**TAMPEREEN YLIOPISTO**
**Pro gradu -tutkielma**

**Jussi Talja**

# Laplace-muunnoksesta ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta sen avulla

**Informaatiotieteiden yksikkö**
**Matematiikka**
**Huhtikuu 2011**

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

TALJA, JUSSI: Laplace-muunnoksesta ja differentiaaliyhtälöjen ratkaisemisesta sen avulla

Pro gradu -tutkielma, 40 s., 1 liite.

Matematiikka

Huhtikuu 2011

---

## Tiivistelmä


Tämä tutkielma käsittelee Laplace-muunnosta ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista sen avulla. Laplace-muunnos on integraalimuunnos, joka on saanut nimensä ranskalaisen matemaatikon ja tähtitieteilijän Pierre-Simon Laplacen mukaan. Laplace-muunnoksella on monia käytännön sovelluskohteita niin fysiikan kuin matematiikan ongelmissa.

Tutkielman alkuosassa paneudutaan Laplace-muunnokseen, sen ominaisuuksiin ja erilaisten funktioiden Laplace-muunnosten ja käänteismuunnosten määrittämiseen. Erityistä huomiota kiinnitetään Laplace-muunnoksen olemassaolon tarkasteluun, sillä olemassaololle on tietyt vaatimukset, jotka funktion tulee toteuttaa, jotta sillä olisi Laplace-muunnos. Erilaisten funktioiden Laplace-muunnosten ja käänteismuunnosten ratkaiseminen on tärkeä osa Laplace-muunnosten soveltamista erilaisissa tilanteissa, joista tutkielman lopussa paneudutaan tarkemmin differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Laplace-muunnos on differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa hyvä työväline, koska ongelmaa ratkaistaessa ei tarvitse etsiä differentiaaliyhtälön yleistä ratkaisua, vaan alkuehdot voidaan ottaa suoraan huomioon ratkaisumenetelmässä. Lisäksi voidaan hyödyntää useita Laplace-muunnoksen ominaisuuksia, joita esitetään lauseiden muodossa tutkielman kolmannessa luvussa. Tutkielmassa on päälähteinä käytetty teoksia Dyke, P.: *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Nagle, R., Saff, E., Snider, A.: *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* ja Schiff, J.: *The Laplace Transform: Theory and Applications*.

# Sisältö

# 1 Johdanto

Laplace-muunnos on saanut nimensä ranskalaisen matemaatikon ja tähtitieteilijän Pierre-Simon Laplacen (1749–1827) mukaan [6]. Laplace-muunnos on integraalimuunnos, jonka synty ajoittuu 1760-luvulle Eulerin tutkimuksiin. Hän käytti käänteiseen Laplace-muunnokseen verrattavaa menetelmää ratkoessaan toisen asteen lineaarisia differentiaaliyhtälöitä. [4, s. 10 (johdanto)]. Ilmeisesti vuonna 1782 Laplace innostui Eulerin kehittämistä integraaleista, joita hän sitten kehitti edelleen lähemmäs sitä muotoa, miten niitä tänä päivänä käytetään [5]. Laplacen työtä ovat myöhemmin jatkaneet muun muassa Poincaré ja Pincherle (soveltamalla Laplace-muunnosta kompleksimuuttujan funktioille) sekä Picard (kahden muuttujan funktion Laplace-muunnos)[4, s. 10–11 (johdanto)].

Pierre-Simon Laplace oli matemaattisten ongelmien lisäksi kiinnostunut tähtitieteestä ja todennäköisyyksistä. Sen lisäksi, että hän kehitti Laplace-yhtälön ja loi perustan nykymuotoiselle Laplace-muunnoksen käytölle eri sovellusalueilla, hänet muistetaan mm. yhtenä ensimmäisistä tiedemiehistä, jotka uskoivat mustien aukkojen olemassaoloon. [6]. Vuonna 1812 Laplace julkaisi teoksen *Théorie analytique des probabilités*, jossa hän esitteli monta myöhemmän tilastotieteen perustulosta [6] ja [4, s. 10 (johdanto)]. Saavutustensa ansiosta Laplace nimitettiin vuonna 1806 kreiviksi ja myöhemmin 1817 hän sai markiisin arvonimen. Laplace on myös yksi niistä 72 henkilöstä, jonka nimi on kaiverretty Eiffel-torniin. [6].

Kuten jo todettua, yksi Laplace-muunnoksen tärkeistä sovellusalueista on differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen. Laplace-muunnos on tässä yhteydessä hyvä työväline, koska ongelmaa ratkaistaessa ei tarvitse etsiä differentiaaliyhtälön yleistä ratkaisua, vaan alkuehdot voidaan ottaa suoraan huomioon ratkaisumenetelmässä [4, s. 59]. Laplace-muunnoksella voidaan matemaattisten ongelmien lisäksi ratkaista useita fysiikan alaan kuuluvia ongelmia.

Tämän tutkielman tarkoitus on antaa lukijalle perustiedot Laplace-muunnoksesta ja sen ominaisuuksista. Tutkielman alkuosassa paneudutaan Laplace-muunnokseen, sen ominaisuuksiin ja erilaisten funktioiden Laplace-muunnosten ja käänteismuuttosten määrittämiseen. Tutkielman lopussa paneudutaan tarkemmin yhteen Laplace-muunnoksen tärkeään sovellusalueeseen, differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

Tutkielman toisessa luvussa esitetään pohjatietona käsite funktion paloittainen jatkuvuus, joka on edellytyksenä Laplace-muunnoksen olemassaololle. Lisäksi esitellään muutama muu tutkielmassa myöhemmin esiintyvä määritelmä ja lause.

Tutkielman kolmannen luvun aluksi käydään läpi Laplace-muunnoksen ja käänteisen Laplace-muunnoksen määritelmät ja lauseen muodossa niiden lineaarisuus. On tärkeää huomata, että kaikille funktioille ei voida määrittää Laplace-muunnosta, vaan funktion tulee toteuttaa tietyt ehdot. Nämä käydään läpi lauseessa 3.1. Kappaleen 3.4 pääpaino on derivaattafunktioiden Laplace-muunnoksiin liittyvissä lauseissa, joita myöhemmin luvussa 4 hyödynnetään differentiaaliyhtälöiden ratkaisussa. Kappaleessa 3.5 keskitytään yksikköaskelfunktion Laplace-muunnoksen määrittämiseen ja esitellään toinen translaatiolause, jota niin ikään käytetään myöhemmin hyväksi differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa. Kolmannen kappaleen viimeinen luku on omistettu konvoluutiofunktion Laplace-muunnoksen käsittelylle.

Tutkielman neljäs ja viimeinen luku käsittelee differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista edellisissä luvuissa esitettyjen lauseiden ja määritelmien avulla. Jokainen esimerkki poikkeaa toisista siinä käytettyjen ratkaisukeinojen osalta, jotka on mainittu ennen kutakin esimerkkiä.

Lukijan edellytetään hallitsevan yhden ja usean muuttujan funktion analyysin sekä kompleksianalyysin perusteet. Tutkielmassa on päälähteinä käytetty teoksia Dyke, P.: *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Nagle, R., Saff, E., Snider, A.: *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* ja Schiff, J.: *The Laplace Transform: Theory and Applications.*

# 2 Valmistelevia tarkasteluja

Jotta tietylle funktiolle voidaan määrittää Laplace-muunnos, tulee funktion olla paloittain jatkuva tai jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$. Tästä syystä määritellään ensiksi, mitä tarkoittavat käsitteet hyppyepäjatkuvuus ja paloittainen jatkuvuus.

**Määritelmä 2.1** (Hyppyepäjatkuvuus)**.** (Ks.[4, s. 8].) Funktiolla $f(t)$ sanotaan olevan *hyppyepäjatkuvuuskohta pisteessä* $t_0$, mikäli funktion toispuoleiset raja-arvot pisteessä $t_0$ ovat äärellisinä olemassa, mutta niiden arvot eivät ole samat. On siis voimassa

$$\lim_{t \to t_{0-}} f(t) = L \qquad ja \qquad \lim_{t \to t_{0+}} f(t) = M,$$

mutta $L \neq M$.

**Määritelmä 2.2** (Paloittainen jatkuvuus)**.** (Vrt.[1, s. 3], [3, s. 381], [4, s. 10].) Funktion $f(t)$ sanotaan olevan *paloittain jatkuva suljetulla välillä* $[a, b]$, mikäli se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä lukuun ottamatta äärellistä määrää hyppyepäjatkuvuuskohtia $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in [a, b]$.

Funktion $f(t)$ sanotaan olevan *paloittain jatkuva puoliavoimella välillä* $[0, \infty)$, mikäli

$$(*) \qquad \lim_{t \to 0_+} f(t) = f(0),$$

$(**)$ funktio $f$ on jatkuva jokaisella välin $[0, \infty)$ suljetulla osavälillä $[0, N]$ kaikilla $N > 0$ lukuun ottamatta äärellistä määrää hyppyepäjatkuvuuskohtia $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in [0, N]$.

Määritelmästä 2.2 ja jatkuvien funktioiden ominaisuuksista seuraa, että paloittain jatkuva funktio $f(t)$ on paitsi jatkuva, myös rajoitettu jokaisella välin $[0,\infty)$ osavälillä. Toisin sanoen on siis olemassa äärellinen määrä lukuja $M_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$, joille

$$|f(t)| \leq M_i, \qquad \tau_i < t < \tau_{i+1}.$$

[4, s. 10.]

