TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Mervi Paavola

Reaalisten funktioiden integrointia kompleksianalyysin keinoin

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

PAAVOLA, MERVI: Reaalisten funktioiden integrointia kompleksianalyysin keinoin

Pro gradu -tutkielma 42s.

Matematiikka

Maaliskuu 2011

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoitus on perehdyttää lukija residylaskentaan. Residylaskentaa tarvitaan laskettaessa reaalisia integraaleja kompleksianalyysin avulla.

Tutkielman alussa luvussa 2 esitellään tieintegraaleihin liittyviä lauseita, joita tarvitaan myöhemmin tutkielmassa. Luvussa 3 käsitellään tasaista suppenemista. Kappaleissa 4 ja 5 esitellään Taylorin ja Laurentin sarjat, jotka ovat potenssisarjoja, joiden avulla arvioidaan funktioita. Luvussa 6 keskitytään funktion erikoispisteisiin. Näiden pisteiden erikoislaatu on tärkeä luvussa 7 esitettävän residylaskennan vuoksi. Luvussa 8 keskitytään reaalisten integraalien laskemiseen residylaskennan keinoin.

Pohjatietoina lukijalta odotetaan monipuolinen kompleksianalyysin perusteiden osaaminen. Varsinkin topologian, sarjojen ja summien ymmärtäminen auttaa lukijaa työn parissa. Päälähdeteoksena käytetään John H. Mathewsin ja Russell W. Howellin kirjan Complex Analysis for Mathematics and Engineering neljättä painosta.

Asiasanat: kompleksianalyysi, Laurentin sarja, residylaskenta

Sisältö

1 Johdanto **4**

2 Apuneuvoja **5**

3 Tasainen suppeneminen **6**

4 Taylorin sarja **9**

5 Laurentin sarja **11**

6 Erikoispisteet, nollat ja navat **18**

7 Residy-teoriaa **20**
- 7.1 Residylause 20
- 7.2 Residylaskenta 22

8 Reaalisten integraalien laskeminen residylaskennan avulla **24**
- 8.1 Trigonometriset integraalit 25
- 8.2 Rationaalifunktioiden epäoleelliset integraalit 27
- 8.3 Epäoleelliset integraalit ja trigonometriset funktiot 31
- 8.4 Määrätyt tieintegraalit 36

Viitteet **42**

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee reaalisten funktioiden integrointia kompleksianalyysin keinoin. Tutkielmassa esitellään ensin Taylorin ja Laurentin sarjat, joista jälkimmäinen on tärkeä työkalu residylaskennassa. Residylaskennan tärkein sovellus on reaalisten integraalien laskeminen residylaskennan avulla. Reaalisista integraaleista saadaan kompleksisia integraaleja, jolloin pystytään laskemaan integraalin arvo residylaskennan avulla.

Tieintegraalien ominaisuuksia tarkastellaan luvussa 2. Nämä lauseet esitetään lukijalle kertauksenomaisesti, eikä niiden todistuksia ole tässä esitetty. Tämän luvun lauseiden nimistä voidaan huomata, kuinka tärkeää työtä ranskalainen Augustin Louis Cauchy on tehnyt matematiikan parissa.

Luvussa 3 esitellään tarkemmin tasaisen suppenemisen käsite. Tasainen suppeneminen on pisteittäistä suppenemista vahvempi ja siinä funktion arvot suppenevat samanaikaisesti jokaisessa pisteessä kohti rajafunktiota.

Taylorin sarjaa tarkastellaan luvussa 4. Luvun alkuun muistutetaan potenssisarjan ja suppenemissäteen määritelmistä. Taylorin sarja on päättymätön potenssisarja ja sitä käytetään arvioimaan funktiota. Se, kuinka tarkka arvio on, määräytyy pitkälti käytettävän Taylorin sarjan kertaluvun mukaan.

Luvussa 5 päästään käsiksi Taylorin sarjan yleistykseen, Laurentin sarjaan. Laurentin sarja on saanut nimensä ranskalaisen matemaatikon Pierre Alphonse Laurentin mukaan. Laurentin sarja ei edellytä, että funktio olisi derivoituva kehityskeskuksena olevan pisteen ympäristössä. Joissakin tapauksissa on kuitenkin tarpeen löytää sarjaesityksiä myös funktioille, jotka eivät ole derivoituvia tai edes määriteltyjä tarkasteltavan pisteen lähellä.

Funktion erikoispisteitä, nollia ja napoja käsitellään luvussa 6. Nämä tunnetaan hyvin, kun kyseessä on rationaalifunktio. Tällöin navoiksi kutsutaan nimittäjän nollakohtia ja nolliksi osoittajan nollakohtia. Erikoispisteiden tuntemusta tarvitaan jatkossa, koska funktio, jolla on eristetty erikoispiste, voidaan esittää Laurentin sarjana.

Residy-teoriaa ja residyjen laskemista esitellään luvussa 7. Kun tiedetään funktion erikoispisteet integroimistien sisäpuolella, on residy helppo laskea. Tämän avulla saadaan integraalin arvo laskettua. Näitä tietoja tarvitaan luvussa 8, kun päästään laskemaan reaalisia funktioita residylaskennan keinoin, mikä onkin koko residylaskennan tärkein sovellus. Siinä reaalinen funktio muutetaan kompleksiseksi funktioksi, jonka jälkeen residylaskennan keinoin saadaan integraalin arvo laskettua.

Pohjatietoina lukijalta odotetaan monipuolinen kompleksianalyysin perusteiden osaaminen. Erityisesti kompleksiset integraalit oletetaan tunnetuiksi. Myös topologian, sarjojen ja summien ymmärtäminen on tärkeää. Päälähdeteoksena käytetään John H. Mathewsin ja Russell W. Howellin kirjan Complex Analysis for Mathematics and Engineering neljättä painosta. Kaikki tutkielman määritelmät ovat tästä teoksesta, ellei toisin mainita.

2 Apuneuvoja

Tässä luvussa esitellään muutamia lauseita, joita tarvitaan myöhemmin varsinkin luvuissa 3 ja 5.

Lause 2.1 (ML-lause)**.** *Jos* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *on jatkuva tiellä* C*, niin*

$$\left| \int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq ML,$$

missä L *on tien* C *pituus ja* $M = \max\limits_{z \in C} |f(z)|$.

Todistus. Ks. [1, s. 218]. □

Lause 2.2 (Greenin lause)**.** *Olkoon* C *yksinkertainen sulkeutuva positiivisesti suunnistettu tie ja olkoon* R *alue, joka koostuu tien* C *sisäänsä sulkemasta alueesta. Jos* P *ja* Q *ovat jatkuvia ja niillä on jatkuvat osittaisderivaatat* P_x*,* P_y*,* Q_x *ja* Q_y *kaikissa tien* C *ja joukon* R *pisteissä, niin*

$$\int\limits_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int\int\limits_R [Q_x(x, y) - P_y(x, y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Todistus. Ks. [1, s. 224-225]. □

Lause 2.3 (Cauchy-Goursatin lause)**.** *Olkoon* f *analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa* D*. Jos* C *on yksinkertainen sulkeutuva tie, joka sisältyy alueeseen* D*, niin*

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Todistus. Ks. [1, s. 226-229]. □

Lause 2.4 (Cauchy-Goursatin laajennettu lause)**.** *Olkoot* $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ *sellaisia suljettuja positiivisesti suunnistettuja teitä, että* C_k *sisältyy tien* C *sisäänsä sulkemaan alueeseen, kun* $k = 1, 2, \ldots, n$ *ja tien* C_k *sisäänsä sulkema alue ei sisällä yhteisiä pisteitä tien* C_j *sisäänsä sulkeman alueen kanssa, kun* $k \neq j$*. Olkoon* f *analyyttinen alueessa* D*, joka sisältää kaikki tiet sekä teiden* C *ja* $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ *välisen alueen. Tällöin*

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Todistus. Ks. [2, s. 69-71]. □

Lause 2.5 (Cauchyn integraalikaava)**.** *Olkoon* f *analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa* D *ja olkoon* C *yksinkertainen sulkeutuva tie, joka sisältyy alueeseen* D*. Jos* z_0 *on tien* C *sisäänsä sulkemassa alueessa, niin*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Todistus. Ks. [1, s. 244]. □

Lause 2.6 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille)**.** *Olkoon f analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D ja olkoon C yksinkertainen sulkeutuva positiivisesti suunnistettu tie, joka kuuluu alueeseen D. Jos z_0 on tien C sisäänsä sulkemassa alueessa, niin jokaisella $n \geq 0$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)}} \, d\xi. \tag{2.1}$$

Todistus. Ks. [1, s. 246-247]. □

3 Tasainen suppeneminen

Tässä luvussa käsitellään tasaista suppenemista, josta päästään jatkamaan potenssisarjoihin. Tässä alussa pohditaan hieman pisteittäisen suppenemisen ja tasaisen suppenemisen eroja. Lisäksi huomataan tasaisen suppenemisen olevan pisteittäistä vahvempi ominaisuus.

Oletetaan, että funktio f on määritelty joukossa T. Funktioiden jono $\{S_n\}$ suppenee kohti funktiota f pisteessä $z_0 \in T$, mikäli $\lim_{n\to\infty} S_n(z_0) = f(z_0)$. Näin ollen pisteessä z_0 jokaista $\epsilon > 0$ kohtaan on olemassa positiivinen kokonaisluku N_{ϵ,z_0} siten, että

$$\text{jos } n \geq N_{\epsilon,z_0}, \quad \text{niin } |\, S_n(z_0) - f(z_0)| < \epsilon. \tag{3.1}$$

Tässä siis N_{ϵ,z_0} riippuu luvuista ϵ ja z_0. Jos $S_n(z)$ on sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k$ n. osasumma, väite (3.1) saadaan muotoon

$$\text{jos n } \geq N_{\epsilon,z_0}, \quad \text{niin } \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k \,(z_0 - \alpha)^k - f(z_0) \right| < \epsilon.$$

Huomataan, että annetulla arvolla ϵ, väitteen (3.1) toteuttava kokonaisluku N_{ϵ,z_0} vaihtelee usein pisteen z_0 valinnan mukaan. Tällöin funktiojono suppenee pisteittäin. Tasaisesti suppenevalle jonolle on sen sijaan mahdollista löytää kokonaisluku N_ϵ, joka riippuu vain arvosta ϵ ja joka toteuttaa ehdon (3.1) millä tahansa $z_0 \in T$. Toisin sanoen, jos n on tarpeeksi suuri, niin funktio S_n on tasaisen lähellä funktiota f kaikilla $z \in T$. Seuraavaksi esitellään tasaisen suppenemisen virallinen määritelmä.

