TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Jarno Haapaniemi

Youngin taulut

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Maaliskuu 2011

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

HAAPANIEMI, JARNO: Youngin taulut

Pro gradu -tutkielma, 26 s.

Matematiikka

Maaliskuu 2011

Tiivistelmä

Tämä tutkielma käsittelee Youngin tauluja ja niiden yhteyttä äärellisten lukujonojen pisimmän kasvavan osajonon pituuden määrittämiseen. Aluksi määritellään Youngin taulu ja kaksi algoritmia, joiden avulla tauluun voidaan lisätä uusia alkioita. Tämän jälkeen muodostetaan tauluista sanoja ja näytetään, että aiemmin esitetyt lisäysalgoritmit toimivat myös sanoille. Esitellään Knuthin alkeismuunnokset ja näytetään, että jokaiselle sanalle löydetään Knuth-ekvivalentti sana, joka muodostaa yksikäsitteisen taulun. Viimeiseksi muodostetaan yhteys lukujonon suurimman kasvavan osajonon pituudelle ja Youngin taululle. Päälähdeteoksena tutkielmassa on William Fultonin teos *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry.*

Sisältö

1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma käsittelee Youngin tauluja. Youngin taulujen avulla tutkitaan äärellisiä lukujonoja. Youngin taulun rakenteen avulla saamme selville annetusta lukujonosta muodostetun kasvavan (vähenevän) osajonon pituuden. Tutkielman lukijan oletetaan omaavan matemaattista päätelykykyä ja perustietoa diskreetistä matematiikasta.

Tutkielman päälähteenä on William Fultonin teos *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry* [2]. Tutkielma noudattelee teoksen lukuja 1 – 3. Youngin tauluja käsittelevän tutkielman on tehnyt myös Bayley [1] Leicesterin yliopistosta.

Tutkielman luvussa 2 määritellään Youngin taulu ja kaksi erilaista algoritmia, joiden avulla tauluun voidaan lisätä alkioita. Youngin taulun määrittelemisessä on käytetty lähteinä Zhaon [4] ja Yongin [3] artikkeleita.

Luvussa 3 tarkastellaan taulusta muodostettuja sanoja ja todistetaan tauluihin liittyviä lauseita. Alaluvuissa 3.2 ja 3.3 osoitetaan, että luvussa 2 määritellyt alkioiden lisäysalgoritmit toimivat myös sanoille. Kappaleessa 3.4 esitellään tärkeä lause, jonka avulla kasvavien osajonojen tutkimista voidaan jatkaa Youngin taulujen avulla.

Tutkielman luvussa 4 tutustutaan tarkemmin kasvaviin osajonoihin ja todistetaan sanoista löytyvien kasvavien osajonojen pituuksien ja Youngin taulun rivien pituuksien yhteys, sekä todistetaan kappaleessa 3.4 esitetty lause.

2 Youngin taulut ja alkioiden lisääminen

Tässä luvussa käydään lävitse Youngin taulun määritelmä ja sekä Youngin tauluun tehtävät alkioiden lisäykset kahdella eri algoritmilla. Ensimmäinen läpikäytävä algoritmi on pumppaus (Schenstedin algoritmi) ja toisena käydään lävitse Shützenbergin liu'utus algoritmi (Jeu de taquin).

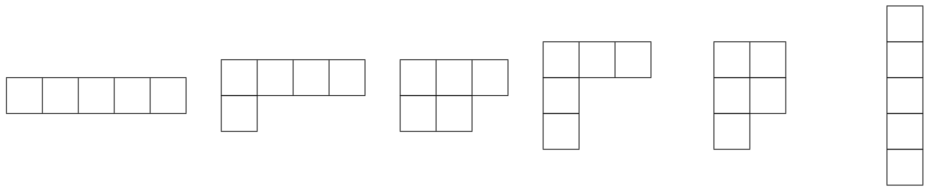
2.1 Youngin taulut

Seuraavaksi määritellään Youngin taulu. Youngin taulun määrittelemisessä seurataan artikkeleita [3] ja [4].

Määritelmä 2.1. Positiivisen kokonaisluvun *n-ositus* on positiivisten kokonaislukujen jono $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, jossa täyttyvät ehdot $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$ ja $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$. Merkinnällä $\lambda \vdash n$ tarkoitetaan, että λ on n-ositus.

Määritelmä 2.2. *Youngin kaavio* on taulukko, joka koostuu äärellisestä määrästä ruutuja, eli *soluja*, jotka ovat järjestetty vasemmalle tasatuista riveistä, jossa rivien pituus vähenee. Ositus $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ määrittelee Youngin kaavion, jossa on k riviä ja λ_i solua rivillä i.

Esimerkki 2.1. 5-ositusta vastaavat Youngin kaaviot ovat



(5) $\quad(4,1)$ $\quad(3,2)$ $\quad(3,1,1)$ $\quad(2,2,1)$ $\quad(1,1,1,1,1)$

Huomataan, että ositus ja Youngin kaavio ovat toisiaan vastaavia. Jatkossa merkitään ositusta ja Youngin kaaviota symboleilla λ ja μ.

Youngin kaaviosta saadaan muodostettua Youngin taulu täyttämällä solut numeroilla tai kirjaimilla.

Määritelmä 2.3. Olkoot $\lambda \vdash n$. *Muotoa λ oleva taulu T* saadaan täyttämällä muotoa λ olevan Youngin kaavion solut numeroilla $1, 2, \ldots, n$. Tällöin sanotaan, että taulu T on muotoa λ.

Määritelmä 2.4. *Youngin taulu* on taulu, jossa solujen alkiot kasvavat riveittäin ja sarakkeet ovat aidosti kasvavia.

Määritelmä 2.5. *Standardi Youngin taulu* on Youngin taulu, jossa jokainen alkio esiintyy täsmälleen kerran. Tällöin solujen alkiot ovat aidosti kasvavia riveittäin ja sarakkeittain.

Taulun koolla tarkoitetaan siinä olevien solujen lukumäärää. Merkitään muotoa λ olevan Youngin taulun T kokoa $|T|$.

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan kahta muotoa $\lambda = (3,3,1)$ olevaa taulua:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \text{ja} \qquad T' = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 7 \\ \hline 6 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

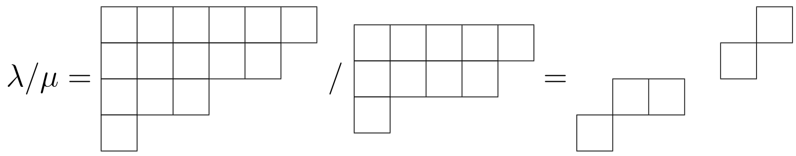
Nyt taulu T on Youngin taulu ja T' on standardi Youngin taulu.

Liu'utusalgoritmia varten tarvitaan vinon taulun käsitettä.

Määritelmä 2.6. Jos kaksi kaaviota vastaavat osituksia $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ ja $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$, jossa $\lambda_i \geq \mu_i$, kaikilla i, niin tällöin muotoa μ oleva Youngin kaavio sisältyy muotoa λ olevaan Youngin kaavioon, merkitään $\mu \subset \lambda$. *Vino kaavio* on kaavio, jossa Youngin kaaviosta on poistettu siihen sisältyvä Youngin kaavio. Syntynyttä vinoa kaaviota merkitään λ/μ.

Vinon kaavion avulla saadaan määriteltyä vino taulu vastaavasti kuin Youngin taulu määriteltiin. Vinon kaavion solut täytetään positiivisilla kokonaisluvuilla, jotka ovat kasvavia riveittäin ja aidosti kasvavia sarakkeittain.

Esimerkki 2.3. Olkoot Youngin kaaviot $\mu = (5, 4, 1)$ ja $\lambda = (6, 5, 3, 1)$. Tällöin vino kaavio on



2.2 Pumppausalgoritmi

Tässä kohdassa käsitellään Schenstedin pumppausalgoritmi, joka toistettaessa johtaa Robinson-Schensted-Knuthin vastaavuuteen, mitä tässä tutkielmassa ei käsitellä. Schenstedin pumppausalgoritmi antaa yhden tavan, jolla voidaan suurentaa taulua. Algoritmilla määritetään, miten taulu muuttuu, kun siihen lisätään uusi alkio. Oletetaan, että tauluun T lisätään positiivinen kokonaisluku x, merkitään $T \leftarrow x$. Uudessa taulussa on yksi solu enemmän kuin taulussa T ja sen alkioina ovat taulun T alkiot sekä x. Uusi taulu saadaan muodostettua kolmella vaiheella:

1. Tarkastellaan ensimmäistä riviä taulussa T. Etsitään pienin alkio, merkitään alkiota kirjaimella y, joka on aidosti suurempi kuin x ja korvataan (pumpataan) tämä alkio alkiolla x. Mikäli alkio y esiintyy rivillä useamman kerran, niin korvataan näistä ensimmäinen vasemmalta alkiolla x. Mikäli tällaista alkiota y ei löydy, niin lisätään rivin loppuun uusi solu ja siihen alkio x.

