t Y_s^\sigma dA_s, \\ (S_3^\sigma - \tilde{S}_3^\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - \sum_{i=1}^n f''(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2), \\ (\tilde{S}_3^\sigma - \overline{S}_3^\sigma) = \sum_{i=1}^n f''(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) \\ \overline{S}_3^\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) \\ S_4^\sigma = \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}) \\ S_5^\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 \end{cases}$$

Valitsemme nyt jonon $\sigma(n)$, jolle $\lim_{n\to\infty} \|\sigma(n)\| = 0$. Osoitimme edellä, että

$$\lim_{n\to\infty} S_1^{\sigma(n)} = \int_0^t f'(X_s)dW_s, L^2(\Omega, \mathcal{F}, P), \tag{25}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_2^{\sigma(n)} = \int_0^t f'(X_s)dA_s, \text{ melkein varmasti}, \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_3^{\sigma(n)} - \tilde{S}_3^{\sigma(n)}) = 0, \text{ avaruudessa} L^1(\Omega, \mathcal{F}, P), \tag{27}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\tilde{S}_3^{\sigma(n)} - \overline{S}_3^{\sigma(n)}) = 0, \text{ avaruudessa } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P), \tag{28}$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_3^{\sigma(n)} = \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)ds, \text{ melkein varmasti}, \tag{29}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_4^{\sigma(n)} = \lim_{n\to\infty} S_5^{\sigma(n)} = 0 \text{ melkein varmasti}. \tag{30}$$

Totesimme luvussa 3, että $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$-suppenemisesta seuraa $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$-suppeneminen, ja että L^1-suppenevasta jonosta voimme valita melkein varmasti suppenevan osajonon. Kokoamalla yhteen yhtälön (24) sekä yhtälöt (25) - (30) sekä valitsemalla melkein varmasti suppenevat osajonot olemme näin todistaneet, että yhtälö (12) on tosi melkein varmasti. [3, s. 305-309] □

5 Black-Scholes-malli

5.1 Geometrinen Brownin liike

Olemme nyt johtaneet ja määritelleet Stokastisen Itô-integraalin. Itô-integraalin avulla pystymme nyt käsittelemään niin sanottuja stokastisia differentiaaliyhtälöitä. Lukijan on syytä huomata, että ei ole mielekästä etsiä merkityksiä yksittäiselle satunnaisprosessin realisaatiolle. Sen sijaan olemme kiinnostuneita siitä, millaista informaatiota voimme saada prosessin käyttäytymisestä kokonaisuudessaan. Valaisemme asiaa muutamalla esimerkillä.

Esimerkki 5.1. Oletetaan normaalimuotoinen Wiener-prosessi W_t. Haluamme nyt tutkia funktion $f(t, X_t)$ käyttäytymistä, kun $X_t = W_t$ ja $f(t, X_t) = x^6$. Ei ole mielekästä, eikä itse asiassa edes mahdollista tutkia prosessin käyttäytymistä jokaiselle realisaatiolle ω. Sen sijaan voimme tutkia funktion odotusarvoa Itô-integraalin avulla. Tällöin voimme kirjoittaa yhtälön (12) mukaisesti

$$df(t, X_t) = 15W_t^4 ds + 6W^5 dW_t \text{ ja } f(0, X_0) = 0.$$

Integroimme nyt lausekkeen puolittain ja saamme

$$f(t, X_t) = 0 + 15 \int_0^t W_s^4 ds + 6 \int_0^t W_s^5 dW_s.$$

Otamme tästä lausekkeesta odotusarvon puolittain

$$\mathrm{E}(W_t^6) = 15\mathrm{E}[\int_0^t W_s ds] + 6\mathrm{E}[\int_0^t W_s^5 dW_s].$$

Nyt Wiener-prosessin suhteen otetun integraalin odotusarvo on aina nolla, joten jäljelle jää

$$\mathrm{E}(W_t^6) = 15\mathrm{E}[\int_0^t W_s^4 ds]$$

Voimme nyt muuttaa integrointijärjestystä, eli siirtää odotusarvon integraalin sisään. Koska W_t on martingaali, tästä seuraa tulos

$$\mathrm{E}(W_t^6) = 15\mathrm{E}[\int_0^t W_s^4 ds] = 15 \int_0^t \mathrm{E}[W_s^4] ds = 15t^3.$$

Esimerkki 5.2. Kiinnostavampi esimerkki saadaan, kun tutkitaan niin sanottua geometrista Brownin liikettä. Kyseessä on stokastinen prosessi, jonka suhteellinen muutos normaalijakautunut. Toisin sanoen prosessin logaritmi on Wiener-prosessi. Käytämme tässä apuna kirjassa *Arbitrage theory in continuous time* esitettyä esimerkkiä. Formaalisti merkittynä tälläinen prosessi on muotoa

$$f(t, X_t) = e^{\sigma W_t}.$$

Lukijan on jälleen kerran syytä huomata, että ei ole mielekästä edes yrittää integroida prosessin yksittäisiä realisaatioita. Sen sijaan tutkimme taas kerran odotusarvoa $\mathrm{E}[f(t, X_t)]$. Itô-kaavan (12) mukaisesti

$$df(t, X_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\sigma W_t} dt + \sigma e^{\sigma W_t} dW_t.$$