Seuraavassa lauseessa esiteltävän Leibnizin lauseen avulla voidaan ratkaista sellaisia matemaattisia ongelmia, joissa tulee määrittää integaalilausekkeen derivaatta. Tällöin, mikäli funktio toteuttaa vaaditut oletukset Leibnizin lauseen käyttämiselle, voidaan sen avulla vaihtaa integroimisen ja derivoimisen järjestystä tehtävän ratkaisun helpottamiseksi [3, s. 389]. Tässä tutkielmassa lausetta käytetään avuksi lauseen 3.11 todistamisessa.

**Lause 2.1** (Leibnizin lause)**.** (Ks. [3, s. 447].) Olkoot kahden muuttujan funktiot $f$ ja $\frac{\partial f}{\partial t}$ jatkuvia pisteissä $v$ ja $t$ ja olkoot funktiot $a(t)$ ja $b(t)$ derivoituvia. Tällöin

$$\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(v,t)\,dv\right] = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(v,t)\,dv + f\Big(b(t),t\Big)\frac{db}{dt}(t) - f\Big(a(t),t\Big)\frac{da}{dt}(t).$$

Määritellään seuraavaksi kahden funktion konvoluutio. Konvoluutiolla on tärkeitä sovellusalueita fysiikassa ja myös differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa [4, s. 91], kuten tutkielman luvussa 4 käy ilmi.

**Määritelmä 2.3** (Konvoluutio)**.** (Ks.[1, s. 37], [3, s. 425], [4, s. 91].) Olkoot funktiot $f(t)$ ja $g(t)$ paloittain jatkuvia puoliavoimella välillä $[0,\infty)$. Tällöin niiden *konvoluutio* $(f * g)$ määritellään integraalin avulla seuraavasti:

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Seuraavassa lauseessa esitellään konvoluution ominaisuuksia.

**Lause 2.2.** *Olkoot funktiot $f(t)$, $g(t)$ ja $h(t)$ paloittain jatkuvia puoliavoimella välillä $[0,\infty)$. Tällöin*

(1) $\quad f * g = g * f,$

(2) $\quad f * (g + h) = (f * g) + (f * h),$

(3) $\quad (f * g) * h = f * (g * h),$

(4) $\quad f * 0 = 0,$

(5) $\quad c(f * g) = cf * g = f * cg,$ *missä $c$ on vakio.*

*Todistus* (ks. [3, s. 425–426], [4, s. 91]). Todistetaan seuraavaksi edellisen lauseen kohdat (1) ja (3). Aloitetaan kohdasta (1). Määritelmän 2.3 mukaan

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Kun merkitään $u = t - \tau$, saadaan

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_t^0 f(u)g(t-u)\,(-du)\\ &= \int_0^t g(t-u)f(u)\,du\\ &= (g * f)(t),\end{aligned}$$

joka todistaa lauseen 2.2 kohdan (1). Jatketaan todistamalla kohta (3). Nyt merkitsemällä $x = u - \tau$, saadaan

$$\begin{aligned}\big((f * (g * h)\big)(t) &= \int_0^t f(\tau)\,(g * h)\,(t-\tau)\,d\tau\\ &= \int_0^t f(\tau)\left(\int_0^{t-\tau} g(x)h(t-\tau-x)\,dx\right)d\tau\\ &= \int_0^t \left(\int_\tau^t f(\tau)g(u-\tau)h(t-u)\,du\right)d\tau\\ &= \int_0^t \left(\int_0^u f(\tau)g(u-\tau)\,d\tau\right)h(t-u)\,du\\ &= \big((f * g) * h\big)(t).\end{aligned}$$

Muiden kohtien todistukset sivuutetaan. □

# 3 Laplace-muunnoksesta

## 3.1 Laplace-muunnoksen määritelmä

**Määritelmä 3.1** (Laplace-muunnos)**.** (Vrt.[3, s. 377–378], [4, s. 1–2].) Olkoon funktio $f$ välillä $[0, \infty)$ määritelty reaali- tai kompleksiarvoinen reaalimuuttujan $t > 0$ funktio, ja olkoon $s$ sen reaalinen tai kompleksinen parametri. Tällöin funktion $f$ *Laplace-muunnos* on funktio $F$, joka määritellään integraalin avulla

$$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)\, dt. \tag{2}$$

Laplace-muunnos on määritelty kaikilla parametrin $s$ arvoilla, joilla integraali (1) on olemassa. Tällöin myös raja-arvo (2) on olemassa ja sanotaan, että integraali (1) suppenee. Jos raja-arvo (2) ei ole olemassa, integraali (1) hajaantuu, jolloin funktiolle $f$ ei voida määritellä Laplace-muunnosta. Funktion $f$ Laplace-muunnokselle käytetään lähteestä riippuen merkintöjä $F$, $\mathcal{L}(f)$ ja $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$. Tässä tutkielmassa käytetään jälkimmäistä merkintätapaa.

**Esimerkki 3.1.** ([4, s. 5], tehtävä 1.) Määritetään funktion $f(t) = e^{2t}$ Laplace-muunnos. Funktio $f(t)$ on jatkuva välillä $[0, \infty)$, joten määritelmän 3.1 mukaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(f(t)\big) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{2t}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{(2-s)t}\, dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{(2-s)t}\, dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big/_{\!0}^{R} \frac{1}{2-s} \cdot e^{(2-s)t} \\
&= \lim_{R\to\infty} \left( \frac{1}{2-s} \cdot e^{(2-s)R} - \frac{1}{2-s} \right).
\end{aligned}$$

Koska $e^{(2-s)R} \to 0$, kun $R \to \infty$ ($s > 2$), saadaan

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \frac{1}{s-2}.$$

Jotta tietyn funktion Laplace-muunnos olisi olemassa, tulee funktion olla *eksponentiaalista kertalukua* jollakin vakiolla. Määritellään seuraavaksi mitä tämä käsite tarkoittaa.

**Määritelmä 3.2** (Eksponentiaalinen kertaluku)**.** (Vrt.[3, s. 383], [4, s. 12].) Funktion $f$ sanotaan olevan *eksponentiaalista kertalukua vakiolla* $\alpha$, jos on olemassa sellaiset vakiot $M > 0$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, että jollain $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0.$$

**Esimerkki 3.2.** ([3, s. 385], tehtävä 29.) Osoitetaan, että funktio $f(t) = e^{t^3}$ ei ole eksponentiaalista kertalukua millään vakiolla $\alpha$. Jotta funktio $f(t) = e^{t^3}$ olisi eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$, tulisi määritelmän 3.2 mukaan olla olemassa sellaiset vakiot $M > 0$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, että jollain $t_0 \geq 0$,

$$\left|e^{t^3}\right| \leq Me^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0.$$

Nyt $\left|e^{t^3}\right| = e^{t^3}$, joten tulisi löytää sellainen $M > 0$, että

$$\frac{e^{t^3}}{e^{\alpha t}} \leq M. \tag{1}$$

Kuitenkin

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^3}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} e^{t(t^2-\alpha)} = +\infty,$$

joten epäyhtälö (1) ei toteudu millään $M > 0$, eikä funktio $f(t) = e^{t^3}$ siten ole eksponentiaalista kertalukua millään vakiolla $\alpha$.

## 3.2 Käänteinen Laplace-muunnos

Usealla matemaattisella operaatiolla on käänteinen operaatio. Laplace-muunnos on yksi näistä operaatioista. ([1, s. 19].) Käänteinen Laplace-muunnos muuntaa Laplace-muunnetun funktion takaisin alkuperäiseksi funktioksi. Käänteisellä Laplace-muunnoksella on tärkeitä sovellusalueita varsinkin fysiikassa. ([4, s. 23].)

**Määritelmä 3.3** (Käänteinen Laplace-muunnos)**.** (Vrt.[1, s. 19], [3, s. 393], [4, s. 23, s. 151–152].) Olkoon $F(s)$ funktio. Jos on olemassa sellainen puoliavoimella välillä $[0, \infty)$ paloittain jatkuva eksponentiaalista kertalukua oleva funktio $f(t)$, jolle $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, sanotaan tällöin funktion $f(t)$ olevan funktion $F(s)$ *käänteinen Laplace-muunnos* ja merkitään

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = f(t), \qquad t \geq 0.$$

**Huomautus 3.1.** Jos parametri $s$ on kompleksinen, ts. muotoa $s = x + iy$, saadaan $\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = f(t)$ määritettyä kaavalla

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)\,ds = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-iy}^{x+iy} e^{st}F(s)\,ds, \qquad \mathcal{R}e(s) = x > \alpha.$$

Tällöin funktion $f$ määrittelyjoukkoa laajennetaan niin, että funktio $f$ on määritelty avoimella välillä $(-\infty, \infty)$, ja $f(t) = 0$, kun $t < 0$.

## 3.3 Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

**Lause 3.1** (Laplace-muunnoksen olemassaolo)**.** *Olkoon funktio $f$ paloittain jatkuva välillä $[0, \infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$. Tällöin sen Laplace-muunnos $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$ on olemassa kaikilla luvuilla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$ ja se suppenee itseisesti.*

*Todistus* (Vrt. [3, s. 383–384], [4, s. 13]). Lauseen todistamiseksi täytyy osoittaa, että integraali

$$(*) \qquad \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

suppenee itseisesti, kun $\mathcal{R}e(s) > \alpha$.

