PRO GRADU -TUTKIELMA

Jenni Ristonmaa

Integraalilaskennan esivaiheista nykyiseen lukio-opetukseen

TAMPEREEN YLIOPISTO
Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Huhtikuu 2011

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

RISTONMAA, JENNI: Integraalilaskennan esivaiheista nykyiseen lukio-opetukseen

Pro gradu -tutkielma, 45 s., 1 liites.

Matematiikka

Huhtikuu 2011

Tiivistelmä

Tässä didaktisessa pro gradu -tutkielmassa esitellään aluksi integraalilaskennan historian merkittävimmät kehitysvaiheet. Historian avulla pyritään herättämään lukijan kiinnostus integraalilaskentaan. Tutkimuksen keskeisin tavoite on lisätä kiinnostusta integraalilaskentaa kohtaan. Tämä tutkimus hyödyttää lukion pitkän matematiikan opiskelijoita tarjoamalla hyödyllistä tilastotietoa pitkän matematiikan integraalilaskennan ylioppilastehtäviin liittyen. Tutkimuksessa tarkastellaan vuosien 1991-2010 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden integraalilaskentaan liittyviä tehtäviä. Tutkimuksessa osoitetaan yhteys tutkittuna aikavälinä voimassa olleiden lukion opetussuunnitelman perusteiden korostamien integraalilaskennan keskeisten sisältöjen sekä ylioppilaskokeiden tyypillisten integraalilaskennan tehtävien välillä. Ylioppilastehtävistä tehdyt tilastot osoittavat, että kiinnostus integraalilaskentaan on vähäistä sekä tehtävistä saadut pistekeskiarvot verrattaen heikkoja. Vähäistä kiinnosta integraalilaskentaa kohtaan pidetään näin ollen osasyynä siihen, että integraalilaskentaa pidetään vaikeana matematiikan osa-alueena.

Sisältö

1 Johdanto

Oman henkilökohtaisen kokemukseni mukaan integrointi sanana kuulostaa monen mielestä vastenmieliseltä ja vaikealta. Tätä integraalilaskentaan liittyvää myyttiä haluan tällä työlläni omalta osaltani purkaa. Myös omat muistikuvani lukiosta ovat sellaiset, että integraalilaskennan kurssia odotettiin pelonsekaisin tuntein. Kurssi vastasi kuitenkin vaikeustasoltaan muita lukion matematiikan pitkän oppimäärän kursseja. Yliopisto-opintojen myötä integraalilaskenta on osoittautunut mielestäni yhdeksi loogisimmista ja viehättävimmistä matematiikan osa-alueista. Tämän pro gradu -tutkielman tavoitteena on lisätä kiinnostusta integraalilaskentaa kohtaan.

Tämä on didaktinen pro gradu -tutkielma. Lukijalta edellytetään analyysin perusteita vastaavia taitoja. Tutkielma etenee integraalilaskennan esivaiheista nykyiseen lukion integraalilaskentaan. Luvussa 2 tutustutaan integraalilaskenan esivaiheisiin aina Antiikin ajalta 1900-luvulle saakka. Työssä tarkastellaan myös integraalilaskentaan liittyviä pitkän matematiikan ylioppilastehtäviä vuosina 1991-2010. Tutkittuna aikavälinä voimassa olleiden lukion opetussuunnitelman perusteiden integraalilaskennalle asettamat vaatimukset ja tavoitteet esitellään luvussa 3. Matemaattinen teoria -luku 4 sisältää täsmällisen teorian lisäksi havainnollistavaa teoriaa. Luvun kuvaileva osuus mukailee Väisälän teoksia [18; 16; 17]. Väisälän teosten päämääränä oli edesauttaa differentiaali- ja integraalilaskennan alkeiden ottamista osaksi oppikoulun opetusta [16] ja tämä päämäärä on toteutunut. Tästä syystä Väisälän teokset ovat tämän tutkielman kannalta hyvin arvokkaita. Viimeisessä luvussa 5 tarkastellaan integraalilaskentaan liittyviä pitkän matematiikan ylioppilastehtäviä.

2 Integraalilaskennan historiaa

Tässä luvussa tarkastellaan integraalilaskennan esivaiheita. Integraalilaskennan historiaan perehdytään tutustumalla integraalilaskennassa merkittävimpiin saavutuksiin yltäneiden matemaatikoiden menetelmiin.

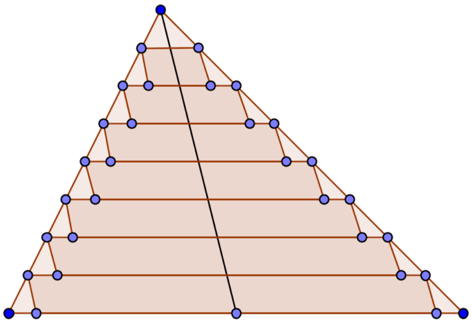
2.1 Arkhimedes

Antiikin kreikkalainen Arkhimedes on tiettävästi ensimmäinen, jonka keskeisin matemaattinen tuotanto voidaan katsoa integraalilaskennaksi. Arkhimedes osoitti menetelmiensä avulla, että ympyrän ala on puolet säteen ja kehän tulosta sekä laski paraabelin segmentin ja ellipsin alan, pallon alan ja tilavuuden, pyörähdyskappaleiden tilavuuksia, erilaisten kuvioiden ja kappaleiden painopisteitä sekä ympyrän kehän pituuden likiarvoja. Arkhimedeen kirjoitukset olivat pitkään kateissa. Vuonna 1906 löydetyssä Metodi kirjoituksessaan Arkhimedes esitti, miten alueen pinta-ala lasketaan jakamalla se janoihin, joita verrataan pinta-alaltaan tunnetun alan alueen janoihin asettamalla kyseiset osat ikään kuin erivartisen vaa'an kuppeihin. Tällä integraalilaskentaa muistuttavalla menetelmällä Arkhimedes laski paraabelin kaaren rajoittamien alueiden aloja. [9, s. 21]

Ranskalainen Nicole Oresme esitti 1300-luvulla nopeus-aika-graafin tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevalle kappaleelle [1, s. 376]. Hän oli tiettävästi ensimmäinen, joka suoritti geometrisesti yksinkertaista integrointia laskiessaan etäisyysfunktiota eli nopeus-aika käyrän alle jäävää alaa [1, s. 378].

2.2 Stevinus

Integraalilaskennasta on käytetty myös nimitystä infinitesimaalianalyysi. Tämä matematiikan menetelmä sai alkunsa flaamilaiselta Simon Stevinukselta, joka todisti teoksessaan Statiikka (1586), että kolmion painopiste on sen mediaanilla. Näin ollen piirrettäessä kolmion sisään yhtä korkeita suunnikkaita, joiden kaksi sivua ovat yhden kolmion sivun suuntaisia sekä kaksi muuta sivua ovat tätä kolmion sivua vasten piirretyn mediaanin suuntaisia, ovat suunnikkaiden painopisteet symmetrian nojalla kolmion mediaanilla, ks. kuvio 2.1. Mitä matalampia suunnikkaita kolmion sisään piirretään, sitä pienempi on kolmion ja sen sisään piirrettyjen suunnikkaiden ero. Koska ero voidaan tehdä mielivaltaisen pieneksi, on kolmion painopiste myös sen mediaanilla. [1, s. 456]



Kuvio 2.1. Kolmioon piirrettyjen suunnikkaiden painopisteet ovat mediaanilla [1, s. 456].

2.3 Kepler

Stevinuksen geometrisen menettelyn kohdistuessa äärettömän monen äärettömän pienen osasen fysikaalisiin sovelluksiin, saksalainen tähtitieteilijä Johannes Kepler (1571-1630) puolestaan hyödynsi vastaavaa menetelmää aivan eri mittakaavan ongelmien ratkomiseen [1, s. 457]. Kepler luotti kopernikaaniseen tähtitieteeseen ja hän halusi ymmärtää aurinkokunnan rakenteen geometristen kuvioiden avulla [13, s. 71]. Tutkimalla Mars-plateetan rataa, Kepler keksi, ettei ympyräratamalli voi olla oikea, vaan plateetat kiertävät aurinkoa ellipsin muotoisella radalla. Kepler julkaisi Marsia koskeneet tutkimuksensa vuonna 1609 ilmestyneessä teoksessaan Astrinomia Nova, missä hän esitti kaksi ensimmäistä nimeään kantavaa lakia [13, s. 77]:

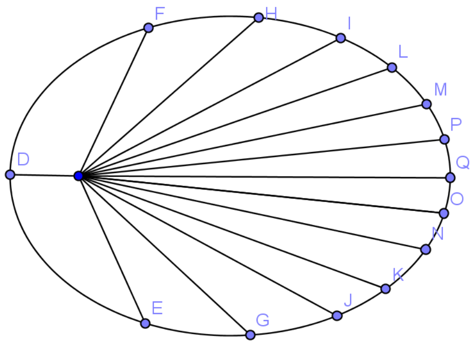
Keplerin I laki Planeetan rata on ellipsi, jonka toisessa polttopisteessä sijaitsee aurinko.

Keplerin II laki Planeetan ja auringon välinen jana pyyhkäisee yhtä pitkissä aikaväleissä yhtä suuret pinta-alat.

Pinta-alalaki eli Keplerin II laki, mikä on tarkoitettu fysikaalisesti perustelluksi säännöksi planeetan sijainnin laskemiseksi radallaan, edelsi Keplerin I lakia. Keplerin ajatus, että planeetta etenee radallaan nopeammin radan auringon puoleisessa osassa pohjautuu Kopernikuksen saamaan tulokseen, että aurinko on voimakeskus, joka antaa planeetoille niiden nopeudet. Kopernikuksen mukaan, mitä lähempänä aurinkoa planeetta on, sitä nopeammin se keskimäärin liikkuu radallaan. [13, s. 75]

Kuviossa kuvio 2.2 on havainnollistettu Keplerin II lakia. Planeetalta menee kunkin välin DE, EG, GJ jne. kulkemiseen yhtä pitkä aika. Planeetan nopeus määräytyy siten, että planeettaa ja aurinkoa yhdistävä viiva pyyhkaisee tietyn mittaisessa ajassa aina yhtä suuren alueen. Näin ollen planeetta kulkee nopeiten ollessaan lähinnä aurinkoa eli pisteessä D ja hitaiten ollessaan kauimpana auringosta eli pisteessä Q.

Planeetan radan auringon ympärille muodostavan ellipsin pinnan Kepler ajatteli muodostuvan äärettömän monesta kolmiosta, jonka yksi kärki on aurin-



Kuvio 2.2. Keplerin II lain havainnollistus [13, s. 75].

gossa ja kaksi planeetan radalla hyvin lähekkäin toisiaan. Kepler sovelsi Oresmen menetelmän kaltaista integraalilaskentaa, missä ympyrän ala lasketaan äärettömän kapeiden kolmioiden avulla. Tällöin kolmioiden korkeudet ovat yhtäsuuria kuin ympyrän säde r ja kolmioiden kannat $b_1, b_2, ..., b_n$ äärettömän lyhyitä siten, että niiden yhteenlaskettu pituus on ympyrän kehän pituus C. Näin ollen ympyrän ala saadaan laskemalla kolmioiden alojen summa

$$\frac{1}{2}b_1r + \frac{1}{2}b_2r + \cdots + \frac{1}{2}b_nr = \frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \frac{1}{2}rC.$$

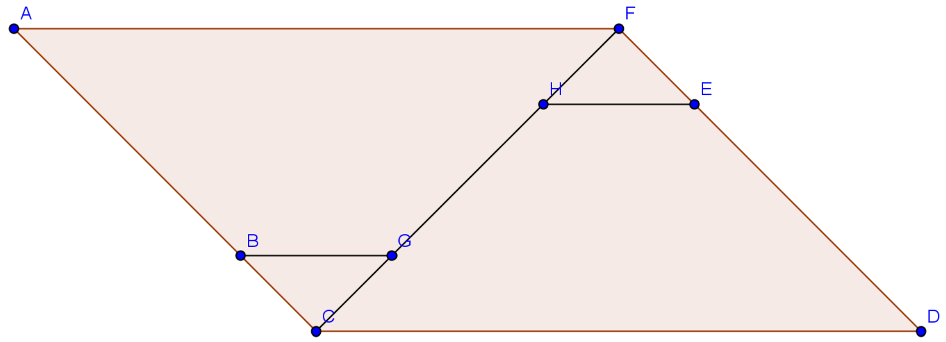
Vastaavasti Kepler johti myös ellipsin alan. Kepler sovelsi integrointimenetelmiään pinta-alojen lisäksi myös tilavuuksiin tutkimalla pyörähdyskappaleiden tilavuuksia. Tilavuuden hän ajatteli koostuvat äärettömän monesta infinitesimaalisesta alkiosta ja laskutoimitukset hän suoritti vastaavasti kuin pinta-alojen suhteen. [1, s. 458-460]

2.4 Galilei ja Cavalieri

Äärettömän pieni tuli Galileille äärettömän suurta tärkeämmäksi hänen huomattuaan sen olevan välttämätön hänen dynamiikassaan. Galileilla ei kuitenkaan ollut riittäviä matemaattisia valmiuksia kehittämiensä käyrien analysoimiseksi [1, s. 462]. Oresmen, Keplerin ja Galilein tavoin Galilein oppilaan italialaisen Bonaventura Cavalierin (1598-1647) menetelmä perustuu siihen, että pinta-ala koostuu jakamattomista suorista ja tilavuus vastaavasti jakamattomista pinta-aloista [1, s. 465].