2. Jos ensimmäisellä rivillä alkio y korvattiin alkiolla x, niin pumpataan alkio y toiselle riville samalla tavalla kuin x pumpattiin ensimmäiselle riville. Mikäli alkio y pumpataan taulusta ulos, niin muodostetaan uusi rivi, johon lisätään solu mihin alkio y lisätään.

3. Toistetaan näitä vaiheita niin pitkään, että alkio lisätään jollekin riville tai se pumpataan taulun pohjalle.

Esimerkki 2.4. Tarkastellaan taulua

$$T = \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \\ 6 & 9 \end{ytableau}\,.$$

Lisätään tauluun T alkio 4. Etsitään ensimmäiseltä riviltä pienin alkio joka on suurempi kuin 4. Löydetään alkio 5. Alkioita 5 on useampi kappale ensimmäisellä rivillä, joten valitaan niistä ensimmäinen vasemmalta. Korvataan tämä alkio lisättävällä alkiolla, jolloin ensimmäinen rivi tulee muotoon

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{ytableau}\,.$$

Alkio 5 pumpataan toiselle riville, missä se korvaa alkion 8, joka pumpataan kolmannelle riville. Vastaavasti seuraavalla rivillä 8 pumppaa alkion 9 seuraavalle riville. Viimeisellä rivillä alkio 9 on suurempi tai yhtäsuuri kuin rivin suurin alkio, jolloin se lisätään rivin loppuun. Tällöin saadaan

$$T \leftarrow 4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 5 \\ \cline{1-4} 5 & 6 & 8 \\ \cline{1-3} 6 & 9 & 9 \\ \cline{1-3}\end{array} .$$

Todistetaan seuraavaksi, että pumppausalgoritmi on hyvin määritelty.

Lause 2.1. *Jos T on Youngin taulu, niin $T \leftarrow x$ on myös Youngin taulu.*

Todistus (vrt. [2, s. 8]. Youngin taulun määritelmän mukaan taulun $T' = T \leftarrow x$ pitää täyttää kaksi ehtoa, ensiksi sen muodon pitää olla Youngin kaavion mukainen ja toiseksi sen alkioiden tulee olla oikeassa järjestyksessä.

Tarkastellaan ensimmäiseksi taulun T' muotoa. Olkoon Youngin taulu T muotoa λ. Tällöin $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, missä $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, kaikilla n. Tarkastellaan kahta peräkkäistä riviä. Mikäli $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, kaikilla i, niin T' on oikeaa muotoa oleva taulu, sillä taulussa T' rivin pituus ei voi kasvaa enempää kuin yhden.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa $\lambda_i = \lambda_{i+1}$, jollakin i. Jos alkio x on suurempi kuin rivin λ_i suurin alkio, niin tapaus on selvä, sillä alkio lisättäisiin rivin λ_i loppuun. Oletetaan, että x on pienempi kuin rivin λ_i suurin alkio. Tällöin x korvaa jonkin rivin λ_i alkioista. Youngin taulun määritelmän perusteella riittää tarkastella taulusta T otettua osaa, missä rivien pituudet ovat samat, sillä tämän tarkasteltavan osan ulkopuolella olevat alkiot ovat määritelmän mukaisessa järjestyksessä. Tarkastellaan siis taulun T osaa, jossa rivillä λ_i on alkiot a, b, c, d ja rivillä λ_{i+1} alkiot e, f, g, h

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a & b & c & d \\ \hline e & f & g & h \\ \hline\end{array} .$$

Youngin taulun määritelmän mukaan riveille pätee $a \leq b \leq c \leq d$ ja $e \leq f \leq g \leq h$. Lisäksi taulun määritelmän mukaan sarakkeille pätee $a < e, b < f, c < g$ ja $d < h$. Oletetaan, että alkio x menisi alkion c paikalle. Tällöin alkio c pumppautuu riville λ_{i+1}. Nyt alkio $c < g \leq h$, jolloin c pumppaa jonkin rivin alkioista seuraavalle riville. Siis taulu T' on Youngin kaavion määritelmän mukaisessa muodossa.

Osoitetaan seuraavaksi, että taulun T' rivit ovat kasvavia ja sarakkeet aidosti kasvavia. Tarkastellaan edelleen aiemmin esitettyä taulun T osaa. Oletetaan, että alkio x menisi alkion c paikalle. Kun alkio x pumpataan taulun riville λ_i, niin sen vasemman puoleiset alkiot ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin x ($b \leq x$) ja sen oikean puoleiset alkiot ovat suurempia ($x < d$). Tällöin rivin λ_i alkiot ovat kasvavassa järjestyksessä, sillä rivillä ei tapahdu muita muutoksia.

Nyt alkio c pumpataan riville λ_{i+1}. Youngin taulun määritelmän mukaan tarkasteltavassa taulun T osassa $c < g$. Koska alkio x on mennyt alkion c paikalle, niin $x < c$. Tällöin jos alkio c menee alkion g paikalle, niin sarakkeet ovat aidosti kasvavassa järjestyksessä. Mikäli alkio c ei mene alkion g paikalle, niin se menee jonkin alkion g vasemmalla puolella olevan alkion paikalle. Tällöin Youngin taulun määritelmän ja pumppausalgoritmin mukaan $b \leq x < c < f \leq g$, jolloin alkiot ovat sarakeittain aidosti kasvavassa järjestyksessä. Mikäli pumppausalgoritmi ei ole vaikuttanut alkioihin ovat ne alkuperäisen Youngin taulun T järjestyksessä.

On osoitettu, että taulu $T \leftarrow x$ on Youngin kaavion mukaisessa muodossa ja sen rivit ovat kasvavia ja sarakkeet aidosti kasvavia. Pumppaus on siis hyvin määritelty operaatio, joka saa Youngin taulun T ja positiivisen kokonaisluvun x syötteenä ja tuottaa Youngin taulun $T \leftarrow x$. $\square$

Pumppausalgoritmin hyödyllinen ominaisuus on sen käänteisyys. Jos tiedetään taulu $T \leftarrow x$ ja solu, joka siihen lisättiin, niin voidaan palauttaa alkuperäinen taulu T ja alkio x. Tällöin suoritamme vain annetun algoritmin väärinpäin. Jos lisätyssä solussa on alkio y, niin katsotaan edellistä riviä ja etsitään sieltä oikeanpuoleisin alkio joka on pienempi kuin y. Jatketaan tätä uudestaan aina siihen asti, että ylimmältä riviltä pumppautuu alkio ulos. Ylimmältä riviltä pumppautunut alkio on alkio x ja jäljelle jäänyt taulu on alkuperäinen taulu T.

Esimerkki 2.5. Tarkastellaan taulua

$$T' = \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 9 \end{ytableau} .$$

Tutkitaan, mikä alkio on lisätty tauluun niin, että alkio 9 on päätynyt neljännen rivin toiseksi alkioksi. Alkio 9 pumppaa alkion 8 kolmannelta riviltä, mikä pumppaa alkion 4 toiselta riviltä, joka pumppaa alkion 3 ensimmäiseltä riviltä. Annettu taulu on siis saatu tekemällä pumppausoperaatio

$$T \leftarrow 3 = \begin{ytableau} 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \\ 6 \end{ytableau} \leftarrow 3 = \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 9 \end{ytableau} .$$

Seuraavaksi esitetään lause, joka kertoo meille peräkkäisten pumppausalgoritmien suhteesta. Ennen tätä määritellään muutama käsite.

Määritelmä 2.7. Olkoon $T \leftarrow x$ pumppaus. *Pumppausreitti* on kokoelma soluja R, joiden alkio on pumpattu riviltä, ja solu, johon viimeisin pumpattu alkio päätyy. Kutsutaan pumppauksessa lisättyä solua *uudeksi soluksi*.

Esimerkki 2.6. Esimerkissä 2.5 pumppausreitti on

		3		
		4		
		8		
	9			

ja uusi solu sisältää alkion 9.

Pumppausreitillä on korkeintaan yksi solu jokaiselta riviltä johon pumppaus vaikuttaa alkaen ylimmältä riviltä. Sanotaan, että reitti R on tiukasti reitin R' vasemmalla puolella, jos jokaisella rivillä, jossa on reitin R' solu, reitin R solu on reitin R' solun vasemmalla puolella. Vastaavasti sanotaan reitin R olevan heikosti reitin R' vasemmalla puolella, jos niillä on jollakin rivillä sama solu tai reitin R solu on reitin R' solun vasemmalla puolella. Vastaavasti määritellään tiukasti ja heikosti alapuolella olevat solut.