Koska funktio $f(t)$ on eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$, on määritelmän 3.2 nojalla olemassa sellaiset vakio $M_1 > 0$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, joilla

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0.$$

Edelleen funktio $f$ on paloittain jatkuva ja rajoitettu välin $[0, \infty)$ suljetulla osavälillä $[0, t_0]$. Olkoon $M_2 > 0$ sellainen vakio, että

$$|f(t)| \leq M_2, \qquad 0 < t < t_0.$$

Koska eksponenttifunktiolla $e^{\alpha t}$ on positiivinen minimi suljetulla välillä $[0, t_0]$, voidaan valita riittävän iso vakion $M$ arvo, jolle on voimassa

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \qquad t > 0.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
(**) \qquad \int_0^R \left|e^{-st} f(t)\right| dt &\leq M \int_0^R e^{-(x-\alpha)t}\, dt \\
&= \Big/_{0}^{R} \frac{M e^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)} \\
&= -\frac{M e^{-(x-\alpha)R}}{x-\alpha} + \frac{M}{x-a}.
\end{aligned}$$

Nyt, koska $\mathcal{R}e(s) = x > \alpha$, niin $-\frac{Me^{-(x-\alpha)R}}{x-\alpha} \to 0$, kun $R \to \infty$, ja yhtälö $(**)$ tulee muotoon

$$\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \leq \frac{M}{x-\alpha}.$$

Näin olemme osoittaneet, että integraali $(*)$ suppenee itseisesti, kun $\mathcal{R}e(s) > \alpha$, ja lause on todistettu. □

**Huomautus 3.2.** (Ks.[4, s. 20].) Edellisessä lauseessa 3.1 todistettiin, että välillä $[0, \infty)$ paloittain jatkuvien ja eksponentiaalista kertalukua jollakin vakiolla $\alpha$ olevien funktioiden Laplace-muunnokset ovat olemassa ja ne suppenevat itseisesti. Tällöin siis

$$(*) \qquad \int_0^\infty \left| e^{-st} f(t) \right| \, dt \text{ suppenee.}$$

Sen lisäksi, että integraali $(*)$ suppenee itseisesti, se suppenee *tasaisesti*. Tämän todistamiseksi oletetaan, että edellisen lauseen oletukset ovat voimassa. Tällöin määritelmän 3.2 nojalla

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0.$$

Kun valitaan $x \in \mathbb{R}$ siten, että $x = \mathcal{R}e(s) > \alpha$, pätee

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^\infty e^{-st} f(t) \, dt \right| &\leq \int_{t_0}^\infty e^{-xt} \, |f(t)| \, dt \\ &\leq M \int_{t_0}^\infty e^{-(x-\alpha)t} \, dt \\ &= \Big/_{t_0}^{\infty} \frac{M e^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)} \\ &= \frac{M e^{-(x-\alpha)t_0}}{x - \alpha}. \end{aligned}$$

Kun reaaliset luvut $x$ ja $x_0$ valitaan niin, että $x \geq x_0 > \alpha$, saadaan edelliselle osamäärälle yläraja, jolloin

$$(**) \qquad \frac{M e^{-(x-\alpha)t_0}}{x - \alpha} \leq \frac{M}{x_0 - \alpha} e^{-(x_0 - \alpha)t_0}.$$

Valitsemalla nyt $t_0$ riittävän suureksi, saadaan yhtälön $(**)$ oikea puoli mielivaltaisen pieneksi. Tällöin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $T > 0$, että kun $t_0 \geq T$,

$$\left| \int_{t_0}^\infty e^{-st} f(t) \, dt \right| < \varepsilon$$

jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) \geq x_0 > \alpha$. Näin väite on todistettu.

**Lause 3.2.** *Olkoon funktio $f(t)$ paloittain jatkuva puoliavoimella välillä* $[0, \infty)$ *ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$. Tällöin*

$$F(s) = \mathcal{L}\Big(f(t)\Big) \to 0, \qquad \textit{kun } \mathcal{R}e(s) \to \infty.$$

*Todistus* (ks. [4, s. 21–22]). Lauseen 3.1 todistuksessa osoitettiin, että

$$\int_0^\infty \left| e^{-st} f(t) \right| dt \leq \frac{M}{x-\alpha}, \qquad \text{kun } \mathcal{R}e(s) = x > \alpha.$$

Kun nyt $x \to \infty$, osamäärä $\frac{M}{x-\alpha} \to 0$, josta väite seuraa. □

Seuraavassa lauseessa 3.3 esitetään ja todistetaan yksi tärkeimmistä ja käytetyimmistä Laplace-muunnoksen ominaisuuksista, lineaarisuus [1, s. 5].

**Lause 3.3** (Laplace-muunnoksen lineaarisuus)**.** *Olkoot $a \in \mathbb{C}$ ja $b \in \mathbb{C}$ mielivaltaiset vakiot. Olkoot $f_1(t)$ ja $f_2(t)$ funktioita, joiden Laplace-muunnokset ovat olemassa. Tällöin*

$$\mathcal{L}\Big(af_1(t) + bf_2(t)\Big) = a\mathcal{L}\Big(f_1(t)\Big) + b\mathcal{L}\Big(f_2(t)\Big).$$

*Todistus* (vrt. [1, s. 5], [4, s. 16–17]). Koska $f_1(t)$ ja $f_2(t)$ ovat funktioita, joiden Laplace-muunnokset ovat olemassa, on lauseen 3.1 nojalla on olemassa sellaiset vakiot $M_1 > 0$ ja $M_2 > 0$, että aina, kun $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha_1$

$$\Big|f_1(t)\Big| \leq M_1 e^{\alpha_1 t},$$

ja aina, kun $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha_2$

$$\Big|f_2(t)\Big| \leq M_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Nyt kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\Big|af_1(t) + bf_2(t)\Big| &\leq |a| \, \Big|f_1(t)\Big| + |b| \, \Big|f_2(t)\Big| \\ &\leq \Big(|a| \, M_1 + |b| \, M_2\Big) e^{\alpha t},\end{aligned}$$

missä $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, joten lauseen 3.1 nojalla myös funktiolla $\mathcal{L}\Big(af_1(t) + bf_2(t)\Big)$ on Laplace-muunnos. Edelleen määritelmän 3.1 ja funktioiden integroimissääntöjen nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(af_1(t) + bf_2(t)\Big) &= \int_0^\infty \Big(af_1(t) + bf_2(t)\Big) e^{-st} \, dt \\ &= \int_0^\infty \Big(af_1(t)e^{-st} + bf_2(t)e^{-st}\Big) \, dt \\ &= a\int_0^\infty f_1(t)e^{-st} \, dt + b\int_0^\infty f_2(t)e^{-st} \, dt \\ &= a\mathcal{L}\Big(f_1(t)\Big) + b\mathcal{L}\Big(f_2(t)\Big).\end{aligned}$$

□

**Esimerkki 3.3.** ([4, s. 22], tehtävä 1.) Määritetään funktion $f(t) = 2t+3e^{2t}+4\sin 3t$ Laplace-muunnos. Funktio $f(t)$ toteuttaa lauseen 3.1 vaatimukset, joten funktion $f(t)$ Laplace-muunnos on olemassa. Laplace-muunnostaulukon ja Laplace-muunnoksen lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(t) &= \mathcal{L}(2t + 3e^{2t} + 4\sin 3t)\\ &= \mathcal{L}(2t) + \mathcal{L}(3e^{2t}) + \mathcal{L}(4\sin 3t)\\ &= 2\mathcal{L}(t) + 3\mathcal{L}(e^{2t}) + 4\mathcal{L}(\sin 3t)\\ &= \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s-2} + \frac{12}{s^2+9}.\end{aligned}$$

**Lause 3.4** (Laplace-muunnoksen yksikäsitteisyys)**.** *Olkoot funktiot $f(t)$ ja $g(t)$ paloittain jatkuvia välillä $[0,\infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$. Olkoon $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$ ja $\mathcal{L}\big(g(t)\big) = G(s)$. Jos $F(s) \equiv G(s)$, niin $f(t) \equiv g(t)$.*

*Todistus* (vrt. [2, s. 515]). Jos $x = \mathcal{R}e(s)$ on riittävän suuri, saadaan huomautuksen 3.1 nojalla

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{st}G(s)\,ds\\ &= \mathcal{L}^{-1}\big(G(s)\big)\\ &= g(t).\end{aligned}$$

$\square$

Lauseessa 3.3 todistettiin Laplace-muunnoksen lineaarisuusominaisuus. Seuraavaksi todistamme, että myös käänteisellä Laplace-muunnoksella on sama ominaisuus, joka on yksi sen tärkeimmistä ominaisuuksista eri sovellusten kannalta ([1, s. 19]).

**Lause 3.5** (Laplace-muunnoksen käänteismuunnoksen lineaarisuus)**.** *Olkoot $a \in \mathbb{C}$ ja $b \in \mathbb{C}$ mielivaltaiset vakiot. Oletetaan, että Laplace-muunnoksen käänteismuunnokset $\mathcal{L}^{-1}\big(F_1(s)\big)$ ja $\mathcal{L}^{-1}\big(F_2(s)\big)$ ovat olemassa ja ne ovat välillä $[0,\infty)$ jatkuvia funktioita. Tällöin*

$$\mathcal{L}^{-1}\big(aF_1(s) + bF_2(s)\big) = a\mathcal{L}^{-1}\big(F_1(s)\big) + b\mathcal{L}^{-1}\big(F_2(s)\big).$$

*Todistus* (tekijän itse laatima). Huomautuksen 3.1 mukaan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big(aF_1(s)+bF_2(s)\Big) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\Big(aF_1(s)+bF_2(s)\Big)\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\Big(aF_1(s)\Big)\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\Big(bF_2(s)\Big)\,ds \\
&= a\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\Big(F_1(s)\Big)\,ds + b\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\Big(F_2(s)\Big)\,ds \\
&= a\mathcal{L}^{-1}\Big(F_1(s)\Big) + b\mathcal{L}^{-1}\Big(F_2(s)\Big).
\end{aligned}
$$

□

**Esimerkki 3.4.** ([3, s. 394], esimerkki 2.) Määritetään funktion

$$\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}$$

käänteinen Laplace-muunnos. Lauseen 3.5 nojalla

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}\right) \\
&\quad = 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-6}\right) - 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right).
\end{aligned}
$$