Vuonna 1635 ilmestynyt Cavalierin teos Geometria indivisibilibus continuorum vaikutti merkittävästi integraalilaskennan kehitykseen. Cavalieri kehitti jakamattomien menetelmän, mikä perustuu kääntäen yksikertaiseen alkioiden yhteyteen kahden konfiguraation välillä.

Cavalieri johti nykyistä differentiaali- ja integraalilaskennan lausetta 2.1 vastaavan geometrisen teoreeman tutkimalla suunnikkaita. Jakakoon lävistäjä CF suunnikkaan $AFDC$ kahdeksi kolmioksi ACF ja CDF kuvio 2.3. Cavalieri vertasi suunnikkaan kannan CD kanssa samansuuntaisten suorien BG, HE



Kuvio 2.3. Cavalierin menetelmän havainnollistus [1, s. 468].

potensseja vastaaviin suorien potensseihin jommassa kummassa kolmiossa, jotka suunnikkaan lävistäjä muodostaa. Olkoon HE kolmion CDF jakamaton ja samansuuntainen kuin suunnikkaan kanta CD. Asettamalla $BC = FE$ ja piirtämällä janan BG samansuuntaiseksi suunnikkaan kannan CD kanssa, voidaan todistaa, että kolmion ACF jakamoton BG on yhtä suuri kuin HE. Näin ollen kolmioiden ACF ja CDF jakamattomat voidaan asettaa pareittain yhteyteen ja voidaan todeta kolmioiden olevan keskenään yhtä suuret. Edelleen koska suunnikas on kahden kolmion jakamattomien summa, on yhden kolmion suorien ensimmäisten potenssien summa oltava puolet suunnikkaan, jonka kannan pituus on a, suorien ensimmäisten potenssien summasta. Toisin sanoen

$$\int_0^a x\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}.$$

Vastaavasti Cavalieri osoitti, että kolmion suorien neliöiden summa on kolmannes suunnikkaan suorien neliöiden summasta sekä sen, että kuutiolle vastaava suhde on $1/4$. [1, s. 465-468]

Cavalierin tärkein teoreema vastaa nykyistä differentiaali- ja integraalilaskennan lausetta

$$\int_0^a x^n\mathrm{d}x = \frac{a^n+1}{n+1}. \tag{2.1}$$

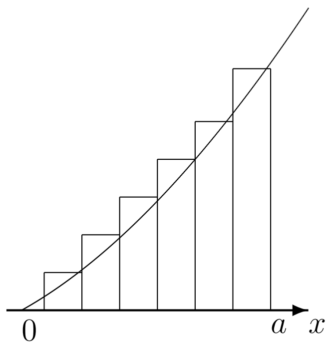
Cavarieri rajoittui tapauksiin $n = 1, 2, ..., 9$. Cavalierin työläs geometrinen teoreema kävi pian vanhentuneeksi matemaatikoiden yltäessä merkittäviin tuloksiin toisaalla. [2, s. 495]

2.5 Fermat

Ranskalainen Pierre de Fermat (1601-1665) keksi saman, minkä Cavalieri, käyrien rajoittamia aloja koskevan teoreeman vuonna 1629. Aluksi Fermat määritti pinta-alat käyttämällä kokonaislukujen potenssien summien kaavoja

$$1^m + 2^m + 3^m + ... + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m + ... + (n-1)^m,$$

joiden hän todisti olevan voimassa kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m. Myöhemmin Fermat kehitti menetelmän, missä eksponentiksi m sallittiin kokonaislukujen lisäksi myös rationaalilukuja. Olkoon käyrä $y = x^n$ ja tarkoituksena on laskea käyrän rajoittama pinta-ala välillä $x = 0$ ja $x = a$. Fermat jakoi välin äärettömän moneen osaan siten, että jakopisteet olivat abskissat a, aE, aE^2, aE^3,..., missä $E < 1$. Näistä pisteistä Fermat piirsi ordinaatat ja laski käyrän rajoittamalle pinta-alalle likiarvon kuvion 2.4 esittämien suorakulmioiden avulla. [2, s. 495]



Kuvio 2.4. Fermat'n menetelmän havainnollistus [2, s. 496].

Suorakulmioiden alat ovat suurimmasta alkaen $a^n(a-aE)$, $a^nE^n(aE-aE^2)$, $a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3)$,... muodostaen geometrisen sarjan. Termien summa on

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+...+E^n}.$$

Kun suure E lähestyy arvoa 1, suorakulmiot kapenevat ja niiden pinta-alojen summa lähestyy käyrän rajoittamaa pinta-alaa. Mikäli $E = 1$, saadaan käyrän $y = x^n$ rajoittamaksi alaksi välillä $x = 0$ ja $x = a$

$$\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Olkoon $n = p/q$. Tällöin geometrisen sarjan summa on

$$a^{(p+q)/q}(\frac{1-E^p}{1-E^{p+q}}) = a^{(p+q)/q}(\frac{1+E+E^2+...+E^{q-1}}{1+E+E^2+...+E^{p+q-1}}).$$

Edelleen kun $E = 1$, niin geometrisesta sarjasta saadaan

$$\frac{q}{p+q}a^{(p+q)/q}.$$

Saatu lauseke vastaa nykyistä merkintää $\int_0^a x\mathrm{d}x = \int_0^b x\mathrm{d}x - \int_b^a x\mathrm{d}x$. [2, s. 496]

2.6 Pascal

Ranskalainen Blaise Pascal (1623-1662) johti differentiaali- ja integraalilaskennan kaavan

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^n + 1}{n+1} \tag{2.2}$$

vastineen Pascalin kolmiossa voimassa olevan kaavan

$$(n+1)^{m+1} - (n+1) = \binom{m+1}{1} \sum i^m + \binom{m+1}{2} \sum i^{m-1} + ... + \binom{m+1}{m} \sum i$$

avulla, missä summat lasketaan luvusta $i = 1$ lukuun $i = n$. [2, s. 515]

2.7 Wallis

Cavalierin tavoin englantilainen John Wallis (1616-1703) vertaili kolmion jakamattomien neliöitä suunnikkaan jakamattomien neliöihin. Jos kolmion jakamattomia on n, niin jakamattomien pituudet ovat 0, 1, 2,...,n. Jos kolmiossa ja suunnikkaassa on vain kaksi jakamatonta, Wallis oivalsi niiden jakamattomien neliöiden suhteen olevan

$$\frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Jos jakamattomia on kolme, on kolmion ja suunnikkaan jakamattomien neliöiden suhde

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

Edelleen, jos jakamattomia on neljä saadaan suhteeksi

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}.$$

Näin ollen, jos jakamattomia on $n + 1$, tulos on

$$\frac{0^2 + 1^2 + ... + n^2}{n^2 + n^2 + ...n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}.$$

Kun $n = \infty$, suhde on ilmeisesti $\frac{1}{3}$. Tulos vastaa sitä, että $\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. [2, s. 537-538]

2.8 Newton

Englantilainen Sir Isaac Newton syntyi vuonna 1642, jolloin Galilei kuoli. Newton tunsi Galilein, Fermat'n ja muiden edeltäjiensä työn [2, s. 552]. Newton teki päättymättömiä sarjoja tutkiessaan merkittävän keksinnön. Hän havaitsi, että päättymättömissä sarjoissa toimivat samat yleiset lait kuin äärellisten suureiden algebrassa. Vuonna 1669 ilmestyneessä teoksessaan De analysi per aequationes numero terminorum infinitas Newton todisti, että käyrän $y = ax^{m/n}$ rajoittama pinta-ala saadaan kaavasta

$$\frac{ax^{(m/n)-1}}{(m/n)+1}.$$

Olkoon z pinta-ala

$$z = \frac{n}{m+n} ax^{(m+n)/n}.$$

Olkoon o infinitesimaalinen muutos. Silloin uusi abskissa on $x + o$ ja kasvanut pinta-ala on

$$z + oy = \frac{n}{n+m} a(x+o)^{(m+n)/n}.$$

Kun saatuun lausekkeeseen sovelletaan Newtonin binomilausetta, lausekkeesta kumotaan yhtäsuuret termit, jaetaan suureella o ja jätetään suuretta o sisältävät termit huomioitta, saadaan tulokseksi $y = ax^{m/n}$. Jos käyrä on $y = ax^{m/n}$, saadaan alaksi

$$z = \frac{n}{m+n} ax^{(m+n)/n}.$$

Tämä on ilmeisesti matematiikan historian ensimmäinen tapaus, jossa pinta-ala saadaan derivoinnin käänteisellä operaatiolla. Koska nämä Newtonin päättymättömiin sarjoihin liittyvät tulokset ovat hänen tärkeimmän matemaattisen keksinnön, differentiaali- ja integraalilaskennan, ensimmäisiä systemaattisia kuvauksia, pidetään Newtonia differentiaali- ja integraalilaskennan keksijänä. [2, s. 556-558]

2.9 Riemann

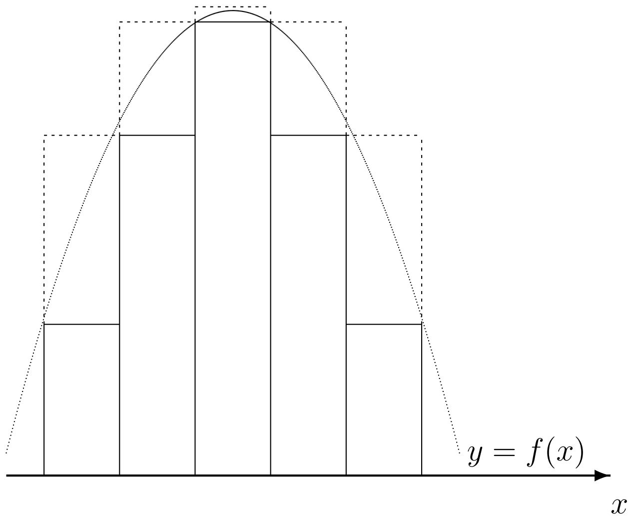
Saksalaisen matemaatikon Bernhard Riemannin (1826-66) merkittävimpiä saavutuksia on Riemannin integraali, jonka hän kehitti Fourier-sarjoja tutkiessaan mahdollistamaan epäjatkuvien funktioiden integroimisen [9, s. 66]. Riemannin integraali on esitetty pääpiirteissään luvussa 4.4.