Lause 2.2. *Olkoon $((T \leftarrow x) \leftarrow x')$ taulu, jossa tauluun T on onnistuneesti pumpattu kokonaisluvut x ja x'. Merkitään alkion x pumppaamisesta syntynyttä reittiä kirjaimella R ja uutta solua kirjaimella B. Vastaavasti merkitään alkion x' pumppaamisesta syntynyttä reittiä kirjaimella R' ja uutta solua kirjaimella B'.*

1. *Jos $x \leq x'$, niin R on tiukasti reitin R' vasemmalla puolella ja B on tiukasti solun B' vasemmalla ja heikosti alapuolella.*

2. *Jos $x > x'$, niin R' on heikosti reitin R vasemmalla puolella ja B' on heikosti solun B vasemmalla ja tiukasti alapuolella.*

Todistus (ks. [2, s. 9]). Todistetaan kohta 1. Oletetaan, että $x \leq x'$ ja x pumppaa alkion y ensimmäiseltä riviltä. Oletetaan edelleen, että alkio x' pumppaa alkion y' ensimmäiseltä riviltä. Alkion y' pitää olla suurempi kuin alkio x, sillä $y' > x' \geq x$ ja kaikki alkion x vasemmalla puolella olevat alkiot ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin x. Tällöin reitin R solu on tiukasti reitin R' solun vasemmalla puolella ensimmäisellä rivillä. Vastaavasti seuraavalla rivillä tilanne toistuu, sillä $y \leq y'$.

Reitti R ei voi päättyä ennen reittiä R' ja mikäli reitti R' loppuu ensin, niin reitti R ei siirry uudella rivillä oikealle. Tällöin uuden solun B pitää olla tiukasti solun B' vasemmalla ja heikosti alapuolella.

Tarkastellaan seuraavaksi kohtaa 2. Oletetaan, että $x > x'$ ja x pumppaa alkion y ja x' pumppaa alkion y'. Tällöin $y > x$ ja $y' > x'$. Nyt alkion x' pumppaama alkio y' pitää olla pienempi tai yhtäsuuri kuin alkion x, sillä oletuksen mukaan $x > x'$ ja Youngin taulun määritelmän mukaan alkion x vasemmalla puolella olevat alkiot ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin alkio x. Tällöin siis $y > x \geq y' > x$. Tällöin alkio x' pumppaa alkion x vasemmalta puolelta olevan alkion tai alkion x. Tällöin reitti R' on heikosti reitin R

vasemmalla puolella. Vastaavasti seuraavalla rivillä toistuu tilanne, missä $y > y'$.

Kun $x > x'$, niin reitti R' ei voi päättyä ennen reittiä R. Tällöin reitin R' luoman uuden solun B' pitää olla heikosti solun B vasemmalla ja tiukasti alapuolella. $\square$

Lauseen 2.2 avulla saadaan seuraava tärkeä seuraus.

Lause 2.3. *Olkoon Youngin taulu T muotoa λ ja olkoon*

$$U = (\dots((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \cdots \leftarrow x_n),$$

joillakin $x_1, x_2, \dots, x_n$ ja olkoon Youngin taulu U muotoa μ.

- *Jos $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, niin vinossa taulussa μ/λ ei ole kahta solua samassa sarakkeessa. Jos $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$, niin vinossa taulussa μ/λ ei ole kahta solua samalla rivillä.*

- *Oletetaan, että Youngin taulu U on muotoa μ ja Youngin kaavio muotoa λ on osa muotoa μ olevaa kaaviota siten, että μ/λ sisältää n solua. Jos vinossa taulussa μ/λ ei ole kahta solua samassa sarakkeessa, niin on olemassa yksikäsitteinen muotoa λ oleva taulu ja yksikäsitteiset $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ joilla $U = (\dots((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \cdots \leftarrow x_n)$. Vastaavasti jos vinossa taulussa μ/λ ei ole kahta solua samalla rivillä, niin on olemassa yksikäsitteinen muotoa λ oleva taulu ja yksikäsitteiset $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ joilla $U = (\dots((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \cdots \leftarrow x_n)$.*

Todistus (ks. [2, s. 11]). Tarkastellaan kumpikin väittämä erikseen. Ensimmäinen väittämä saadaan suoraan lauseesta 2.2 katsomalla, miten kaksi peräkkäin pumpattua alkiota sijoittuvat tauluun.

Toisen väittämän todistukseen tarvitaan käänteistä pumppausta. Jos vinossa taulussa μ/λ ei ole kahta solua samalla rivillä, niin aloitetaan käänteinen pumppaus kaikkein oikeanpuoleisimmasta solusta edeten vasemmalle käyttäen kaikkia vinon taulun μ/λ soluja. Youngin taulu T saadaan selville kun on tehty käänteinen pumppaus kaikille soluille. Ulos pumpatut alkiot ovat $x_n, \dots, x_2, x_1$. Lause 2.2 takaa, että alkiot täyttävät ehdot $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

Vastaavasti, jos vinossa taulussa μ/λ ei ole kahta solua samalla rivillä, niin tehdään n käänteistä pumppausta, aloittaen vinon taulun μ/λ alimmasta solusta edeten ylöspäin. Nyt lauseen 2.2 mukaan ulos pumpatut alkiot $x_n, \dots, x_2, x_1$ täyttävät ehdot $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. $\square$

Pumppausalgoritmilla on monia merkittäviä ominaisuuksia. Tähän mennessä sen avulla on pumpattu Youngin tauluun alkioita ja käänteisesti pumpattu kokonainen merkkijono ulos.

Seuraavaksi muodostetaan Youngin taulujen tulo $T \bullet U$ mille tahansa kahdelle Youngin taululle T ja U. Tulon tuottamassa taulussa on $|T| + |U|$

solua ja se sisältää Youngin taulujen T ja U alkiot. Tulo saadaan aikaiseksi pumppaamalla Youngin taulun U alimman rivin vasemman puoleisin alkio Youngin tauluun T. Tämän jälkeen pumpataan Youngin taulun U alimman rivin toiseksi vasemmanpuoleisin alkio Youngin tauluun T ja jatketaan näin rivin loppuun. Tämän jälkeen siirrytään seuraavalle riville ja käydään koko Youngin taulu U lävitse. Nimetään Youngin taulun U alkiot niin, että alimman rivin vasemmanpuoleisin alkio on x_1 ja siitä kasvavassa järjestyksessä oikealle ja rivejä ylöspäin, jolloin saadaan jono $x_1, x_2, \ldots, x_p$, jolloin Youngin taulujen tulo saadaan kirjoitettua muotoon

$$T \bullet U = (\ldots((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2)\ldots) \leftarrow x_p.$$

Esimerkki 2.7. Olkoot annettu Youngin taulut

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&3&7\\ \hline 2&2&3&4\\ \cline{1-4} 3&5&6\\ \cline{1-3} 5&8\\ \cline{1-2}\end{array} \quad \text{ja} \quad U = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&5&9\\ \hline 8\\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Taulujen tulo voidaan kirjoittaa tällöin muotoon

$$T \bullet U = (((T \leftarrow 8) \leftarrow 3) \leftarrow 5) \leftarrow 9.$$

Muodostetaan taulu U vaiheittain:

$$T \leftarrow 8 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&3&7&8\\ \hline 2&2&3&4\\ \cline{1-4} 3&5&6\\ \cline{1-3} 5&8\\ \cline{1-2}\end{array}$$

$$(T \leftarrow 8) \leftarrow 3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&3&3&8\\ \hline 2&2&3&4&7\\ \cline{1-5} 3&3&6\\ \cline{1-3} 5&5\\ \cline{1-2} 8\\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$((T \leftarrow 8) \leftarrow 3) \leftarrow 5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&3&3&5\\ \hline 2&2&3&4&7&8\\ \hline 3&3&6\\ \cline{1-3} 5&5\\ \cline{1-2} 8\\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$U = (((T \leftarrow 8) \leftarrow 3) \leftarrow 5) \leftarrow 9 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&3&3&5&9\\ \hline 2&2&3&4&7&8\\ \cline{1-6} 3&3&6\\ \cline{1-3} 5&5\\ \cline{1-2} 8\\ \cline{1-1}\end{array}.$$

2.3 Liu'utusalgoritmi

Toinen tapa muodostaa Youngin taulujen tulo, on käyttää vinoja tauluja. Ennen kuin päästään esittämään Schützenbergerin liu'utus, niin täytyy määritellä kaksi uutta käsitettä.