Kun nyt kirjoitetaan

$$\frac{s}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+3^2} \qquad \text{ja} \qquad \frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{(s+2)^2+1^2},$$

saadaan Laplace-muutostaulukosta

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-6}\right) = e^{6t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right) = \cos 3t \quad ja$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right) = e^{-2t}\sin t.$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}\right) \\
&\quad = 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-6}\right) - 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right) \\
&\quad = 5e^{6t} - 6\cos 3t + \frac{3e^{-2t}}{2}\sin t.
\end{aligned}
$$

**Lause 3.6.** *Olkoon $f(t)$ välillä $[0, \infty)$ paloittain jatkuva ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ oleva funktio, jonka Laplace-muunnos $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$ on olemassa, kun $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$. Tällöin*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}\big(f(t)\big)}{s}.$$

*Todistus* (vrt. [2, s. 522], [4, s. 66–67]). Olkoon $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$. Tällöin $g'(t) = f(t)$ lukuun ottamatta äärellistä määrää funktion $f$ epäjatkuvuuskohtia. Lisäksi $g(0) = 0$. Todistetaan aluksi, että funktio $g(t)$ on eksponentiaalista kertalukua. Koska funktio $f(t)$ on eksponentiaalista kertalukua, on määritelmän 3.2 mukaan olemassa sellaiset vakiot $M > 0$ ja $K > 0$, että kun $K > M > 0$

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau \leq M\int_0^t e^{K\tau}\,d\tau = \frac{M}{K}(e^{Kt} - 1) \leq e^{Kt}.$$

Koska myös funktio $g(t)$ on eksponentiaalista kertalukua, on sen Laplace-muunnos lauseen 3.1 nojalla olemassa. Nyt

$$(*) \qquad \begin{aligned}\mathcal{L}\big(g(t)\big) &= \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\Big/_{\!0}^{R} \frac{g(t)e^{-st}}{-s} + \frac{1}{s}\int_0^R e^{-st} f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{g(R)e^{-sR}}{-s} - \frac{g(0)e^{0}}{-s} + \frac{1}{s}\int_0^R e^{-st} f(t)\,dt\right).\end{aligned}$$

Koska g(0) = 0, supistuu yhtälön $(*)$ oikea puoli muotoon

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{g(R)e^{-sR}}{-s} + \frac{1}{s}\int_0^R e^{-st} f(t)\,dt\right) &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{g(R)e^{-sR}}{-s}\right) + \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{s}\int_0^R e^{-st} f(t)\,dt\right) \\ (**) \qquad &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{g(R)e^{-sR}}{-s}\right) + \frac{\mathcal{L}\big(f(t)\big)}{s}.\end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että yhtälön $(**)$ ensimmäinen termi on nolla, jolloin lause tulee todistetuksi. Koska funktio $f(t)$ on eksponentiaalista kertalukua, saadaan

$$
\begin{aligned}
\left|g(R)e^{-sR}\right| &\le e^{-xR}\int_0^R |f(\tau)|\, d\tau \\
&\le Me^{-xR}\int_0^R e^{\alpha\tau}\, d\tau \\
&= \frac{M}{\alpha}(e^{-(x-\alpha)R} - e^{-xR}) \to 0, \text{ kun } R\to\infty,
\end{aligned}
$$

missä $x = \mathcal{R}e(s) > \alpha > 0$. Näin yhtälö $(*)$ supistuu muotoon

$$
\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}\big(f(t)\big)}{s},
$$

ja lause on todistettu. $\square$

**Lause 3.7** (Ensimmäinen translaatiolause)**.** *Olkoon $f(t)$ funktio, jonka Laplace-muunnos $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$ on olemassa kaikilla luvuilla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > 0$. Tällöin*

$$
F(s-a) = \mathcal{L}\big(e^{at}f(t)\big), \qquad \textit{missä } a \in \mathbb{R}, \mathcal{R}e(s) > a.
$$

*Todistus* (Ks. [3, s. 386], [4, s. 27–28]). Olkoon $\mathcal{R}e(s) > a$. Tällöin määritelmän 3.1 ja eksponenttifunktion laskusääntöjen mukaan

$$
\begin{aligned}
F(s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t} f(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}e^{at} f(t)\, dt \\
&= \mathcal{L}\big(e^{at}f(t)\big).
\end{aligned}
$$

$\square$

**Esimerkki 3.5.** ([3, s. 391], tehtävä 21.) Tiedetään, että funktion $\cos bt$ Laplace-muunnos on

$$
F(s) = \mathcal{L}\big(\cos bt\big) = \frac{s}{s^2+b^2}.
$$

Määritetään translaation avulla funktion $e^{at}\cos bt$ Laplace-muunnos. Lauseen 3.7 nojalla

$$
\mathcal{L}\big(e^{at}\cos bt\big) = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.
$$

## 3.4 Derivaattafunktioiden Laplace-muunnos

Tässä kappaleessa esitettävät derivaattafunktioiden Laplace-muunnoksiin liittyvät lauseet muodostavat keskeisen osan niitä työkaluja, joilla differentiaaliyhtälöitä ratkaistaan Laplace-muunnosten avulla. Differentiaaliyhtälön ratkaisuprosessissa voidaan seuraavien lauseiden tuloksiin suoraan sisällyttää tehtävän alkuehdot, jolloin ratkaisun lyötyminen helpottuu.

**Lause 3.8** (Derivaattafunktion Laplace-muunnos)**.** *Olkoon funktio $f(t)$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$. Olkoon $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$. Olkoon funktio $f'(t)$ niin ikään eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja paloittain jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$. Tällöin jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$*

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = sF(s) - f(0).$$

*Todistus* (vrt. [1, s. 14–15], [3, s. 387], [4, s. 54]). Koska $f'(t)$ on paloittain jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$, on sen Laplace-muunnos $\mathcal{L}\big(f'(t)\big)$ lauseen 3.1 nojalla olemassa. Määritelmän 3.1 mukaan osittaisintegroimalla saadaan

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad \mathcal{L}\big(f'(t)\big) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f'(t)\,dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[ \Big/_{\!0}^{R} e^{-st} f(t) + s \int_0^R e^{-st} f(t)\,dt \right] \\
&= \lim_{R\to\infty} e^{-sR} f(R) - f(0) + s \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \lim_{R\to\infty} e^{-sR} f(R) - f(0) + sF(s).
\end{aligned}
$$

Koska funktio $f(t)$ on eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$, on määritelmän 3.2 nojalla olemassa sellainen vakio $M > 0$, että jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) = x > \alpha$

$$\left| e^{-sR} f(R) \right| \leq e^{-xR} M e^{\alpha R} = M e^{-(x-\alpha)R} \to 0, \text{ kun } R \to \infty.$$

Tällöin yhtälö $(*)$ saadaan muotoon

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = sF(s) - f(0),$$

ja näin lause on todistettu. $\square$

**Esimerkki 3.6.** Osoitetaan, että

$$\mathcal{L}\left(\cos^2 t\right) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

Olkoon $f(t) = \cos^2 t$, jolloin $f'(t) = -2\sin t\cos t = -\sin 2t$ ja $f(0) = \cos^2 0 = 1$. Nyt lauseen 3.3 ja Laplace-muunnostaulukon nojalla

$$\mathcal{L}\Big(f'(t)\Big) = \mathcal{L}\Big(-\sin 2t\Big) = -\mathcal{L}\Big(\sin 2t\Big) = \frac{-2}{s^2+4}.$$

Edelleen lauseen 3.8 nojalla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big(f'(t)\Big) &= s\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) - f(0), \text{ eli} \\ s\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) &= \mathcal{L}\Big(f'(t)\Big) + f(0) \\ &= \frac{-2}{s^2+4} + 1 \\ &= \frac{s^2+2}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) = \mathcal{L}\Big(\cos^2 t\Big) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

**Lause 3.9.** *Olkoot funktiot $f(t)$ ja $f'(t)$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja jatkuvia puoliavoimella välillä $[0,\infty)$. Olkoon $\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) = F(s)$. Olkoon funktio $f''(t)$ niin ikään eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja paloittain jatkuva puoliavoimella välillä $[0,\infty)$. Tällöin jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$*

$$\mathcal{L}\Big(f''(t)\Big) = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\,dt = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

*Todistus* (vrt. [1, s. 15]). Koska $f'(t)$ on jatkuva puoliavoimella välillä $[0,\infty)$ ja $f''(t)$ on paloittain jatkuva puoliavoimella välillä $[0,\infty)$ ja kumpikin funktioista on eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$, ovat niiden Laplace-muunnokset $\mathcal{L}\Big(f'(t)\Big)$ ja $\mathcal{L}\Big(f''(t)\Big)$ lauseen 3.1 nojalla olemassa. Määritelmän 3.1 ja lauseen 3.8

nojalla

$$(*) \qquad \mathcal{L}\Big(f''(t)\Big) = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\,dt$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f''(t)\,dt$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left[ \Big/_0^R e^{-st} f'(t) + s\int_0^R e^{-st} f'(t)\,dt \right]$$
$$= \lim_{R\to\infty} e^{-sR} f'(R) - f'(0) + s\Big(sF(s) - f(0)\Big)$$
$$= \lim_{R\to\infty} e^{-sR} f'(R) + s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Vastaavasti kuten lauseen 3.8 todistuksessa, voidaan osoittaa, että $\lim_{R\to\infty} e^{-sR} f'(R) = 0$. Tällöin yhtälö $(*)$ saadaan muotoon

$$\mathcal{L}\Big(f''(t)\Big) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

ja lause on todistettu. □

**Esimerkki 3.7.** ([4, s. 58], tehtävä 3a.) Osoitetaan, että

$$\mathcal{L}\Big(\omega^2 \sinh \omega t\Big) = \frac{\omega^3}{s^2 - \omega^2}$$