2.10 Darboux

Ranskalainen Jean-Gaston Darboux (1842-1917) kehitti Riemannin integraalia edelleen [15]. Vaikka Darboux'n integraali pohjautuu Riemannin integraalille, esitellään se tässä ennen Riemannin integraalia, sillä se on Riemannin integraalia yksinkertaisempi. Darboux'n integraali on yksi integraalin määritelmä [21].

Määritelmä 2.1. Olkoon väli $[a, b]$ jaettu osaväleihin siten, että

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$



Kuvio 2.5. Darboux'n ylä- ja alaintegraalit [21].

Väliä $[x_{i-1}, x_i]$, kun $1 \leq i \leq n$, kutsutaan osaväliksi. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ reaalifunktio. Olkoon lisäksi $P = (x_0, ..., x_n)$ välin $[a, b]$ ositus. Olkoon

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ ja}$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Funktion f *Darboux'n yläsumma* osituksessa P on

$$U_f(P) = \Sigma_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i$$

ja *Darboux'n alasumma* on

$$L_f(P) = \Sigma_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i.$$

Funktion f *Darboux'n yläintegraali* on

$$U_f = \inf\{U_f(P) : \ P \text{ on välin } [a, b] \text{ ositus}\} \text{ ja}$$

Darboux'n alaintegraali on

$$L_f = \sup\{L_f(P) : \ P \text{ on välin } [a, b] \text{ ositus}\}.$$

Jos $U_f = L_f$, niin funktio f on *Darboux-integroituva* ja

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = U_f = L_f.$$

Ks.[21].

Kuviossa 2.5 on havainnollistettu viiden jakovälin Darboux'n ala- ja yläsummia. Funktion f alasummat on kuvattu yhtenäisellä viivalla ja yläsummat katkoviivalla. Darboux'n integraalissa tarkastellaan siis kullakin osavälillä funktion f maksimin ja minimin suorakaiteiden korkeutta ja suppenevatko niiden muodostamat pinta-alat eli Darboux'n ylä- ja alasummat toisiinsa, kun jakoa tihennetään.

2.11 Lebesgue

Riemannin integraali hallitsi integraalilaskennan tutkimusta, kunnes ranskalainen matemaatikko Henri Lebesgue (1875-1941) rakensi integraalilaskennan perusteet uudelleen. Lebesgue huomasi, että Riemannin integraali soveltuu vain tapauksiin, joissa funktiolla on vain muutamia epäjatkuvuuskohtia. Jos funktiolla $y = f(x)$ on useita epäjatkuvuuskohtia, välin $[x_{i-1}, x_i]$ lyhentyessä funktion arvot $f(x_{i-1})$ ja $f(x_i)$ eivät välttämättä lähesty toisiaan. Lebesguen mitta- ja integrointiteoria tuli laajempaan tietoisuuteen vuosina 1903 ja 1904 ilmestyneiden teosten myötä. [2, s. 860-863]

Lukio-opetus pohjaa edelleen Riemannin integraaliin Lebesguen menetelmän ollessa haastavampi.

3 Integraalilaskenta lukiossa

Ennen integraalilaskennan matemaattisen teorian esittelyä perehdytään viimeisimpiin lukion opetussuunnitelmien perusteisiin ja selvitetään, mitkä nousevat niissä integraalilaskennan keskeisimmiksi sisällöiksi ja tavoitteiksi. Tämän jälkeen seuraavassa luvussa esitellään nämä integraalilaskennan käsitteet tarkemmin.

Viimeisten kahdenkymmenen vuoden aikana lukion opetussuunnitelman perusteet ovat muuttuneet kahdesti vuosina 1994 ja 2003. Seuraavaksi esitetään lyhyesti, mitä tutkittavana ajanjaksona voimassa olleet opetussuunnitelman perusteet ovat määrittäneet integraalilaskentaan liittyen.

3.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985

Vuonna 1985 annetuissa lukion opetussuunnitelman perusteissa nykyistä matematiikan pitkää oppimäärää vastaava matematiikan laaja oppimäärä koostui yhdestätoista 38 oppitunnin pituisesta kurssista [8, s. 285]. Lisäksi nykyistä matematiikan lyhyttä oppimäärää vastaava matematiikan yleinen oppimäärä sisälsi kurssin differentiaali- ja integraalilaskentaa [8, s. 288]. Koska vuonna 1994 säädettyjen lukion opetussuunnitelmien perusteiden myötä integraalilaskenta poistui matematiikan lyhyestä oppimäärästä, keskitytään tässä tutkielmassa ainoastaan lukion pitkän oppimäärän opetussisältöihin integraalilaskennan osalta.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa 1985 [8, s. 294] matematiikan laajan oppimäärän 9. kurssin Integraalilaskentaa tavoitteiksi asetetaan, että

- oppilas hallitsee integraalifunktion ja määrätyn integraalin käsitteet,
- oppilas osaa integroida yksinkertaisesti integroitavissa olevia funktioita,
- oppilas osaa soveltaa määrättyä integraalia mm. pinta-ala- ja tilavuuslaskuihin.

Integraalilaskentaa-kurssin sisällöksi lukion opetussuunnitelman perusteissa 1985 asetetaan

- Jatkuvan funktion integraalifunktio.
- Integroimissääntöjä
    - alkeisfunktioiden derivaattoihin perustuva integroiminen,

  - yhdistetyn funktion derivaattaan perustuva integroiminen; osittaisintegroiminen ja integroiminen sijoituksen avulla.
- Määrätyn integraalin käsite
  - havainnollinen määritelmä ylä- ja alasummia hyväksikäyttäen.
- Määrätyn integraalin laskusäännöt
  - lineaarisuus,
  - additiivisuus osavälien suhteen,
  - ylä- ja alarajan vaihto.
- Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys.
- Sovelluksia
  - pinta-ala ja tilavuuslaskuja,
  - jatkuvan jakauman tunnusluvut ja kertymäfunktio.

3.2 Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994

Lukio-opetukseen tuli 1900-luvun puolivälissä merkittäviä muutoksia. Luokattomuus, valinnaisuus ja koulujen lisääntynyt valta näkyivät myös vuonna 1994 annetuissa lukion opetussuunnitelman perusteissa, mitkä mahdollistivat koulujen erityisosaamisen painottamisen sekä oppilaiden yksilölliset opinto-ohjelmat. Lukion opetussuunnitelman perusteissa 1994 pitkän matematiikan pakollisia kursseja on kymmenen, joista kahdeksas on integraalilaskenta [10, s. 71-73].

Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman perusteet [10, s.72] asettaa Integraalilaskentakurssin sisällöksi

- perehtymisen integraalifunktioon ja määrätyn integraalin käsitteisiin ja määrittämiseen,
- alojen ja tilavuuksien laskeminen integrointia käyttäen,
- tutustumisen integraalilaskennan sovelluksiin ja menetelmiin laskea integraaleja numeerisesti käyttäen laskinta ja tietokonetta.

3.3 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003

Voimassa olevat lukion opetussuunnitelman perusteet on annettu vuonna 2003 ja ne on asetettu noudatettavaksi 1.8.2005 lähtien. Voimassa olevien lukion opetussuunnitelman perusteissa [11, s. 123] matematiikan pitkän oppimäärän pakollisiin kursseihin kuuluvan Integraalilaskenta-kurssin (MAA10) tavoitteiksi asetetaan, että opiskelija

- ymmärtää integraalifunktion käsitteen ja oppii määrittämään alkeisfunktioiden integraalifunktioita,

- ymmärtää määrätyn integraalin käsitteen ja sen yhteyden pinta-alaan,
- oppii määrittämään pinta-aloja ja tilavuuksia määrätyn integraalin avulla,
- perehtyy integraalilaskennan sovelluksiin.

Edelleen kurssin keskeiset sisällöt on määritetty seuraavasti

- integraalifunktio,
- alkeisfunktioiden integraalifunktiot,
- määrätty integraali,
- pinta-alan ja tilavuuden laskeminen.

Syventävät kurssit ovat opiskelijalle valinnaisia, oppiaineen pakollisiin kursseihin liittyviä kursseja, joita opiskelijan on valittava opinto-ohjelmaansa vähintään kymmenen [11, s. 15]. Syventäviin kursseihin kuuluvan Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin (MAA13) tavoitteiksi lukion opetussuunnitelma perusteet [11, s. 124] asettaa, että opiskelija

- syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemustaan,
- täydentää integraalilaskennan taitojaan ja soveltaa niitä muun muassa jatkuvien todennäköisyysjakaumien tutkimiseen,
- tutkii lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia.

Sekä keskeisiksi sisällöiksi on määritetty

- funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen,
- jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia,
- funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä,
- epäoleelliset integraalit.

3.4 Lukion opetussuunnitelmien perusteiden 1985-2003 keskeisimmät sisällöt ja tavoitteet integraalilaskennan osalta

Kussakin kolmessa viimeisimmässä lukion opetussuunnitelmien perusteissa integraalilaskenta kurssin sisältönä korostuu integraalifunktion ja määrätyn integraalin hallitseminen. Lisäksi määrätyn integraalin soveltaminen pinta-aloihin ja tilavuuksiin erottuu keskeisenä tavoitteena.

4 Matemaattinen teoria

Tässä luvussa esitetään määritelmät keskeisimmille integraalilaskennan käsitteille. Ensimmäiseksi määritellään integraalifunktion käsite. Luku sisältää sekä kuvailevaa että täsmällistä teoriaa. Täsmällisiä määritelmiä edeltää toisinaan intuitiivinen johdatus aiheeseen.

4.1 Integraalifunktio

Määritelmä 4.1. Olkoon $f(x)$ funktion $F(x)$ derivaatta. Silloin funktiota $F(x)$ sanotaan funktion $f(x)$ *integraalifunktioksi* ja merkitään

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

Yhtälö merkitsee samaa kuin $F'(x) = f(x)$ [18, s. 46].

Integraalifunktioiden määrittämistä kutsutaan integroimiseksi. Integroiminen on derivoimisen vastakkainen toimitus.

4.2 Integraalilaskennan peruslause

Integraalilaskennan peruslause ei ole yksikäsitteinen ilmaisu, sillä kirjallisuudessa integraalilaskennan peruslauseeksi kutsutaan myös lausetta 4.3.

Lause 4.1 (Integraalilaskennan peruslause)**.** *Olkoon funktion määrittelyjoukko väli ja funktion derivaatta jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä* 0*. Tällöin funktio on vakiofunktio [5, s. 20].*

Funktion määrittelyjoukon tulee siis olla väli. Olkoon funktion f määrittelyjoukko väli $[a, b]$. Olkoon F funktion f integraalifunktio eli $F' = f$. Olkoon G funktion f toinen integraalifunktio eli myös $G' = f$. Tällöin

$$\mathrm{D}(G(x) - F(x)) = \mathrm{D}G(x) - \mathrm{D}F(x) = f(x) - f(x) = 0$$

jokaisessa funktion f määrittelyvälin $[a, b]$ pisteessä x. Integraalilaskennan peruslauseen 4.1 nojalla erotusfunktio $G(x) - F(x)$ on vakiofunktio. Näin ollen on olemassa sellainen vakio C, että jokaisessa funktion f määrittelyvälin $[a, b]$ pisteessä pätee $G(x) - F(x) = C$ eli $G(x) = F(x) + C$. On siis osoitettu, että määritetyn funktion yhdestä integraalifunktiosta saadaan kaikki. Lauseessa 4.2 edellä kuvattu on esitetty tiivistetysti. [5, s.20-21]

Lause 4.2. *Olkoon $F(x)$ funktion $f(x)$ jokin integraalifunktio. Tällöin kaikki funktiot $F(x) + C$, missä C on vakio, ovat funktion $f(x)$ integraalifunktioita [18, s. 46].*

Funktion f integroimista merkitään siis notaatiolla $\int f(x)\mathrm{d}x$ ja integroimisen tulos annetaan muodossa, joka sisältää funktion f kaikki integraalifunktiot

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \tag{4.2}$$

missä F on funktion f integraalifunktio ja C vakio. Merkintä $\mathrm{d}x$ ilmaisee, että integrointi suoritetaan muuttujan x suhteen. [5, s. 27]

4.3 Pinta-alafunktio

Määritelmä 4.2. Olkoon $f(x)$ on jatkuva ja $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$. Olkoon lisäksi $A(x)$ se pinta-ala, jota rajoittavat x-akseli, käyrä $y = f(x)$ sekä arvoja a ja b vastaavat käyrän ordinaatat. Funktiota $A(x)$ sanotaan funktion $f(x)$ *pinta-alafunktioksi.* [18, s. 49]

Seuraavaksi johdamme funktion $A(x)$ derivaatan, jotta saamme määritettyä $f(x)$:n integraalifunktion, mitä tarvitsemme jatkossa. Funktion $A(x)$ derivaatan johtaminen on havainnollistettu kuviossa 4.1. Aluksi lisäämme x:n arvoon Δx ja merkitsemme vastaavaa funktion $A(x)$ lisäystä ΔA:lla. Luvun ΔA jaamme x:ää vastaavan ordinaatan $f(x)$ päätepisteen kautta x-akselin suuntaisesti piirretyllä suoralla kahteen osaan. Alempi osa on suorakulmio ja alaltaan

$$f(x) \cdot \Delta x.$$

Ylempi osa puolestaan muunnetaan suorakulmioksi, jonka kanta on Δx, korkeus ε ja pinta-ala $\varepsilon \cdot \Delta x$. Tällöin

$$\Delta A = f(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x.$$

Ks. [18, s. 49].

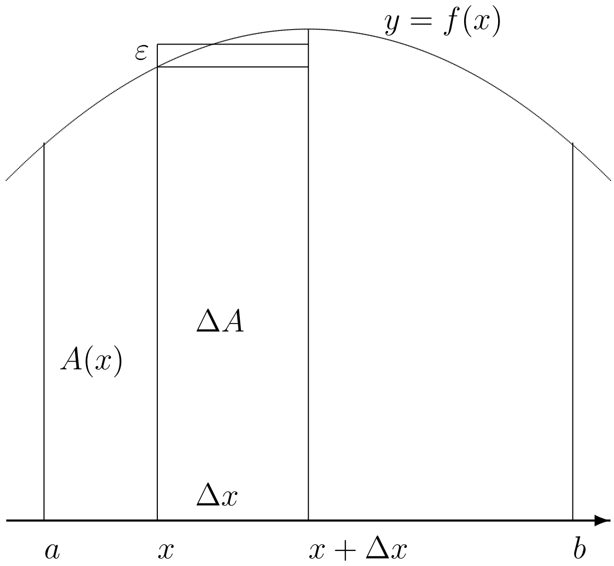
Jakamalla yhtälö Δx:llä saadaan erotusosamäärä

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x) + \varepsilon.$$

Kun $\Delta x \to 0$, niin ilmeisesti myös $\varepsilon \to 0$. Koska yhtälön vasemman puolen raja-arvo on $A'(x)$, niin

$$A'(x) = f(x).$$

Näin ollen integraalifunktion määritelmän 4.1 mukaan $A(x)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio. Nyt tiedetään, että funktion $f(x)$ pinta-alafunktio $A(x)$ on myös funktion integraalifunktio ja olemme saaneet integraalifunktiolle geometrisen tulkinnan. [18, s. 50]



Kuvio 4.1. Pinta-alafunktion havainnollistus [18, s. 49].

Olkoon $F(x)$ jokin funktion $f(x)$ äärettömän monesta integraalifunktiosta

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Edellä esitetyn integraalifunktion geometrisen tulkinnan ja lauseen 4.2 nojalla saadaan, että

$$A(x) = F(x) + C,$$

missä C on määrätty arvo. Selvästi $A(a) = 0$ ja edelleen $A(a) = F(a) + C = 0$, niin $C = -F(a)$. Näin ollen

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

Otetaan käyttöön merkintä $/_a^b$, mikä tarkoittaa ”sijoitus a:sta b:hen” ja on sama kuin $F(b) - F(a)$ ts.

$$/_a^b F(x) = F(b) - F(a). \tag{4.3}$$

Ks. [5, s. 62].

Muuttujalla A merkitsemme a:ta ja b:tä vastaavien ordinaattojen väliin jäävää pinta-alaa eli $A = A(b)$, niin tällöin

$$A = /_a^b F(x).$$

Ks. [18, s. 50].

4.4 Määrätty integraali

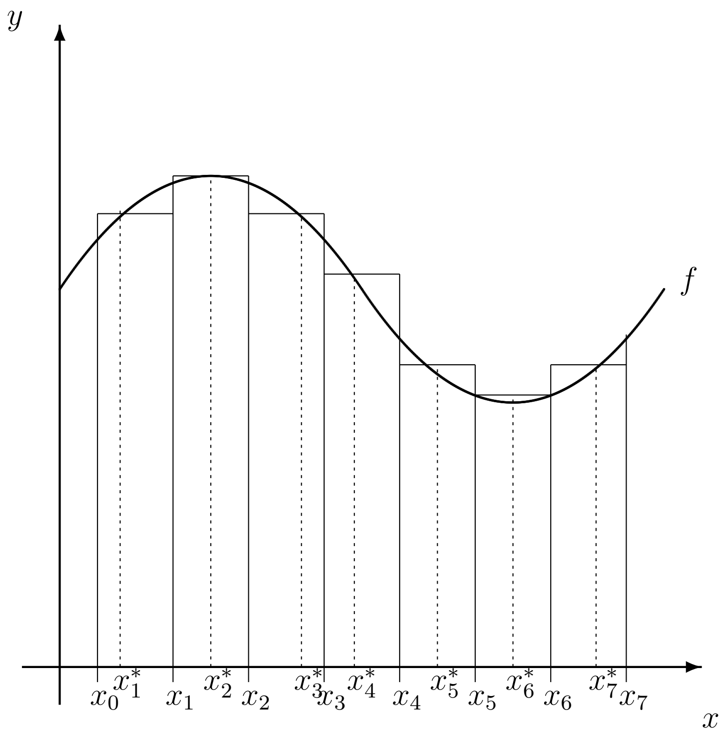
Ennen määrätyn integraalin määritelmää, on paikallaan selvittää, miten integraalimerkki $\int$ on syntynyt ja mitä se tarkalleen ottaen tarkoittaa.

4.4.1 Riemannin summat

Jaetaan väli $[a, b]$ n:ään yhtä suureen osaan, joiden pituutta merkitään Δx:llä. Kuhunkin jakopisteeseen piirretään vastaava ordinaatta ja ordinaattojen päätepisteistä oikealle x-akselin suuntaiset suorat siten, että syntyy n suorakulmiota. Yhden tällaisen suorakulmion ala on $f(x) \cdot \Delta x$. Suorakulmioiden yhteinen ala A_n saadaan summaamalla kaikkien n suorakulmioiden alat yhteenlaskemalla

$$A_n = S_a^b f(x)\Delta x,$$

missä S tarkoittaa summaa (engl. sum). Summaa A_n kutsutaan Riemannin summaksi [20]. Seuraavaksi esitetään Riemannin summan määritelmä. Kuvio 4.2 havainnollistaa määritelmää 4.3.



Kuvio 4.2. Riemannin summat [12, s. 272].

Määritelmä 4.3. Olkoon $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ välin $[a, b]$ ositus. Tällöin P jakaa välin $[a, b]$ osaväleihin

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n],$$

joiden pituudet ovat

$$\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n.$$

Nyt valitaan piste x_1^* väliltä $[x_0, x_1]$ ja muodostetaan $f(x_1^*)\Delta x_1$, valitaan piste x_2^* väliltä $[x_1, x_2]$ ja muodostetaan $f(x_2^*)\Delta x_2$ ja jatketaan näin kunnes saadaan

$$f(x_1^*)\Delta x_1, f(x_2^*)\Delta x_2, ..., f(x_n^*)\Delta x_n.$$

Näiden summaksi saadaan

$$S^*(P) = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n,$$

jota kutsutaan *Riemannin summaksi.* [12, s. 271-273]

Pinta-alat A_n ja A eroavat toisistaan vain siltä osin, että edellistä rajoittaa ylhäältä porrasviiva ja jälkimmäistä käyrä $y = f(x)$. Jos $n \to \infty$ eli $\Delta x \to 0$, niin $A_n \to A$, joten

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} S_a^b f(x)\Delta x.$$

Tätä raja-arvoa on alettu merkitsemään lyhyemmin $\int$-merkillä. Integraalimerkki $\int$ on venytetty s-kirjain ja tulee tuosta suorakulmioiden summa-sanasta. [18, s. 51-52]

Integraalimerkin $\int$ otti ensimmäisenä käyttöön saksalainen Gottfried Leibniz (1646-1716) vuonna 1686 [9, s. 48]. Merkinnän Δx paikalla käytetään derivaatan merkintää dx [18, s. 51-52]. Derivaatan merkinnässä muuttujan x paikalla voidaan käyttää myös muuta kirjainta. Merkinnät

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t, \int\limits_a^b f(z)\mathrm{d}z,$$

tarkoittavat funktion f määrättyä integraalia a:sta b:hen [12].

Edellä esitettyä menetelmää kutsutaan keksijänsä mukaan Riemannin integraaliksi [20]. Kun integraalimerkinnän merkitys tunnetaan, voidaan sen avulla antaa määritelmä määrätylle integraalille.

4.4.2 Jatkuvan funktion määrätty integraali

Edellä esitetyn havainnollistavan teorian 4.4.1 pohjalta määrätty integraali voidaan määrittää seuraavaksi esitetyllä tavalla.

Määritelmä 4.4. Funktion f *määrätty integraali* a:sta b:hen

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} S_a^b f(x)\Delta x.$$

Näin ollen $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ on äärettömän pienten tulojen $f(x)\mathrm{d}x$ summa. [18, s. 52]

Seuraavaksi esitetään määrätyn integraalin täsmällinen määritelmä. Täsmällisen määritelmän todistamiseksi tarvitsemme apulauseen 4.3.

Apulause 4.3. *Olkoot P ja Q välin $[a, b]$ osituksia. Tällöin $L_f(P) \leq U_f(Q)$. [12, A-14]*

Todistus Unioni $P \cup Q$ on välin $[a, b]$ ositus, mikä sisältää sekä osituksen P että osituksen Q. Näin ollen

$$L_f(P) \leq L_f(P \cup Q) \leq U_f(P \cup Q) \leq U_f(Q). \quad \square$$

Ks. [12, A-14].

Lauseesta 4.3 seuraa, että kaikki alasummat ovat ylhäältä rajoitettuja ja näin ollen on olemassa pienin yläraja L, jolle pätee

$$L_f(P) \leq L \leq U_f(P), \text{ kaikilla osituksilla } P$$

ja lisäksi L on pienin tällainen luku. Vastaavasti kaikki yläsummat ovat alhaalta rajoitettuja ja on olemassa suurin alaraja U, jolle pätee

$$L_f(P) \leq U \leq U_f(P), \text{ kaikilla osituksilla } P$$

ja lisäksi U on suurin tällainen luku. [12, A-14]

Lause 4.4. *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen luku I, jolle pätee*

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P), \textit{ kaikilla välin } [a,b] \textit{ osituksilla } P.$$

Ks. [12, A-14].

Todistus Apulauseen 4.3 nojalla tiedetään, että

$$L_f(P) \leq L \leq U \leq U_f(P), \text{ kaikilla osituksilla } P.$$

Näin ollen luvun I olemassaolo on osoitettu. Luvun I yksikäsitteisyyden osoittamiseksi tulee osoittaa, että

$$L = U.$$

Valitaan mielivaltainen $\epsilon > 0$. Koska funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, on se tällä välillä myös tasaisesti jatkuva. Koska funktio f on tasaisesti jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, siitä seuraa, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos

$$x, y \in [a, b] \text{ ja } |x - y| < \delta, \text{ niin } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Valitaan ositus $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, jonka suurin osaväli $\Delta x_i < \delta$. Tällöin ositukselle P pätee

$$\begin{aligned}
U_f(P) - L_f(P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i \\
&< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b - a}(b - a) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Koska $U_f(P) - L_f(P) < \epsilon$ ja $0 \leq U - L \leq U_f(P) - L_f(P)$, niin saadaan

$$0 \leq U - L < \epsilon.$$

Koska ϵ on mielivaltainen, on oltava $U - L = 0$ ja edelleen $U = L$. [12, s. A-14, A-15] □

Lauseen 4.4 nojalla voidaan esittää määrätyn integraalin määritelmä.

Määritelmä 4.5. Funktio f on integroituva välillä $[a, b]$, jos on olemassa yksikäsitteinen luku I, jolle pätee

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P), \text{ kaikilla välin } [a, b] \text{ osituksilla } P.$$

Lukua I kutsutaan *määrätyksi integraaliksi* ja merkitään

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ks. [12, s. 268].

Edellä esitetty lause 4.4 vastaa määrätyn integraalin määritelmää ja osoittaa, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tällä välillä integroituva.

4.5 Pinta-alafunktion derivoituvuuden todistus

Luvussa 4.3 esiteltiin pinta-alafunktio havainnollisella tasolla. Tässä luvussa käsitellään pinta-alafunktiota täsmällisesti.

Lause 4.5. *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Olkoon funktio F määritelty välillä $[a, b]$ seuraavasti*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Silloin funktio F on derivoituva välillä (a, b) ja

$$F'(x) = f(x),$$

kaikilla $x \in (a, b)$. [12, s. 279].

Todistus Olkoon $x \in [a, b)$. Osoitetaan, että tällöin

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

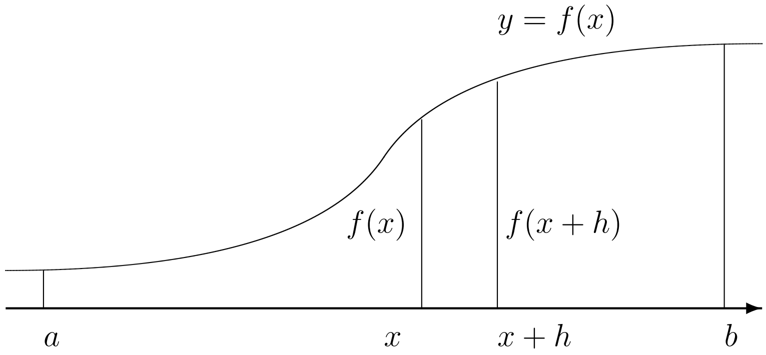
Kuvio 4.3 havainnollistaa todistusta.

Jos $x < x + h \leq b$, niin tällöin

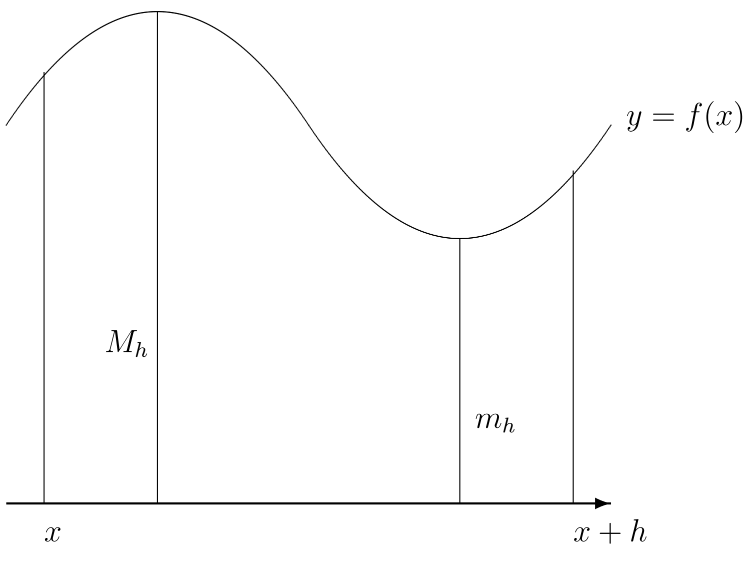
$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Tästä seuraa, että

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t. \tag{4.4}$$



Kuvio 4.3. Funktio $F(x)$ on pinta-ala välillä $[a, x]$ ja $F(x+h)$ on pinta-ala välillä $[a, x+h]$. Näin ollen $F(x+h) - F(x)$ on pinta-ala välillä $[x, x+h]$ ja edelleen $F(x+h) - F(x) \cong f(x)h$, mikäli h on hyvin pieni ja $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \cong \frac{f(x)h}{h} = f(x)$. [12, s. 279].



Kuvio 4.4. Funktion f suurin M_h ja pienin m_h arvo välillä $[x, x+h]$ [12, s. 280].

Olkoot M_h funktion f suurin arvo välillä $[x, x+h]$ ja m_h funktion f pienin arvo välillä $[x, x+h]$.

Koska

$$M_h[(x+h)-x] = M_h \cdot h,$$

on M_h funktion f yläsumma välillä $[x, x+h]$. Edelleen

$$m_h[(x+h)-x] = m_h \cdot h$$

on funktion f alasumma välillä $[x, x+h]$. Näin ollen

$$m_h \cdot h \leq \int\limits_{x}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leq M_h \cdot h.$$

Kun tähän sijoitetaan kaava (4.4) ja oletetetaan, että $h > 0$, saadaan

$$m_h \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M_h.$$

Koska funktio f on jatkuva välillä $[x, x+h]$, saadaan edelleen

$$\lim_{h\to 0^+} m_h = f(x) = \lim_{h\to 0^+} M_h$$

ja raja-arvoja koskevan kutistuslauseen [12, s. 103] nojalla pätee

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x). \tag{4.5}$$

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että kun $x \in (a, b]$, niin

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x). \tag{4.6}$$

Avoimella välillä (a, b) muuttujalle x kaavojen (4.5) ja (4.6) nojalla pätee

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Näin on osoitettu, että funktio F on derivoituva välillä (a, b) ja sen derivaatta on $F'(x) = f(x)$. [12, s. 279-281] □

4.6 Pinta-alan laskeminen

Pinta-ala voidaan määritellä määrättynä integraalina. Olkoon funktion $f(x)$ epänegatiivinen ja jatkuva välillä $[a, b]$. Olkoon F funktion f integraalifunktio. Tällöin funktion kuvaajan ja x-akselin rajoittama pinta-ala välillä $[a, b]$ on $F(b) - F(a)$. Erotus $F(b) - F(a)$ on funktion f määrätty integraali a:sta b:hen [19, s. 282]. Pinta-ala on määrätyn integraalin muodossa esitettynä

$$A = \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = /_a^b F(x) = F(b) - F(a), \tag{4.7}$$

missä $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$ [18, s. 52].

4.6.1 Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala

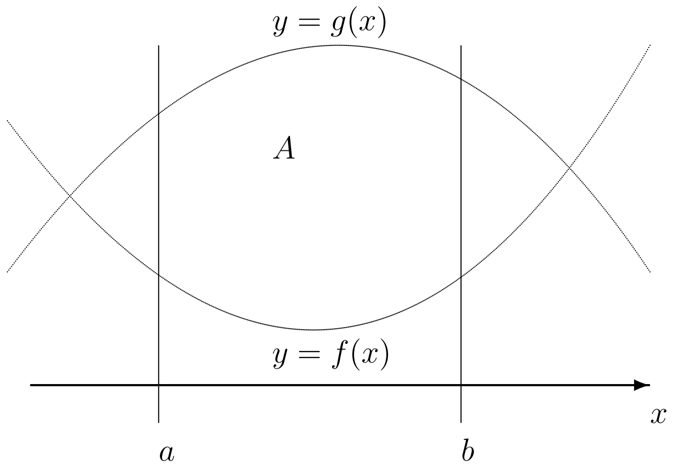
Olkoon funktion f kuvaaja jatkuva ja x-akselin yläpuolella välillä $[a, b]$. Edellä esitettiin, että kuvaajan f ja x-akselin rajoittama pinta-ala $[a, b]$ on $F(b)-F(a)$, missä F on funktion f integraalifunktio. Siispä funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on määrätty integraali a:sta b:hen

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ks. [5, s. 75-76].

4.6.2 Kahden käyrän rajaaman alueen pinta-ala

Olkoot funktiot f ja g jatkuvia ja epänegatiivisia välillä $[a, b]$. Olkoot funktioiden g ja f kuvaajat sellaisia, että välillä $[a, b]$ aluetta A rajaa yläpuolelta funktion g kuvaaja ja alapuolelta funktion f kuvaaja kuviossa 4.5 esitetyllä tavalla. [5, s. 89-90]



Kuvio 4.5. Kahden käyrän rajaama pinta-ala.

Alueen A pinta-ala on erotusfunktion $g - f$ määrätty integraali a:sta b:hen

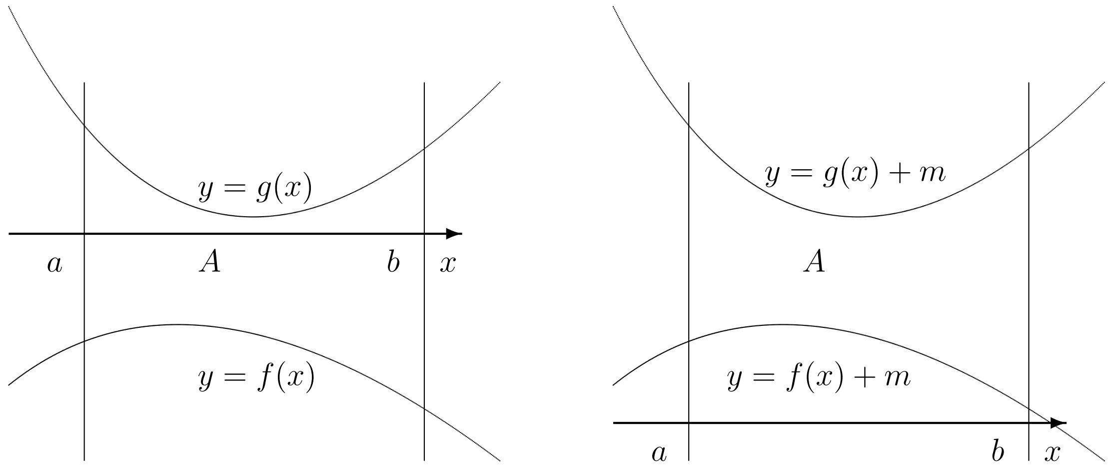
$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x,$$

sillä kuvaajien rajaaman alueen pinta-ala on pinta-alojen $A_1 = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ ja $A_a = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ erotus

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x.$$

Ks. [5, s. 89-90].

Jos kuvaajien rajaama alue on kokonaan tai osittain x-akselin alapuolella, tulee molempiin funktioihin f ja g lisätä riittävän suuri positiivinen vakio m, että molemmat funktiot $f(x)+m$ ja $g(x)+m$ ovat x-akselin yläpuolella välillä $[a,b]$ kuvion 4.6 esittämällä tavalla. [5, s. 90]



Kuvio 4.6. Kahden käyrän rajaama pinta-ala.

4.7 Tilavuuden laskeminen

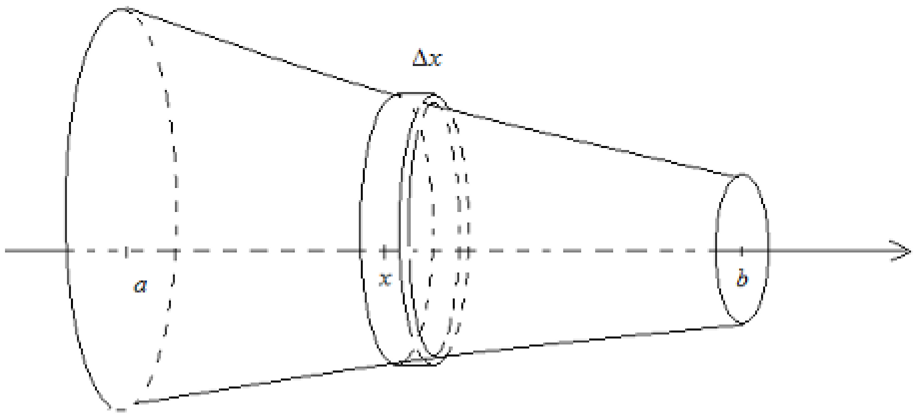
Pinta-alojen lisäksi integraalien avulla voidaan laskea myös muita suureita. Tässä rajoitumme tarkastelemaan integraalilaskennan sovelluksista tilavuuden laskemista, sillä se sisältyy lukion integraalilaskentaan. Kappaleen tilavuus voidaan määrittää määrätyn integraalin avulla vastaavasti kuin pinta-ala.

Tarkastellaan aluksi kappaletta, jota rajoittaa mielivaltainen pinta sekä pisteiden $x=a$ ja $x=b$ kautta x-akselia vasten kohtisuorassa olevat tasot kuviossa 4.7 esitetyllä tavalla.

Olkoon $p(x)$ funktio, joka ilmaisee x-akselia vasten kohtisuorassa olevan läpileikkauksen pinta-alan tämän tason ja x-akselin leikkauspisteen x funktiona. Jaetaan väli $[a,b]$ n:ään yhtä suureen osaan, jonka kunkin pituus on Δx. Tulo $p(x)\cdot\Delta x$ on tällöin sylinterin tilavuus, jonka pohja on läpileikkaus $p(x)$ ja korkeus on jakoväli Δx. Näiden sylintereiden summan raja-arvo on kyseisen kappaleen tilavuus

$$V=\lim_{\Delta x\to 0} S_a^b p(x)\Delta x. \tag{4.8}$$

Ks. [18, s. 54].



Kuvio 4.7. Tilavuuden laskeminen [18, s. 54].

4.7.1 Pyörähdyskappaleen tilavuus

Mikäli kappaletta rajoittava pinta on muodostunut käyrän $y = f(x)$ pyörähtäessä x-akselin ympäri kuten kuviossa 4.8, niin $p(x) = \pi[f(x)]^2$ ja pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

Ks. [18, s. 54-55].

4.8 Laskutekniikoita

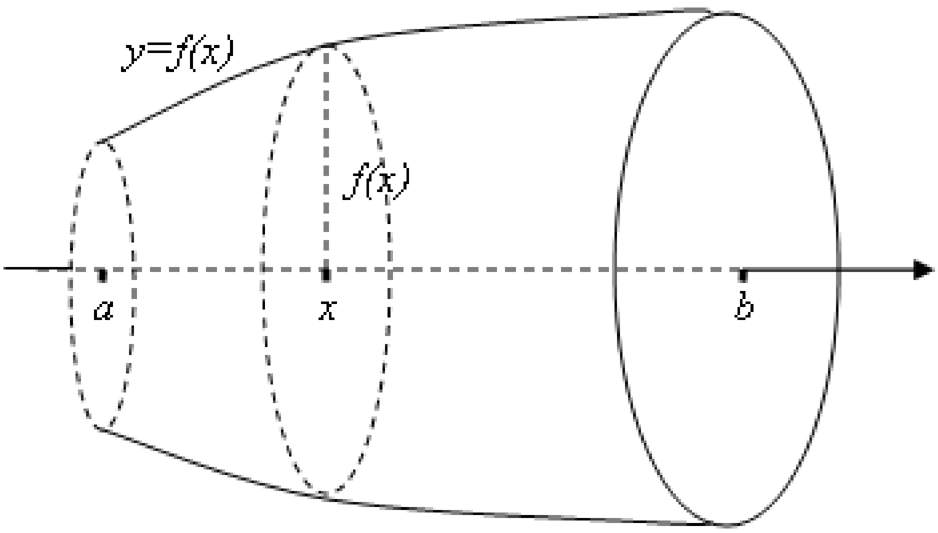
Seuraavaksi esitellään muutamia lukion integraalilaskennan keskeisiä integroimiskaavoja. Integrointi ei ole aina yhtä suoraviivaista kuin edellä. Käyttämällä derivointisääntöjä käänteisesti onnistuu integroiminen vain harvoissa tapauksissa [4, s. 67]. Kun nämä edellä esitetyt integroimismenetelmät eivät sovellu, tulee integroitava lauseke muokata sellaiseksi, että se voidaan integroida seuraavaksi esitetyillä tavoilla.

4.8.1 Vakiolla kerrotun funktion integroiminen

Olkoot F funktion f integraalifunktio ja a jokin vakio. Koska $\mathrm{D}(aF) = a\mathrm{D}F = af$, on aF funktion af integraalifunktio. Näin ollen vakiolla a kerrotun funktion f integroimiskaavaksi saadaan

$$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

Ks. [18, s. 47].



Kuvio 4.8. Pyörähdyskappale [18, s. 54].

4.8.2 Funktion summan integroiminen

Olkoon F funktion f integraalifunktio ja G funktion g integraalifunktio. Koska $\mathrm{D}(F+G) = \mathrm{D}F + \mathrm{D}G = f + g$, on $F + G$ funktion $f + g$ integraalifunktio. Summafunktio $f + g$ voidaan integroida muodostamalla funktioiden f ja g integraalifunktioiden summa

$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Ks. [5, s. 32].

4.8.3 Funktion 1/x integroiminen

Funktion $\frac{1}{x}$ integraalifunktiot välillä $]0, \infty[$ ovat muotoa $\ln x + C$. Tällöin

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C, \text{ kun } x > 0.$$

Funktion $\frac{1}{x}$ integraalifunktiot välillä $]-\infty, 0[$ ovat muotoa $\ln(-x) + C$. Tällöin

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C, \text{ kun } x < 0.$$

Nämä integroimissäännöt yhdistämällä saadaan

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C. \tag{4.12}$$

Ks. [5, s. 36].

4.8.4 Osittaisintegrointi

Olkoot funktiot f ja g derivoituvia. Kun funktiot f' ja fg' pystytään integroimaan, mutta integraalia $\int f'g\mathrm{d}x$ ei osata muodostaa suoraan, voidaan soveltaa osittaisintegrointia. Tulon derivoimissäännön $\mathrm{D}fg = f'g + fg'$ nojalla saadaan $\int(f'g + fg')\mathrm{d}x = fg$ ja edelleen $\int f'g\mathrm{d}x + \int fg'\mathrm{d}x = fg$. Kun toinen integraaleista siirretään yhtälön oikealle puolelle, saadaan osittaisintegroinnin kaava

$$\int f'g\mathrm{d}x = fg - \int fg'\mathrm{d}x. \tag{4.13}$$

Vastaavasti määrätylle integraalille pätee

$$\int_a^b f'g\mathrm{d}x = \Big/_a^b fg - \int_a^b fg'\mathrm{d}x. \tag{4.14}$$

Ks. [4, s. 67].

4.8.5 Osamurtoihin jako

Olkoon $\frac{P(x)}{Q(x)}$ murtofunktio. Oletetaan lisäksi, että lauseke on supistettu ja nimittäjän Q asteluku on vähintään yksi. Mikäli osoittajan P asteluku on vähintään yhtä suuri kuin nimittäjän Q, muutetaan murtolauseke ennen integrointia jakokulmaa käyttäen sellaiseen muotoon, että siinä esiintyvä osoittaja on alempaa astetta kuin nimittäjä. Tämän jälkeen integrointi suoritetaan edellä esitettyjen integroimissääntöjen avulla. Murtolukutermiin sovelletaan luvussa 4.8.3 esitettyä integroimissääntöä. [4, s. 71]

4.8.6 Sijoituskeino

Yksi keino helpottaa integroimista on muuttujan vaihto. Olkoon F funktion f integraalifunktio. Olkoon lisäksi funktio $x = x(t)$ derivoituva ja olkoon sillä olemassa käänteisfunktio $t = t(x)$. Koska $F'(x) = f(x)$ saadaan yhdistetyn funktion derivoimissäännön nojalla

$$\mathrm{D}F(x(t)) = F'(x(t)) \cdot x'(t) = f(x(t)) \cdot x'(t).$$

Tämän perusteella $\int f(x(t)) \cdot x'(t)\mathrm{d}t = F(x(t)) + C$. Kaavan 4.2 nojalla integraalin $\int f(x)\mathrm{d}x$ laskemiseksi saadaan sijoituskaava

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x(t)) \cdot x'(t)\mathrm{d}t. \tag{4.15}$$

Ks. [4, s. 75].

4.8.7 Erityistapaukset

Alkeisfunktioiden integroimiseksi ei voida esittää kaikenkattavaa säännöstöä, sillä integraalifunktioita voidaan löytää useammilla eri menetelmillä ja lisäksi lausekkeet saattavat olla hyvin hankalia. Yksi menetelmä integraalifunktion löytämiseen on arvausmenetelmä, missä ensin arvataan integraalifunktio, tarkistetaan derivoimalla se ja tarvittaessa korjataan ja toistetaan tämä kunnes oikea integraalifunktio löytyy [5, s. 46]. On olemassa muutamia funktioita, kuten e^{x^2}, $\frac{\sin x}{x}$ ja $\frac{x}{\ln x}$ joille ei ole löydetty integraalifunktiota [18; 5, s. 47, s. 46].

5 Integraalilaskenta ylioppilaskirjoituksissa

Tässä tutkielmassa rajoitutaan tarkastelemaan pitkän matematiikan ylioppilastehtäviä viimeisen kahdenkymmenen vuoden ajalta eli vuosiin 1991-2010. Ylioppilastehtävistä tehtyä tilastointia 5.4 tarkasteltaessa tulee huomata, että osa tehtävistä voidaan ratkaista useammalla eri tavalla, jolloin integrointia ei välttämättä tarvita. Tilastoon on kerätty kaikki vuosien 1991-2010 integrointiin liittyvät pitkän matematiikan ylioppilastehtävät.

Vuosina 1991-1999 kokeessa oli kymmenen tehtävää, joista osassa keskenään vaihtoehtoiset a- ja b-kohdat. Vuonna 2000 koe muuttui siten, että tarjolla olevista 15 tehtävästä sai ratkaista kymmenen tehtävää. [6, s. 49]

Liitteessä 5.4 on merkattu myös integrointilaskentaan liittyvistä tehtävistä saatava yhteispistemäärä. Pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa kunkin tehtävän maksimipistemäärä on kuusi pistettä. Kevään 2007 ylioppilaskokeista alkaen tehtävät 14 ja 15 ovat olleet yhdeksän pisteen arvoisia poiketen muista kuuden pisteen tehtävistä. Näin ollen koko kokeen maksimipistemäärä on ollut vuosina 1991-2006 60 pistettä ja vuosina 2007-2010 66 pistettä.

Lisäksi lukion opetussuunnitelman perusteet ovat uudistuneet vuonna 2003, mutta näillä muutoksilla ei näyttäisi olleen vaikutusta integraalilaskentaan liittyvien tehtävien määrään.

5.1 Tyypilliset tehtävät

Tässä alaluvussa tarkastellaan, millaisia tehtäviä pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa on integraalilaskennasta ollut vuosina 1991-2010. Tehtävät on jaettu kahteentoista tehtävätyyppiin, jotka on esitetty taulukossa 5.1. Tehtävätyypit on valittu sen perusteella, jos samantyyppisiä tehtäviä on esiintynyt tarkasteltavalla aikavälillä ylioppilaskirjoituksissa useamman kerran. Jaottelu on tehty siten, että sama tehtävä voi olla useammassa (1-3) tehtävätyypissä, jos tehtävä liittyy useamman integraalilaskennan osa-alueeseen. Lisäksi on hyvä huomata, että integraalilaskentaan liittyvät tehtävät edellyttää monesti myös muiden matematiikan osa-alueiden hallitsemista ja integrointi on vain osa kyseistä tehtävää. Tutkittuna aikavälinä ylioppilaskirjoituksissa oli myös 17 sellaista tehtävää, joita ei tässä ryhmittelyssä ole laitettu mihinkään tehtävätyyppiin. Nämä tehtävät ovat tyypillisesti sellaisia, jotka liittyvät integraalilaskentaan, mutteivät edusta selkeästi mitään yleistä tehtävätyyppiä.

Tehtävätyyppejä jaottelun tarkoituksena on esittää kyseisestä aihealueesta usein esiintyviä tehtävätyyppejä. Jaottelu on tehty hyvin yleisellä tasolla ja jaottelun tarkoituksena on auttaa löytämään tietyn tehtävätyypin tehtävät. Tarkempaa tilastointia tehtävätyyppeihin liittyen ei ole tehty useammista syistä. Luotettavan tilastoinnin tekeminen on vaikeaa, sillä sama tehtävä voi edustaa useampaa tehtävätyyppiä ja voi edellyttää integraalilaskennan lisäksi muiden matematiikan osa-alueiden hallintaa. Lisäksi tehtävän maksimipistemäärä vaihtelee 2-9 pisteen välillä.

Taulukko 5.1. Integraalitehtävien tehtävätyypit 1991-2010. [6; 7; 14]

Tehtävätyyppi	Tehtävätyypin tehtävät (Koe/Tehtävänumero)
Eksponenttifunktion integrointi	K91/2, S91/2, S91/3a, S96/2a, K97/10b, S97/2a, S98/5b, S98/10b, K00/7, K00/13, S02/15, S07/2c, S09/10, K10/2a
Trigonometristen funktioiden integroiminen	S91/2, K92/1, S92/7b, K94/6a, K96/2a, K98/7, K00/13, K02/8, K04/12, K06/2b, S07/10, K08/14, S08/3a, K09/2c, K10/15
Pyörähdyskappaleen tilavuus	S91/5b, K94/8, K96/7a, K97/10a, S98/10b, S01/12, S03/13, S04/7, K06/9, S06/13, K09/10
Paloittain määritellyn funktion integroiminen	S92/10, K98/7, K98/10, S98/5b, K01/9, S04/11, S10/13
Pinta-alafunktio	K93/6b, S01/11, K05/9, S08/6, S09/15, K10/8
Yhdistetyn funktion integroimissääntö/ funktion potenssin integroiminen	K91/2, S93/5b, K94/6a, S96/2a, S99/9
Kahden käyrän rajaaman alueen pinta-ala	S94/7a, K95/4, K98/7, K99/8, S04/7, S05/12, K08/7b, K09/9 S09/10
Osittaisintegrointi	K95/7b, K97/10b
Funktion 1/x integroiminen	S95/10, S97/2a, K04/10, K07/12, K08/3a, K10/13, S10/2b
Epäolennainen integraali	S97/9a, S04/11
Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala	S99/9, K07/8
Tilavuuden laskeminen	S02/12, K05/11, S09/15
Muut	S00/13, K02/14, K03/10, S03/14, K04/2, K05/8, S06/2b, S06/15, K07/2a, S07/2b, K08/13b, K09/2a, K09/10, K09/15b, S09/3b, S09/14, S10/3b

Integraalilaskentaan liittyvien tehtävätyyppien tarkastelun perusteella voidaan sanoa, että kokelaan kannattaa hallita etenkin trigonometristen funktioiden ja eksponenttifunktion integrointi sekä pyörähdyskappaleiden tilavuuden laskeminen. Paloittain määritellyn funktion integroiminen, osittaisintegrointi ja epäolennainen integraali kuuluvat syventävän kurssin sisältöön. Näin ollen voidaan sanoa, että differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin sisällön hallitseminen on eduksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa. Johtopäätöksenä voidaan sanoa, että tehtävätyypit noudattavat opetussuunnitelmassa annettuja keskeisiä tavoitteita. Tutkittuna aikavälinä voimassa olleet opetussuunnitelman perusteet, jotka on esitetty luvussa 3, korostavat määrätyn integraalin hallintaa. Vaikka määrättyä integraalia ei ole esitetty omana tehtävätyyppinä, edellyttävät useat sovellusalueet kuten pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen määrätyn integraalin hallistemista.

5.2 Tilastotietoa integrointitehtävistä saaduista pisteistä

Ylioppilastutkintolautakunta ei ole tilastoinut vaihtoehtoisia tehtäviä erikseen. Sellaisista tehtävistä, missä integrointilaskentaan liittyvä tehtävä on vaihtoehtoisena kohtana, on tarjolla vain kaikkien vaihtoehtojen suoritusten keskiarvo [6, s. 49]. Tästä syystä rajoitumme tarkastelemaan tilastoja puhtaasti integrointitehtävien osalta. Tehtäväkohtaisia pistekeskiarvoja esitetään tässä kevään ylioppilaskokeiden osalta. Edelleen rajoitutaan tarkastelemaan pistekeskiarvoja kymmenen vuoden ajalta. Aikaväliksi on valittu 1997-2006, sillä tuolloin kaikkien tehtävien maksimipistemäärä on ollut kuusi. Tehtävien pistekeskiarvot on laskettu kaikkien kirjoittajien suorituksista [5, s. 52]. Näin ollen tehtävistä saatuja pisteitä tarkasteltaessa tulee huomioida myös vastaajien prosentuaalinen osuus. Tarkastelun kannalta tehtävään vastanneiden pistekeskiarvo olisi kiinnostava. Vuosien 1997-2002 integraalilaskentaan liittyvien ylioppilastehtävien pistekeskiarvo tilastointi on esitetty taulukoissa 5.2 ja vuosien 2003-2006 taulukossa 5.3.

Taulukko 5.2. Tilastotietoa integraalitehtävistä vuosina 1997-2002. [6; 7, s. 49-50, s. 52-55]

Koe	K97	K98	K98	K99	K00	K00	K01	K02	K02
Tehtävä	10	7	10	8	7	13	9	8	14
Keskiarvo	0,8	2,3	0,6	0,7	4,1	0,8	0,4	2,3	1,8
Vastaajia (%)	61,8	87,1	62,7	70,6	86	40	49	65	4
Kirjoittajia	12405	12229	12229	12177	12580	12580	12861	13126	13126

Selvyyden vuoksi tutkielmassa on esitetty ainoastaan integraalilaskentaan liittyviä tehtäviä. Mutta tilastojen [6; 7, s. 49-50, s. 52-55] avulla, integrointitehtävistä saatuja pistekeskiarvoja voidaan vertailla myös muihin kokeiden tehtäviin. Tilastojen perusteella näyttäisi siltä, että integrointitehtävät ovat yleisesti ottaen vaikeita, sillä niistä saadut pistekeskiarvot ja vastaajien pro-

Taulukko 5.3. Tilastotietoa integraalitehtävistä vuosina 2003-2006. [7, s. 52-55]

Koe	K03	K04	K04	K04	K05	K05	K05	K06	K06
Tehtävä	10	2	10	12	8	9	11	2	9
Keskiarvo	3,6	5,2	3,2	0,1	2,4	1,5	1,1	4,6	1,8
Vastaajia (%)	28	95	56	6	24	57	58	98	63
Kirjoittajia	12711	12491	12491	12491	12205	12205	12205	11606	11606

sentuaalinen osuus on muiden matematiikan osa-alueiden tehtäviin verrattuna heikko.

Keväällä 1997 tehtävän 10 pistekeskiarvo on kaikista kokeen tehtävistä huonoin. Vain yhteen kokeen tehtävään oli vastannut vähemmän kokelaita kuin tehtävään 10. Vastaavasti kevään 1998 kirjoituksissa tehtävästä 10 kokelaat olivat saaneet keskimäärin vähiten pisteitä ja tähän tehtävään vastanneita oli myös vähiten. [6; 7, s. 49-50, s. 52-55]

Rajoitutaan seuraavaksi tarkastelemaan ainoastaan integraalilaskentaan liittyviä tehtäviä ja vertaillaan niitä keskenään. Tarkastellaan tehtäviä, joiden pistekeskiarvot olivat tilastoinnin perusteella integraalitehtävistä korkeimmat. Kevään 2004 tehtävän 4 pistekeskiarvo 5,6 on tarkasteltavalta ajanjaksolta integrointitehtävistä korkein. Lisäksi tehtävään vastanneiden määrä 95% on toiseksi korkein. Kevään 2006 tehtävään 2 vastanneiden osuus 98% on suurin, mutta pistekeskiarvo 4,6 jää hieman alle edellisen. [7, s. 54-55]

5.3 Esimerkkitehtävät

Tässä luvussa esitellään muutamia ylioppilaskokeiden tehtäviä malliratkaisuineen.

5.3.1 K98/7

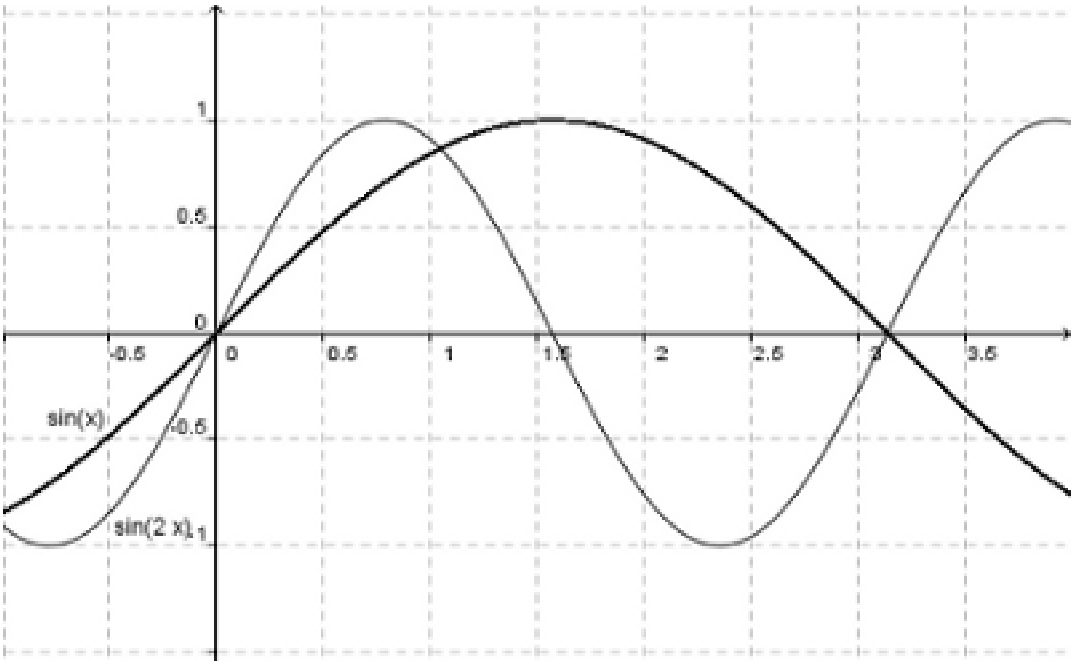
Tehtävä K98/7 on erinomainen, sillä se edustaa kolmea luvussa 5.1 esitettyä integraalilaskennan tehtävätyyppiä. Sen lisäksi, että tehtävä kartoittaa monipuolisesti integrointitaitoja, se edellyttää tärkeän mittayksikön, hehtaarin, hallintaa. Tähän tehtävään oli vastannut kokelaista 87,1 % ja tehtävän pistekeskiarvo oli 2,3 [6, s. 50].

Tehtävänanto Euroopan unionin tarkastaja mallintaa satelliittikuvassa näkyvän, trombin tuhoaman metsän alueeksi, joka jää käyrien $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ väliin, kun $x \in [0, \pi]$. Mikä on tuhoalueen tarkka pinta-ala mallin mukaan? Pituuden mittayksikkö on kilometri. Oletetaan, että trombin tuhoista maksetaan korvausta 11 500 mk/ha. Kuinka paljon metsänomistaja saa korvausta? [7, s. 81]

Ratkaisu Aluksi selvitetään käyrien $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ leikkauskohdat.

$$\sin x = \sin 2x$$
$$2x = x + n \cdot 2\pi \text{ tai } 2x = \pi - x + n \cdot 2\pi$$
$$x = n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3},$$

missä n on kokonaisluku.



Kuvio 5.1. Käyrät $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ [7, s. 81].

Leikkauskohdista välille $[0, \pi]$ kuuluvat $0, \frac{\pi}{3}$ ja π. Kuvan perusteella $\sin 2x \geq \sin x$ välillä $[0, \frac{\pi}{3}]$ ja $\sin x \geq \sin 2x$ välillä $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. Näin ollen pinta-ala on

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$= /_0^{\frac{\pi}{3}} (-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x) + /_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x)$$

$$= ((-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}) - (-\frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0))$$

$$+ ((-\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 2\pi) - (-\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}))$$

$$= ((-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}\cdot 1 + 1)) + ((-(-1) + \frac{1}{2}\cdot 1) - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})))$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2\frac{1}{2}$$

Pinta-alan tarkka arvo on $2\frac{1}{2}$ km^2 = 250 ha. Korvaussumma on $250 \cdot 11500$ mk = 2 875 000 mk. [7, s. 81]

Vastaus Pinta-ala on 2,5 km^2 ja korvaussumma 2 875 000 mk. [7, s.81]

5.3.2 K04/2

Tämän tehtävän pistekeskiarvo 5,2 on tutkitulla aikavälillä (1997-2006) korkein ja vastaajien prosentuaalinen osuus 95 % on toisiksi korkein [7, s. 54]. Näin ollen tehtävä edustaa mekaanisuutensa johdosta helpompia integraalilaskennan ylioppilastehtäviä.

Tehtävänanto Määritä a siten, että $\int_a^{a+1}(2x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ [7, s. 217].

Ratkaisu Tehtävä ratkaistaan suorittamalla ensin yhtälön vasemman puolen mekaaninen integrointi.

$$\begin{aligned}\int_a^{a+1}(2x+3)\mathrm{d}x &= /_a^{a+1}(x^2+3x)\\ &= (a+1)^2+3(a+1)-(a^2+3a)\\ &= a^2+2a+1+3a+3-a^2-3a\\ &= 2a+4\end{aligned}$$

Yhtälö sievenee muotoon, josta voidaan ratkaista muuttujan a arvo.

$$\begin{aligned}2a+4 &= \frac{1}{2} \quad |\cdot 2\\ 4a+8 &= 1\\ 4a &= -7\\ a &= -\frac{7}{4}\end{aligned}$$

Ks. [7, s. 217].

Vastaus Muuttujan a arvo on $-\frac{7}{4}$ [7, s. 217].

5.3.3 K01/9

Tehtävän pistekeskiarvo oli 0,4 ja vastanneiden prosentuaalinen osuus 49 % [7, s. 53]. Tästä voidaan päätellä, että tehtävä on haastava.

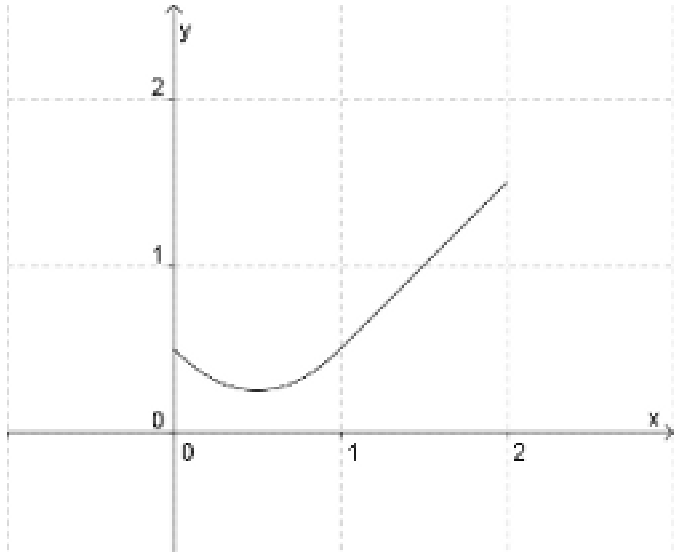
Tehtävänanto Funktio f on määritelty välillä $0 \leq x \leq 2$ seuraavasti:

$$f(x) = \int_0^1 |x-t|\mathrm{d}t.$$

Määritä funktion suurin ja pienin arvo välillä $[0,2]$. Piirrä kuvaaja. [7, s. 150]

Ratkaisu Käsitellään erikseen tapaukset $0 \leq x \leq 1$ ja $1 \leq x \leq 2$.

$$0 \leq x \leq 1 : |x-t| = \begin{cases} x-t, \text{ kun } t \leq x \\ -(x-t), \text{ kun } t \geq x \end{cases} = \begin{cases} x-t, \text{ kun } t \leq x \\ -x+t, \text{ kun } t \geq x \end{cases}$$



Kuvio 5.2. Funktion $f(x)$ kuvaaja [7, s. 150].

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 |x-t|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x (x-t)\mathrm{d}t + \int_x^1 (-x+t)\mathrm{d}t \\
&= /_0^x(xt - \frac{1}{2}t^2) + /_x^1(-xt + \frac{1}{2}t^2) \\
&= ((x^2 - \frac{1}{2}x^2) - 0) + ((-x + \frac{1}{2}) - (-x^2 + \frac{1}{2}x^2)) \\
&= x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + x^2 - \frac{1}{2}x^2 \\
&= x^2 - x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$1 \leq x \leq 2 : x - t \geq 0$ koko integroimisvälillä $0 \leq t \leq 1$, joten $|x-t| = x - t$.

$$f(x) = \int_0^1 |x-t|\mathrm{d}t = \int_0^1 (x-t)\mathrm{d}t = /_0^1(xt - \frac{1}{2}t^2) = x - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Siis } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \frac{1}{2}, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, \text{ kun } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä $[0,1]$ joko päätepisteissä tai derivaatan $2x-1$ nollakohdassa $x=\frac{1}{2}$. Koska $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ ja $f(1)=\frac{1}{2}$, suurin arvo on $\frac{1}{2}$ ja pienin arvo on $\frac{1}{4}$. Välillä $[1,2]$ funktion f kuvaaja on nouseva suora, joten f:n suurin arvo tällä välillä on $f(2)=\frac{3}{2}$ ja pienin arvo $f(1)=\frac{1}{2}$. Siis funktion f suurin arvo välillä $[0,2]$ on $\frac{3}{2}$ ja pienin arvo on $\frac{1}{4}$. [7, s. 150]

Vastaus Suurin arvo on $\frac{3}{2}$ ja pienin arvo $\frac{1}{4}$ [7, s. 150].

5.4 Johtopäätökset

Ylioppilaskokeiden integraalilaskennan tehtävät noudattavat pääsääntöisesti lukion opetusssuunnitelman perusteiden asettamia keskeisiä tavoitteita. Määrätyn integraalin sovellukset; pinta-alan ja tilavuuden laskeminen kokelaan on hyvä hallita. Edelleen trigonometristen funktioiden ja eksponenttifunktion integroimiset ovat usein osana integrointitehtävää.

Integraalilaskennan tehtävissä menestyminen on pääsääntöisesti heikkoa. Vuosina 1997-2006 integraalilaskennan tehtävistä, joita oli yhteensä 18, saatu pistekeskiarvo oli 2,1 ja vastaajien prosentuaalinen osuus keskimäärin 56%. Koska pistekeskiarvoon vaikuttaa myös tehtävään vastaamattomien saamatta jääneet pisteet, on huomattava, että tehtävään vastanneet ovat keskimäärin saaneet pisteitä tehtävästä huomattavasti pistekeskiarvoa enemmän. Näin ollen voidaan ajatella, että vähäisen kiinnostuksen vuoksi integraalilaskentaa pidetään vaikeana. Lukion pitkän matematiikan opetuksessa on vielä haasteita herättää kiinnostusta integraalilaskentaan.

Lähdeluettelo

[1] Boyer, C. B. *Tieteen kuningatar, matematiikan historia osa I*, 3. painos, Art House, Helsinki, 1994.

[2] Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. *Tieteen kuningatar, matematiikan historia osa II*, 3. painos, Art House, Helsinki, 1994.

[3] Hartikka, T., Partanen, J., Salonen, C. & Toivanen, P., *Pitkän matematiikan yo-tehtäviä, Vuosien 1994-2001 tehtävät ratkaisuineen*, 2. painos, Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki, 2000.

[4] Jäppinen, P., Kupiainen, A. & Räsänen, M., *Lukion Calculus MAA13 Differentiaali-ja integraalilaskennan jatkokurssi*, 1. painos, Kustannusosakeyhtiö Otava, Helsinki, 2006.

[5] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. & Tahvanainen, J., *Pitkän matematiikka Integraalilaskenta*, WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2007.

[6] Kangasaho, J., Piri, P. & Taavitsainen, H., *Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 1991-2000*, 3. painos, Werner Söderström Osakeyhtiö, 1999.

[7] Kangasaho, J., Piri, P. & Taavitsainen, H., *Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 1997-2007*, 8. painos, WSOY Oppimateriaalit Oy, 2006.

[8] Kouluhallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985*, Helsinki, 1985.

[9] Lehtinen, M., *Matematiikan lyhyt historia*, Helsingin yliopisto, Helsinki, 1995.

[10] Opetushallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994*, Helsinki, 1994.

[11] Opetushallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*, [Viitattu: 25.11.2010]. Saatavilla internetistä: `http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf`

[12] Salas, S. L., Hille, E. & Etgen, G. J., *Calculus One and Several Variables*, Ninth Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2003.

[13] Teerikorpi, P. & Valtonen, M., *Kosmos - maailmme muuttuva kuva*, Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, 1988.

[14] Teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laitos, *Matematiikan ylioppilastehtävät*, [Viitattu: 1.1.2011]. Saatavilla internetissä: `http://matta.hut.fi/yoteht/`

[15] The MacTutor History of Mathematics archive, *Jean Gaston Darboux*, [Viitattu: 29.12.2010]. Saatavilla internetistä: `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Darboux.html`

[16] Väisälä, K. *Algebran oppi- ja esimerkkikirja II pitempi kurssi*, 4. painos, Werner Söderström osakeyhtiö, Porvoo, 1956.

[17] Väisälä, K. *Algebran oppi- ja esimerkkikirja II pitempi kurssi*, 8. painos, Werner Söderström osakeyhtiö, Porvoo, 1966.

[18] Väisälä, K. *Differentiaali- ja integraalilaskennan alkeet*, Werner Söderström osakeyhtiö, Porvoo, 1947.

[19] Östergaard-Pedersen, B., *Matematiikan käsikirja*, Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki, 1967.

[20] Wikipedia, *Riemann integral*, [Viitattu: 28.12.2010]. Saatavilla internetistä: `http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_integral`

[21] Wikipedia, *Darboux integral*, [Viitattu: 29.12.2010]. Saatavilla internetistä: `http://en.wikipedia.org/wiki/Darboux_integral`

Liite: Ylioppilaskokeet vuosina 1991-2010

Taulukko 4. Integraalilaskentaan liittyvät tehtävät ylioppilaskokeissa vuosina 1991-2010. [6; 7; 3, s. 245, s. 326, s. 245]

Koe	Integraalilaskentaan liittyvät tehtävät	Yhteispisteet
K91	2	6
S91	2, 3a, 5b	18
K92	1	6
S92	7b, 10	12
K93	6b	6
S93	5b	6
K94	6a, 8	12
S94	7a	6
K95	4, 7b	12
S95	10	6
K96	2a, 7a	12
S96	2a	6
K97	10a, 10b	6
S97	2a, 9a	12
K98	7, 10	12
S98	5b, 10b	12
K99	8	6
S99	9	6
K00	7, 13	12
S00	13	6
K01	9	6
S01	11, 12	12
K02	8, 14	12
S02	12, 15	12
K03	10	6
S03	13, 14	12
K04	2, 10, 12	18
S04	7, 11	12
K05	8, 9, 11	18
S05	12	6
K06	2b, 9	8
S06	2b, 13, 15	15
K07	2a, 8, 12	14
S07	2b, 2c, 10	10
K08	3a, 7b, 13b, 14	18
S08	3a, 6	9
K09	2a, 2c, 9, 10, 15b	19
S09	3b, 10, 14, 15	27
K10	2a, 8, 13, 15	23
S10	2b, 3b, 13	11