Kun lisäksi $f(0, X_0) = 1$, voimme kirjoittaa yhtälön muodossa

$$f(t, X_t) = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t e^{\sigma W_t} ds + \sigma \int_0^t e^{\sigma W_t} dW_t.$$

Otamme jälleen odotusarvon puolittain ja edellisen esimerkin tapaan stokastinen integraali häviää yhtälöstä

$$\mathrm{E}[f(t, X_t)] = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{E}[\int_0^t e^{\sigma W_t} ds] = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t \mathrm{E}[e^{\sigma W_t}] ds.$$

Merkitsemme nyt odotusarvoa $\mathrm{E}[e^{\sigma W_t}] = g(t)$. Tällöin yhtälö saa muodon

$$g(t) = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t g(t) ds$$

Derivoimalle puolittain t:n suhteen saamme

$$\begin{cases} g'(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 g(t) \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Tämä differentiaaliyhtälö on ratkaistavissa perinteisin menetelmin.

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2}\sigma^2 g(t) \\ \frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{\sigma^2}{2} \\ \ln g(t) &= \frac{\sigma^2 t}{2} \\ \mathrm{E}[e^{\sigma W_t}] &= g(t) = e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}. \end{aligned}$$

[1, s. 51]

Geometrinen Brownin liike on log-normaalijakautunut. Log-normaalijakauman odotusarvo $\mathrm{E}[x] = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$ ja $\mathrm{Var}[x] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$, missä muuttuja $\ln(x)$ on normaalijakautunut parametrein μ ja σ.

Johdamme nyt Itô-lauseen avulla kaksi tärkeää tulosta.

Lause 5.1. *Semimartingaaliprosessi* $X_t = X_0 + \sigma W_t + \mu_t$ *voidaan esittää muodossa*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma dW_s + \int_0^t d\mu_t.$$

Todistus. Sovellamme Itô-kaavaa yhtälöön $f(t, X_t) = X_t$, jolloin saamme

$$\begin{aligned} f(X_t, t) =& X_0 + \int_0^t 1\sigma dW_s + \int_0^t 1 d\mu_t + \int_0^t 0 d\left\langle W_s \right\rangle \\ X_t =& X_0 + \sigma W_t + \mu_t \end{aligned}$$

□

Haluamme nyt mallintaa riskillisen arvopaperin käyttäytymistä. Riskittömälle arvopaperille pätee differentiaaliyhtälö $dS_0(t) = \delta dt$, jolla on ratkaisu

$$S_0(t) = S_0(0)e^{\delta t}.$$

Yhtälössä käytetty δ on korkoutuvuus, joka saadaan laskemalla yksikköaikakorosta $i\%$ kaavalla $\delta = \ln(1 + \frac{i}{100})$. Riskillisen arvopaperin $S(t)$ hintaprosessissa on myös mukana häiriötekijä, jota mallinnamme Wiener-prosessilla W_t. Oletamme nyt riskillisen arvopaperin, jonka hetkellinen odotustuotto on μ ja hetkellinen hajonta, arvopaperin *volatiliteetti* σ. Arvopaperin hintakehitykseen vaikuttaa siis tuoton lisäksi myös diffuusiotermi σW_t. Voimme näin olle muotoilla seuraavan lauseen.

Lause 5.2. *Stokastisella differentiaaliyhtälöllä*

$$dS(t) = (\mu dt + \sigma dW_t)S(t)$$

on ratkaisu

$$S(t) = exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t).$$

Todistus. Käytämme yhtälön ratkaisemisessa apuna Itô-yhtälöä (12). Merkitsemme

$$f(t, S_t) = \ln(S(t)).$$

Tällöin yhtälö (12) saa muodon

$$
\begin{aligned}
\ln(S(t)) &= \ln(S(0)) + \int_0^t f'(S(u))dS(u) + \int_0^t \frac{1}{2} f''(S(u))S^2(t)\sigma^2 du \\
d\ln(S(t)) &= f'(S(t))dS(t) + \frac{1}{2} f''(S(t))S^2(t)\sigma^2 dt \\
d\ln(S(t)) &= \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{S^2(t)\sigma^2 dt}{2S^2(t)} \\
d\ln(S(t)) &= \frac{(\mu dt + \sigma dW_t)S(t)}{S(t)} - \frac{\sigma^2 dt}{2} \\
d\ln(S(t)) &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t \\
\ln(S(t)) &= \ln(S(0)) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \\
S(t) &= S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}
\end{aligned}
$$

□

Tämän tuloksen perusteella muotoilemme vielä seuraavan lauseen.

Lause 5.3. *Lauseessa 5.2 esitetyn arvopaperin $S(t)$ odotusarvo $E[S(t)|\mathcal{F}_0] = S(0)e^{\mu t}$ ja varianssi $Var[S(t)|\mathcal{F}_0] = (S(0))^2(e^{\sigma^2 t} - 1)e^{2\mu t}$.*

Todistus.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[S(t)\right] &= \mathrm{E}\left[S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}\right], \\
&= S(0)\mathrm{E}\left[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} e^{\sigma W_t}\right], \\
&= S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}\mathrm{E}\left[e^{\sigma W_t}\right],
\end{aligned}
$$

missä diffuusiotermi $e^{\sigma W_t}$ on log-normaalijakautunut. Totesimme edellä geometrisen Brownin liikkeen odotusarvoksi $\mathrm{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{(\frac{\sigma^2}{2})t}$. Tämän perusteella

$$
\mathrm{E}[S(t) \mid \mathcal{F}_0] = S(0)e^{\mu t}.
$$

Johdamme samalla tavalla muuttujan $S(t)$ varianssin.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}[S(t)|\mathcal{F}_0] =& \mathrm{E}\left[S(t) - \mathrm{E}[S(t)|\mathcal{F}_0]|\mathcal{F}_0\right]^2 \\
=& \mathrm{E}\left[S(0)e^{\left((\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t\right)} - S(0)e^{\mu t}\right]^2 \\
=& (S(0))^2\mathrm{E}\left[\left(e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}\right)^2 + (e^{\mu t})^2 - 2e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\mu t+\sigma W_t}\right] \\
=& (S(0))^2\left(\mathrm{E}\left[e^{2\sigma W_t}\right](e^{(2\mu-\sigma^2)t}) + e^{2\mu t} - 2e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\mu t}\mathrm{E}\left[e^{\sigma W_t}\right]\right) \\
=& (S(0))^2\left(e^{2\sigma^2 t}e^{(2\mu-\sigma^2)t} + e^{2\mu t} - 2e^{2\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t-\frac{\sigma^2}{2}t}\right) \\
=& (S(0))^2\left(e^{\sigma^2 t+2\mu t} - e^{2\mu t}\right) \\
=& (S(0))^2\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)e^{2\mu t}.
\end{aligned}
$$

□

5.2 Black-Scholes-malli

Käsittelimme aikaisemmin luvussa 2 euroopalaisia osto ja myyntioptioita. Arvopaperijohdannaisena option hinta ja tuoton odotusarvo riippuu optioon liitetyn arvopaperin hinnasta, tuotto-odotuksesta, volatiliteetista, option suoritushinnasta ja korosta. Lähdemme nyt muotoilemaan kahden arvopaperin mallia, jolla voimme määritellä eurooppalaiselle optiolle niin sanotun käyvän hinnan. Oletamme edelleen, että arvopapereilla voidaan käydä vapaasti kauppaa ja että arvopaperin hinta määräytyy vapailla markkinoilla. Esitämme ennen varsinaista lausetta määritelmän, jota tarvitsemme lauseen todistuksessa.

Määritelmä 5.1. Olkoon h sijoitussalkku, joka koostuu arvopapereista $S_i, 0 \leq i \leq n$ ja olkoon $h_i(t)$ salkussa h olevien arvopaperien S_i kappalemäärä hetkellä t. Tällöin $V^h(t)$ on salkun arvo hetkellä t. Edelleen merkitsemme

$$u_i(t) = \frac{h_i(t)S_i(t)}{V^h(t)},$$

missä $u_i(t)$ on arvopaperin S_i suhteellinen osuus salkusta hetkellä t. Koska

$$V^h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)S_i(t), \text{ pätee myös } \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i(t)S_i(t)}{V^h(t)} = 1.$$

[1, s. 84]

Lause 5.4. *Oletetaan kahden arvopaperin malli, jossa toinen arvopaperi $B(t)$ on riskitön tuotto-odotuksella r ja toinen arvopaperi $S(t)$ riskillinen tuotto-odotuksella μ ja volatiliteetilla σ.*

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{31}$$

$$dS(t) = S(t)\mu(t, S(t)) + S(t)\sigma(t, S(t))dW_t \tag{32}$$

Oletamme nyt yksinkertaisen johdannaisarvopaperin, jonka hintaprosessilla on jatkuva kuvaaja. Merkitsemme johdannaisen arvoa hetkellä T, $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ ja hintaprosessia $\Pi(t) = F(t, S(t))$, missä F on jatkuva funktio. Tällöin arbitraasittomilla markkinoilla hintaprosessi F on ongelman

$$\frac{\partial F(t,S(t))}{\partial t} + rS(t)\frac{\partial F(t,S(t}{\partial S(t)}$$

$$+\frac{1}{2}S^2(t)\sigma^2(t,S(t))\frac{\partial^2 S(t)F(t,(S(t))}{\partial^2 S(t)} - rF(t,S(t)) = 0, \tag{33}$$

$$F(T,(S(T)) = \Phi(S(T)) \tag{34}$$

ratkaisu arvojoukossa $[0,T] \times \mathbb{R}_+$.

Todistus. Arbitraasittomilla markkinoilla johdannaisen hinta täytyy olla suoritushetkellä T sama kuin johdannaisen arvo. Tästä seuraa ehto (34). Käsittelemme seuraavaksi hintaprosessia $F(t, S(t))$. Meidän tulee nyt määritellä $F(t, S(t))$ koko määritelyalueellaan $[0, T]$ niin, että arvopaperimalli $[B(t), S(t), \Pi(t)]$ on arbitraasiton. Voimme yhtälön (12) mukaisesti kirjoittaa funktion $\Pi(t)$, ottaen huomioon differentiaaliyhtälön (31), muodossa

$$\begin{aligned}
\Pi(t) &= F(S(t),t) \\
&= F(S_0) + \int_0^t F_s(S_u)S_u d\sigma W_u + \int_0^t F_s(S_u)S_u d\mu_u + \frac{1}{2}\int_0^t F_{ss}(S_u)S_u^2\sigma^2 d\langle W_u\rangle \\
&= F(S_0) + \int_0^t F_s(S_u)S_u \sigma dW_u + \int_0^t F_s(S_u)S_u d\mu_u + \frac{1}{2}\int_0^t F_{ss}(S_u)S_u^2\sigma^2 du
\end{aligned}$$

Derivoimalla tämän yhtälön saamme

$$\begin{aligned}
d\Pi &= \mu S F_s dt + F_t dt + \sigma S F_s dW_t + \frac{1}{2}S^2 F_{ss} dt \\
d\Pi &= \left(\mu S F_s + F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss}\right) dt + \sigma S F_s dW_t.
\end{aligned}$$

missä olemme käyttäneet lyhenteitä

$$\begin{cases} F = & F(t, S(t)), \\ S = & S(t), \\ F_t = & \dfrac{\partial F(t, S(t))}{\partial t}, \\ F_s = & \dfrac{\partial F(S(t), t)}{\partial S(t)} \dfrac{\partial S(t)}{\partial t}, \\ F_{ss} = & \dfrac{\partial^2 F(S(t), t)}{\partial^2 S(t)}. \end{cases}$$

Saamme näin johdannaiselle Π tuoton ja volatiliteetin

$$\begin{cases} \mu_\pi = & \dfrac{\mu S F_s + F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss}}{F}, \\ \sigma_\pi = & \dfrac{\sigma S F_s}{F} \end{cases}$$

Voimme nyt muodostaa osakesalkun $V^h(t)$ arvopaperista $S(t)$ ja siihen liitetystä johdannaisesta $\Pi(t)$. Merkitsemme vastaavia suhteellisia osuuksia määritelmän 5.1 mukaisesti $u_s(t)$ ja $u_\pi(t)$ ja muistamme, että

$$u_s(t) + u_\pi(t) = 1, \text{ jokaiselle } t.$$

Saamme nyt salkun muutokselle seuraavan yhtälön:

$$dV_t = \left[u_s\left(\mu dt + \sigma dW_t\right) + u_\pi\left(\mu_\pi dt + \sigma_\pi dW_t\right)\right] V_t,$$

missä olemme käyttäneet merkintöjä

$$\begin{aligned} V_i(t) = & \frac{h_i(t) S_i(t)}{V^h(t)}, \\ dV_t = & V_t \sum_i^n V_i(t) \frac{dS_i}{S_i(t)}. \end{aligned}$$

Toisin sanoen $V_i(t)$ on arvopaperin S_i suhteellinen osuus salkun arvosta hetkellä t. Saamme näin salkun muutoksen laskemalla yhteen arvopaperien painotetut muutokset. Tulos seuraa suoraan derivaatan lineaarisuudesta. Järjestelemällä termejä uudelleen voimme kirjoittaa yhtälön muodossa

$$dV_t = V_t(u_s\mu + u_\pi\mu_\pi)dt + V_t(u_s\sigma + u_\pi\sigma_\pi)dW_t. \tag{35}$$

Asetamme nyt salkulle lisärajoituksia. Sijoitamme ainoastaan arvopaperiin S ja johdannaiseen Π ja muodostamme salkun, joka on hetkellisesti suojattu. Edellytämme siis, että johdannaisen läsnäolo salkussa kumoaa hetkellisesti alkuperäisen osakkeen arvon heilahtelun. Saamme nyt yhtälöparin

$$\begin{cases} u_s + u_\pi = 1, \\ -u_s\sigma = u_\pi\sigma_\pi \end{cases} \tag{36}$$

jolla on ratkaisu

$$\begin{cases} u_s = \dfrac{\sigma_\pi}{\sigma_\pi - \sigma} \\ u_\pi = \dfrac{-\sigma}{\sigma_\pi - \sigma}. \end{cases} \tag{37}$$

Soveltamalla tätä salkkua yhtälöön (35) saamme

$$\begin{aligned} dV_t =& V_t\left(u_s\mu + u_\pi\mu_\pi\right)dt + V_t(u_s\sigma - u_s\sigma)dW_t \\ =& V_t\left(u_s\mu + u_\pi\mu_\pi\right)dt \\ =& V_t\left(\frac{\sigma_\pi}{\sigma_\pi - \sigma}\mu + \frac{-\sigma}{\sigma_\pi - \sigma}\mu_\pi\right)dt. \end{aligned}$$

Diffuusiotermi W_t on nyt kadonnut yhtälöstä ja olemme muodostaneet vaaditun, hetkellisesti riskittömän salkun. Oletamme markkinoiden olevan arbitraasittomat, joten meidän tulee myös olettaa, että

$$u_s\mu + u_\pi\mu_\pi = r. \tag{38}$$

Olemme olettaneet, että markkinoilla on vain yksi riskitön arvopaperi. Näin ollen tämän hetkellisesti suojatun salkun tuoton täytyy vastata korkotuottoa. Palaamme nyt yhtälöparin (36) ratkaisuun ja annamme ratkaisun (37) funktioiden $F(t, S(t)), S(t)$ avulla.

$$\begin{cases} u_s(t) = \dfrac{\frac{\sigma S F_s}{F}}{\frac{\sigma S F_s}{F} - \sigma} = \dfrac{SF_s}{SF_s - F}, \\ u_\pi(t) = \dfrac{-\sigma}{\frac{\sigma S F_s}{F} - \sigma} = \dfrac{-F}{SF_s - F}. \end{cases} \tag{39}$$

Arbitraasittomuusehto (38) saa nyt muodon

$$\begin{aligned}
\frac{SF_s}{SF_s - F}\mu + \frac{-F}{SF_s - F}\frac{F_t + \mu SF_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss}}{F} &= r,\\
\mu SF_s - F_t - \mu SF_s - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss} - r(SF_s - F) &= 0,\\
F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss} + r(SF_s - F) &= 0,\\
F_t + rSF_s + \frac{1}{2}S^2\sigma^2 F_{ss} - rF &= 0.
\end{aligned}$$

Voimme nyt tämän perusteella esittää, että arbitraasittomilla markkinoilla tulee yhtälöiden (33) ja (34) päteä melkein varmasti kaikilla $0 \le t \le T$. [1, s. 94-97] $\square$

Black-Scholes-malli ei itsessään anna hinnoittelutyökaluja johdannaisille. Johdamme nyt *Feynman-Kac* lauseen, jonka avulla voimme ratkaista Black-Scholes-mallin osittaisdifferentiaaliyhtälön.

Lause 5.5. *Oletetaan, että funktio $F(t,x)$ on ongelman*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2 F}{x^2}(t,x) = 0, \\ F(T,x) = \Phi(x) \end{cases} \tag{40}$$

ratkaisu. Oletetaan lisäksi, että prosessi

$$\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$$

ja, että se on adaptoitu suodatukseen $\mathcal{F}_{W_t}$. Tällöin F voidaan esittää muodossa

$$F(t,x) = E_{t,x}[\Phi(X_T)],$$

satunnaismuuttujan X_t toteuttaessa stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} dX_s = \mu(s,X_s)ds + \sigma(s,X_s)dW_s, \\ X_t = x. \end{cases} \tag{41}$$

Todistus. Voimme määritellä infitesimaalisen generaattorin $\mathcal{A}$ stokastiselle differentiaaliyhtälölle (41).

$$\mathcal{A} = \mu(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Voimme nyt kirjoittaa rajaehto-ongelman (40) muodossa

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mathcal{A}F(t,x) = 0,\\ F(T,x) = \Phi(x). \end{aligned}$$

Sovellamme nyt Itô-kaavaa (12) prosessiin $F(s, X_s)$ ja saamme tulokseksi

$$\begin{aligned} F(T, X_T) =& F(t, X_t) + \int_t^T \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{A}F(s, X_s) \right) ds \\ &+ \int_t^T \sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dW_s. \end{aligned}$$

Oletimme, että F toteuttaa alkuperäisen differentiaaliyhtälön, joten ensimmäisen integraalin arvo on siten nolla. Ottamalla odotusarvon puolittain yhtälöstä, saamme myös jälkimmäisen integraalitermin katoamaan ja jäljelle jää

$$\mathrm{E}(F(T, X_T)) = \mathrm{E}(F(t, X_t)).$$

Muistamalla ehdot $X_t = x$ ja $F(T, x) = \Phi(x)$ saamme lopulta tuloksen $F(t, x) = \mathrm{E}(\Phi(X_T)|X_t = x)$. [1, s. 68-69.] □

Tämän lauseen voimme helposti esittää vielä yleisemmässä muodossa, joka on käyttökelpoinen Black-Scholes mallin kannalta.

Lause 5.6. *Oletetaan, että funktio $F(t, x)$ on ongelman*

$$(42) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2 F}{x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0, \\ F(T,x) = \Phi(x) \end{cases}$$

ratkaisu. Oletetaan lisäksi, että prosessi

$$\sigma(s, X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

ja, että se on adaptoitu suodatukseen $\mathcal{F}_{W_t}$. Tällöin F voidaan esittää muodossa

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} E[\Phi(X_T)|X_t = x],$$

satunnaismuuttujan X_t toteuttaessa stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} dX_s =& \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, \\ X_t =& x. \end{cases}$$

Näitä työkaluja käyttämällä voimme nyt ratkaista Black-Scholes-yhtälön eksplisiittisesti. Saamme yleisen johdannaispaperin hinnoittelufunktiolle $\Phi(S(t))$ yhtälön

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{F}{x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0, \\ F(T,x) = \Phi(S(t)) \end{aligned}$$

Edellisen lauseen perusteella saamme

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}(\Phi(S(t)|S(t)=x), \tag{43}$$

missä $S(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\begin{aligned} dS(u) &= \mu S(u)du + \sigma S(u)dW_u, \\ S(t) &= x. \end{aligned} \tag{44}$$

Olemme tähän asti ottaneet odotusarvot luonnollisen todennäköisyysmitan P suhteen. Arbitraasittomuusoletukseen sisältyy tulos riskineutraalin todennäköisyysmitan olemassaolosta. Lauseen 2.4 perusteella arbitraasittomilla markkinoilla kaikkien arvopaperien normitettu Q-mitallinen hintaprosessi on martingaali. Voimme toisaalta todeta, että normittamattomassa markkinamallissa kaikkien arvopaperien tuotto-odotus vastaa Q-mitallisena riskittömän arvopaperin tuottoa. Voimme tietyin lisäolettamuksin kirjoittaa yhtälöt (43) ja (44) muodossa

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^Q(\Phi(S(t))|S(t)=s), \tag{45}$$

missä $S(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\begin{aligned} dS_u &= rS(u)du + \sigma S(u)dW_u^Q, \\ S_t &= s. \end{aligned} \tag{46}$$

Olemme yllä olettaneet, että diffuusiotermi W_t ei muutu mittamuutoksessa. Itse asiassa asia onkin näin ns. Girsanov-lauseen perusteella.

Lause 5.7. *Olkoon W^P Wiener-prosessi avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P, \underline{\mathcal{F}})$ ja olkoon φ mikä tahansa adaptoitu prosessi. Valitsemme nyt kiinteän ajan hetken T ja määritelemme sellaisen prosessin L välillä $[0,T]$, että*

$$dL_t = \varphi_t L_t dW_t^P, \tag{47}$$

$$L_0 = 1. \tag{48}$$

Tällöin Itõ-lauseen perusteella

$$L_t = exp(\int_0^t \varphi_s dW_s^P - \frac{1}{2} \|\varphi_s\|^2 ds).$$

Oletamme lisäksi, että $E^P[L_T] = 1$ ja määrittelemme uuden todennäköisyysmitan Q sigma-algebralle $\mathcal{F}_T$ asettamalla

$$L_t = \frac{dQ}{dP}, \text{ sigma-algebrassa } \mathcal{F}_T.$$

Tällöin

$$dW_t^P = \varphi_t dt + dW_t^Q,$$

missä W^Q on Q-mitallinen Wiener-prosessi. Yhtäpitävästi voimme kirjoittaa

$$W_t^Q = W_t^P - \int_0^t \varphi_s ds.$$

[1, s. 160-161]

Girsanov-lauseen perusteella siis absoluuttinen mittamuunnos ei vaikuta diffuusiotermiin W_t. Voimme nyt kirjoittaa termin $S(T)$ muodossa

$$S(T) = S(t)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W(T)-W(t))}.$$

Tämän ratkaisun perusteella voimme kirjoittaa termin $S(T)$ helpommin käsiteltävässä muodossa apumuuttujan z avulla. Merkitsemme

$$S(T) = S(t)e^z,$$

missä z on normaalijakautunut satunnaismuuttuja parametrein

$$[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2 T - t].$$

Johdannaisen volatiliteetti siis pienenee toteutumispäivämäärän lähestyessä. Voimme nyt kirjoittaa yhtälön (45) muodossa

$$F(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(S(t)e^z) f(z) dz, \tag{49}$$

missä $f(z)$ on muuttujan z tiheysfunktio. Eurooppalaisen myyntioption tapauksessa saamme seuraavan lauseen.

Lause 5.8. *Olkoon $P(S(t),t)$ arvopaperiin $S(t)$ liitetty eurooppalainen myyntioptio suoritushinnalla K ja toteutumisajankohdalla T. Arvopaperiin liittyvä tuotto on μ ja arvopaperin volatiliteetti σ. Tarkasteluajan yksikköaikakorko on r. Tällöin myyntioption P hintafunktio $F(t, S(t)$ saa muodon*

$$
\begin{aligned}
F(S(t),t) &= (1 - N(d_2))\, Ke^{-r(T-t)} - (1 - N(d_1))\, S(t), \ \ \textit{missä} \\
d_1(S(t),t) =& \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
d_2(S(t),t) =& \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

Todistus. Voimme eurooppalaisen myyntioption tapauksessa kirjoittaa yhtälön (49) muodossa

$$
F(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} \left\{ \int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} \left(K - S(t)e^z\right) f(z)dz + 0 \cdot Q\left(K \geq S(t)e^{z(t)}\right) \right\}.
$$

Järjestelemällä termejä saamme

$$
\begin{aligned}
F(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} &\left(\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} K dF(z) \right) - e^{-r(T-t)} \left(\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} S(t)e^z dF(z) \right) \\
=& e^{-r(T-t)} K \left(\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} dF(z) \right) - e^{-r(T-t)} S(t) \left(\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} e^z dF(z) \right).
\end{aligned}
$$

Nyt voimme käyttää yhtälön alkupuolessa kertymäfunktion $F(z) = \int f(z)d(z)$ sijasta normitetun normaalijakauman kertymäfunktiota N normittamalla integrointivälin. Tällöin ensimmäinen integraali saa muodon

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} dF(z) =& N\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S(t)}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
=& 1 - N\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
=& 1 - N(d_2).
\end{aligned}
$$

Vastaavasti oikeanpuoleinen integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} e^z dF(z) = \int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{S(t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp(z) \exp\left(\frac{\left(z-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(z-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) \cdot$$

$$\exp\left(-\frac{\left((r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)^2\right)(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dz,$$

missä jälkimmäinen eksponenttifunktiotermi saadaan sievennettyä muotoon

$$exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}(r^2-\sigma^2 r+\frac{1}{4}\sigma^4)-(r^2+\sigma^2 r-\frac{1}{4}\sigma^4))(T-t)^2\right)$$
$$= e^{r(T-t)}.$$

Nyt voimme kirjoittaa yhtälön oikean puolen muodossa

$$e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(z-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dz,$$

missä integroitava funktio on normaalijakauman tiheysfunktio, missä odotusarvo on $(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$ ja varianssi $\sigma^2(T-t)$. Saamme jälleen integraalin arvon normitetun normaalijakauman funktion N avulla:

$$\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S(t)})} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(z-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) dz$$
$$= N\left(\frac{\ln\frac{K}{S(t)}-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$
$$= N\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{K}-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$
$$= 1-N\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right).$$

Näin voimme nyt kirjoittaa alkuperäisen yhtälön muodossa

$$F(S(t),t) = (1-N(d_2))\,Ke^{-r(T-t)} - e^{-r(T-t)}S(t)\left(e^{r(T-t)}\,(1-N(d_1))\right)$$
$$F(S(t),t) = (1-N(d_2))\,Ke^{-r(T-t)} - (1-N(d_1))\,S(t).$$

□

Johdannaiseen liitetyn arvopaperin tuotto ei itse asiassa vaikuta option hinnoitteluun. Tämä voidaan selittää sillä, että johdannaiset hinnoitellaan aina suhteessa niihin liitettyyn arvopaperiin. Lause 2.4 pätee myös johdannaismarkkinoilla, joten kaikkien johdannaisten normitetut hintaprosessit ovat martingaaleja riskineutraalin Q-mitan suhteen. Valaisemme nyt Black-Scholes-yhtälön käyttöä kahden esimerkin avulla. Ensimmäinen esimerkki käsittelee perinteisen eurooppalaisen myyntioption hinnoittelua ja toinen mielikuvituksellisemman "Golden logarithm"-johdannaisen, joka on esitelty Tomas Björkin kirjan harjoitustehtävissä, hinnoittelua.

Esimerkki 5.3. Olkoon P eurooppalainen myyntioptio, joka on liitetty arvopaperiin $S(t)$. Arvopaperiin ja johdannaiseen liittyvät parametrit ovat $\mu = 0.2, \sigma = 0.5, r = 0.1, T = 10$ ja $K = 20$. Tällöin voimme esittää Black-Scholes-yhtälön muodossa

$$
\begin{aligned}
F(S(t),t) = &\left(1 - N\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{20}\right) + \left(0.1 - \frac{1}{2}0.5^2\right)(10-t)}{0,5\sqrt{10-t}}\right)\right)(20)e^{-0.1(10-t)} \\
&- \left(1 - N\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{20}\right) + \left(0.1 + \frac{1}{2}0.5^2\right)(10-t)}{0,5\sqrt{10-t}}\right)\right)S(t).
\end{aligned}
$$

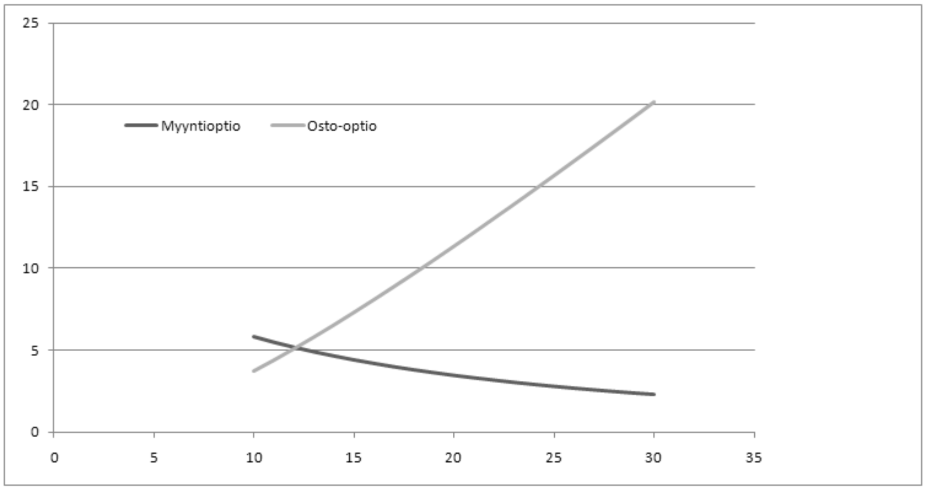
Valitsemalla tarkasteluhetkeksi $t = 5$ saamme hinnoittelufunktion muodossa

$$
\begin{aligned}
F(S(5),5) = 1 - N&\left(\frac{2\ln\left(\frac{S(5)}{20}\right) - 0.25}{\sqrt{5}}\right)(20)e^{-0.5} \\
&- \left(1 - N\left(\frac{2\ln\left(\frac{S(5)}{20}\right) + 1.125}{\sqrt{5}}\right)\right)S(5)
\end{aligned}
$$

Tässä hinnoittelufunktiossa selittävä muuttuja on arvopaperin hintafunktio $S(t,\omega)$. Yksinkertaisessa tapauksessa $S(5) = 20$ saamme myyntioption arvoksi

$$
\begin{aligned}
F(20,5) &= \left(1 - N\left(\frac{2\ln\left(\frac{20}{20}\right) - 0.25}{\sqrt{5}}\right)\right)(20)e^{-0.5} - \left(1 - N\left(\frac{2\ln\left(\frac{20}{20}\right) + 2.25}{\sqrt{5}}\right)\right)\cdot 20 \\
&= \left(1 - N\left(\frac{-0,25}{\sqrt{5}}\right)\right)(20)e^{-0.5} - \left(1 - N\left(\frac{2.25}{\sqrt{5}}\right)\right)\cdot 20 \\
&= (1 - 0.4555)\cdot 12.1306 + (1 - 0.8428)\cdot 20 \approx 3.46.
\end{aligned}
$$

Myynti-osto-pariteettilauseen avulla voimme helposti laskea hinnan vastaavalle osto-optiolle. Kyseisen mallin myynti- ja osto-optioiden hintakuvaajat on esitelty kuvaajassa arvopaperin $S(t)$ hinnan funktioina kuvassa 1.



Kuva 1: Myynti- ja osto-option hinta hetkellä $t = 5$

Esimerkki 5.4. Oletetaan johdannainen Φ, joka tuottaa toteutumispäivänä T haltijalleen $\ln(S(T))$ rahayksikköä. Mikäli $\Phi(S(T))$ on negatiivinen, joutuu johdannaisen haltija maksamaan johdannaisen liikkeellelaskijalle. Johdannaisen yleinen hinnoittelufunktio saadaan kaavasta (43)

$$\begin{aligned}
F(S(t),t)) =& e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(S(t)e^z) f(z) dz \\
=& e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(S(t)e^z\right) f(z) dz \\
=& e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln(S(t)) + z\right) f(z) dz \\
=& e^{-r(T-t)} \left(\ln(S(t)) \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz\right) \\
=& e^{-r(T-t)} \left(\ln(S(t)) \mathrm{E}[1] + \mathrm{E}[z]\right) \\
=& e^{-r(T-t)} \left(\ln(S(t)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)
\end{aligned}$$

Voimme tämän perusteella laskea option Φ arvon esimerkkitapauksessa $T = 10$, $t = 8$, $\mu = 0.2$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $S(8) = 0.8$,. Tällöin hintafunktio saa muodon

$$\begin{aligned}
F(0.8; 8) &= e^{-0.1(10-8)} \left(\ln(0.5) + \left(0.1 - \frac{1}{2} 0,4^2\right)(10-8)\right) \\
&= e^{-0.2} \left(\ln(0.5) + 0.04\right) \approx -0.567
\end{aligned}$$

Eli kyseisellä hetkellä johdannaisen haltijan olisi maksettava 0.567 päästäkseen eroon yhdestä kappaleesta Golden logarithm -johdannaista.

Viitteet

[1] Björk, Tomas *Arbitrage theory in continuous time* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2004.

[2] Panjer, Harry H.,(editor) *Financial economics with applications to investments, insurance and pensions* Schaumburg: The Actuarial Foundation, 1998

[3] Koralov, Leonid B.; Sinai, Yakov G. *Theory of probability and random processes* 2nd ed. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2007

[4] Sottinen, Tommi *Todennäköisyysteoria; Teoria mitasta, mitallisuudesta, mitattomuudesta ja riippumattomuudesta* 2006, [viitattu 16.5.2011]. Saatavissa Internetistä:`http://mathstat.helsinki.fi/~tsottine/tnt/tnt.pdf`