käyttämällä pelkästään lauseen 3.9 ja määritelmän 3.1 tuloksia.
Olkoon $f(t) = \sinh \omega t$, joten $f'(t) = \omega \cosh \omega t$, $f''(t) = \omega^2 \sinh \omega t$, $f(0) = 0$ ja $f'(0) = \omega$. Lauseen 3.9 mukaan

$$\mathcal{L}\Big(f''(t)\Big) = s^2\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) - sf(0) - f'(0),$$

josta saadaan

$$\mathcal{L}\Big(\omega^2 \sinh \omega t\Big) = s^2\mathcal{L}\Big(\sinh \omega t\Big) - \omega$$
$$= s^2 \left[\int_0^\infty e^{-st} \sinh \omega t\,dt\right] - \omega$$
$$= s^2 \left[\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st} \sinh \omega t\,dt\right] - \omega$$
$$= s^2 \left[\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\,dt\right] - \omega$$
$$= \frac{1}{2}s^2 \left[\lim_{R\to\infty}\int_0^R \Big(e^{-t(s-\omega)} - e^{-t(s+\omega)}\Big)\,dt\right] - \omega$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}s^2\left[\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t(s-\omega)}\,dt - \frac{1}{2}s^2\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t(s+\omega)}\,dt\right] - \omega \\
&= -\frac{1}{2}s^2\left[\lim_{R\to\infty}\Big/_{\!0}^{R}\frac{1}{s-\omega}e^{-t(s-\omega)} + \frac{1}{2}s^2\lim_{R\to\infty}\Big/_{\!0}^{R}\frac{1}{s+\omega}e^{-t(s+\omega)}\right] - \omega \\
&= \frac{1}{2}s^2\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{2}s^2\frac{1}{s+\omega} - \omega \\
&= s^2\frac{\omega}{s^2-\omega^2} - \omega \\
&= \frac{\omega^3}{s^2-\omega^2},\ \text{kun } s > \omega.
\end{aligned}
$$

Edellisen esimerkin tarkoitus on havainnollistaa lauseen 3.9 käyttöä ratkaisukeinona. Lukijan on hyvä huomata, että tehtävän ratkaisu oltaisiin saatu suoraan lauseen 3.3 avulla kirjoittamalla $\mathcal{L}\Big(\omega^2 \sinh \omega t\Big) = \omega^2\mathcal{L}\Big(\sinh \omega t\Big)$ ja ratkaisemalla tämä.

**Lause 3.10.** *Olkoot funktiot $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ jatkuvia välillä $[0,\infty)$ ja olkoon $f^{(n)}(t)$ paloittain jatkuva välillä $[0,\infty)$, ja olkoot kaikki edelliset funktiot eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$. Tällöin jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$*

$$
(1) \qquad \mathcal{L}\Big(f^{(n)}(t)\Big) = s^n\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).
$$

*Todistus* (tekijän itse laatima). Todistetaan lause induktiolla $n$:n suhteen. Osoitetaan ensin (perusaskel), että (1) on tosi, kun $n = 1$. Sen jälkeen induktioaskeleessa oletetaan, että (1) on tosi, kun $n = k$ (induktio-oletus), ja osoitetaan sitten, että (1) on tosi, kun $n = k+1$ (induktioväite).
1° Perusaskel, $n = 1$.

Lauseen 3.8 yhteydessä todistettiin, että $\mathcal{L}\Big(f'(t)\Big) = sF(s) - f(0)$.

2° Induktioaskel.
Induktio-oletus: oletetaan, että (1) on tosi, kun $n = k$, eli

$$
\mathcal{L}\Big(f^{(k)}(t)\Big) = s^k\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0).
$$

Induktioväite: (1) on tosi, kun $n = k+1$.

Todistus. Osittaisintegroimalla saadaan

$$(*)\qquad \mathcal{L}\Big(f^{(k+1)}(t)\Big) = \int_0^\infty e^{-st} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[ \Big/_0^R e^{-st} f^{(k)}(t) + s \int_0^R e^{-st} f^{(k)}(t)\,dt \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} e^{-sR} f^{(k)}(R) - f^{(k)}(0) + s \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f^{(k)}(t)\,dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} e^{-sR} f^{(k)}(R) - f^{(k)}(0) + s\mathcal{L}\Big(f^{(k)}(t)\Big).$$

Koska funktio $f^{(k)}(t)$ on eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$, voidaan lauseen 3.8 todistuksen tapaan osoittaa, että $\lim_{R\to\infty} e^{-sR} f^{(k)}(R) = 0$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla yhtälö $(*)$ saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(f^{(k+1)}(t)\Big) &= s\mathcal{L}\Big(f^{(k)}(t)\Big) - f^{(k)}(0) \\
&= s\left[s^k\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)\right] - f^{(k)}(0) \\
&= s^{k+1}\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) - s^k f(0) - s^{k-1}f'(0) - \cdots - sf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

Näin ollen induktioperiaatteen mukaan väite on tosi ja lause on todistettu.

□

**Lause 3.11.** *Olkoon funktio $f(t)$ paloittain jatkuva välillä $[0, \infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$. Olkoon $F(s) = \mathcal{L}\Big(f(t)\Big)$. Tällöin jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$*

$$(1)\qquad \frac{d^n}{ds^n}F(s) = \mathcal{L}\Big((-1)^n t^n f(t)\Big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

*Todistus* (tekijän itse laatima). Todistetaan lause induktiolla $n$:n suhteen. Osoitetaan ensin (perusaskel), että (1) on tosi, kun $n = 1$. Sen jälkeen induktioaskeleessa oletetaan, että (1) on tosi, kun $n = k$ (induktio-oletus), ja osoitetaan sitten, että (1) on tosi, kun $n = k + 1$ (induktioväite).

1° Perusaskel, $n = 1$. Lauseen 2.1 avulla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int\limits_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)\,dt \\ &= \int\limits_0^\infty -te^{-st}f(t)\,dt \\ &= \mathcal{L}\Big(-tf(t)\Big).\end{aligned}$$

2° Induktioaskel.
Induktio-oletus: oletetaan, että (1) on tosi, kun $n = k$, eli

$$\frac{d^k}{ds^k}F(s) = \mathcal{L}\Big((-1)^k t^k f(t)\Big).$$

Induktioväite: (1) on tosi, kun $n = k + 1$.
Todistus. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s) = \frac{d}{ds}\frac{d^k}{ds^k}F(s),$$

jolloin induktio-oletuksen mukaan

$$(*) \qquad \begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s) &= \frac{d}{ds}\mathcal{L}\Big((-1)^k t^k f(t)\Big) \\ &= (-1)^k \frac{d}{ds}\mathcal{L}\Big(t^k f(t)\Big).\end{aligned}$$

Merkitään nyt $g(t) = t^k f(t)$, jolloin $\mathcal{L}\Big(t^k f(t)\Big) = \mathcal{L}\Big(g(t)\Big)$. Tällöin yhtälö $(*)$ saadaan muotoon

$$\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s) = (-1)^k \frac{d}{ds}\mathcal{L}\Big(g(t)\Big),$$

jolloin perusalkeleen todistuksen mukaan

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}F(s) &= (-1)^k \frac{d}{ds}\mathcal{L}\Big(g(t)\Big) \\ &= (-1)^k \mathcal{L}\Big(-t \cdot g(t)\Big) \\ &= (-1)^k \mathcal{L}\Big(-t \cdot t^k f(t)\Big) \\ &= \mathcal{L}\Big((-1)^{k+1} t^{k+1} f(t)\Big).\end{aligned}$$

Näin ollen induktioperiaatteen mukaan väite on tosi ja lause on todistettu.

□

**Esimerkki 3.8.** ([4, s. 34], tehtävä 1.) Määritetään funktion $f(t) = t\cosh\omega t$ Laplace-muunnos $\mathcal{L}(t\cosh\omega t)$, kun tiedetään, että $\mathcal{L}(\cosh\omega t) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$. Lauseen 3.11 nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t\cosh\omega t) &= -\frac{d}{ds}F(s)\\ &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\cosh\omega t)\\ &= -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2-\omega^2}\\ &= \frac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}.\end{aligned}$$

**Lause 3.12.** *Olkoon funktio $f$ paloittain jatkuva välillä $[0,\infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$. Olkoon lisäksi $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$ ja olkoon raja-arvo $\lim_{t\to 0_+} \frac{f(t)}{t}$ olemassa. Tällöin*

$$\int_s^\infty F(x)\,dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$$

*jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$.*

*Todistus* (vrt. [4, s. 33]). Koska funktio $f(t)$ paloittain jatkuva välillä $[0,\infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja raja-arvo $\lim_{t\to 0_+} \frac{f(t)}{t}$ on olemassa, on Laplace-muunnos $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$ lauseen 3.1 nojalla olemassa. Integroimalla puolittain yhtälö

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,dt,$$

missä $x \in \mathbb{R}$, saadaan

$$\int_s^\infty F(x)\,dx = \lim_{w\to\infty}\int_s^w \left(\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,dt\right)dx.$$