Määritelmä 3.1. Jono $\{S_n(z)\}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(z)$ joukossa T, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen kokonaisluku N_ϵ, että

$$\text{jos } n \geq N_\epsilon, \quad \text{niin } |\, S_n(z) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{kaikilla } z \in T. \tag{3.2}$$

Jos $S_n(z)$ on sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k$ n. osasumma, sanotaan, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k$ *suppenee tasaisesti* kohti funtiota $f(z)$ joukossa T.

Weierstrassin M-testiä voidaan käyttää määrittämään, onko ääretön sarja tasaisesti suppeneva vai ei.

Lause 3.1 (Weierstrassin M-testi). *Olkoon äärettömällä sarjalla* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ *ominaisuus, että jokainen* k *toteuttaa ehdon* $|\,u_k(z)| \leq M_k$ *kaikilla* $z \in T$. *Jos* $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ *suppenee, niin* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ *suppenee tasaisesti joukossa* T.

Todistus. [1, s. 263-264]. Olkoon $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(z)$ sarjan n. osasumma. Jos $n > m$, niin $|S_n(z) - S_m(z)| = |\,u_m(z) + u_{m+1}(z) + \cdots + u_{n-1}(z)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} M_k$. Koska sarja $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ suppenee, niin jälkimmäisestä lausekkeesta saadaan kuinka pieni tahansa valitsemalla tarpeeksi iso m. Täten arvolla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N_ϵ, että jos $n, m > N_\epsilon$, niin $|\,S_n(z) - S_m(z)| < \epsilon$. Tämä tarkoittaa, että $\{S_n(z)\}$ on Cauchyn jono kaikilla $z \in T$. Tämä jono suppenee kohti lukua, jota voidaan merkitä $f(z)$:lla. Toisin sanoen $f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$. Tästä havainnosta saadaan funktio, jota kohti sarja $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ suppenee.
Täytyy vielä todistaa, että suppeneminen on tasaista. Olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Koska $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ suppenee, on olemassa N_ϵ, siten että jos $n \geq N_\epsilon$, niin $\sum_{k=n}^{\infty} M_k < \epsilon$. Näin ollen jos $n \geq N_\epsilon$ ja $z \in T$, niin

$$\begin{aligned}
|f(z) - S_n(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) - \sum_{k=0}^{n-1} u_k(z)\right| \\
&= \left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(z)\right| \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} M_k \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Näin ollen sarja suppenee tasaisesti. □

Esimerkki 3.1. [1, s. 267, tehtävä 3] Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$$

suppenee tasaisesti kiekossa $\overline{D}_1(0) = \{z : |z| \leq 1\}$.

On helppo huomata, että $\left|\frac{1}{k^2}\, z^k\right| \leq \frac{1}{k^2}$ kaikilla $z \in \overline{D}_1(0)$. Koska sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee, niin Weierstrassin M-testin eli lauseen 3.1 perusteella sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, z^k$ suppenee tasaisesti kiekossa $\overline{D}_1(0) = \{z : |z| \leq 1\}$.

Lause 3.2 tarjoaa mielenkiintoisen sovelluksen Weierstrassin M-testille.

Lause 3.2. *Olkoon potenssisarjalla* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-\alpha)^k$ *suppenemissäde* $\rho > 0$. *Nyt jokaisella* r, *jolle* $0 < r < \rho$, *sarja suppenee tasaisesti suljetussa kiekossa* $\overline{D}_r(\alpha) = \{z : |z-\alpha| \leq r\}$.

Todistus. [1, s. 264-265]. Olkoon r sellainen, että $0 < r < \rho$. Valitaan $z_0 \in D_\rho(\alpha)$ siten, että $|z_0 - \alpha| = r$. Potenssisarjojen ominaisuuksien perusteella tiedetään, että $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k$ suppenee itseisesti arvolla $z \in D_\rho(\alpha)$. Tästä seuraa, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| c_k (z_0 - \alpha)^k \right| = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \, r^k$$

suppenee. Sen lisäksi kaikilla $z \in \overline{D}_r(\alpha)$

$$\left| c_k (z-\alpha)^k \right| = |\, c_k| |\, z - \alpha|^k \leq |\, c_k| \, r^k.$$

Weierstrassin M-testin, jossa $M_k = |c_k| \, r^k$, perusteella sarja suppenee tasaisesti. □

Seurauslause 3.1. Jokaisella r, jolle $0 < r < 1$, geometrinen sarja suppenee tasaisesti suljetussa kiekossa $\overline{D}_r(0)$.

Lause 3.3. *Olkoon $\{S_k\}$ jono jatkuvia funktioita, jotka on määritelty joukossa T, joka sisältää tien C. Jos $\{S_k\}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa T, niin*

(i) *f on jatkuva joukossa T ja*

(ii) $\lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_C S_k(z) \, \mathrm{d}z = \int\limits_C \lim\limits_{k \to \infty} S_k(z) \, \mathrm{d}z = \int\limits_C f(z) \, \mathrm{d}z.$

Todistus. [1, s. 265-266]. Täytyy todistaa, että $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ annetulla $z_0 \in T$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\{S_k\}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa T, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N_ϵ, että kaikilla $z \in T$ $|\, f(z) - S_k(z)| < \epsilon/3$, kun $k \geq N_\epsilon$. Koska S_{N_ϵ} on jatkuva pisteessä z_0, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $|\, z - z_0| < \delta$, niin $|\, S_{N\epsilon}(z) - S_{N\epsilon}(z_0)| < \epsilon/3$. Näin ollen, jos $|\, z - z_0| < \delta$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - S_{N\epsilon}(z) + S_{N\epsilon}(z) - S_{N\epsilon}(z_0) + S_{N\epsilon}(z_0) - f(z_0)| \\
&\leq |f(z) - S_{N\epsilon}(z)| + |S_{N\epsilon}(z) - S_{N\epsilon}(z_0)| + |S_{N\epsilon}(z_0) - f(z_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Täten kohta (i) on todistettu.

Todistettaessa kohtaa (ii) oletetaan, että $\epsilon > 0$ ja L on tien C pituus. Koska $\{S_k\}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa T, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N_ϵ, että jos $k \geq N_\epsilon$, niin $|S_k(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{L}$ kaikilla $z \in T$. Koska C kuuluu joukkoon T, niin $\max\limits_{z \in C} |S_k(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{L}$, jos

$k \geq N_\epsilon$. Käyttämällä ML-lausetta 2.1 saadaan

$$\begin{aligned}
\left| \int_C S_k(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_C [S_k(z) - f(z)]\,\mathrm{d}z \right| \\
&\leq \max_{z \in C} |S_k(z) - f(z)|\ L \\
&< \left(\frac{\epsilon}{L}\right) L \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Seurauslause 3.2. Jos sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-\alpha)^n$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(z)$ joukossa T ja C on tie joukossa T, niin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C c_n(z-\alpha)^n\,\mathrm{d}z = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

4 Taylorin sarja

Taylorin sarja on päättymätön potenssisarja ja siitä muodostettuja osasummia kutsutaan Taylorin polynomeiksi. Taylorin sarjaa käytetään arvioimaan funktiota potenssisarjalla, jolloin haluttava laskentatarkkuus määrää, minkä kertaluvun Taylorin polynomia käytetään. Tässä luvun alussa on esitellään käsitteet potenssisarja ja suppenemissäde.

Määritelmä 4.1. [4, s. 307]. Ääretöntä sarjaa, joka on muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{4.1}$$

ja missä kertoimet a_k ovat kompleksisia vakioita, kutsutaan *potenssisarjaksi.* Potenssisarjan (4.1) keskipiste on pisteessä z_0.

Määritelmä 4.2. (Vrt. [3, s. 62-63] ja [4, s. 307]) Potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

suppenemissäde R on suurimman z_0-keskisen ympyrän säde, jonka jokaisessa sisäpisteessä potenssisarja suppenee. Toisin sanoen

$$R = \max_r \left\{ r\ :\ |z-z_0| < r \to \sum a_k(z-z_0)^k \text{ suppenee } \right\}.$$

Ympyrän sisäpisteet muodostavat *suppenemisalueen.*

Suppenemissäde voi olla

(i) $R = 0$, jolloin potenssisarja suppenee vain keskipisteessään $z = z_0$,

(ii) äärellinen positiivinen luku R, jolloin potenssisarja suppenee, kun $|z - z_0| < R$ tai

(iii) $R = \infty$, jolloin potenssisarja suppenee kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Taylorin sarja on potenssisarja, jolla voidaan arvioida analyyttisen funktion käyttäytymistä sarjan suppenemisalueella.

Määritelmä 4.3 (Taylorin sarja)**.** [1, s. 269]. Jos $f(z)$ on analyyttinen pisteessä $z = \alpha$, niin sarjaa

$$f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!(z-\alpha)^2} + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!(z-\alpha)^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k$$

kutsutaan funktion f *Taylorin sarjaksi* keskipisteenä α. Kun keskipiste $\alpha = 0$, sarjaa kutsutaan funktion f *Maclaurinin sarjaksi.*

Lause 4.1 (Taylorin lause)**.** *Olkoon f jatkuva alueessa D ja olkoon $D_R(\alpha)$ mikä tahansa kiekko, joka kuuluu alueeseen D. Nyt funktion f Taylorin sarja suppenee kohti funktiota f kaikilla $z \in D_R(\alpha)$. Toisin sanoen*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k \quad \textit{kaikilla} \quad z \in D_R(\alpha).$$

Lisäksi kaikille r, joille $0 < r < R$, suppenevuus on tasaista suljetussa alikiekossa $\overline{D}_r(\alpha) = \{z : |z-\alpha| \leq r\}$.

Todistus. Ks. [1, s. 269-271]. □

Esimerkki 4.1. Etsitään funktion

$$f(z) = \frac{z^3}{z^4 + 9}$$

Taylorin sarja origossa ja määritellään funktion f suppenemissäde.

Kehitetään f geometriseksi sarjaksi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^3}{z^4+9} \\ &= \frac{z^3}{9}\frac{1}{1-(-\frac{z^4}{9})} \\ &= \frac{z^3}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n}}{9^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+3}}{9^{n+1}}, \end{aligned}$$

joka suppenee, kun

$$\left|\frac{z^4}{9}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z| < \sqrt{3}.$$

Siis funktion f Taylorin sarja origossa on muotoa $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{4n+3}}{9^{n+1}}$ ja suppenemissäde $R = \sqrt{3}$.

5 Laurentin sarja

On mahdollista, että reaalifunktio, jota ei pystytä esittämään potenssisarjana, on derivoituva kaikkialla. Kompleksifunktioilla tilanne on yksinkertaisempi. Voidaan todistaa, että kiekossa $D_r(\alpha)$ analyyttisen kompleksifunktion Taylorin sarja pisteessä α suppenee kohti funktiota kaikissa kiekon pisteissä. Laurentin sarja ei edellytä, että funktio olisi derivoituva kehityskeskuksena α olevan pisteen ympäristössä. Näin ollen Laurentin sarjaa käytetään arvioimaan funktiota potenssisarjana.

Määritelmä 5.1 (Laurentin sarja)**.** Olkoon c_n kompleksiluku kaikilla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Kaksipuoleista ääretöntä sarjaa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ kutsutaan *Laurentin sarjaksi*, jos se toteuttaa yhtälön

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-\alpha)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n \tag{5.1}$$

ja jos yhtälön oikean puoleiset sarjat suppenevat.

Huomautus 5.1. Huomioidaan, että $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ on yksinkertaistettu esitys summasta $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$. Ajoittain on järkevämpää kirjoittaa summa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ summana

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$$

kuin käyttää yhtälössä (5.1) annettua lauseketta.

Määritelmä 5.2 (rengas)**.** Olkoon $0 \le r < R$. *Rengas*, jonka keskipiste on α ja jonka säteet ovat r ja R, määritellään siten, että

$$A(\alpha, r, R) = \{z : r < |\, z - \alpha| < R\}.$$

Suljettua rengasta, jonka keskipiste on α ja jonka säteet ovat r ja R, merkitään

$$\overline{A}(\alpha, r, R) = \{z : r \le |\, z - \alpha| \le R\}.$$

Lause 5.1. *Oletetaan, että Laurentin sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ suppenee renkaassa $A(\alpha, r, R)$. Tällöin sarja suppenee tasaisesti jokaisessa alirenkaassa $\overline{A}(\alpha, s, t)$, jossa $r < s < t < R$.*

Todistus. [1, s. 281]. Yhtälön (5.1) mukaan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-\alpha)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n.$$

Lauseen 3.2 mukaan sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ suppenee tasaisesti suljetussa kiekossa $\overline{D}_r(\alpha)$. Weierstrassin M-testin eli lauseen 3.1 perusteella voidaan osoittaa, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-\alpha)^{-n}$ suppenee tasaisesti alueessa $\{z : |z-\alpha| \geq s\}$. Näiden kahden ehdon perusteella lause on todistettu. □

Tämän kappaleen tärkein tulos määrittelee, kuinka renkaassa analyyttinen funktio voidaan laajentaa Laurentin sarjaksi. Merkintää $C_\rho^+(\alpha)$ käytetään positiivisesti suunnistetulle ympyrälle, jonka säde on ρ ja keskipiste on α. Toisin sanoen $C_\rho^+(\alpha) = \{z : |z-\alpha| = \rho\}$ ja se on suunnistettu vastapäivään.

Lause 5.2 (Laurentin lause)**.** *Olkoon $0 \leq r < R$ ja f analyyttinen renkaassa $A = A(\alpha, r, R)$. Jos ρ on sellainen, että $r < \rho < R$, niin kaikilla $z_0 \in A$ funktiolla f on Laurentin sarja muotoa*

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z_0-\alpha)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z_0-\alpha)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-\alpha)^n, \end{aligned} \tag{5.2}$$

jossa kertoimet c_{-n} ja c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ saadaan kaavoista

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+(\alpha)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-n+1}} \, \mathrm{d}z \quad \textit{ja} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+(\alpha)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} \, \mathrm{d}z. \tag{5.3}$$

Lisäksi yhtälön (5.2) suppeneminen on tasaista kaikissa suljetuissa alirenkaissa $\overline{A} = (\alpha, s, t)$, joissa $r < s < t < R$.

Todistus. [1, s. 282-284]. Tavoitteena on saada aikaan yhtälö (5.2), jolloin tasainen suppeneminen renkaassa $\overline{A}(s, t, \alpha)$ seuraa lauseesta 5.1.

Olkoon z_0 renkaan A mielivaltainen piste. Valitaan tarpeeksi pieni r_0 siten, että ympyrä $C_0 = C_{r_o}^+(z_0)$ kuuluu renkaaseen A. Koska f on analyyttinen kiekossa $D_{r_0}(z_0)$, niin Cauchyn integraalikaavasta 2.5 saadaan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{5.4}$$

Olkoon $C_1 = C_{r_1}^+(\alpha)$ ja $C_2 = C_{r_2}^+(\alpha)$, joissa r_1 ja r_2 valitaan siten, että C_0 kuuluu ympyröiden C_1 ja C_2 väliselle alueelle ja $r < r_1 < r_2 < R$.
Olkoon D joukko, joka sisältää renkaan A pistettä z_0 lukuun ottamatta.

Joukko D siis sisältää myös tiet C_0, C_1 ja C_2 ja alueen teiden C_2 ja $C_0 + C_1$ väliltä. Lisäksi, koska z_0 ei kuuluu alueeseen D, niin funktio $\frac{f(z)}{(z-z_0)}$ on analyyttinen alueessa D. Laajennetun Cauchy-Goursatin lauseen 2.4 mukaan saadaan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z. \tag{5.5}$$

Yhdistämällä yhtälöt (5.4) ja (5.5) saadaan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z. \tag{5.6}$$

Jos $z \in C_2$, niin $|\, z_0 - \alpha| < |\, z - \alpha|$. Tästä saadaan $|\, \frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}| < 1$. Geometristen sarjojen ominaisuuksien perusteella

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{(z-\alpha)-(z_0-\alpha)} \\
&= \frac{1}{(z-\alpha)}\frac{1}{(1-\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha})} \\
&= \frac{1}{(z-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_0-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}}. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Weierstrassin M-testin eli lauseen 3.1 perusteella edellinen sarja suppenee tasaisesti arvolla $z \in C_2$. Samoin periaattein, jos $z \in C_1$, niin

$$\frac{1}{z-z_0} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}} \tag{5.8}$$

suppenee tasaisesti. Sijoittamalla yhtälöt (5.7) ja (5.8) yhtälöön (5.6) saadaan

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_0-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}}\,f(z)\,\mathrm{d}z \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(z_0-\alpha)^{n+1}}\,f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Koska yhtälön sarjat suppenevat tasaisesti teillä C_2 ja C_1, voidaan yhtälössä (5.9) summien ja integraalien paikat vaihtaa keskenään. Täten seuraslauseen 3.2 mukaan saadaan

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z-\alpha)^{n+1}}\right](z_0-\alpha)^n \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)(z-\alpha)^n\,\mathrm{d}z\right]\frac{1}{(z_0-\alpha)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Muuttamalla termien paikkoja ja indeksoimalla uudestaan yhtälön jälkimmäinen summa saadaan

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z-\alpha)^{\,n+1}}\right](z_0-\alpha)^n \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-n+1}}\,\mathrm{d}z\right](z_0-\alpha)^{-n}.
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Käyttämällä Cauchy-Goursatin laajennettua lausetta 2.4 päästään tulokseen, että integraalit pitkin teitä C_2 ja C_1 yhtälössä (5.10) antavat saman tuloksen kuin integroidessa tietä $C_\rho^+(\alpha)$ pitkin, jossa ρ on sellainen, että $r < \rho < R$. Tämän perusteella

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho^+(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right](z_0-\alpha)^n \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho^+(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-n+1}}\,\mathrm{d}z\right](z_0-\alpha)^{-n}.
\end{aligned}
$$

Lopuksi vaihtamalla edellisen yhtälön summalauseiden paikkoja keskenään saadaan

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho^+(\alpha)}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{-n+1}}\,\mathrm{d}z\right](z_0-\alpha)^{-n} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho^+(\alpha)}\frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z-\alpha)^{n+1}}\right](z_0-\alpha)^n.
\end{aligned}
$$

Koska $z_0 \in A$ valittiin mielivaltaisesti, saatu tulos toteuttaa vaadittavat yhtälöt (5.2) ja (5.3). Täten lause on todistettu. $\square$

Kuinka tämä tilanne sitten muuttuu, jos funktio f ei ole analyyttinen kiekossa $D_r(\alpha)$? Tarkastellessa yhtälöä (5.10) huomataan, että Cauchyn integraalikaavan 2.5 mukaan positiivisen potenssin $(z_0-\alpha)^n$ kerroin on yhtä suuri kuin $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Täten yhtälön (5.2) sarja, joka koostuu termin $(z_0-\alpha)$ positiivisista potensseista, on itse asiassa funktion f Taylorin sarja. Cauchy-Goursatin lauseen 2.3 mukaan termin $(z_0-\alpha)$ negatiivisten potenssien kertoimet ovat nollia. Tämän vuoksi tässä tapauksessa ei ole negatiivisia potensseja, jolloin Laurentin sarja supistuu Taylorin sarjaksi. Lause 5.3 kuvaa kaksi tärkeää näkökulmaa Laurentin sarjoista.

Lause 5.3. *Olkoon f on analyyttinen renkaassa $A(\alpha, r, R)$ ja olkoon sillä Laurentin sarja $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ kaikilla $z \in A(\alpha, r, R)$.*

(i) *Jos* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n$ *kaikilla* $z \in A(\alpha, r, R)$*, niin* $b_n = c_n$ *kaikilla* n*. Toisin sanoen funktion* f *Laurentin sarja annetussa renkaassa on yksikäsitteinen.*

(ii) *Kaikilla* $z \in A(\alpha, r, R)$ *funktion* $f(z)$ *derivaatta saadaan derivoimalla termeittäin sen Laurentin sarja.*

Todistus. [1, s. 285]. Sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n$ suppenee pisteittäin renkaassa $A(\alpha, r, R)$, joten lauseen 5.1 mukaan sarja suppenee tasaisesti ympyrässä $C_\rho^+(\alpha)$, kun $0 \leq r < \rho < R$. Täten Laurentin lauseen 5.2 mukaan

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho^+(\alpha)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho^+(\alpha)} (z-\alpha)^{-n-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z-\alpha)^m \, \mathrm{d}z \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho^+(\alpha)} (z-\alpha)^{m-n-1} \, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Termillä $(z-\alpha)^{m-n-1}$ on integraali kaikilla $z \in A(\alpha, r, R)$, paitsi kun $m = n$. Näin ollen kaikki edeltävän lausekkeen termit poistuvat paitsi kun $m = n$. Tästä saadaan

$$c_n = \frac{b_n}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho^+(\alpha)} (z-\alpha)^{-1} \, \mathrm{d}z = b_n.$$

Näin kohta (i) on todistettu. Kohdan (ii) todistus: ks. [1, s. 154-156, 285]. □

Laurentin sarjan yksikäsitteisyys on tärkeä ominaisuus, koska Laurentin sarjassa kertoimia harvoin löydetään käyttämällä yhtälöä (5.3). Seuraava esimerkki havainnollistaa joitain tapoja löytää Laurentin sarjan kertoimia.

Esimerkki 5.1. Etsitään funktion $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ Laurentin sarja alueissa

(i) $2 < |z| < 3$

(ii) $|z| > 3$

(iii) $0 < |z-2| < 1$ ja

(iv) $|z-2| > 1$.

Etsitään ensin funktion f osamurtokehitelmä. Funktio f saadaan muotoon

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} \\ &= \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} \\ &= \frac{A(z-3)}{(z-2)(z-3)} + \frac{B(z-2)}{(z-3)(z-2)} \\ &= \frac{Az-3A}{(z-2)(z-3)} + \frac{Bz-2B}{(z-3)(z-2)}. \end{aligned}$$

Funktion osoittajista voidaan päätellä, että

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \quad \text{ja} \\ -3A-2B &= 1 \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} A &= -1 \quad \text{ja} \\ B &= 1. \end{aligned}$$

Näin ollen funktion f osamurtokehitelmä on

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}. \tag{5.11}$$

(i) Koska $2 < |z| < 3$, niin $|\frac{2}{z}| < 1$ ja $|\frac{z}{3}| < 1$. Kehitetään osamurtokehitelmän ensimmäinen termi muuttujan z positiivisten ja toinen termi negatiivisten potenssien mukaan geometriseksi sarjaksi. Ensimmäinen termi

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$$

suppenee, kun $|z| < 3$, ja toinen termi

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}$$

suppenee, kun $2 < |z|$. Siis sarja

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}$$

suppenee, kun $2 < |z| < 3$

(ii) Koska $|z| > 3$, niin $|\frac{3}{z}| < 1$, jolloin myös $|\frac{2}{z}| < 1$. Kehitetään osamurtokehitelmän molemmat termit muuttujan z negatiivisten potenssien mukaan geometriseksi sarjaksi. Ensimmäinen termi

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}$$

suppenee, kun $3 < |z|$ ja toinen termi

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}$$

suppenee, kun $2 < |z|$. Siis sarja

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$$

suppenee, kun $|z| > 3$.

(iii) Koska $|z-2| < 1$, niin osamurtokehitelmän ensimmäinen termi kehitetään termin $(z-2)$ mukaan geometriseksi sarjaksi seuraavasti:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{1-(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n.$$

Edellinen sarja suppenee, kun $|z-2| < 1$. Osamurtokehitelmän toisesta termistä saadaan ehto $z-2 \neq 0$. Siis sarja

$$f(z) = -\frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

suppenee, kun $0 < |z-2| < 1$.

(iv) Koska $|z-2| > 1$, niin $|\frac{1}{(z-2)}| < 1$. Kehitetään osamurtokehitelmän ensimmäinen termi geometriseksi sarjaksi termin $(z-2)$ mukaan seuraavasti:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{1-\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}.$$

Edellinen sarja suppenee, kun $|z-2| > 1$. Siis sarja

$$f(z) = -\frac{1}{z-2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}.$$

suppenee, kun $|z-2| > 1$.

Esimerkki 5.2. Etsitään funktion

(i) $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

(ii) $f(z) = e^{3/z}$

Laurentin sarja renkaassa $0 < |z| < \infty$.

(i) Pidetään tunnettuna kosinin sarjakehitelmää

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Nyt vaihtamalla termin z paikalle termi $\frac{1}{z}$ saadaan funktion Laurentin sarja

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}.$$

(ii) Sarjakehitelmänä $f(z)$ on muotoa

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

Nyt korvaamalla termi z termillä $\frac{3}{z}$, missä $z \neq 0$, saadaan funktion Laurentin sarja

$$e^{3/z} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots.$$

6 Erikoispisteet, nollat ja navat

Pistettä α kutsutaan kompleksifunktion f *erikoispisteeksi*, jos f ei ole analyyttinen pisteessä α, mutta jokaisessa pisteen α ympäristössä $D_R(\alpha)$ on ainakin yksi piste, jossa f on analyyttinen. Esimerkiksi funktio $f(z) = \frac{1}{2-z}$ ei ole analyyttinen pisteessä $z = 2$, mutta se on analyyttinen kaikilla muilla muuttujan z arvoilla. Näin ollen piste $\alpha = 2$ on funktion f erikoispiste.

Pistettä α kutsutaan kompleksifunktion f *eristetyksi erikoispisteeksi*, jos funktio f ei ole analyyttinen pisteessä α ja jos on olemassa sellainen reaaliluku $R > 0$, että funktio f on analyyttinen kaikkialla punkteeratussa kiekossa $D_R^*(\alpha)$. Edellä esitellystä esimerkistä $f(z) = \frac{1}{2-z}$ huomataan, että piste $z = 2$ on eristetty erikoispiste. Funktio ei siis ole analyyttinen tässä pisteessä, mutta on analyyttinen sen ympäristössä.

Määritelmä 6.1. Olkoon funktion f Laurentin sarjalla

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$

eristetty erikoispiste pisteessä α, kun $z \in A(\alpha, 0, R)$.

Seuraavaksi esitellään erilaisia erikoispisteitä.

(i) Jos $c_n = 0$, kun $n = -1, -2, -3, \ldots$, niin funktiolla f on *poistuva erikoispiste* pisteessä α.

(ii) Jos k on sellainen positiivinen kokonaisluku, että $c_{-k} \neq 0$ ja $c_n = 0$ kaikilla $n < -k$, niin funktiolla f on *k-kertainen napa* pisteessä α.

(iii) Jos $c_n \neq 0$ äärettömän monella negatiivisella indeksillä n, niin piste α on funktion f *oleellinen erikoispiste.*

Määritelmä 6.2 (k-kertainen nolla)**.** Funktiolla f, joka on analyyttinen kiekossa $D_R(\alpha)$, on *k-kertainen nolla* pisteessä α, jos

$$f^{(n)}(\alpha) = 0, \qquad \text{kun } n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

ja $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Kun $k = 1$, niin nollaa kutsutaan *yksinkertaiseksi nollaksi.*

Esimerkki 6.1. [3, s. 76-77] Tutkitaan funktion $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ erikoispisteitä Laurentin sarjojen avulla.

Funktio f ei ole analyyttinen pisteissä $\alpha_1 = 0$ ja $\alpha_2 = -1$.

(i) Piste $\alpha_1 = 0$. Funktion f Laurentin sarja tässä pisteessä on

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1-z}{z^2} + \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n.$$

Termistä $\frac{1}{z^2}$ voidaan päätellä, että piste $\alpha_1 = 0$ on funktion f kaksinkertainen napa.

(ii) Piste $\alpha_2 = -1$. Hajotetaan funktio f seuraavasti:

$$f(z) = \frac{1}{z-(-1)} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}.$$

Koska $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$ on analyyttinen pisteessä $z = -1$, niin sillä on Laurentin sarja

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n$$

kyseessä olevan pisteen ympäristössä. Nyt

$$f(z) = \frac{1}{z-(-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n,$$

joten piste $\alpha_2 = -1$ on funktion f yksinkertainen napa.

Esimerkki 6.2. Tutkitaan funktioiden

(i) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, $z \neq 0$,

(ii) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

erikoispisteitä.

(i) Sinifunktion sarjakehitelmän nojalla

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

joten piste $z = 0$ on poistuva erikoispiste.

(ii) Eksponenttifunktion sarjakehitelmän nojalla

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n},$$

joten piste $z = 0$ on oleellinen erikoispiste.

7 Residy-teoriaa

Tässä luvussa pääsemme laajentamaan Cauchyn integraalikaavaa 2.5 tapaukseen, jossa integraalilla on äärellinen määrä eristettyjä erikoispisteitä tien C sisäänsä sulkemassa alueessa. Tätä menetelmää voidaan käyttää tapauksessa, jossa integrandilla on oleellinen erikoispiste z_0. Näin ollen residylaskenta on tärkeä laajennus Cauchyn integraalikaavaan nähden.

7.1 Residylause

Tässä osiossa esitellään residy ja residylause.

Määritelmä 7.1 (residy)**.** Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste pisteessä z_0. Nyt funktio f voidaan esittää Laurentin sarjana kiekossa $D_R^*(z_0)$ kaikilla $z \in D_R^*(z_0)$. Tällöin

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

jossa kerrointa a_{-1} kutsutaan funktion f *residyksi* pisteessä z_0. Residystä käytetään merkintää

$$\text{Res}[f, z_0] = a_{-1}.$$

Esimerkki 7.1. Olkoon $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Funktion f Laurentin sarja pisteessä $z_0 = 0$ on muotoa

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots .$$

Näin ollen residy saadaan termistä $\frac{1}{z}$, joten $\text{Res}[f, 0] = a_{-1} = 1$.

Tarkastellaan tapausta, jossa funktio f on analyyttinen kiekossa $D_R^*(z_0)$. Jokaisella r, jolle $0 < r < R$, funktion f Laurentin sarjan kerroin saadaan yhtälöstä

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r^+(z_0)} \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{7.1}$$

jossa $C_r^+(z_0)$ tarkoittaa ympyrää $\{z : |z - z_0| = r\}$, joka on positiivisesti suunnistettu. Tästä tuloksesta saadaan tärkeä tieto residystä $\mathrm{Res}[f, z_0]$. Olkoon C mikä tahansa positiivisesti suunnistettu yksinkertainen sulkeutuva tie, joka sisältää pisteen z_0 siten, että z_0 on ainut funktion f kiinteä erikoispiste. Kun sijoitetaan $n = -1$ yhtälöön (7.1) ja korvataan ympyrä $C_r^+(z_0)$ yllä mainitulla tiellä C, saadaan

$$\int\limits_C f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \,\mathrm{Res}[f, z_0] \tag{7.2}$$

Tämän perusteella voidaan todeta, että löydettäessä funktion f Laurentin sarja, yhtälöä (7.2) voidaan käyttää tärkeänä apuvälineenä laskettaessa tieintegraaleja.