Määritelmä 2.8. Vinossa kaaviossa λ/μ *sisäkulmaksi* sanotaan kaavion μ solua, jonka alapuolella ja oikealla olevat solut eivät kuulu kaavioon μ. *Ulkokulma* on kaavion λ solu, jonka alapuolella ja oikealla olevat solut eivät kuulu kaavioon λ.

Esimerkki 2.8. Tutkitaan vinoa taulua

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
\ & \ & \ & 3 & 4 \\
\hline
\ & \ & 3 \\
\cline{1-3}
\ & \ & 5 \\
\cline{1-3}
\ & 6 & 7 \\
\cline{1-3}
8 & 9 \\
\cline{1-2}
\end{array} \quad .$$

Vinossa taulussa S sisäkulmia ovat ensimmäisen rivin kolmas solu, kolmannen rivin toinen solu ja neljännen rivin ensimmäinen solu. Ulkokulmia ovat ensimmäisen rivin viides solu, neljännen rivin kolmas solu ja viidennen rivin toinen solu.

Huomataan myös, että sama vino taulu voidaan muodostaa useammasta taulusta ja vinossa taulussa saattaa olla sisäkulmia jotka ovat myös ulkokulmia.

Schützenbergerin liu'utusoperaatiota varten tarvitaan vino taulu S ja sisäkulma. Sisäkulmaa voidaan ajatella vinossa taulussa olevana *reikänä* tai *tyhjänä soluna*. Liu'utuksessa tarkastellaan tyhjän solun alapuolella ja oikealla olevaa solua. Riippuen solujen arvoista toimitaan seuraavasti:

- Jos kummassakin solussa on arvo, niin niistä pienempi vaihtaa paikkaa tyhjän solun kanssa.
- Jos vain toinen näistä soluista on olemassa, niin se vaihtaa paikkaa tyhjän solun kanssa.
- Jos kummassakin solussa on sama arvo, niin tyhjän solun alapuolella oleva alkio vaihtaa paikkaa tyhjän solun kanssa.
- Jos kumpaakaan solua ei ole, niin tyhjästä solusta on tullut ulkokulma ja se poistetaan taulusta.
- Jos sisäkulmia on vielä jäljellä, niin toistetaan toimenpide niille.

Esimerkki 2.9. Tarkastellaan esimerkin 2.8 vinoa taulua ja suoritetaan liu'utus neljännen rivin ensimmäiselle solulle:

$$
\begin{ytableau}
 & & & 3 & 4 \\
 & & 3 \\
 & & 5 \\
 & 6 & 7 \\
8 & 9
\end{ytableau}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{ytableau}
 & & & 3 & 4 \\
 & & 3 \\
 & & 5 \\
6 & & 7 \\
8 & 9
\end{ytableau}
$$

$$
\rightsquigarrow \quad
\begin{ytableau}
 & & & 3 & 4 \\
 & & 3 \\
 & & 5 \\
6 & 7 & \\
8 & 9
\end{ytableau}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{ytableau}
 & & & 3 & 4 \\
 & & 3 \\
 & & 5 \\
6 & 7 \\
8 & 9
\end{ytableau}
\;.
$$

Lause 2.4. *Schützenbergerin liu'utus algoritmi säilyttää vinon taulun muodon ja alkioiden järjestyksen.*

Todistus (vrt. [2, s. 14]). Operaatio tuottaa aina vinon kaavion, sillä solu, josta lähdetään liikkeelle, on sisäkulma ja solu, johon päädytään on ulkokulma. Näytetään seuraavaksi, että liu'utuksen jälkeen rivit pysyvät kasvavina ja sarakkeet aidosti kasvavina. Riittää tarkastella vinon taulun osaa

$$
\begin{ytableau}
\none & b & v \\
a & & y \\
u & x
\end{ytableau}\,,
$$

sillä muut ympärillä olevat alkiot ovat vinon taulun määritelmän mukaan oikeassa järjestyksessä ja liu'utus ei vaikuta niihin. Nyt tyhjä solu vaihtaa paikkaa joko alkion y tai alkion x kanssa riippuen niiden suuruudesta. Huomataan myös, että osa nimetyistä soluista voi olla myös tyhjiä.

Oletetaan, että $x \leq y$. Tällöin vinon taulun osa muuttuu muotoon

$$
\begin{ytableau}
\none & b & v \\
a & x & y \\
u &
\end{ytableau}\,.
$$

Tässä tilanteessa riittää tarkastella riviä johon alkio x siirtyy. Taulun määritelmän mukaan $a < u \leq x$ ja oletuksen mukaan $x \leq y$. Tällöin $a < u \leq x \leq y$, jolloin rivi on kasvavassa järjestyksessä.

Oletetaan seuraavaksi, että $x > y$. Tällöin vinon taulun osa tulee muotoon

$$
\begin{ytableau}
\none & b & v \\
a & y & \\
u & x
\end{ytableau}\,.
$$

Todistetaan toisen sarakkeen olevan aidosti kasvava, siis $b < y < x$. Oletuksen mukaan $y < x$ ja taulun määritelmän mukaan $b \leq v < y$. Nyt $b \leq v < y < x$, jolloin $b < y < x$.

Schützenbergerin liu'utus on hyvin määritelty, se säilyttää vinon taulun muodon ja alkioiden järjestyksen joka askeleella. □

Schützenbergerin liu'utusalgoritmi on käänteinen. Jos tiedetään liu'utuksen tuloksena syntynyt taulu ja poistettu solu, niin saadaan palautettua alkuperäinen taulu ja sisäkulma josta liu'utus aloitettiin. Tyhjä solu liikkuu käänteisoperaatiossa ylöspäin tai vasemmalle vaihtaen paikkaa suuremman alkion kanssa. Jos alkiot ovat yhtäsuuret, niin tyhjä solu vaihtaa paikkaa yläpuolella olevan alkion kanssa. Käänteisoperaatio pysähtyy, kun tyhjästä solusta on tullut sisäkulma.

Kun vinon taulun S kaikille sisäkulmille suoritetaan liu'utus, niin saadaan Youngin taulu. Kutsutaan näin syntynyttä taulua vinon taulun S *oikaisuksi* ja koko prosessia *jeu de taquiniksi*. Prosessiin liittyy tulos, jonka mukaan riippumatta siitä mistä sisäkulmasta lähdetään liikkeelle, niin lopputuloksena on aina sama vinon taulun oikaisu.

Lause 2.5. *Olkoon annettu vino taulu S. Aloittamalla liu'utus mistä tahansa vinon taulun S sisäkulmasta saadaan lopputuloksena sama vinon taulun S oikaisu.*

Merkitään vinon taulun S oikaisua $\mathrm{Rect}(S)$. Mielenkiintoinen tulos on, että Schenstedin pumppauksella ja Schützenbergerin liu'utuksella on läheinen yhteys.

Schützenbergerin liu'utuksen avulla voidaan myös tuottaa kahden Youngin taulun tulo. Olkoon annettu Youngin taulut T ja U. Muodostetaan vino taulu $T * U$, missä muodostetaan ensin tyhjiä soluja sisältävä suorakulmio, jonka korkeus on Youngin taulun U rivien määrä ja leveys on Youngin taulun T sarakkeiden määrä. Näin syntyneen suorakulmion alapuolelle lisätään Youngin taulu T ja oikealle puolelle Youngin taulu U.

Esimerkki 2.10. Olkoon annettu Youngin taulut

$$T = \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \\ 3 & 5 & 6 & & \\ 5 & 8 & & & \end{array} \qquad \text{ja} \qquad U = \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 9 \\ 8 & & \end{array}.$$

Tällöin Youngin tauluista T ja U saadaan muodostettua vino taulu

$$T * U = \begin{array}{cccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & 3 & 5 & 9 \\ \square & \square & \square & \square & \square & 8 & & \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 7 & & & \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & & & \\ 3 & 5 & 6 & & & & & \\ 5 & 8 & & & & & & \end{array}.$$

Vinosta taulusta $T * U$ saadaan muodostettua taulu, muodostamalla sen oikaisu. Näin saatu vinon taulun oikaisu, $\mathrm{Rect}(T * U)$, osoittautuukin samaksi kuin Youngin taulujen T ja U tulo, siis $\mathrm{Rect}(T * U) = T \bullet U$.

Esimerkki 2.11. Tarkastellaan esimerkissä 2.10 muodostettua vinoa taulua $T * U$. Muodostetaan vinon taulun $T * U$ oikaisu. Aluksi vinolla taululla ei ole kuin yksi sisäkulma, toisen rivin viides solu. Liu'utetaan tämä tyhjä solu ulos taulusta. Tällöin saadaan

$$\begin{ytableau} {} & {} & {} & {} & {} & 3 & 5 & 9 \\ {} & {} & {} & {} & {} & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 \end{ytableau} \rightsquigarrow \begin{ytableau} {} & {} & {} & {} & {} & 3 & 5 & 9 \\ {} & {} & {} & {} & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 \end{ytableau} .$$

Näin saadussa vinossa taulussa on kaksi sisäkulmaa. Lauseen 2.5 perusteella ei ole väliä kumpaa näistä sisäkulmista lähdetään seuraavaksi liu'uttamaan ulos. Liu'uttamalla ulos toisen rivin neljäs solu, saadaan

$$\begin{ytableau} {} & {} & {} & {} & {} & 3 & 5 & 9 \\ {} & {} & {} & {} & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 \end{ytableau} \rightsquigarrow \begin{ytableau} {} & {} & {} & {} & {} & 3 & 5 & 9 \\ {} & {} & {} & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 \end{ytableau} .$$

Toimien vastaavasti uusille sisäkulmille saadaan lopuksi

$$\mathrm{Rect}(T * U) = \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 \end{ytableau} ,$$

joka on sama Youngin taulu kuin esimerkissä 2.7. Siis $\mathrm{Rect}(T * U) = T \bullet U$.

3 Plaktinen monoidi

Tässä luvussa tarkastellaan taulua vastaava sanaa. Tämä on yksi tapa ilmaista kokonaisluvuista koostuva taulu. Sana ei ole yhtä visuaalinen tapa ilmaista asia kuin taulu, mutta se on erittäin käyttökelpoinen todistettaessa tauluihin liittyviä ominaisuuksia. Pumppausalgoritmi keksittiin aikanaan tutkimaan kokonaislukujonoja, mutta nyt tutkitaan tilannetta toisinpäin.

3.1 Sana

Tarkastellaan aluksi, kuinka taulusta saadaan muodostettua sana. Sana on kokonaislukujono ja merkitään $w \cdot w$ tai ww' tarkoittamaan sanojen w ja w' katenaatiota.

Annetusta taulusta tai vinosta taulusta T muodostetaan *sana* kirjoittamalla taulun T alkiot peräkkäin vasemmalta oikealle ja alhaalta ylös. Merkitään taulusta T muodostettua sanaa $w(T)$. Taulusta T saadaan muodostettua sana $w(T)$kirjoittamalla merkit peräkkäin

- aloittamalla alimmalta riviltä
- kirjoittamalla merkit ylös vasemmalta oikealle
- siirtymällä seuraavalle riville ja toistamalla toimenpiteen
- jatketaan kunnes tullaan ylimmän rivin viimeiseen alkioon.

Sanasta $w(T)$ saadaan helposti muodostettua sitä vastaava taulu. Katkaistaan sana niistä kohdista, joissa seuraava merkki on pienempi kuin edellinen. Näin saadut osat ovat taulun rivejä kirjoitettuna alhaalta ylöspäin.

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan sanaa 583562234781113359. Katkaisemalla tämä osiin saadaan 58|356|223478|1113359, joka on esimerkissä 2.11 olevan taulun sana.

Huomataan myös, että jokaisesta Youngin taulusta voidaan muodostaa sana, mutta jokainen sana ei ole Youngin taulu, sillä rivien pituuksien pitää olla kasvavia ja Youngin taulussa sarakkeiden pitää olla aidosti kasvavia. Vinojen taulujen kohdalla tilanne on toinen, sillä useampi sana voi muodostaa saman vinon taulun ja jokaisesta sanasta voidaan muodostaa vino taulu, sillä esimerkiksi sanan osat voidaan sijoittaa alkavaksi aina edellisen osan oikealta puolelta ja riviä ylempää.

3.2 Sanojen pumppaus

Tarkastellaan ensin, mitä Schenstedin pumppausoperaatio tekee Youngin tauluista muodostetuille sanoille. Oletetaan, että alkio x on pumpattu riville. Tarkastellaan, mitä pumppaus tekee Youngin taulun yhdestä rivistä muodostetulle sanalle. Olkoon tämä sana $u \cdot x' \cdot v$, jossa u ja v ovat sanoja, x' on kirjain sekä sanan u kirjaimet ovat pienempiä kuin x ja kirjain x' on aidosti kirjainta x suurempi. Tällöin kirjain x korvaa kirjaimen x'. Nyt rivi, joka muodostui sanasta $u \cdot x' \cdot v$, muuttuu muotoon $u \cdot x \cdot v$ ja kirjain x' pumppautuu seuraavalle riville. Pumppausoperaation jälkeisessä Youngin taulussa on sana $x' \cdot u \cdot x \cdot v$. Nyt Youngin taulun yhtä riviä vastaavan sanan pumppaus voidaan kirjoittaa muotoon

$$(u \cdot x' \cdot v) \cdot x \mapsto x' \cdot (u \cdot x \cdot v) \qquad \text{jos} \quad u \leq x < x' \leq v.$$

Tässä sanat u ja v ovat kasvavia lukujonoja. Tällöin $u \leq v$ tarkoittaa, että jokainen sanan u kirjain on pienempi tai yhtäsuuri kuin sanan v kirjain.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan sanaa 7675662341123. Jaetaan ensiksi annettu sana osiin. Tällöin saadaan (7)(67)(566)(234)(1123). Pumpataan annettuun sanaan alkio 2. Tällöin uudeksi sanaksi saadaan

$$\begin{aligned}
&(7)(67)(566)(234)(1123)\cdot 2 \mapsto (7)(67)(566)(234)\cdot 3\cdot(1122)\\
\mapsto\ &(7)(67)(566)\cdot 4\cdot(233)(1122) \mapsto (7)(67)\cdot 5\cdot(466)(233)(1122)\\
\mapsto\ &(7)\cdot 6\cdot(57)(466)(233)(1122) \mapsto (7)(6)(57)(466)(233)(1122).
\end{aligned}$$

Sanojen pumppausta voidaan tarkastella vieläkin lähemmin Youngin tauluna ajatellen. Oletetaan, että pumpataan alkio x Youngin tauluun T. Tällöin ensimmäiseksi verrataan alkio x ensimmäisen rivin viimeiseen alkioon z. Jos $z \leq x$, niin x lisätään rivin loppuun. Muutoin verrataan alkiota x alkiota z edeltävään alkioon y. Jos $y > x$, niin toistetaan prosessi. Prosessi voidaan kirjoittaa vaiheittain muotoon

$$\begin{aligned}
ux'v_1v_2\dots v_{q-1}v_qx &\mapsto ux'v_1v_2\dots v_{q-1}xv_q \quad \text{kun} \quad x < v_{q-1} \leq v_q\\
&\mapsto ux'v_1v_2\dots v_{q-2}xv_{q-1}v_q \quad \text{kun} \quad x < v_{q-2} \leq v_{q-1}\\
\dots &\mapsto ux'v_1xv_2\dots v_{q-1}v_q \quad \text{kun} \quad x < v_1 \leq v_2\\
&\mapsto ux'xv_1\dots v_{q-1}v_q \quad \text{kun} \quad x < x' \leq v_1.
\end{aligned}$$

Kun tarkastellaan jokaista muutosta erikseen, huomataan, että niihin on vaikuttanut ainoastaan kolme peräkkäistä kirjainta. Kahden viimeisen kirjaimen järjestys ei ole vaihtunut ja ensimmäinen on ollut aidosti pienempi kuin kolmas. Näin saatu muutos voidaan kirjoittaa muotoon

(K') $$yzx \mapsto yxz, \quad \text{jos } x < y \leq z.$$

Kutsutaan tätä muunnosta *Knuthin muunnokseksi* K'.

Jatketaan sanan pumppaamista tilanteesta, jossa alkio x on pumpannut kirjaimen x'. Tällöin kirjain x' liikkuu vasemmalle ja saadaan

$$\begin{aligned}
u_1\dots u_{p-1}u_px'xv &\mapsto u_1\dots u_{p-1}x'u_pxv \quad \text{kun} \quad u_p \leq x < x'\\
&\mapsto u_1\dots x'u_{p-1}u_pxv \quad \text{kun} \quad u_{p-1} \leq u_p < x'\\
\dots &\mapsto u_1x'u_2u_3\dots u_pxv \quad \text{kun} \quad u_2 \leq u_3 < x'\\
&\mapsto x'u_1u_2\dots u_pxv \quad \text{kun} \quad u_1 \leq u_2 < x'.
\end{aligned}$$

Nyt jokaista edellä tapahtunutta muunnosta vastaa sääntö

(K") $$xzy \mapsto zxy, \quad \text{jos} \quad x \leq y < z.$$

Näin saatu muunnos on toinen Knuthin alkeismuunnoksista.

Knuthin alkeismuunnokset voidaan kuvata Youngin tauluun tapahtuvassa pumppauksessa. Ensimmäistä Knuthin muunnosta (K') vastaa pumppaus

$$\begin{array}{|c|c|}\hline y & z \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline x \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline y \\ \cline{1-1}\end{array} \quad yzx \mapsto yxz, \quad \text{kun} \quad x < y \leq z.$$

Vastaavasti toista Knuthin muunnosta (K”) vastaa pumppaus

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline y \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline z \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad xzy \mapsto zxy, \quad \text{kun} \quad x \leq y < z.$$

Kummatkin Knuthin alkeismuunnoksista ovat käänteisiä. Voidaan siis vaihtaa kirjaimen y toisella puolella olevat kirjaimet, jos ne täyttävät muunnoksen (K’) tai (K”) ehdot.

Oletetaan, että meillä on kaksi sanaa w ja w'. Jos toinen näistä sanoista saadaan toisesta äärellisellä määrällä Knuthin alkeismuunnoksia, sanotaan sanojen olevan *Knuth-ekvivalentit*. Merkitään $w \equiv w'$, kun sanat w ja w' ovat Knuth-ekvivalentit. Nyt voidaan kirjoittaa Youngin tauluun ja sanojen pumppaukseen liittyvä lause.

Lause 3.1. *Olkoon T Youngin taulu ja x positiivinen kokonaisluku. Tällöin*

$$w(T \leftarrow x) \equiv w(T) \cdot x.$$

Youngin taulujen tulo voidaan ilmaista myös lauseen 3.1 avulla.

Lause 3.2. *Olkoot T ja U Youngin tauluja. Tällöin*

$$w(T \bullet U) \equiv w(T) \cdot w(U).$$

3.3 Sanojen liu’utus

Edellisessä kohdassa nähtiin Knuth-ekvivalenssin ja Schenstedin pumppauksen yhteys. Tässä kohdassa käsitellään Schützenbergerin liu’utuksen ja Knuth-ekvivalenssin yhteyttä. Tarkastellaan ensin miten yksinkertaiset liu’utukset vaikuttavat taulua vastaavaan sanaan:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & x \\ \hline y & z \\ \cline{1-2}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|}\hline & x \\ \hline y & z \\ \hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline y \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad yzx \mapsto yxz, \quad \text{kun} \quad x < y \leq z$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & y \\ \hline x & z \\ \cline{1-2}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|}\hline & y \\ \hline x & z \\ \hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline z \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad xzy \mapsto zxy, \quad \text{kun} \quad x \leq y < z.$$

Huomataan, että tapaukset ovat Knuthin alkeismuunnoksia. Näytetään seuraavaksi, että sanan Knuth-ekvivalenssiluokka ei muutu liu’utusprosessin aikana. Vinon taulun sana muodostetaan kuten kohdassa 3.1 määriteltiin. Taulun rakenne ei välttämättä ole vino taulu liu’utusprosessin aikana, mutta tämä ei vaikuta sanojen muodostamiseen ja tulokseen.

Tarkastellaan ensin rivillä tapahtuvaa liu’utusta. Tällöin asia on selvä, sillä sana pysyy muuttumattomana, koska se kirjoitetaan riveittäin vasemmalta oikealle. Sanan Knuth-ekvivalenssiluokka pysyy muuttumattomana.

Sarakeessa tapahtuva liu’utus ei ole näin selvä. Tarkastellaan ensiksi yksinkertaista tilannetta

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline u & & y \\ \hline v & x & z \\ \hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline u & x & y \\ \hline v & & z \\ \hline\end{array},$$

jossa $u < v \leq x \leq y < z$. Nyt sana muuttuu muodosta $vxzuy$ muotoon $vzuxy$. Tämä muutos saadaan tehtyä Knuthin alkeismuunnosten avulla:

$$\begin{aligned} vxzuy &\equiv vxuzy, && \text{kun} \quad u < y < z \\ &\equiv vuxzy, && \text{kun} \quad u < v \leq x \\ &\equiv vuzxy, && \text{kun} \quad x \leq y < z \\ &\equiv vzuxy, && \text{kun} \quad u < x < z. \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline u_1 & \cdot\cdot & u_p & & y_1 & \cdot\cdot & y_q \\ \hline v_1 & \cdot\cdot & v_p & x & z_1 & \cdot\cdot & z_q \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline u_1 & \cdot\cdot & u_p & x & y_1 & \cdot\cdot & y_q \\ \hline v_1 & \cdot\cdot & v_p & & z_1 & \cdot\cdot & z_q \\ \hline \end{array},$$

kun u_i, v_i, y_j ja z_j ovat kasvavia lukujonoja, $u_i < v_i$ ja $y_j < z_j$ ja $v_p \leq x$. Lisäksi tiedetään, että $x \leq y_1$, sillä alkiota x liu'utetaan. Merkitään

$$u = u_1 \ldots u_p, \quad v = v_1 \ldots v_p, \quad y = y_1 \ldots y_q \quad \text{ja} \quad z = z_1 \ldots z_q.$$

Osoitetaan nyt, että sanat $vxzuy$ ja $vzuxy$ ovat Knuth-ekvivalentit. Tehdään tämä induktion avulla.

Alkuaskeleena olkoon $p = 0$. Tällöin pitää näyttää, että $xzy \equiv zxy$, eli

$$xz_1 \ldots z_q y_1 \ldots y_q \equiv z_1 \ldots z_q x y_1 \ldots y_q.$$

Jos alkio y_1 lisätään riville $xz_1 \ldots z_q$, niin se pumppaa alkion z_1. Lauseen 3.1 perusteella tiedetään, että $xz_1 \ldots z_q y_1 \equiv z_1 x y_1 z_2 \ldots z_q$. Tällöin koko sanalle pätee, että

$$(xz_1 \ldots z_q) y_1 (y_2 \ldots y_q) \equiv z_1 (x y_1 z_2 \ldots z_q)(y_2 \ldots y_q).$$

Vastaavasti lisäämällä alkio y_2 riville $xy_1 z_2 \ldots z_q$, jolloin se pumppaa alkion z_2. Edelleen lauseen 3.1 perusteella on voimassa

$$z_1 (x y_1 z_2 \ldots z_q) y_2 (y_3 \ldots y_q) \equiv (z_1 z_2)(x y_1 y_2 z_3 \ldots z_q)(y_3 \ldots y_q).$$

Kun tehdään pumppaus kaikille lopuille alkioille y_l, kun $l = 3 \ldots q$, saadaan lopuksi

$$xz_1 \ldots z_q y_1 \ldots y_q \equiv z_1 \ldots z_q x y_1 \ldots y_q.$$

Väite on siis tosi, kun $p = 0$.

Olkoon $p \geq 1$ ja oletetaan, että $vxzuy \equiv vzuxy$, kun $k = p-1$. Merkitään

$$u' = u_2 \ldots u_p, \quad v' = v_2 \ldots v_p.$$

Nyt voidaan kirjoittaa $vxzuy = v_1 v' x z u_1 u' y$. Pumpataan alkio u_1 sanaan $v_1 v' x z$. Tällöin u_1 pumppaa alkion v_1, jolloin saadaan lauseen 3.1 perusteella $v_1 v' x z u_1 \equiv v_1 u_1 v' x z$. Voidaan siis kirjoittaa

$$vxzuy = v_1 v' x z u_1 u' y \equiv v_1 u_1 v' x z u' y.$$

Induktio-oletuksen mukaan $v'xzu'y \equiv v'zu'xy$, jolloin edelleen

$$vxzuy = v_1v'xzu_1u'y \equiv v_1u_1v'zu'xy. \tag{1}$$

Todistuksen loppuunsaattamiseksi tarkastellaan seuraavaksi sanaa $vzuxy$. Tämä sana voidaan kirjoittaa muotoon $v_1v'zu_1u'xy$. Pumpataan nyt alkio u_1 sanaan $v_1v'z$, jolloin alkio v_1 pumppautuu. Tällöin on $v_1v'zu_1 \equiv v_1u_1v'z$. Kirjoitetaan tämä koko sanalle, jolloin saadaan

$$vzuxy = v_1v'zu_1u'xy \equiv v_1u_1v'zu'xy. \tag{2}$$

Yhdistämällä kohdat (1) ja (2) saadaan

$$vxzuy = v_1v'xzu_1u'y \equiv v_1u_1v'zu'xy \equiv v_1v'zu_1u'xy = vzuxy.$$

Yleinen tapaus sarakkeissa tapahtuvasta liu'utuksesta seuraa suoraan edellä olevasta. Tämä huomataan helposti tarkastelemalla vinoa taulua:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \vdots & & & & \\
 & u_1 & \cdot\cdot & u_p & & y_1 & \cdot\cdot & y_q & \cdot\cdot \\
\cdot\cdot & v_1 & \cdot\cdot & v_p & x & z_1 & \cdot\cdot & z_q & \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Huomataan, että sitä voidaan laajentaa ylöspäin, vasemmalle, oikealle ja alaspäin. Kuitenkin ne osat, joihin liu'utus vaikuttaa, on aiemmin osoitettu Knuth-ekvivalenteiksi.

3.4 Knuth-ekvivalenssin seurauksia

Äsken osoitettiin, että liu'utukset ovat Knuthin alkeismuunnoksia ja, että sanan Knuth-ekvivalenssiluokka ei muutu liu'utusprosessissa. Tämä voidaan muotoilla lauseeksi.

Lause 3.3. *Jos toinen vino taulu saadaan toisesta tekemällä äärellinen määrä liu'utuksia, niin niiden muodostamat sanat ovat Knuth-ekvivalentit.*

Lause 3.4. *Jokaiselle sanalle löytyy Knuth-ekvivalentti sana, joka muodostaa yksikäsitteisen taulun.*

Lauseen todistus esitetään myöhemmin kohdassa 4.2. Tarkastellaan sanaa $w = x_1x_2\ldots x_r$. Lauseen 3.1 mukaan se on Knuth-ekvivalentti sanalle, joka on muodostettu Youngin taulusta

$$((\ldots((\boxed{x_1} \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \leftarrow \ldots) \leftarrow x_{r-1}) \leftarrow x_r.$$

Kutsutaan tätä prosessia *kanoniseksi prosessiksi* ja merkitään näin saatua taulua $P(w)$.

Lause 3.5. *Vinon taulun S oikaisu on yksikäsitteinen Youngin taulu, joka on Knuth-ekvivalentti vinosta taulusta S muodostetun sanan kanssa. Jos S ja S' ovat vinoja tauluja, niin* $\mathrm{Rect}(S) = \mathrm{Rect}(S')$ *jos ja vain jos* $w(S) \equiv w(S')$.

Todistus. Todistus seuraa suoraan lauseista 3.1 ja 3.4. $\square$

3.5 Plaktinen monoidi

Tässä kohdassa määritellään *plaktinen monoidi.* Monoidi koostuu joukosta M ja laskutoimituksesta $\cdot$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- Laskutoimitus $\cdot$ on assosiatiivinen: Jos on annettu $a, b, c \in M$, niin
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$
- On olemassa neutraalialkio $e \in M$, jolloin kaikille alkioille $a \in M$ pätee
$$a \cdot e = e \cdot a = a.$$

Olkoon $M = M_m$ sanojen Knuth-ekvivalenssiluokkien muodostama joukko, jossa aakkostona on $[m] = \{1, \ldots, m\}$. Sanojen tulo määrittelee laskutoimituksen tälle joukolle, sillä jos $w \equiv w'$ ja $v \equiv v'$, niin $w \cdot v \equiv w' \cdot v \equiv w' \cdot v'$. Tällöin $(M, \cdot)$ on monoidi, jossa neutraalialkiona on tyhjä sana $\varnothing$. Tätä monoidia kutsutaan plaktiseksi monoidiksi.

4 Kasvavat jonot

4.1 Kasvavat jonot sanoissa

Schensted kehitti algoritminsa tutkiakseen kasvavien osajonojen pituutta, jotka voidaan muodostaa sanoista. Tarkastellaan sanaa $w = x_1 x_2 \ldots x_r$, joka koostuu kokonaisluvuista $1, 2, \ldots, m$. Olkoon l suurin luku, jolla sanasta w voidaan muodostaa heikosti kasvava osajono

$$x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \cdots \leq x_{i_l}, \quad \text{missä } i_1 < i_2 < \cdots < i_l.$$

Näin muodostettu osajono on pisin mahdollinen sanasta w muodostettu heikosti kasvava osajono. Merkitään näin saatua pisimmän heikosti kasvavan osajonon pituutta $L(w, 1)$. Merkinnällä $L(w, k)$ tarkoitetaan suurinta lukua, joka saadaan summaamalla k kappaletta sanasta w muodostettuja erillisiä heikosti kasvavia osajonoja.

Esimerkki 4.1. Tarkastellaan sanaa

$$w = 142375634.$$

Nyt sanasta w muodostettu heikosti kasvavan osajonon pituus $L(w, 1) = 5$, jossa alkioina ovat 1 2 3 5 6 tai 1 2 3 3 4. Sanasta w saadaan muodostettua kaksi erillistä heikosti kasvavaa osajonoa 1 2 3 3 4 ja 4 5 6, jolloin $L(w, 2) = 8$. Erillisiksi kasvaviksi osajonoiksi kelpaisivat myös 2 3 3 4 ja 1 4 5 6. Huomataan myös, että ei löydy sellaista erillistä kasvavaa osajonoa jonka avulla osajonon 1 2 3 5 6 ja jonkin toisen osajonon summa olisi 8. Sanasta w voidaan muodostaa myös kolme erillistä heikosti kasvavaa osajonoa, jolloin $L(w, 3) = 9$. Sallitaan lisäksi tyhjät osajonot, jolloin saadaan $L(w, k) = 9$, kun $k \geq 4$.

Esimerkissä 4.1 huomataan, että sanasta w muodostetun k erillisten osajonojen maksimipituus $L(w, k)$ voidaan muodostaa useammalla kuin yhdellä k erillisten osajonojen kokoelmalla, sekä myös alkioiden määrä yksittäisissä osajonoissa voi muuttua. Lisäksi edellisessä vaiheessa saadut osajonot eivät välttämättä tuota maksimia enää seuraavassa vaiheessa.

Esimerkki 4.2. Muodostetaan esimerkissä 4.1 annetusta sanasta Youngin taulu kanonisella prosessilla. Tällöin Youngin tauluksi saadaan

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \cline{1-3} 7 \\ \cline{1-1} \end{array} .$$

Youngin taulusta $P(w)$ saadaan sana $w' = 745612334$, jossa $L(w', 1) = 5$, $L(w', 2) = 8$ ja $L(w', k) = 9$, kun $k \geq 3$. Youngin taulu $P(w)$ on muotoa $\lambda = (5, 3, 1)$. Huomataan yhteys Youngin taulun muodon ja suurimman sanasta w muodostetun k erillisten heikosti kasvavien osajonojen pituuksien summan kesken. Todistetaan seuraavaksi tämä yhteys.

Lause 4.1. *Olkoon sana w muodostettu muotoa λ olevasta Youngin taulusta, jossa $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$. Tällöin kaikilla k*

$$L(w, k) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k.$$

Todistus (vrt. [2, s. 32]). Jos sana w on muodostettu Youngin taulusta T, niin löydämme helposti luvun $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = L(w, k)$ kaikilla k, sillä sana muodostetaan taulusta rivi kerrallaan ja Youngin taulussa jokainen rivi on kasvava. Jos tarkastellaan jotakin kasvavaa osajonoa sanasta w, niin siihen kuuluvat alkiot on otettu Youngin taulusta menemällä vasemmalta oikealle ja koskaan menemättä alaspäin, sillä jos jokin alkio on alempana, niin se on syötetty ensin ja se on suurempi. Tällöin kyseinen alkio ei voi kuulua samaan kasvavaan osajonoon. Jokainen alkio on pitänyt ottaa eri sarakkeesta, jolloin $L(w, 1)$ antaa sarakkeiden lukumäärän, eli Youngin taulun ensimmäisen rivin alkioiden lukumäärän. Vastaavasti $L(w, k)$ antaa ensimmäisillä k rivillä olevien alkioiden lukumäärän. Tällöin jokaisella k kappaleen erillisillä Youngin diagrammista muodostetuilla solukokoelmilla ei voi olla enempää soluja kuin Youngin diagrammin ensimmäisellä k rivillä on soluja. $\square$

Esimerkeistä 4.1 ja 4.2 huomataan myös, että pisimmät heikosti kasvavat osajonot ovat sanoilla w ja w' yhtä pitkät. Todistetaan tähän liittyvä lause seuraavaksi.

Lause 4.2. *Jos sanat w ja w' ovat Knuth-ekvivalentit, niin*

$$L(w, k) = L(w', k).$$

Todistus (vrt. [2, s. 32]). Riittää tarkastella mitä tapahtuu Knuthin alkeismuunnoksissa (K') ja (K").

Tarkastellaan ensiksi Knuthin alkeismuunnosta (K'). Tarkastellaan sanoja $w = u \cdot yxz \cdot v$ ja $w' = u \cdot yzx \cdot v$, missä sana w' on saatu sanasta w Knuthin alkeismuunnoksella (K') siten, että $x < y \leq z$. Tällöin $L(w, k) \geq L(w', k)$, sillä jokainen sanasta w' muodostettu k kappaleen erillisten kasvavien osajonojen kokoelma on myös sanan w kokoelma.

Näytetään seuraavaksi, että $L(w, k) \leq L(w', k)$. Oletetaan, että sanasta w on muodostettu k erillistä kasvavaa osajonoa. Riittää näyttää, että sanasta w' saadaan muodostettua k erillistä kasvavaa osajonoa, joissa on yhtä paljon alkioita. Jos alkiot x ja z eivät kuulu samaan sanan w osajonoon, niin kaikki sanan w erilliset osajonot on myös kasvavia sanassa w', jolloin asia on selvä.

Oletetaan, että x ja z kuuluvat samaan sanasta w muodostettuun osajonoon. Olkoon osajono $w_i = u_1 \cdot x \cdot z \cdot v_1$, jossa u_1 ja v_1 ovat lukujonoista u ja v muodostettuja heikosti kasvavia osajonoja. Osajonot u_1 ja v_1 voivat myös olla tyhjiä. Nyt osajono w_i ei ole osajono sanassa w'. Mikäli alkio y ei kuulu mihinkään sanan w erilliseen osajonoon, niin muodostetaan sanalle w' osajono $w'_i = u_1 \cdot y \cdot z \cdot v_1$. Nyt osajono w'_i on heikosti kasvava ja sisältää yhtä monta alkiota kuin w_i.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa alkio y kuuluu johonkin sanan w erilliseen osajonoon, merkitään tätä osajonoa $w_j = u_2 \cdot y \cdot v_2$. Huomataan, että alkiot x, y ja z eivät voi kuulua samaan osajonoon, sillä $x < y \leq z$. Muodostetaan nyt sanan w' osajonot w'_i ja w'_j ja näytetään, että ne ovat heikosti kasvavia. Olkoon osajono $w'_i = u_2 \cdot yz \cdot v_1$, joka on heikosti kasvava, sillä $max(u_2) \leq y$ ja $z \leq min(v_1)$. Vastaavasti osajono $w'_j = u_1 \cdot x \cdot v_2$, joka on heikosti kasvava, sillä $max(u_1) \leq x < min(v_2)$. Nyt myös muodostetut osajonot sisältävät samat alkiot, jolloin on todistettu $L(w, k) \leq L(w', k)$.

Tarkastellaan nyt Knuthin alkeismuunnosta (K"). Tällöin tarkastellaan sanoja $v = u \cdot xzy \cdot v$ ja $v' = u \cdot zxy \cdot v$, missä sana v' on saatu sanasta v Knuthin alkeismuunnoksella (K") siten, että $x \leq y < z$. Nyt $L(v, k) \geq L(v', k)$, sillä jokainen sanasta v' muodostettu k kappaleen erillisten kasvavien osajonojen kokoelma on myös sanan v kokoelma.

Osoitetaan seuraavaksi, että $L(v, k) \leq L(v', k)$. Todistus menee vastaavasti kuin Knuthin alkeismuunnoksen (K') tapauksessa. Jos alkiot x ja z eivät kuulu samaan sanan v osajononoon, niin kaikki sanan v erilliset osajonot ovat myös kasvavia sanassa v'. Oletetaan, että alkiot x ja y kuuluvat samaan sanan v osajonoon, merkitään tätä osajonoa $v_i = u_1 \cdot x \cdot z \cdot v_1$. Jos alkio y ei kuulu mihinkään sanan v osajonoon, niin muodostetaan sanan v' osajono $v'_i = u_1 \cdot xy \cdot v_1$, jossa alkioita on yhtä paljon kuin osajonossa v_i ja se on heikosti kasvava.

Oletetaan seuraavaksi, että alkio y kuuluu johonkin sanan v erilliseen osajonoon. Merkitään tätä osajonoa $v_j = u_2 \cdot y \cdot v_2$. Tällöin sanan v' vastaaviksi osajonoiksi saadaan $v'_i = u_1 \cdot xy \cdot v_2$ ja $v'_j = u_2 \cdot z \cdot v_1$, jotka ovat heikosti kasvavia ja sisältävät yhtä monta alkioita kuin v_i ja v_j.

On siis näytetty, että $L(w,k) = L(w',k)$ ja $L(v,k) = L(v',k)$, eli väite on tosi. $\square$

4.2 Lauseen 3.4 todistus

Ennen kuin voidaan todistaa lause 3.4 tarvitaan vielä yhtä apulausetta.

Lause 4.3. *Jos sanat w ja w' ovat Knuth-ekvivalentit ja sanat $w_\circ$ ja $w'_\circ$ on saatu poistamalla p suurinta ja q pienintä alkiota kummastakin sanasta, niin sanat $w_\circ$ ja $w'_\circ$ ovat Knuth-ekvivalentit.*

Todistus (ks. [2, s. 33]). Todistetaan induktiolla sanan pituuden suhteen.

Näytetään, että jos poistetaan suurin tai pienin alkio sanoista w ja w', niin saadut sanat ovat edelleen Knuth-ekvivalentit. Tarkastellaan suurimman kirjaimen tilannetta, pienimmän kirjaimen tilanteen ollessa symmetrinen sille. Nyt riittää tarkastella erikseen Knuthin alkeismuunnosten (K') ja (K") tilanteet. Aloitetaan Knuthin alkeismuunnoksesta (K'). Olkoon sanat

$$w = x_1 \ldots yxz \ldots x_n \quad \text{ja} \quad w' = x_1 \ldots yzx \ldots x_n.$$

Mikäli sanasta w poistettava alkio ei ole x, y tai z, niin tilanne on selvä. Sanat $w_\circ$ ja $w'_\circ$ ovat Knuth-ekvivalentit. Oletetaan, että poistettava alkio on x, y tai z. Tällöin poistettavan alkion pitää olla z, sillä $x < y \leq z$. Jos alkio z poistetaan, niin $w_\circ = w'_\circ$.

Täysin vastaavasti saadaan todistettua Knuthin alkeismuunnosta (K") vastaava tilanne. $\square$

Nyt voidaan todistaa lause 3.4.

Todistus (ks. [2, s. 34]). Osoitetaan, että jos sana w on Knuth-ekvivalentti taulusta T muodostetun sanan $w(T)$ kanssa, niin sana w määrittää taulun T yksikäsitteisesti. Todistetaan induktiolla sanan pituuden suhteen. Tarkastellaan tilannetta, jossa sanan w pituus on 1. Tällöin selvästi sana w määrittää yksikäsitteisesti taulun T.

Lauseiden 4.1 ja 4.2 perusteella taulun T muodon λ määrittää sana w:

$$\lambda_k = L(w,k) - L(w,k-1).$$

Olkoon x suurin sanassa w esiintyvä alkio. Jos alkio x esiintyy sanassa w useamman kerran, niin poistetaan ensimmäinen oikealta, merkitään näin saatua sanaa $w_\circ$. Olkoon taulu $T_\circ$ saatu poistamalla alkion x oikeanpuoleisin esiintymä taulusta T. Alkio x on taulussa T jonkin rivin viimeinen alkio Youngin taulun määritelmän mukaan. Lauseen 4.3 mukaan sanat $w_\circ$ ja $T(w_\circ)$ ovat Knuth-ekvivalentit.

Induktio-oletuksen mukaan taulu $T_\circ$ on yksikäsitteisesti määritetty taulu, josta muodostettu sana $w(T_\circ)$ on Knuth-ekvivalentti sanan $w_\circ$ kanssa. Tiedetään taulujen $T_\circ$ ja T muodot, jolloin taulu T on saatu taulusta $T_\circ$ lisäämällä alkio x jäljelle jääneeseen soluun. $\square$

Lauseen 3.4 avulla saadaan todistettua lause 2.5.

Viitteet

[1] Bayley, R. *Young Tableaux and The Robinson-Schensted-Knuth Correspondence*. 2002. URL: [http://www.maths.qmul.ac.uk/~rtb/mathpage/Richard Bayley's Homepage_files/richardmmath.pdf]. Viitattu 21.3.2011.

[2] Fulton, W. *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[3] Yong, A. *WHAT IS... a Young Tableau?*. Notices of the AMS, 2007. URL: [http://www.ams.org/notices/200702/whatis-yong.pdf]. Viitattu 21.3.2011.

[4] Zhao, Y. *Young Tableaux and the Representations of the Symmetric Group*. Harvard College Mathematics Review. URL: [http://www.thehcmr.org/issue2_2/tableaux.pdf]. Viitattu 21.3.2011.