Huomautuksen 3.2 perusteella $\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,dt$ suppenee tasaisesti, kun $w \geq x \geq s > \alpha$. Vaihtamalla integroimisjärjestystä saadaan

$$(*)\qquad \begin{aligned}\int_s^\infty F(x)\,dx &= \lim_{w\to\infty}\int_0^\infty \left(\int_s^w e^{-xt}f(t)\,dx\right)dt\\ &= \lim_{w\to\infty}\int_0^\infty \left(\Big/_{\!s}^{\,w} \frac{e^{-xt}}{-t}f(t)\right)dt\\ &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt - \lim_{w\to\infty}\int_0^\infty e^{-wt}\frac{f(t)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Nyt, kun $w \to \infty$, lauseen 3.2 nojalla edellisen yhtälön $(*)$ termi $\int\limits_0^\infty e^{-wt}\frac{f(t)}{t}\,dt \to 0$. Tällöin yhtälö $(*)$ sievenee muotoon

$$\begin{aligned}\int\limits_s^\infty F(x)\,dx &= \int\limits_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right),\end{aligned}$$

ja lause on todistettu. $\square$

**Esimerkki 3.9.** ([4, s. 34], tehtävä 2a.) Osoitetaan lauseen 3.2 avulla, että

$$\mathcal{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) = \log\left(1+\frac{1}{s}\right), \qquad (s > 0).$$

Olkoon nyt $f(t) = 1-e^{-t}$. Määritetään ensin funktion $f(t)$ Laplace-muunnos $\mathcal{L}(f(t))$. Määritelmän 3.1 nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \int\limits_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{-st}(1-e^{-t})\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R \left(e^{-st}-e^{-t(s+1)}\right)\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{-st}\,dt - \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{-t(s+1)}\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\Big/_0^R \frac{e^{-st}}{-s} - \lim_{R\to\infty}\Big/_0^R \frac{e^{-t(s+1)}}{-(s+1)} \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{-sR}}{-s}\right)+\frac{1}{s} - \left[\lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{-R(s+1)}}{-(s+1)}\right)+\frac{1}{s+1}\right]. \\ &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}.\end{aligned}$$

Lauseen 3.12 nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) &= \int\limits_s^\infty \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\,dx \\ &= \int\limits_s^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx\end{aligned}$$

$$= \int_s^\infty \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \log\left(1 + \frac{1}{s}\right).$$

**Lause 3.13.** *Olkoon funktio $f(t)$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$. Olkoon $\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) = F(s)$. Olkoon funktio $f'(t)$ niin ikään eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja paloittain jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$. Tällöin*

$$\lim_{t \to 0_+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s), \qquad \text{missä } s \in \mathbb{R}.$$

*Todistus* (ks. [4, s. 88]). Koska funktio $f'(t)$ on eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja paloittain jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$, on sen Laplace-muunnos lauseen 3.1 nojalla olemassa. Olkoon $\mathcal{L}\Big(f'(t)\Big) = G(s)$. Tällöin lauseen 3.2 nojalla $G(s) \to 0$, kun $s \to \infty$. Lauseen 3.8 nojalla

$$G(s) = \mathcal{L}\Big(f'(t)\Big) = sF(s) - f(0), \qquad s > \alpha.$$

Ottamalla raja-arvo puolittain, kun $s \to \infty$, saadaan

$$0 = \lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \left(sF(s) + f(0)\right).$$

Tästä saadaan

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s),$$

josta väite seuraa. □

**Lause 3.14.** *Olkoon funktio $f(t)$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$. Olkoon $\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) = F(s)$. Olkoon funktio $f'(t)$ niin ikään eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja paloittain jatkuva puoliavoimella välillä $[0, \infty)$. Olkoon lisäksi raja-arvo $\lim_{t \to \infty} f(t)$ olemassa. Tällöin*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s), \qquad \text{missä } s \in \mathbb{R}.$$

*Todistus* (ks. [1, s. 24]). Lauseen 3.8 nojalla

$$(*) \qquad \mathcal{L}\Big(f'(t)\Big) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = sF(s) - f(0).$$

Ottamalla raja-arvo puolittain, kun $s \to 0$, saadaan

$$(**) \qquad \begin{aligned} \lim_{s \to \infty} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt &= \lim_{s \to \infty} \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-st} f'(t)\, dt \\ &= \lim_{s \to \infty} \lim_{R \to \infty} \left(e^{-st} f(R) - f(0)\right) \\ &= \lim_{R \to \infty} f(R) - f(0) \\ &= \lim_{t \to \infty} f(t) - f(0). \end{aligned}$$

Nyt yhdistämällä yhtälöt ($*$) ja ($**$) saadaan

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0),$$

josta lisäämällä puolittain $f(0)$ saadaan

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

ja lause on todistettu. □

## 3.5 Yksikköaskelfunktio ja Laplace-muunnos

**Määritelmä 3.4** (Yksikköaskelfunktio)**.** (Ks.[1, s. 13], [3, s. 411], [4, s. 25].) *Yksikköaskelfunktio* $u(t)$ määritellään seuraavasti:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ 1, & \text{kun } t > 0. \end{cases}$$

Yksikköaskelfunktio voidaan myös määritellä parametrin $a \geq 0$ avulla seuraavasti:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < a, \\ 1, & \text{kun } t > a. \end{cases}$$

Tällöin funktiolla $u_a(t)$ on hyppyepäjatkuvuuskohta pisteessä $t = a$. Yksikköaskelfunktio tunnetaan myös nimellä *Heavisiden funktio.*

**Esimerkki 3.10.** ([3, s. 421], tehtävä 5.) Määritetään funktio

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1, \\ 2, & 1 < t < 2, \\ 1, & 2 < t < 3, \\ 3, & 3 < t \end{cases}$$

uudelleen yksikköaskelfunktion avulla. Nyt funktion $g(t)$ arvo muuttuu kaksi yksikköä arvosta 0 arvoon 2, kun $1 < t < 2$, joten ensimmäinen uudelleenmääritellyn funktion lausekkeen termi on $2u(t-1)$. Seuraavaksi funktion $g(t)$ arvo muuttuu yhden yksikön arvosta 2 arvoon 1, kun $2 < t < 3$, joten toinen uudelleenmääritellyn funktion lausekkeen termi on $-u(t-2)$ ja vastaavalla tavalla saadaan viimeinen termi $2u(t-3)$. Tällöin funktion $g(t)$ lausekkeeksi saadaan

$$g(t) = 2u(t-1) - u(t-2) + 2u(t-3).$$

**Lause 3.15.** *Yksikköaskelfunktion $u_a(t)$, $a \geq 0$ Laplace-muunnos on*

$$\mathcal{L}\Big(u_a(t)\Big) = \frac{e^{-as}}{s},$$

*jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e(s) > 0$.*

*Todistus* (ks. [3, s. 412], [4, s. 25]). Olkoon $a \geq 0$. Tällöin, kun $\mathcal{R}e(s) > 0$, määritelmän 3.1 nojalla

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(u_a(t)\Big) &= \int\limits_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt \\
&= \int\limits_a^\infty e^{-st}\, dt \\
&= \Big/_{\!\!a}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} \\
&= \frac{e^{-as}}{s}, \qquad \text{(koska } \frac{e^{-st}}{-s} \to 0, \text{kun } t \to \infty).
\end{aligned}$$

□

Lauseen 3.15 tulos pätee myös käänteisesti, eli

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s}\right) = u_a(t).$$

[3, s. 412], [4, s. 25].

**Huomautus 3.3.** (Vrt.[3, s. 413].) Edellisen todistuksen yhteydessä käytettiin hyväksi yksikköaskelfunktion määritelmää 3.4, jonka perusteella tiedetään, että $u_a(t) = 0$, kun $t < a$, ja $u_a(t) = 1$, kun $t > a$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt &= \int\limits_0^a e^{-st} u_a(t)\, dt + \int\limits_a^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt \\
&= \int\limits_a^\infty e^{-st}\, dt,
\end{aligned}$$

koska

$$\int\limits_0^a e^{-st} u_a(t)\, dt = 0.$$

Seuraavaksi esitettävää toista translaatiolausetta voidaan käyttää apuna ratkaistaessa differentiaaliyhtälöitä, joissa esiintyy paloittain määritelty funktio.

**Lause 3.16** (Toinen translaatiolause)**.** *Olkoon $f(t)$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ oleva funktio, jolle $F(s) = \mathcal{L}\Big(f(t)\Big)$ jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$. Tällöin jokaisella luvulla $a \geq 0$,*

$$\mathcal{L}\Big(u_a(t) f(t-a)\Big) = e^{-as} F(s). \tag{3.1}$$

*Todistus* (ks. [1, s. 18], [3, s. 413], [4, s. 29]). Olkoon $a \geq 0$. Tällöin määritelmän 3.1 nojalla ja edellisen huomautuksen mukaan

$$(*) \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}\Big(u_a(t)f(t-a)\Big) &= \int_0^\infty e^{-st}\Big(u_a(t)f(t-a)\Big)\,dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt. \end{aligned}$$

Merkitään nyt $v = t - a$. Tällöin $dv = dt$ ja yhtälö $(*)$ saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt &= \int_0^\infty e^{-as}e^{-sv} f(v)\,dv \\ &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv \\ &= e^{-as}F(s). \end{aligned}$$

□

Käytännössä yleisemmin esiintyy ongelma, jossa tulee määrittää Laplace-muunnos funktion $u_a(t)f(t-a)$ sijaan funktiolle, joka on muotoa $u_a(t)g(t)$. Tällöin Laplace-muunnoksen $\mathcal{L}\Big(u_a(t)g(t)\Big)$ määrittämiseksi lauseen 3.16 avulla käytetään merkintää $f(t) = g(t+a)$, jolloin yhtälö (3.1) tulee muotoon

$$(3.2) \qquad \mathcal{L}\Big(u_a(t)g(t)\Big) = e^{-as}\mathcal{L}\Big(g(t+a)\Big).$$

[3, s. 413].