Lause 7.1 (Cauchyn residylause)**.** *Olkoon D yhdesti yhtenäinen alue ja C yksinkertainen suljettu positiivisesti suunnistettu tie alueessa D. Jos f on analyyttinen tien C sisäänsä sulkemassa alueessa ja tiellä C, lukuun ottamatta tien C sisäpuolella olevia pisteitä $z_1, z_2, \ldots, z_n$, niin*

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f, z_k].$$

Todistus. [1, s. 309]. Koska tien C sisällä on äärellinen määrä yksittäisiä pisteitä, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että positiivisesti suunnistetut ympyrät $C_k = C_r^+(z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ovat keskenään eriäviä ja kuuluvat tien C sisään. Cauchy-Goursatin lauseen 2.3 perusteella seuraa, että

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{7.3}$$

Funktio f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa, jonka keskipiste on z_k ja joka sisältää ympyrän C_k. Käyttämällä yhtälöä (7.2) saadaan

$$\int\limits_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \,\mathrm{Res}[f, z_k], \qquad \text{kun } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.4}$$

Yhdistämällä yllä olevat yhtälöt (7.3) ja (7.4) saadaan

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \,\mathrm{Res}[f, z_k] = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f, z_k],$$

joten lause on todistettu. □

7.2 Residylaskenta

Laskettaessa residyä pisteessä z_0 Laurentin sarjasta tarvitaan vain kerroin a_{-1}. Tämän vuoksi on toisinaan tarpeetonta joutua laskemaan funktion koko Laurentin sarja. Tässä osiossa esitellään menetelmä, jonka avulla voidaan laskea funktion residy, kun tiedetään erikoispisteen z_0 laatu. Lause 7.2 antaa keinon residyn laskemiseen navoissa.

Lause 7.2 (Residyn laskeminen navoissa)**.**

(i) *Jos funktiolla f on yksinkertainen napa pisteessä z_0, niin*

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

(ii) *Jos funktiolla f on kaksinkertainen napa pisteessä z_0, niin*

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{\mathrm{d}z} (z - z_0)^2 f(z).$$

(iii) *Jos funktiolla f on k-kertainen napa pisteessä z_0, niin*

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right].$$

Todistus. [1, s. 310-311]. Jos funktiolla f on yksinkertainen napa pisteessä z_0, niin Laurentin sarja on muotoa

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Kertomalla yhtälön molemmat puolet termillä $(z - z_0)$ ja ottamalla raja-arvo $z \to z_0$ saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \to z_0} \left[a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots \right] \\ &= a_{-1} \\ &= \operatorname{Res}[f, z_0]. \end{aligned}$$

Näin kohta (i) on todistettu.

Lopuksi riittää todistaa kohta (iii), sillä kohta (ii) saadaan kohdan (iii) erikoistapauksena. Olkoon funktiolla f k-kertainen napa pisteessä z_0. Nyt funktion f Laurentin sarja on muotoa

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots .$$

Kertomalla yhtälö molemminpuolin termillä $(z - z_0)^k$ saadaan

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \cdots .$$

Derivoimalla yhtälö puolittain $k-1$ kertaa saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big[(z-z_0)^k f(z)\Big] &= (k-1)!\,a_{-1} + k!\,a_0(z-z_0)\\ &+ \frac{(k+1)!}{2}a_1(z-z_0)^2 + \cdots .\end{aligned}$$

Kun otetaan raja-arvo $z \to z_0$, saadaan lopputulos

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big[(z-z_0)^k f(z)\Big] = (k-1)!\,a_{-1} = (k-1)!\,\mathrm{Res}[f, z_0].$$

Näin ollen kohta (iii) on todistettu ja samalla myös kohta (ii). □

Esimerkki 7.2. [4, s. 344-345] Funktiolla $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ on yksinkertainen napa pisteessä $z = 3$ ja kaksinkertainen napa pisteessä $z = 1$. Lasketaan funktion f residyt näissä pisteissä.

Koska $z = 3$ on yksinkertainen napa, käytetään lauseen 7.2 kohtaa (i). Tällöin

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z), 3] &= \lim_{z\to 3}(z-3)f(z)\\ &= \lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Piste $z = 1$ on kaksinkertainen napa, joten lauseen 7.2 kohdan (ii) perusteella

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z), 1] &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{\mathrm{d}z}(z-1)^2 f(z)\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z-3}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Esimerkki 7.3. [2, s. 173] Lasketaan integraali

$$\int_C \frac{e^z}{z^2-1}\mathrm{d}z,$$

jossa tie C on ympyrä $|z| = 2$.

Funktiolla $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$ on navat pisteissä $z = 1$ ja $z = -1$, jotka molemmat ovat integroimistien $|z| = 2$ sisällä. Lasketaan funktion residyt näissä pisteissä seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z), 1] &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{z+1} = \frac{e}{2} \quad \text{ja}\\ \mathrm{Res}[f(z), -1] &= \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{e^z}{z-1} = -\frac{e^{-1}}{2}.\end{aligned}$$

Nyt Cauchyn residylauseen 7.1 perusteella

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{e^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\,[\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]] \\
&= 2\pi i\left(\frac{e}{2}-\frac{e^{-1}}{2}\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) \\
&= 2\pi i\sinh 1.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.4. Lasketaan integraali

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2+4},$$

jossa tie C on suorakulmion $-2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ positiivisesti suunnistettu reunakäyrä.

Funktiolla $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2+4}$ on yksinkertaiset navat pisteissä $z_1 = 1+2i$ ja $z_2 = 1-2i$. Näistä pisteistä piste z_1 on integroimistien sisällä. Lasketaan residy tässä pisteessä:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z),z_1] &= \lim_{z\to 1+2i}\frac{(z-1-2i)}{(z-1-2i)(z-1+2i)} \\
&= \lim_{z\to 1+2i}\frac{1}{(z-1+2i)} \\
&= \frac{1}{4i}.
\end{aligned}$$

Nyt Cauchyn residylauseen 7.1 perusteella

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2+4} = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),z_1] = 2\pi i\frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

8 Reaalisten integraalien laskeminen residylaskennan avulla

Residylaskennan tärkeä sovellus on reaalisten integraalien laskeminen residylaskennan keinoin. Reaaliset funktiot muutetaan eri metodein kompleksisiksi integraaleiksi, jolloin pystytään hyödyntämään residylaskentaa. On kuitenkin tärkeä muistaa, että tulokset ovat reaalisia. Sen vuoksi täytyykin ymmärtää funktion reaali- ja imaginääriosien ominaisuuksia.

8.1 Trigonometriset integraalit

Residy-teorian avulla pystytään arvioimaan tiettyjä määrättyjä reaalisia integraaleja. Yksi tapa tähän on tulkita reaalinen määrätty integraali kompleksisena integraalina pitkin yksinkertaista suljettua tietä.

Esitellään tässä tapaus, jossa halutaan arvioida integraalia

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{8.1}$$

jossa $F(u, v)$ on kahden reaalimuuttujan u ja v funktio. Tarkastellaan yksikköympyrää $C_1(0)$ parametrisoinnilla

$$C_1^+(0) : z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \qquad \text{kun} \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Tästä saadaan differentiaalit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= (-\sin\theta + i\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \text{ ja} \\ \mathrm{d}\theta &= \frac{\mathrm{d}z}{ie^{i\theta}} = \frac{\mathrm{d}z}{iz}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Yhdistämällä yhtälöt $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ja $\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$ saadaan

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ ja } \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{8.3}$$

Sijoittamalla $\cos\theta$, $\sin\theta$ ja $d\theta$ lausekkeeseen (8.1) määrätystä integraalista saadaan tieintegraali

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{C_1^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

jossa uusi integrandi on

$$f(z) = \frac{F(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{2}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))}{iz}.$$

Olkoon f analyyttinen yksikköympyrällä $C_1(0)$ ja sen sisäänsä sulkemassa alueessa lukuun ottamatta pisteitä $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Nyt residylauseen perusteella

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f, z_k]. \tag{8.4}$$

Esimerkki 8.1. [4, s. 353-354] Lasketaan

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Ensimmäiseksi muutetaan annettu trigonometrinen integraali tieintegraaliksi käyttäen apuna yhtälöitä (8.2) ja (8.3). Tällöin saadaan

$$\int_C \frac{1}{(2+\frac{1}{2}(z+z^{-1}))^2}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_C \frac{1}{\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Sievennettynä integraali on muotoa

$$\frac{4}{i}\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Jakamalla nimittäjä tekijöihin integrandi saadaan muotoon

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2},$$

jossa $z_1 = -2-\sqrt{3}$ ja $z_2 = -2+\sqrt{3}$ ovat sen napoja. Näistä kahdesta navasta vain z_2 on yksikköympyrän C sisäpuolella, joten

$$\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z), z_2].$$

Piste z_2 on kaksinkertainen napa, joten lauseen 7.2 kohdan (ii) perusteella

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), z_2] &= \lim_{z\to z_2} \frac{d}{\mathrm{d}z}(z-z_2)^2 f(z) \\
&= \lim_{z\to z_2} \frac{d}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z-z_1)^2} \\
&= \lim_{z\to z_2} \frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3} \\
&= \frac{1}{6\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\frac{4}{i}\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)}\,\mathrm{d}z &= \frac{4}{i}\,2\pi i\ \mathrm{Res}[f(z), z_1] \\
&= \frac{4}{i}\,2\pi i\,\frac{1}{6\sqrt{3}} \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

joten lopulta saadaan vastaus

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

8.2 Rationaalifunktioiden epäoleelliset integraalit

Residy-teorian toinen tärkeä sovellus liittyy tietyn tyyppisiin epäoleellisiin integraaleihin. Tarkastellaan tapausta, jossa f on jatkuva reaalisen muuttujan x funktio välillä $0 \leq x < \infty$. Funktion f integraali yli joukon $[0, \infty]$ määritellään

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

edellyttäen, että raja-arvo on olemassa. Jos f on määritelty kaikilla reaalisilla muuttujan x arvoilla, niin funktion f integraali yli joukon $(-\infty, \infty)$ määritellään

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.5}$$

edellyttäen, että molemmat raja-arvot ovat olemassa. Jos integraali yhtälössä (8.5) on olemassa, sen arvo saadaan yhdellä raja-arvolla seuraavasti

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.6}$$

Joillekin funktioille yhtälön (8.6) oikean puolen raja-arvo on olemassa, mutta yhtälön (8.5) oikean puolen raja-arvo ei ole olemassa.

Määritelmä 8.1 (Cauchyn pääarvo)**.** Olkoon $f(x)$ jatkuva funktio kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *Cauchyn pääarvo* P.V. määritellään

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

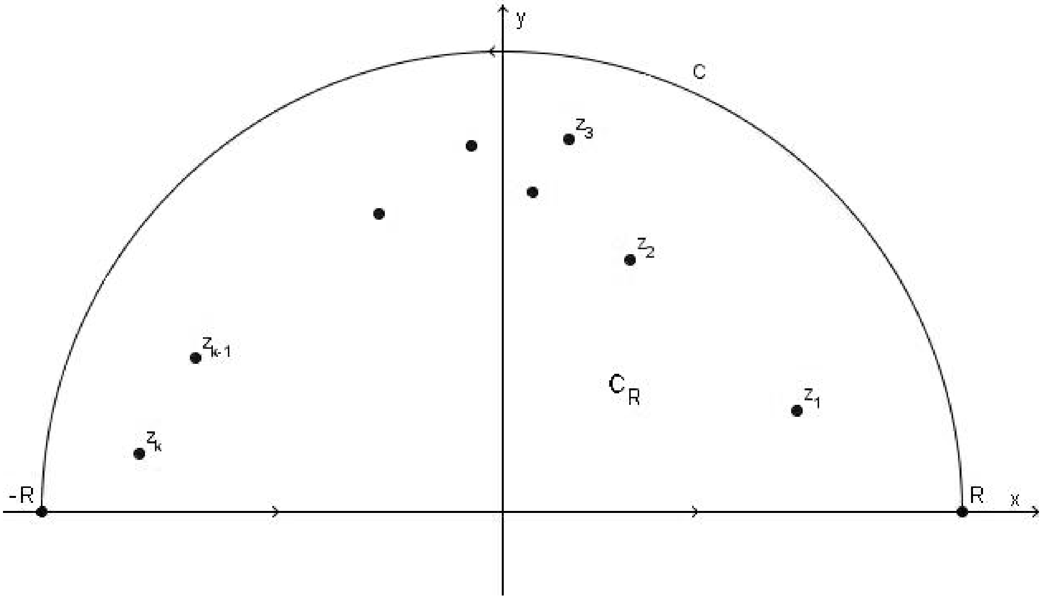
edellyttäen, että raja-arvo on olemassa.

Jos $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, jossa P ja Q ovat polynomeja, niin funktiota f kutsutaan *rationaalifunktioksi*. Seuraavaksi esitellään kuinka residylausetta käytetään laskemaan Cauchyn pääarvo P.V. rationaalifuntion f integraalista yli joukon $(-\infty, \infty)$.

Lause 8.1. *Olkoon $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, jossa P on m-asteinen polynomifunktio ja Q on n-asteinen polynomifunktio. Jos $Q(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $n \geq m+2$, niin*

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}\left[\frac{P}{Q}, z_j\right],$$

missä pisteet $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k$ ovat rationaalifunktion $\frac{P}{Q}$ ne navat, jotka kuuluvat ylempään puoliympyrään.



Kuva 1: Funktion $\frac{P}{Q}$ navat $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k$ sijaitsevat ylemmässä puolitasossa.

Todistus. [1, s. 323-325]. Ylemmässä puolitasossa on äärellinen määrä funtion $\frac{P}{Q}$ napoja. Tämän perusteella voidaan löytää sellainen reaaliluku R, että kaikki navat jäävät tien C sisäänsä rajaamalle alueelle. Tämä alue koostuu x-akselilla olevan janan $-R \leq x \leq R$ ja ylemmän R-säteisen puoliympyrän C_R kehän sisäänsä rajaamasta alueesta, kuten kuvassa 1 havainnollistetaan. Integraalin ominaisuuksien perusteella

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{C} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z - \int\limits_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Kirjoittamalla yhtälö uudestaan residylauseen perusteella saadaan

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left[\frac{P}{Q}, z_j\right] - \int\limits_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z. \tag{8.7}$$

Todistetaan vielä, että integraali $\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z$ lähestyy nollaa, kun $R \to \infty$. Valitaan mielivaltaltainen $\epsilon > 0$. Olkoon

$$\begin{aligned} P(z) &= a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \text{ja} \\ Q(z) &= b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0. \end{aligned}$$

Täten

$$\frac{zP(z)}{Q(z)} = \frac{z^{m+1}(a_m + a_{m-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-m+1} + a_0 z^{-m})}{z^n(b_n + b_{n-1}z^{-1} + \cdots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n})},$$

josta seuraa

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to\infty} \frac{zP(z)}{Q(z)} &= \lim_{|z|\to\infty} \frac{z^{m+1}(a_m + a_{m-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-m+1} + a_0 z^{-m})}{z^n(b_n + b_{n-1}z^{-1} + \cdots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n})} \\
&= \lim_{|z|\to\infty} \frac{z^{m+1}}{z^n} \lim_{|z|\to\infty} \frac{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-m+1} + a_0 z^{-m}}{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \cdots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}.
\end{aligned}$$

Koska $n \geq m+2$, niin tämä raja-arvo supistuu muotoon $0\left(\frac{a_m}{b_n}\right) = 0$. Valittua lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa tarpeeksi iso säde R siten, että

$$\left|\frac{zP(z)}{Q(z)}\right| < \frac{\epsilon}{\pi}$$

aina, kun $z \in C_R$. Tämä tarkoittaa, että

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| < \frac{\epsilon}{\pi|z|} = \frac{\epsilon}{\pi R} \tag{8.8}$$

aina, kun $z \in C_R$. ML-lauseen 2.1 ja epäyhtälön (8.8) perusteella

$$\left|\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_R} \frac{\epsilon}{\pi R}|\,\mathrm{d}z| = \frac{\epsilon}{\pi R}\,\pi R = \epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ oli valittu mielivaltaisesti, voidaan päätellä, että

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{8.9}$$

Nyt yhtälön (8.9) perusteella yhtälön (8.7) oikean puoleinen integraali lähestyy nollaa, kun $R \to \infty$, joten lause on todistettu. □

Esimerkki 8.2. Osoitetaan, että

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+7}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{6}.$$

Integrandilla

$$f(z) = \frac{z^2+7}{(z^2+1)(z^2+9)}$$

on navat pisteissä $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 3i$ ja $z_4 = -3i$, joista z_1 ja z_3 kuuluvat ylempään puolitasoon. Lasketaan residyt näissä navoissa seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), i] &= \lim_{z\to i} \frac{(z-i)(z^2+7)}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{z^2+7}{(z+i)(z^2+9)} \\
&= \frac{i^2+7}{(i+i)(i^2+9)} \\
&= \frac{3}{8i}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), 3i] &= \lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)(z^2+7)}{(z^2+1)(z+3i)(z-3i)} \\
&= \lim_{z\to 3i} \frac{z^2+7}{(z^2+1)(z+3i)} \\
&= \frac{(3i)^2+7}{((3i)^2+1)(3i+3i)} \\
&= \frac{1}{24i}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+7}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \left(\frac{3}{8i} + \frac{1}{24i}\right) = 2\pi i\, \frac{10}{24i} = \frac{5\pi}{6}.$$

Esimerkki 8.3. Lasketaan

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Integrandilla

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

on ylemmässä puolitasossa kertalukua kolme oleva napa pisteessä i. Lasketaan residy tässä pisteessä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), i] &= \frac{1}{2!} \lim_{z\to i} \frac{d^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{1}{(z+i)^3} \\
&= \frac{1}{2!} \lim_{z\to i} \frac{12}{(z+i)^5} \\
&= \frac{1}{2} \frac{12}{(2i)^5} \\
&= -\frac{3i}{16}.
\end{aligned}$$

Tämän perusteella

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

8.3 Epäoleelliset integraalit ja trigonometriset funktiot

Tässä osiossa tutkitaan integraaleja, joita voi kohdata tutkittaessa Fourier-muunnoksia ja Fourier-integraaleja. Niissä P on m-asteinen ja Q on n-asteinen polynomi siten, että $n \geq m+1$. Nyt jos $Q(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x\,\mathrm{d}x$$

ovat suppenevia epäoleellisia integraaleja. Seuraavaksi esitellään, kuinka näitä integraaleja arvioidaan. Erityisen tärkeää on muistaa, että

$$\cos(\alpha x) = \operatorname{Re}\left[\exp\left(i\alpha x\right)\right] \quad \text{ja} \quad \sin(\alpha x) = \operatorname{Im}\left[\exp\left(i\alpha x\right)\right],$$

missä α on positiivinen reaaliluku.

Lemma 8.1 (Jordanin lemma)**.** Olkoon P m-asteinen ja Q n-asteinen polynomi ja $n \geq m+1$. Jos C_R on ylempi puoliympyrä $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$, kun $0 \leq \theta \leq \pi$, niin

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{\exp(iz)P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Todistus. [1, s. 330]. Koska $n \geq m+1$, niin $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \to 0$, kun $|z| \to \infty$. Täten kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $R_\epsilon > 0$, että

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| < \frac{\epsilon}{\pi} \tag{8.10}$$

aina, kun $|z| \geq R_\epsilon$. Käyttämällä ML-lausetta 2.1 yhdessä edellisen epäyhtälön (8.10) kanssa saadaan

$$\left|\int_{C_R} \frac{\exp\left(iz\right)P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_R} \frac{\epsilon}{\pi}\,|e^{iz}|\,|\mathrm{d}z|, \tag{8.11}$$

mikäli $R \geq R_\epsilon$. Ylemmän puoliympyrä C_R parametrisoinnin perusteella saadaan

$$|\,dz| = R\,\mathrm{d}\theta \quad \text{ja} \quad |\,e^{iz}| = e^{-y} = e^{-R\sin\theta}. \tag{8.12}$$

Käyttämällä trigonometrista yhtälöä $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ ja yhtälöä (8.12) epäyhtälön (8.11) oikea puoli saadaan muotoon

$$\int_{C_R} \frac{\epsilon}{\pi}|e^{iz}|\,|\mathrm{d}z| = \frac{\epsilon}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}R\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\epsilon}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}R\,\mathrm{d}\theta. \tag{8.13}$$

Välillä $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ voidaan käyttää epäyhtälöä

$$0\le\frac{2\theta}{\pi}\le\sin\theta. \tag{8.14}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (8.14) ja (8.11) yhtälön (8.13) kanssa saadaan

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}\frac{\exp(iz)P(z)\,\mathrm{d}z}{Q(z)}\right| &\le \frac{2\epsilon}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}R\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\epsilon\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2R\theta/\pi} = \epsilon\,(1-e^{-R})<\epsilon,\end{aligned}$$

kun $R\ge R_\epsilon$. Koska $\epsilon>0$ valittiin mielivaltaisesti, lemma on todistettu. $\square$

Edellistä lemmaa tarvitaan seuraavan lauseen todistamiseen.

Lause 8.2. *Olkoon P m-asteinen ja Q n-asteinen reaalikertoiminen polynomi, jossa $n\ge m+1$ ja $Q(x)\ne 0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Jos $\alpha>0$ ja*

$$f(z)=\frac{\exp(i\alpha z)\,P(z)}{Q(z)}, \tag{8.15}$$

niin

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = -2\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Im}(\mathrm{Res}[f,z_j]) \quad \textit{ja} \tag{8.16}$$

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Re}(\mathrm{Res}[f,z_j]), \tag{8.17}$$

jossa $z_1,z_2,\dots,z_{k-1},z_k$ ovat funktion f napoja, jotka kuuluvat ylempään puolitasoon. ($\mathrm{Re}(\mathrm{Res}[f,z_j])$ *on residyn* $\mathrm{Res}[f,z_j]$ *reaaliosa ja* $\mathrm{Im}(\mathrm{Res}[f,z_j])$ *on residyn* $\mathrm{Res}[f,z_j]$ *imaginääriosa.)*

Todistus. [1, s. 331]. Olkoon C tie, joka koostuu x-akselista välillä $-R\le x\le R$ ja ylemmän puoliympyrän C_R kehästä, jonka parametrisointi on $z=R\exp(i\theta)$, kun $0\le\theta\le\pi$. Integraalin ominaisuuksien perusteella saadaan

$$\int_{-R}^{R}\frac{\exp(i\alpha x)P(x)\,\mathrm{d}x}{Q(x)} = \int_C\frac{\exp(i\alpha z)P(z)\,\mathrm{d}z}{Q(z)} - \int_{C_R}\frac{\exp(i\alpha z)P(z)\,\mathrm{d}z}{Q(z)}.$$

Jos R on tarpeeksi suuri, niin kaikki funktion f navat $z_1, z_2, \ldots, z_k$ kuuluvat tien C sisäänsä rajaamaan alueeseen. Tällöin voidaan käyttää residylausetta, jonka perusteella

$$\int_{-R}^{R} \frac{\exp(i\alpha x)P(x)\,\mathrm{d}x}{Q(x)} = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}[f, z_j] - \int_{C_R} \frac{\exp(i\alpha z)P(z)\,\mathrm{d}z}{Q(z)}. \tag{8.18}$$

Koska α on positiivinen reaaliluku, muuttujanvaihdolla $\zeta = \alpha z$ nähdään, että Jordanin lemma 8.1 pätee integrandiin $\frac{\exp(i\alpha z)P(z)}{Q(z)}$. Näin ollen, kun otetaan raja-arvo $R \to \infty$ yhtälössä (8.18) puolittain, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)]P(x)\,\mathrm{d}x}{Q(x)} &= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}[f, z_j] \\
&= -2\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(\mathrm{Res}[f, z_j]) \\
&+ 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Re}(\mathrm{Res}[f, z_j]).
\end{aligned}$$

Laskemalla edellisen yhtälön reaali- ja imaginääriosat saadaan yhtälöt (8.16) ja (8.17). Täten lause on todistettu. □

Esimerkki 8.4. Lasketaan

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integraali toteuttaa lauseen 8.1 ehdot, jossa $\alpha = 3$. Lasketaan ensin integraali $\int_C \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2}$. Integrandilla $f(z) = \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2}$ on kaksinkertaiset navat pisteissä $z_1 = i$ ja $z_2 = -i$. Näistä navoista $z_1 = i$ kuuluu ylempään puolitasoon. Lasketaan funktion f residy tässä pisteessä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), i] &= \lim_{z \to i} \frac{d}{\mathrm{d}z} \frac{(z-i)^2 e^{3iz}}{(z^2+1)^2} \\
&= \lim_{z \to i} \frac{d}{\mathrm{d}z} \frac{e^{3iz}}{(z+i)^2} \\
&= \lim_{z \to i} \frac{e^{3iz}(3iz-5)}{(z+i)^3} = \frac{1}{ie^3}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_C \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2}\right] = \mathrm{Re}\left[2\pi i \frac{1}{ie^3}\right] = \frac{2\pi}{e^3}.$$

Esimerkki 8.5. [3, s. 86].Lasketaan

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x,$$

kun $m, a > 0$.

Tarkastellaan integraalia

$$\int_C e^{miz} \frac{z}{z^2 + a^2} \, \mathrm{d}z.$$

Tällä on yksinkertaiset navat $z = \pm ia$, joista piste $z = ia$ kuuluu ylempään puolitasoon. Lasketaan residy tässä pisteessä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), ia] &= \lim_{z \to ia} \frac{e^{imz} z(z - ia)}{(z + ia)(z - ia)} \\
&= e^{-ma} \frac{ia}{2ia} \\
&= \frac{1}{2} e^{-ma}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x &= \mathrm{Im} \left[\int_C e^{miz} \frac{z}{z^2 + a^2} \, \mathrm{d}z \right] \\
&= \mathrm{Im} \left[2\pi i \frac{1}{2} e^{-ma} \right] \\
&= \pi e^{-ma}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 8.6. Lasketaan integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 9} \, \mathrm{d}x.$$

Symmetrian perusteella

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 9} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 9} \, \mathrm{d}x.$$

Nyt $m = 1$, joten tarkastellaan integraalia

$$\int_C e^{iz} \frac{z}{z^2 + 9} \, \mathrm{d}z,$$

jolla on navat pisteissä $z_1 = 3i$ ja $z_2 = -3i$. Näistä piste $z_1 = 3i$ kuuluu ylempään puoliympyrään, joten lasketaan residy tässä pisteessä seuraavasti:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), 3i] &= \lim_{z\to 3i} \frac{e^{iz} z(z-3i)}{(z+3i)(z-3i)} \\ &= \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{iz}}{z+3i} \\ &= \frac{e^{-3}}{2}.\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x}{x^2+9}\, \mathrm{d}x &= \int_C e^{iz} \frac{z}{z^2+9}\, \mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \frac{e^{-3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{e^3} i.\end{aligned}$$

Ottamalla yhtälöstä imaginääriosat puolittain saadaan

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x}{x^2+9}\, \mathrm{d}x\right] &= \operatorname{Im}\left[\frac{\pi}{e^3} i\right] \\ &= \frac{\pi}{e^3}.\end{aligned}$$

Lopuksi symmetrian perusteella integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e^3}.$$

Toinen tapa ratkaista tehtävä on käyttää esimerkkiä 8.5 hyväkseen. Tässä tapauksessa $m = 1$ ja $a = 3$, joten

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{mix} \frac{x}{x^2+a^2}\, \mathrm{d}x\right] &= \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x}{x^2+3^2}\, \mathrm{d}x\right] \\ &= \operatorname{Im}\left[i\pi e^{-3}\right] \\ &= \frac{\pi}{e^3}.\end{aligned}$$

Nyt symmetrian perusteella

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e^3}.$$

8.4 Määrätyt tieintegraalit

Tarkastellaan tapausta, jossa f on jatkuva välillä $b < x \leq c$ ja epäjatkuva pisteessä b. Tällöin funktion f epäoleellinen integraali yli välin $[b, c]$ määritellään

$$\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r \to b^+} \int_r^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

olettaen, että raja-arvo on olemassa. Vastaavasti, jos f on jatkuva välillä $a \leq x < b$ ja epäjatkuva pisteessä b, niin funktion f epäoleellinen integraali yli joukon $[a, b]$ määritellään

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R \to b^-} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

olettaen, että raja-arvo on olemassa. Esimerkiksi

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \lim_{r \to 0^+} \int_r^4 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \lim_{r \to 0^+} \Big/_r^4 \sqrt{x} = 2 - \lim_{r \to 0^+} \sqrt{r} = 2.$$

Jos f on jatkuva kaikilla $x \in [a, c]$ paitsi pisteessä $x = b$, missä $a < b < c$, niin funktion f Cauchyn pääarvo yli joukon $[a, c]$ määritellään

$$\text{P.V.} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r \to 0^+} \left[\int_a^{b-r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+r}^c f(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

olettaen, että raja-arvo on olemassa.

Tässä osiossa esitellään, kuinka residylaskentaa käytetään arvioimaan funktion f integraalin Cauchyn pääarvo välin $(-\infty, \infty)$ yli, kun integrandilla f on yksinkertaisia napoja x-akselilla. Seuraavaksi esitellään lemma, jonka avulla päästään todistamaan osioon kuuluvat lauseet.

Lemma 8.2. Olkoon funktiolla f yksinkertainen napa x-akselilla pisteessä t_0. Jos C_r on tie $C_r : z = t_0 + re^{i\theta}$, kun $0 \leq \theta \leq \pi$, niin

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi \operatorname{Res}[f, t_0].$$

Todistus. [1, s. 336]. Funktion f Laurentin sarja pisteessä $z = t_0$ on muotoa

$$f(z) = \frac{\operatorname{Res}[f, t_0]}{z - t_0} + g(z), \tag{8.19}$$

jossa g on analyyttinen pisteessä $z = t_0$. Käyttämällä tien C_r parametrisointia ja yhtälöä (8.19) saadaan

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z &= \operatorname{Res}[f, t_0] \int\limits_0^\pi \frac{ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} + ir \int\limits_0^\pi g\,(t_0 + re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= i\pi \operatorname{Res}[f, t_0] + ir \int\limits_0^\pi g(t_0 + re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta. \qquad (8.20)
\end{aligned}$$

Koska g on jatkuva pisteessä t_0, niin on olemassa sellainen $M > 0$, että $|\,g\,(t_0 + re^{i\theta})| \leq M$ ja

$$\left|\lim_{r\to 0} ir \int\limits_0^\pi g(t_0 + re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leq \lim_{r\to 0} r \int\limits_0^\pi M\,\mathrm{d}\theta = \lim_{r\to 0} r\pi M = 0. \qquad (8.21)$$

Epäyhtälön (8.21) perusteella yhtälö (8.20) saadaan haluttuun muotoon

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi \operatorname{Res}[f, t_0],$$

joten lemma on todistettu. □

Seuraavaksi esitellään kaksi lausetta, ja ne todistetaan heti perään yhteisellä todistuksella.

Lause 8.3. *Olkoon $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, jossa P on m-asteinen ja Q n-asteinen reaalikertoiminen polynomi ja $n \geq m + 2$. Jos polynomilla Q on x-akselilla yksinkertaisia nollia pisteissä $t_1, t_2, \ldots, t_l$, niin*

$$\text{P.V.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{Q(x)} = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}[f, z_j] + \pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}[f, t_j], \qquad (8.22)$$

jossa $z_1, z_2 \ldots, z_k$ ovat funktion f napoja, jotka kuuluvat ylempään puolitasoon.

Lause 8.4. *Olkoon P m-asteinen ja Q n-asteinen reaalikertoiminen polynomi ja $n \geq m + 1$. Oletetaan myös, että polynomilla Q on x-akselilla yksinkertaisia nollia pisteissä $t_1, t_2, \ldots, t_l$. Jos α on positiivinen reaaliluku ja jos*

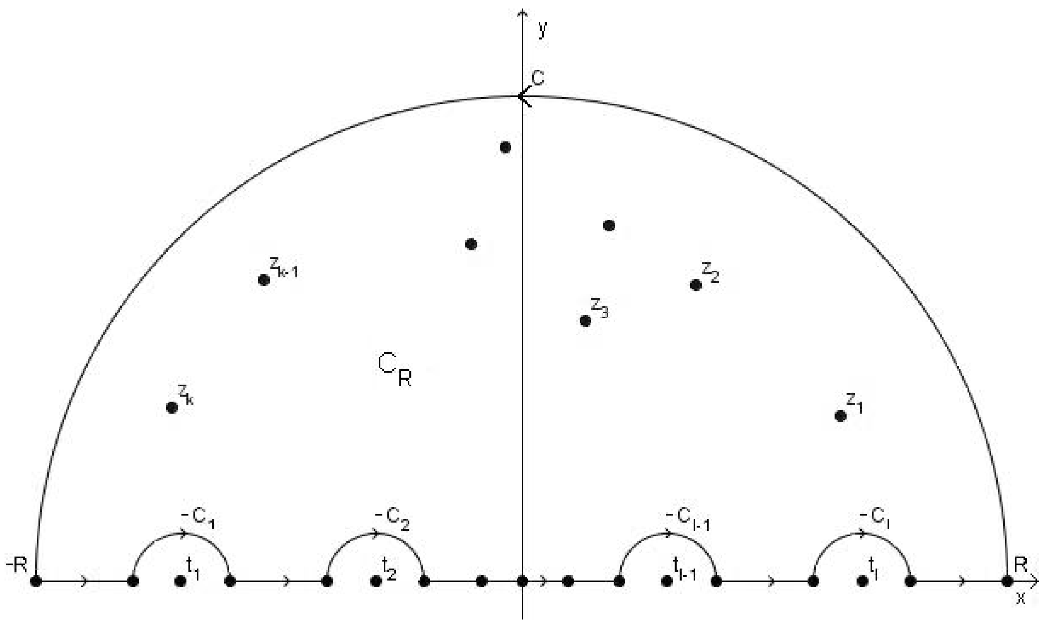
$$f(z) = \frac{\exp(i\alpha z)P(z)}{Q(z)},$$

niin

$$\text{(8.23)} \qquad \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos \alpha x \, \mathrm{d}x = -2\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(\mathrm{Res}[f, z_j]) - \pi \sum_{j=1}^{l} \mathrm{Im}(\mathrm{Res}[f, t_j]) \quad \textit{ja}$$

$$\text{(8.24)} \qquad \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin \alpha x \, \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Re}(\mathrm{Res}[f, z_j]) + \pi \sum_{j=1}^{l} \mathrm{Re}(\mathrm{Res}[f, t_j]),$$

joissa $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *ovat funktion* f *napoja, jotka kuuluvat ylempään puolitasoon.*



Kuva 2: Pisteet $t_1, t_2, \ldots, t_l$ ovat funktion f napoja x-akselilla ja pisteet $z_1, z_2, \ldots, z_k$ funktion f napoja puoliympyröiden $C_1, C_2, \ldots, C_l$ yläpuolella.

Lauseiden (8.3) ja (8.4) todistus. [1, s. 336-338]. Koska funktiolla f on äärellinen määrä napoja, voidaan valita tarpeeksi pieni r siten, että puoliympyrät

$$C_j : z = t_j + re^{i\theta}, \quad \text{missä} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{ja} \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

ovat erilliset ja että funktion f navat $z_1, z_2, \ldots, z_k$ ylemmässä puolitasossa ovat puoliympyröiden yläpuolella.

Olkoon R niin suuri, että funktion f navat ylemmässä puolitasossa ovat puoliympyrän $C_R : z = \mathrm{Re}^{i\theta}$ sisäpuolella, kun $0 \leq \theta \leq \pi$, ja että funktion f x-akselilla olevat navat ovat välillä $-R \leq x \leq R$. Olkoon C positiivisesti suunnistettu yksinkertainen sulkeutuva tie, joka koostuu ylemmän puoliympyrän C_R kehästä, teistä $-C_1, -C_2, \ldots, -C_l$ ja x-akselin osista, jotka jäävät puoliympyröiden väliin. Tätä hieman monimutkaista tilannetta havainnollistetaan kuvassa 2.

Residylauseen perusteella $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}[f, z_j]$. Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int_{I_R} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}[f, z_j] + \sum_{j=1}^{l} \int_{C_j} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{8.25}$$

jossa I_R on se osa x-akselia välillä $-R \leq x \leq R$, joka jää välien $(t_j - r, t_j + r)$ väleihin, kun $j = 1, 2, \ldots, l$. Käyttämällä samaa tekniikkaa kuin lauseiden 8.1 ja 8.2 todistuksissa saadaan

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{8.26}$$

Kun $R \to \infty$ ja $r \to 0$ yhtälössä (8.25) ja kun käytetään lemmaa 8.2 ja yhtälöä (8.26) saadaan

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}[f, z_j] + \pi i \sum_{j=1}^{l} \mathrm{Res}[f, t_j]. \tag{8.27}$$

Jos funktio f on kuten lauseessa 8.3, niin yhtälön (8.27) perusteella lause 8.3 on todistettu. Jos taas funktio f on kuten lauseessa 8.4, niin laskemalla yhtälöstä (8.27) imaginääriosa saadaan yhtälö (8.23) ja laskemalla yhtälöstä (8.27) reaaliosa saadaan yhtälö (8.24). Näin myös lause 8.4 on todistettu. □

Esimerkki 8.7. Vrt. [1, s. 334]. Lasketaan

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3 - 8}.$$

Integrandilla

$$f(z) = \frac{z}{z^3 - 8} = \frac{z}{(z-2)(z+1+i\sqrt{3})(z+1-i\sqrt{3})}$$

on yksinkertaisia napoja pisteissä $t_1 = 2$, $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ja $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Näistä piste z_2 ei kuulu ylemmälle puolitasolle, joten lasketaan residyt pisteissä t_1 ja z_1 seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\text{Res}[f(z), t_1] &= \lim_{z \to t_1} (z - t_1) \frac{z}{z^3 - 8} \\
&= \lim_{z \to t_1} \frac{z(z - t_1)}{(z-2)(z+1+i\sqrt{3})(z+1-i\sqrt{3})} \\
&= \lim_{z \to t_1} \frac{2}{(z+1+i\sqrt{3})(z+1-i\sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\text{Res}[f(z), z_1] &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{z}{z^3 - 8} \\
&= \lim_{z \to z_1} \frac{z(z - z_1)}{(z-2)(z+1+i\sqrt{3})(z+1-i\sqrt{3})} \\
&= \frac{-1+i\sqrt{3}}{(i\sqrt{3}-3)(2i\sqrt{3})} \\
&= \frac{-1-i\sqrt{3}}{12}.
\end{aligned}$$

Residyjen avulla voidaan nyt laskea tehtävä loppuun

$$\begin{aligned}
\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, \mathrm{d}x}{x^3 - 8} &= 2\pi i \, \text{Res}\,[f(z), z_1] + \pi i \, \text{Res}\,[f(z), t_1] \\
&= 2\pi i \frac{-1-i\sqrt{3}}{12} + \pi i \frac{1}{6} \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 8.8. Lasketaan

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2 - 4x + 5)}.$$

Lausetta 8.3 voidaan myös käyttää tilanteessa, jossa $m = 0$. Integrandi

$$f(z) = \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

täyttää ehdon, jossa rationaalifunktion nimittäjän asteluku $n \geq m + 2$. Integrandilla on reaalinen napa $z_0 = 0$ ja kompleksiset navat $z_1 = 2 + i$ ja

$z_2 = 2 - i$. Jälkimmäisistä kahdesta z_1 kuuluu ylempään puolitasoon. Lasketaan siis residyt pisteissä z_0 ja z_1 seuraavasti:

$$\begin{aligned}
R_0 = \mathrm{Res}[f(z), z_0] &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{1}{z(z^2 - 4z + 5)} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{1}{(z^2 - 4z + 5)} = \frac{1}{5} \quad \text{ja} \\
R_1 = \mathrm{Res}[f(z), z_1] &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{1}{z(z^2 - 4z + 5)} \\
&= \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{z(z - z_1)(z - z_2)} \\
&= \frac{1}{z_1(z_1 - z_2)} = \frac{1}{(2+i)2i}.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2 - 4x + 5)} = \mathrm{Re}[2\pi i R_1 + \pi i R_0] = \frac{2\pi}{5}.$$

Viitteet

[1] Mathews, J. , Howell, R. *Complex Analysis for Mathematics and Engineering Fourth Edition* Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, 2001.

[2] Moore, T. , Hadlock, E. *Complex Analysis* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1991.

[3] Pohjolainen, S. *Kompleksimuuttujan funktioita* Kurssimateriaali, Sisäinen julkaisu, Tampereen teknillinen yliopisto, 2010.

[4] Zill, D. , Shananan, P. *A First Course in Complex Analysis with Applications* Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, 2003.