**Esimerkki 3.11.** ([3, s. 421], tehtävä 3.) Määritetään funktion $t^2u(t-2)$ Laplace-muunnos. Merkitään nyt $g(t) = t^2$ ja $a = 2$, jolloin

$$g(t+a) = g(t+2) = (t+2)^2 = t^2 + 4t + 4.$$

Lauseen 3.3 ja Laplace-muunnostaulukon perusteella

$$\mathcal{L}\Big(g(t+a)\Big) = \mathcal{L}(t^2 + 4t + 4) = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}.$$

Tällöin yhtälön (3.2) nojalla

$$\mathcal{L}\Big(t^2u(t-2)\Big) = e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right).$$

## 3.6 Konvoluutio ja Laplace-muunnos

**Lause 3.17** (Konvoluutiolause)**.** *Olkoot funktiot $f(t)$ ja $g(t)$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla $\alpha$ ja jatkuvia puoliavoimella välillä $[0,\infty)$. Olkoon $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$ ja $\mathcal{L}\big(g(t)\big) = G(s)$. Tällöin jokaisella luvulla $s \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(s) > \alpha$*

$$\mathcal{L}\big((f*g)(t)\big) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)\cdot\mathcal{L}\big(g(t)\big).$$

*Todistus* (vrt. [1, s. 38–39], [3, s. 426], [4, s. 92–93]). Määritelmän 3.1 nojalla

$$(*)\qquad \mathcal{L}\big(f(t)\big)\cdot\mathcal{L}\big(g(t)\big) = \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-su} g(u)\,du\right)$$
$$= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} f(\tau)g(u)\,du\right)d\tau.$$

Merkitään nyt $t = \tau + u$, jolloin $du = dt$. Rajataan funktion $g$ määrittelyä niin, että kun $t < 0$, $g(t) = 0$. Tällöin $g(t-\tau) = 0$, kun $t < \tau$. Nyt yhtälö $(*)$ saadaan muotoon

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big)\cdot\mathcal{L}\big(g(t)\big) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,dt\,d\tau.$$

Koska funktiot $f(t)$ ja $g(t)$ toteuttavat lauseen 3.1 ehdot, suppenevat niiden Laplace-muunnokset ko. lauseen nojalla itseisesti. Tästä seuraa, että myös edellisen yhtälön oikea puoli suppenee itseisesti. Toisin sanoen

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left|e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\right|\,dt\,d\tau \text{ suppenee.}$$

Tähän perustuen voidaan nyt vaihtaa integrointijärjestys, jolloin

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big)\cdot\mathcal{L}\big(g(t)\big) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st} f(t)g(t-\tau)\,d\tau\,dt$$
$$= \int_0^\infty\left(\int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)dt$$
$$= \mathcal{L}\big((f*g)(t)\big).$$

□

**Esimerkki 3.12.** ([3, s. 431], tehtävä 5.) Määritetään lauseen 3.17 avulla funktion

$$\frac{1}{s(s^2+1)} \tag{$*$}$$

käänteinen Laplace-muunnos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right).$$

Funktio ($*$) voidaan ilmaista tulomuodossa

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

Nyt Laplace-muunnostaulukosta nähdään, että $1/s = \mathcal{L}(1)$ ja $1/(s^2+1) = \mathcal{L}(\sin t)$. Tällöin lauseen 3.17 nojalla

$$\mathcal{L}(1)\cdot\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(1 * \sin t),$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) &= 1 * \sin t \\
&= \int_0^t \sin(t-\tau)\,d\tau \\
&= \Big/_{0}^{t} \cos(\tau - t) \\
&= \cos 0 - \cos(-t) \\
&= 1 - \cos t.
\end{aligned}$$

# 4 Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta Laplace-muunnoksen avulla

Yksi Laplace-muunnoksen sovellusalueita on differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen. Laplace-muunnos on tässä yhteydessä hyvä työväline, koska ongelmaa ratkaistaessa ei tarvitse etsiä differentiaaliyhtälön yleistä ratkaisua, vaan alkuehdot voidaan ”sulauttaa” suoraan ratkaisumenetelmään [4, s. 59]. Tässä luvussa havainnollistetaan esimerkkien kautta sitä, mitä Laplace-muunnoksen ominaisuutta tai Laplace-muunnokseen liittyvää lausetta voidaan käyttää ratkaistaessa erityyppisiä differentiaaliyhtälöitä. Erityisen hyödyllisiä ovat

Laplace-muunnoksen ja käänteismuunnoksen lineaarisuuteen liittyvät lauseet, sekä derivaattafunktioiden Laplace-muunnoksiin liittyvät lauseet. Ennen kutakin esimerkkiä on kerrottu edellisten lisäksi tehtävän ratkaisussa käytetyt tulokset, joita käytetään yleensä tehtävän lopussa käänteismuunnosten määrittämisessä.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa Laplace-muunnoksen avulla voidaan erottaa kolme pääkohtaa [3, s. 403], [4, s. 60]. Nämä kohdat edellisiä mukaillen ovat:
1) Määritetään differentiaaliyhtälön kummankin puolen Laplace-muunnokset.
2) Ratkaistaan saatu yhtälö termin $\mathcal{L}\big(y(t)\big)$ suhteen, jolloin saadaan yhtälö $\mathcal{L}\big(y(t)\big) = F(s)$.
3) Määritetään yhtälön $\mathcal{L}\big(y(t)\big) = F(s)$ käänteiset Laplace-muunnokset puolittain, jolloin yhtälö saadaan muotoon $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)$, joka on differentiaaliyhtälön ratkaisu.

Ensimmäisessä esimerkkitehtävässä havainnollistetaan differentiaaliyhtälön ratkaisun prosessia, jossa tarvitaan osamurtokehitelmää yhtälön $\mathcal{L}\big(y(t)\big) = F(s)$ oikean puolen jakamiseksi tekijöihin käänteismuunnosten määrittämistä varten.

**Esimerkki 4.1.** ([4, s. 73], tehtävä 1.) Ratkaistaan Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$y'(t) - y(t) = \cos t; \qquad y(0) = -1, \tag{$*$}$$

Otetaan yhtälöstä $(*)$ Laplace-muunnokset puolittain, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$\mathcal{L}\big(y'(t)\big) - \mathcal{L}\big(y(t)\big) = \frac{s}{s^2+1}. \tag{$**$}$$

Alkuehdon ja lauseen 3.8 nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(y'(t)\big) &= s\mathcal{L}\big(y(t)\big) - y(0)\\ &= s\mathcal{L}\big(y(t)\big) + 1.\end{aligned}$$

Käyttämällä hyväksi edellistä tulosta saadaan yhtälö $(**)$ muotoon

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(y'(t)\big) - \mathcal{L}\big(y(t)\big) &= \frac{s}{s^2+1}\\ s\mathcal{L}\big(y(t)\big) + 1 - \mathcal{L}\big(y(t)\big) &= \frac{s}{s^2+1}\\ (s-1)\mathcal{L}\big(y(t)\big) + 1 &= \frac{s}{s^2+1},\end{aligned}$$

josta saadaan

$$(***) \qquad \mathcal{L}\big(y(t)\big) = \frac{\dfrac{s}{s^2+1} - 1}{s-1} = \frac{\dfrac{s-(s^2+1)}{s^2+1}}{s-1} = \frac{-s^2+s-1}{(s^2+1)(s-1)}.$$

Jotta saadaan määritettyä differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu, tulee määrittää yhtälön $(***)$ termien käänteiset Laplace-muunnokset. Tästä syystä tulee yhtälö $(***)$ jakaa osamurtokehitelmän avulla osamurtoihin, jolloin differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu saadaan määrittämällä edellisen yhtälön termien käänteismuunnokset Laplace-muunnostaulukon avulla. Osamurtokehitelmän avulla yhtälö $(***)$ saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\frac{-s^2+s-1}{(s^2+1)(s-1)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \\
&= \frac{A(s^2+1)}{(s^2+1)(s-1)} + \frac{(s-1)(Bs+C)}{(s^2+1)(s-1)} \\
&= \frac{(A+B)s^2+(C-B)s+A-C}{(s^2+1)(s-1)}.
\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\begin{cases} A+B=-1, \\ C-B=1, \\ A-C=-1, \end{cases}$$

josta saadaan kertoimiksi

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{2}, \\ B=-\frac{1}{2}, \\ C=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nyt yhtälö $(***)$ saadaan muotoon

$$\mathcal{L}\big(y(t)\big) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1^2} - \frac{1}{s^2+1^2}\right),$$

jolloin differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu on lauseen 3.5 nojalla

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1^2} - \frac{1}{s^2+1^2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1^2}\right)\right],
\end{aligned}$$

josta Laplace-muunnostaulukon avulla käänteismuutokset määrittämällä saadaan ratkaisuksi

$$y(t) = -\frac{1}{2}(e^t + \cos t - \sin t).$$

Seuraavassa esimerkissä käytetään tehtävän ratkaisun löytämiseen ensimmäistä translaatiolausetta (lause 3.7).

**Esimerkki 4.2.** ([3, s. 409], tehtävä 1.) Ratkaistaan Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$(*) \qquad y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0; \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

Otetaan yhtälöstä $(*)$ Laplace-muunnokset puolittain, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$(**) \qquad \mathcal{L}\Big(y''(t)\Big) - \mathcal{L}\Big(2y'(t)\Big) + \mathcal{L}\Big(5y(t)\Big) = 0.$$

Seuraavaksi voidaan käyttää hyväksi lauseiden 3.8 ja 3.9 tuloksia sekä Laplace-muunnoksen lineaarisuutta. Lineaarisuusominaisuuden nojalla $\mathcal{L}\Big(5y(t)\Big) = 5\mathcal{L}\Big(y(t)\Big)$. Alkuehtojen ja lauseen 3.8 nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(2y'(t)\Big) &= 2\Big[s\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) - y(0)\Big] \\ &= 2s\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) - 2,\end{aligned}$$

ja alkuehtojen sekä lauseen 3.9 nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(y''(t)\Big) &= s^2\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) - 2s - 4.\end{aligned}$$

Edellisiä tuloksia käyttämällä yhtälö $(**)$ saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(y''(t)\Big) - \mathcal{L}\Big(2y'(t)\Big) + \mathcal{L}\Big(5y(t)\Big) &= 0 \\ s^2\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) - 2s - 4 - \Big[2s\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) - 2\Big] + 5\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) &= 0 \\ (s^2 - 2s + 5)\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) - 2s - 2 &= 0,\end{aligned}$$

josta saadaan

$$(***) \qquad \begin{aligned}\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) &= \frac{2s+2}{s^2 - 2s + 5} \\ &= \frac{2s+2}{s^2 - 2s + 1 + 4} \\ &= \frac{2s+2}{(s-1)^2 + 4} \\ &= \frac{2s}{(s-1)^2 + 4} + \frac{2}{(s-1)^2 + 4}.\end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu saadaan nyt etsimällä yhtälön $(***)$ termien käänteismuunnokset. Lauseen 3.7 nojalla

$$F(s-a) = \mathcal{L}\Big(e^{at}f(t)\Big),$$

jolloin käänteisesti pätee

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(F(s-a)\Big) = e^{at}f(t),$$

jonka mukaan differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu on

$$y(t) = 2e^t \cos 2t + e^t \sin 2t.$$

Seuraava esimerkki havainnollistaa yksikköaskelfunktion käyttöä differentiaaliyhtälön ratkaisemisessa.

**Esimerkki 4.3.** ([4, s. 73], tehtävä 1g.) Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$(*) \qquad y''(t) + y(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{kun } 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \text{kun } t > \pi; \end{cases} \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Merkitään

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{kun } 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \text{kun } t > \pi, \end{cases}$$

jolloin ottamalla yhtälöstä $(*)$ Laplace-muunnokset puolittain saadaan

$$(**) \qquad \mathcal{L}\Big(y''(t)\Big) + \mathcal{L}\Big(y(t)\Big) = \mathcal{L}\Big(f(t)\Big).$$

Alkuehtojen ja lauseen 3.9 nojalla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big(y''(t)\Big) &= s^2\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\Big(y(t)\Big). \end{aligned}$$

Edellistä tulosta käyttämällä yhtälön $(**)$ vasen puoli saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big(y''(t)\Big) + \mathcal{L}\Big(y(t)\Big) &= s^2\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) + \mathcal{L}\Big(y(t)\Big) \\ &= (s^2+1)\mathcal{L}\Big(y(t)\Big). \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön $(**)$ oikeaa puolta. Määritelmän 3.1 ja integraalin lineaarisuusominaisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big(f(t)\Big) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \\ &= \int_0^\pi e^{-st}f(t)\,dt + \int_\pi^\infty e^{-st}f(t)\,dt \end{aligned}$$

Kun nyt huomioidaan funktion $f(t)$ määrittely, nähdään, että $\int\limits_{\pi}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int\limits_{\pi}^{\infty} e^{-st} \cdot 0\,dt = 0$. Välillä $[0, \pi]$ funktio $f(t) = \cos t$, joten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) &= \int\limits_{0}^{\pi} e^{-st} \cos t\,dt \\
&= \Big/_{\!\!0}^{\pi} \frac{e^{-st}}{s^2+1}(\sin t - s\cos t) \\
&= \frac{s}{s^2+1} \cdot e^{-s\pi} + \frac{s}{s^2+1} \\
&= \frac{e^{-s\pi} \cdot s + s}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Kokoamalla edelliset tulokset yhteen saadaan yhtälö $(**)$ muotoon

$$(s^2+1)\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) = \frac{e^{-s\pi} \cdot s + s}{s^2+1},$$

josta saadaan

$$(***) \qquad \begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(y(t)\Big) &= \frac{\frac{e^{-s\pi} \cdot s + s}{s^2+1}}{s^2+1} \\
&= \frac{e^{-s\pi} \cdot s + s}{(s^2+1)^2} \\
&= \frac{s}{(s^2+1)^2} \cdot e^{-s\pi} + \frac{s}{(s^2+1)^2},
\end{aligned}$$

jolloin differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu on

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2} \cdot e^{-s\pi} + \frac{s}{(s^2+1)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2} \cdot e^{-s\pi}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right).$$

Laplace-muunnostaulukosta nähdään, että

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2} t \sin t.$$

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön $(***)$ ensimmäistä termiä $\frac{s}{(s^2+1)^2} \cdot e^{-s\pi}$.

Lauseen 3.16 mukaan

$$\mathcal{L}\Big(u_a(t) f(t-a)\Big) = e^{-as} F(s),$$

jolloin käänteisesti pätee

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(e^{-as} F(s)\Big) = u_a(t) f(t-a).$$

Edellisen tuloksen mukaan

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\cdot e^{-s\pi}\right) = \frac{1}{2}u_\pi(t)(t-\pi)\sin(t-\pi),$$

joten differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu on

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}u_\pi(t)(t-\pi)\sin(t-\pi) \\ &= \frac{1}{2}\Big[t\sin t + u_\pi(t)(t-\pi)\sin(t-\pi)\Big]. \end{aligned}$$

Viimeisessä esimerkissä differentiaaliyhtälön ratkaisu saadaan määritettyä konvoluution avulla.

**Esimerkki 4.4.** ([3, s. 431], tehtävä 1.) Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$(*) \qquad y''(t) - 2y'(t) + y = g(t); \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1,$$

missä $g(t)$ on puoliavoimella välillä $[0,\infty)$ paloittain jatkuva eksponentiaalista kertalukua oleva funktio.
Lauseen 3.1 nojalla funktion $g(t)$ Laplace-muunnos $\mathcal{L}\big(g(t)\big)$ on olemassa, ja ottamalla yhtälöstä $(*)$ Laplace-muunnokset puolittain yhtälö tulee muotoon

$$(**) \qquad \mathcal{L}\big(y''(t)\big) - \mathcal{L}\big(2y'(t)\big) + \mathcal{L}\big(y(t)\big) = \mathcal{L}\big(g(t)\big).$$

Ottamalla huomioon alkuehdot saadaan Laplace-muunnoksen lineaarisuusominaisuuden ja lauseiden 3.8 ja 3.9 nojalla yhtälö $(**)$ muotoon

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\big(y(t)\big) - sy(0) - y'(0) - 2\Big[s\mathcal{L}\big(y(t)\big) - y(0)\Big] + \mathcal{L}\big(y(t)\big) &= \mathcal{L}\big(g(t)\big) \\ (s^2-2s+1)\mathcal{L}\big(y(t)\big) + s - 3 &= \mathcal{L}\big(g(t)\big) \\ (s-1)^2\mathcal{L}\big(y(t)\big) + s - 3 &= \mathcal{L}\big(g(t)\big), \end{aligned}$$

josta saadaan

$$\begin{aligned} (***) \qquad \mathcal{L}\big(y(t)\big) &= \frac{\mathcal{L}\big(g(t)\big) - s + 3}{(s-1)^2} \\ &= \frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}\big(g(t)\big) - \frac{s}{(s-1)^2} + \frac{3}{(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisun etsimiseksi tulee määrittää edellisen yhtälön $(***)$ termien käänteiset Laplace-muunnokset. Lauseen 3.5 ja Laplace-muunnostaulukon perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}\big(g(t)\big) - \frac{s}{(s-1)^2} + \frac{3}{(s-1)^2}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}\big(g(t)\big)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-1)^2}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}\big(g(t)\big)\right] - (1+t)e^t + 3te^t \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}\big(g(t)\big)\right] + 2te^t - e^t.
\end{aligned}$$

Laplace-muunnostaulukon perusteella tiedetään, että

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] = te^t.$$

Tällöin lauseen 3.17 nojalla

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}\big(g(t)\big)\right] = te^t * g(t),$$

jolloin differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu on

$$y(t) = 2te^t - e^t + \int_0^t e^{t-\tau}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

# Viitteet


[1] Dyke, P. *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series.* Lontoo: Springer-Verlag London Limited, 2004.

[2] Mathews, J., Russell, W. *Complex Analysis for Mathematics and Engineering.* Boston: Jones and Bartlett Publishers Inc., 2001.

[3] Nagle, R., Saff, E., Snider, A. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems.* Boston: Pearson Education Inc., 2008.

[4] Schiff, J. *The Laplace Transform: Theory and Applications.* New York: Springer-Verlag New York Inc., 1999.

[5] [Verkkodokumentti]. *Laplace transform.* Wikipedia, the free encyclopedia. [Viitattu 28.3.2011].
URL http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform.

[6] [Verkkodokumentti]. *Pierre-Simon Laplace.* Wikipedia, the free encyclopedia. [Viitattu 28.3.2011].
URL http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace.

# Liite

Laplace-muunnoksia.

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ | $\frac{1}{s^n}\ (n = 1, 2, 3, \ldots))$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $\frac{1}{a}(e^{at}-1)$ | $\frac{1}{s(s-a)}$ |
| $\sin at$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| $\cos at$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ | $\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$ |
| $\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$ | $\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$ |
| $(1+at)e^{at})$ | $\frac{s}{(s-a)^2}$ |
| $e^{bt}\sin at$ | $\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$ |
| $e^{bt}\cos at$ | $\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ |
| $\sinh at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$ | $\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2a}(t\sin at$ | $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2a}(\sin at + at\cos at)$ | $\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$ |
| $\cos at - \frac{1}{2}at\sin at$ | $\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$ |
| $t\cos at$ | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2a^3}(at\cosh at - \sinh at)$ | $\frac{1}{(s^2-a^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2a}(t\sinh at$ | $\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$ |
| $e^{bt}\sinh at$ | $\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$ |
| $e^{bt}\cosh at$ | $\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$ |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |