TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Ville Mäkelä

Todistaminen suomalaisessa ja etelä-korealaisessa koulumatematiikassa

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
2011

Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MÄKELÄ, VILLE: Todistaminen suomalaisessa ja etelä-korealaisessa koulumatematiikassa
Pro gradu -tutkielma, 54 s.
Matematiikka
Tammikuu 2011

Tiivistelmä

Tutkielma käsittelee matemaattisen todistamisen kouluopetusta Suomessa ja Etelä-Koreassa. Suomalaista matematiikan kouluopetusta tarkastellaan muutamista historian ja kasvatustieteen näkökulmista. Matemaattisen todistamisen periaate ja malli otetaan Aristoteleelta ja Eukleideelta, ja sen kouluopetusta tutkitaan 1900-luvun loppupuolella vallinneiden pedagogisten trendien valossa. Tutkielma päätyy vertailemaan nykyaikaista suomalaista ja etelä-korealaista matematiikan kouluopetusta. Korealaisen matematiikan opetuksen osalta ei tehdä katsausta historiaan, vaan sitä tarkastellaan uusimman opetussuunnitelman ja sitä noudattavien oppikirjojen avulla.

Tutkielmassa tehdään havainto, että suomalaisessa matematiikan kouluopetuksessa todistaminen on käytännössä kadonnut peruskoulun oppiaineksesta, ja että lähes kaikki todistamiseen liittyvä aines on koottu yhteen lukion pitkän matematiikan valinnaiseen kurssiin *Lukuteoria ja logiikka*. Tällä kurssilla opetetaan erilaisia todistamisen tekniikoita. Korealaisessa matematiikan kouluopetuksessa puolestaan todistamista opetetaan vähitellen peruskoulun 8. luokalta alkaen. Koreassa todistamisen periaatteen ymmärtämistä korostetaan enemmän kuin erilaisten todistustekniikkojen hallitsemista. Suomessa todistamista opetetaan pienemmälle osalle kansaa kuin Koreassa.

Tärkeimpiä lähdeteoksia ovat Sir Thomas L. Heathin *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Paavo Malisen artikkelit *Selkeyttä todistamiseen koulumatematiikassa* ja *Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun*, Korean matematiikan opetussuunnitelma 2007, sekä lukuisat suomalaiset ja korealaiset matematiikan oppikirjat.

Alkusanat

Lausun lyhyet alkusanat kiittääkseni niitä ihmisiä, jotka tekivät mahdolliseksi sen, että tästä gradusta tuli sellainen kuin siitä tuli. Sain vierailla vuoden 2010 keväällä Etelä-Koreassa muutamissa lukioissa Seoulin, Incheonin ja Pocheonin kaupungeissa. Pääsin tutustumaan Korea Universityn matematiikan opettajaopiskelijoihin, joiden kanssa oli valaisevaa keskustella yhteisestä alastamme. Tampereen korealaiset vaihto-opiskelijat antoivat kallista aikaansa koreankielisen matematiikan opetussuunnitelman ja oppikirjatekstien tulkitsemiseen. Kaikesta tästä ja muusta tiedonhankinnasta, tulkkausavusta sekä sopivien yhteyshenkilöiden etsimisestä kiitän heitä, jotka kantoivat pyyteettömästi kortensa minun kekooni. Nimeltä mainiten haluan kiittää seuraavia: Hyunsil Jeong, Jakyung Kim, Jihye Kim, Mihyeon Kim, Wonmin Kim, Kwansoo Kwon, Hyunah Lee, Narie Park, Eunjung Pyo, Hyosun Jung perheineen. Työni tärkein innoittaja oli kuitenkin professori Inchul Jung, joka valitettavasti jätti tämän maailman lokakuussa 2010. Omistan tämän työn professori Jungin muistolle. Olen pahoillani, ettei hän saanut koskaan lukea valmista tutkielmaani.

Sisältö

1 Johdanto

Tarkastelen tässä tutkielmassa todistamisen asemaa matematiikan opetuksessa sekä suomalaisen että etelä-korealaisen julkisen koulujärjestelmän puitteissa. Suomalaisen koulumatematiikan tarkastelulla on myös historiallinen ulottuvuus, sillä käsittelen todistamisen käyttöä paitsi uudemmissa, myös 1960- ja 1970-lukujen oppikirjoissa. Tarkastelussa on pääosin itse todistamisen idean opetus. Hyvin suppeasti mainitaan sana tai pari matematiikan lauseiden todistusten esittämisestä oppikirjoissa. Korealaisen koulumatematiikan tarkastelu rajoittuu uusimman opetussuunnitelman mukaiseen opetukseen ja keskittyy todistamisen periaatteiden opettamiseen, eikä tässä tutkita lauseiden todistusten esittämistä.

Tutkielman pääluvut voisi jakaa kahteen osaan. Ensimmäinen osa käsittää luvut 2 ja 3, ja toinen luvut 4, 5 ja 6. Osista ensimmäinen pyrkii luomaan kuvaa niistä taustoista, jotka ovat vaikuttaneet siihen, millaista koulumatematiikka erikoisesti todistamisen osalta on. Luvussa 2 pohditaan todistamisen historiallisia ja filosofisia lähtökohtia lähinnä Aristoteleen filosofian ja Eukleideen mukaisen todistamisen mallin pohjalta; pienimuotoinen katsaus tehdään myös siihen, miten todistamisesta puhutaan nykyaikaisessa yliopistotasoisessa matematiikassa. Luvussa 3 kartoitetaan koulumatematiikan pedagogisia suuntauksia: tutkitaan konstruktivismin soveltamista matematiikassa ja tarkastellaan, mitä sanottavaa didaktiikalla on todistamisajattelusta.

Tältä pohjalta siirrytään tutkielman toiseen osaan, joka onkin tutkielman varsinainen ydinosa. Siinä tarkastellaan todistamista matematiikan opetuksessa. Luvussa 4 erotetaan kolme keskeistä vaihetta matematiikan kouluopetuksen lähihistoriassa ja tutkitaan, miten kukin vaihe on suhtautunut todistamiseen. Näiden vaiheiden jakajana toimii käytännössä ns. New Math -liike. Tarkastelemme siis ”uutta matematiikkaa” sekä aikaa sitä ennen ja sen jälkeen. Luku 4 päätyy pohjustamaan ongelmakeskeisen matematiikan aikakautta, jonka voidaan katsoa yhä jatkuvan. Tarkemmin nykyisen opetussuunnitelman mukaisen matematiikan opetusta tutkitaan luvussa 5 muutaman lukion oppikirjan avulla. Korealainen koulumatematiikka on tarkastelun alaisena luvussa 6. Aluksi on lyhyt johdatus korealaiseen koulujärjestelmään niiltä osin kuin sitä on mielestäni tarpeellista ymmärtää. Sen jälkeen esitetään huomattavimmilta osilta korealaisen matematiikan opetussuunnitelman ne kohdat, jotka liittyvät todistamisen opetukseen. Näitä vastaavien kohtien osalta on tehty katsaus korealaisiin matematiikan oppikirjoihin.

Lopuksi tehdään tutkielmasta yhteenveto luvussa 7 tehden vertailua todistamisen opetuksesta Suomessa ja Etelä-Koreassa.

2 Historiallisia ja filosofisia lähtökohtia

Matemaattisella todistuksella on pitkä historia. Tässä tutkielmassa en kuitenkaan pyri luomaan kattavaa historiikkia todistamisesta, vaan käsittelen sen tiiviisti kahden merkittävän miehen klassikkoteosten avulla. Kysymyksiin miksi matematiikassa todistetaan väitteitä, millaiset asiat on todistettava ja millaiset asiat jätetään todistamatta ovat tärkeitä. Niihin vastasi varsin kattavasti filosofi Aristoteles, joskaan ei ainoastaan matematiikka mielessään, vaan yleisemmältä, tieteellisten väittämien perustelemisen kannalta. Toinen suuri hahmo oli Eukleides, jonka oppikirjamainen teos *Alkeet* loi vankan pohjan matemaattisen todistuksen esitysmuodolle.

2.1 Aristoteles ja todistamisen filosofia

Mistä johtuu todistusten muotoa oletus-väitös-todistus oleva rakenne? Mitä silloin oletetaan, mitä väitetään, ja mitä todistetaan? Matematiikan luonne tieteenä on kautta aikojen ollut melko tarkasti sellainen, joksi Aristoteles sen kuvasi *Toisessa Analytiikassaan.* Kaikki tieteet alkavat jostakin, mitä ei ole aihetta kyseenalaistaa, sellaisesta mistä voidaan olla niin varmoja, että sen päälle voidaan rakentaa kokonainen tiede. Tätä perinpohjaista kivijalkaa Aristoteles nimittää kunkin tieteenalan ensimmäisiksi periaatteiksi. Niiden totuudellisuutta ei edes voida osoittaa millään todistusaineistolla. Ne vain kerta kaikkiaan ovat niin varmalla pohjalla. Ensimmäiset periaatteet on myös pakko olla olemassa, jotta edes on mahdollista rakentaa niiden päälle jotakin. Jos kaikki mahdolliset väitteet olisi todistettava, olisimme juuttuneet loputtomaan todistusten suohon, jossa epätoivoisesti etsisimme jokaiselle väitteelle ensisijaisempaa totuutta, johon se perustuu. Eihän se loppuisi milloinkaan, ellei jossain vaiheessa voitaisi todeta, että nyt on päädytty niin varmalle pohjalle, että enää ei tarvitse jatkaa todistamista. [5]

Antiikin Kreikassa arvostetuinta matematiikkaa oli geometria, ja monet muut matematiikan osa-alueet olivat vielä kovin kehittymättömiä. Kreikkalaisten laskutaito oli kovin rajallinen, kuten oli koko lukukäsityskin siihen aikaan. Geometrian kannalta Aristoteleen ensimmäiset periaatteet merkitsivät sitä, että ei tarvinnut väitellä sellaisesta, että onko suoria tai pisteitä tai kolmioita olemassa. Niiden olemassaolo voitiin huoletta olettaa. Mitä niiden ominaisuuksiin tulee, olettaa voidaan vain se, mitä puheena olevilla sanoilla tarkoitetaan. Puhuttaessa siis suorakulmaisesta kolmiosta, voidaan turvallisesti olettaa todeksi se, mitä tarkoitetaan sanalla ”suorakulmainen kolmio”, mutta sitä, onko jokin tietty kolmio suorakulmainen, ei olekaan niin vain lupa olettaa. Tällaiset edellämainitun kaltaiset todistusta kaipaamattomat seikat ovat kullekin tieteenalalle erityisesti kuuluvia. Tämän lisäksi on myös yleisiä todistusta vaatimattomia totuuksia, jotka ovat kaiken tieteen yhteistä omaisuutta. Matemaatikko ymmärtää, kun yhtäsuuriin suureisiin lisätään keskenään yhtäsuuret suureet, ovat saadut suureet edelleen yhtäsuuret. Tämä totuus ei kuitenkaan ole matemaatikon yksityisomaisuutta, vaan se pätee kaikissa tieteissä ja kaikissa olosuhteissa. Aristoteleellä on paljonkin sanottavaa väitelauseiden erilaisista tyypeistä, aksioomista, postulaateista ja hypoteeseista, mutta emme käsittele niitä tässä yhteydessä. [5]

2.2 Todistaminen Eukleideen Alkeissa

Matemaattisen todistuksen syntyjä tutkittaessa olisi synti jättää huomiotta Eukleideen kokoama Alkeet (kreikaksi Stoikheia, latinaksi Elementa). Alkeet todellakin nimensä mukaisesti alkaa geometrian alkeista ja sitä voi lukea tarvitsematta mitään esitietoja. Eukleides laati tämän 13-osaisen suurteoksen oppikirjan muotoon, ja oppikirjana se palvelikin ilmestymisestään (n. 300 eKr.) saakka pitkästi yli kahden vuosituhannen ajan joko sellaisenaan tai sopivasti valittuina osina. Tämä kuvaa hyvin teoksen merkittävyyttä. Alkeiden ylivoimainen suosio koulugeometrian lähdeteoksena alkoi hiipua 1900-luvulla erilaisten uudistusten myötä, joihin palaamme myöhemmin.

Proklos (412-487) oli aikansa huomattavin Eukleides-tutkija häneen ovat turvautuneet myöhemmätkin tutkijat. Hän laati selostuksen Eukleideen tavasta käsitellä matemaattista probleemaa. Näin lausuu Proklos Sir Thomas L. Heathin kommentaariteoksen mukaan:

> Jokaisella ratkaistulla probleemalla ja jokaisella teoreemalla on, ollakseen täydellinen, oltava kaikki seuraavat elementit: tehtävänanto (enunciation), alkutarkastelut (setting-out), ongelmanmäärittely (definition, specification), ratkaisumenetelmät (construction, machinery), todistus (proof), ja johtopäätös (conclusion). Näistä tehtävänanto ilmoittaa, mitä on annettu oletettuna ja mihin tulokseen pyritään, ja täydellinen tehtävänanto sisältää nämä molemmat osat. Alkutarkasteluissa käsitellään oletukset tai muut annetut tiedot, ja muokataan niitä ratkaisun tarpeiden mukaisesti. Ongelmanmäärittelyssä selvennetään, mitä tarkalleen ottaen on saatava selville. Ratkaisumenetelmissä lisätään muut tarvittavat esitiedot, joita probleemassa hyödynnetään. Todistuksessa tehdään tieteellistä päättelyä tunnetuista faktoista. Johtopäätöksessä viitataan tehtävänantoon ja todetaan se, mitä on tullut osoitetuksi. Nämä kaikki ovat probleemojen ja teoreemojen osia, mutta kaikista oleellisimpia ovat tehtävänanto, todistus ja johtopäätös, ja ne löytyvät jokaisesta probleemasta ja teoreemasta.

Onhan yhtä välttämätöntä tietää etukäteen mihin pyritään, todistaa se kaikkine välivaiheineen, kuin lopuksi todeta saatu tulos osoitetuksi; näistä kolmesta on mahdotonta luopua. Muita osiakin usein käytetään tarpeen mukaan, mutta myös usein ne jätetään pois tarpeettomina. Niinpä probleemassa, jossa on konstruoitava tasakylkinen kolmio, jonka yhtäsuuret kulmat ovat kaksi kertaa kolmannen kulman suuruiset, ei ole alkutarkasteluja eikä ongelmanmäärittelyä, ja useimmissa teoreemoissa ei ole eritelty ratkaisumenetelmiä, sillä alkutarkastelut antavat riittävät keinot kysyttyjen ominaisuuksien todistamiseksi. Milloin puolestaan alkutarkasteluja vaaditaan? Vastaus kuuluu: Silloin kun tehtävänannossa ei ole annettu mitään; sillä vaikka tehtävänantoon yleisesti kuuluu oletusten antaminen sekä se, mihin tulokseen pyritään, näin ei kuitenkaan aina ole asianlaita. Joskus siinä ainoastaan ilmoitetaan se, mihin tulokseen on päädyttävä, kuten edellä mainitussa probleemassa. [5]

Alkeiden alussa Eukleides luetteli kaikki tarvittavat määritelmät sekä postulaatit ja aksioomat, jotka ovat juuri niitä ensimmäisiä, ei-todistettavia, periaatteita. Tämän jälkeen rakennetaan euklidisen geometrian kaunis järjestelmä sellaisessa loogisessa järjestyksessä, missä jokainen uusi väittämä perustellaan aiemmin todeksi näytettyjen faktojen nojalla, ja kaikki lopulta palautuu määritelmiin, postulaatteihin ja aksioomiin. Katsokaamme nyt parin esimerkin avulla, miten Eukleides ratkaisi geometrian alkeisiin kuuluvia probleemoja. Ensimmäisen kirjan Lause 1:

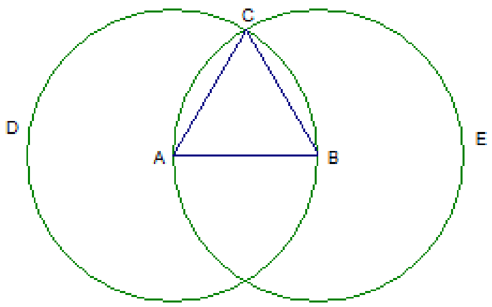
Voidaan piirtää tasasivuinen kolmio annettu äärellinen suora viiva[1] yhtenä sivuna.

Olkoon AB annettu äärellinen suora viiva.
On siis piirrettävä tasasivuinen kolmio kantanaan AB.
Keskipisteenä A ja pituutena[2] AB piirrettäköön ympyrä BCD; edelleen, keskipisteenä B ja pituutena BA piirrettäköön ympyrä ACE; ja pisteestä C, jossa ympyrät leikkaavat toisensa, piirrettäköön pisteisiin A ja B suorat viivat CA ja CB.

Nyt, koska piste A on ympyrän CDB keskipiste, ovat AC ja AB yhtä pitkät. Edelleen, koska piste B on ympyrän CAE keskipiste, ovat BC ja BA yhtä pitkät. Mutta CA osoitettiin myös yhtä

[1] Eukleides ei ollut erikseen määritellyt janan käsitettä

[2] Myöskään ympyrän sädettä ei ollut erikseen määritelty



Kuva 1: Kuvio Eukleideen Lauseeseen 1

pitkäksi kuin AB, joten molemmat suorat viivat CA ja CB ovat yhtä pitkiä kuin AB. Ja ne, jotka ovat yhtäsuuria saman suureen kanssa, ovat myös yhtäsuuria keskenään; siispä CA ja CB ovat myös yhtäsuuret. Näin ollen kolme äärellistä suoraa viivaa CA, AB ja BC ovat kaikki yhtä pitkiä.

Näin ollen kolmio ABC on tasasivuinen, ja se on piirretty AB yhtenä sivuna, mikä oli tehtävä. [5, s. 241-242]

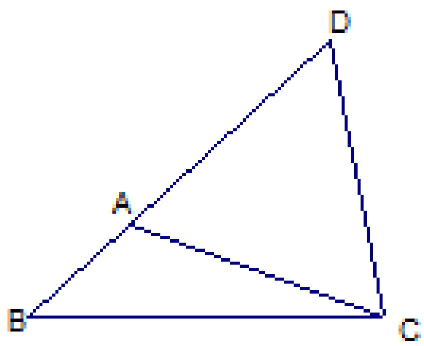
Lauseen todistuksessa käytettiin ennestään tunnettuja faktoja:

- Postulaatti 1. Voidaan piirtää suora viiva mistä tahansa pisteestä mihin tahansa pisteeseen.
- Postulaatti 3. Voidaan piirtää ympyrä minkä tahansa keskipisteen ja pituuden suhteen.
- Aksiooma 1. Ne, jotka ovat yhtäsuuret saman suureen kanssa, ovat myös yhtäsuuret keskenään.
- Määritelmä 15. Ympyrä on yhdestä viivasta koostuva sellainen tasokuvio, jossa eräästä kuvion sisäpuolella olevasta pisteestä kuvion viivalle piirretyt suorat viivat ovat kaikki yhtä pitkiä. [5]

Otetaan tarkasteluun vielä toinen esimerkki Eukleideelta, missä osoitetaan kolmion kahden sivun yhdessä olevan pitemmät kuin kolmas sivu, valittiinpa sivut miten hyvänsä. Prokloksen mukaan epikurolaiset filosofit pitivät tätä todistusta naurettavana ja hyödyttömänä, sillä aasikin osaa sen todistaa, ja vielä paljon helpommin. Nimittäin sijoittamalla aasin kolmion yhteen kärkeen ja ruokaa toiseen kärkeen, huomataan ettei aasi ruoan napatakseen kulje kolmion kolmannen kärjen kautta, vaan suoraan kolmion yhtä sivua pitkin. Tämä siis kirjasta 1, Lause 20:

Kaikissa kolmioissa kaksi sivua yhteensä millä tavalla hyvänsä valittuna ovat pitemmät kuin jäljelle jäänyt kolmas sivu.

Olkoon ABC kolmio. Väitän, että kolmiossa ABC kaksi sivua miten hyvänsä valittuna ovat yhdessä pitemmät kuin kolmas sivu, nimittäin
BA ja AC pitemmät kuin BC,
AB ja BC pitemmät kuin AC,
BC ja CA pitemmät kuin AB.



Kuva 2: Kuvio Eukleideen Lauseeseen 20

Jatketaan sivua BA pisteeseen D siten, että DA on yhtä pitkä kuin CA, ja yhdistetään DC suoralla viivalla. Silloin, koska DA on yhtä pitkä kuin AC, kulma ADC on yhtäsuuri kuin kulma ACD; silloin kulma BCD on suurempi kuin kulma ADC. Ja koska DCB on kolmio, jossa kulma BCD on suurempi kuin BDC, ja koska suurempaa kulmaa vastaa pitempi sivu, on DB pitempi kuin BC. Mutta DA on yhtä pitkä kuin AC; siis BA ja AC yhdessä ovat pitemmät kuin BC. Samalla tavalla voimme osoittaa, että AB ja BC ovat pitemmät kuin CA, ja BC ja CA pitemmät kuin AB.

Näin ollen jne. Mikä oli todistettava. [5, s. 286-287]

Lauseen 20 todistuksessa käytettiin seuraavia aksioomeja ja lauseita:

- Aksiooma 5. Kokonaisuus on suurempi kuin sen osa.

- Lause 1.5. Tasakylkisessä kolmiossa kannan viereiset kulmat ovat yhtäsuuret.
- Lause 1.19. Kaikissa kolmioissa suuremman kulman vastainen sivu on pitempi.

2.3 Todistaminen nyky-yliopistomatematiikassa

On aika siirtyä Eukleideen päivistä nykyaikaan pohtimaan todistuksen roolia matematiikassa. Ennen kuin käymme kunnolla käsiksi siihen matematiikkaan, mitä kouluissa opetetaan suurille massoille, tehkäämme pieni katsaus yliopistomatematiikkaan. Miksi tämä on tärkeää? Yhtäältä yliopistomatematiikka luo ja pitää yllä tiettyä matematiikan ideaalia, formalisointia johon koulumatematiikassa ei ole tarkoituksenmukaista pyrkiä sellaisenaan, mutta joka kuitenkin edustaa matemaattista mallisuorittamista. Toisaalta, ellei tätä katsota riittäväksi perusteeksi käsitellä yliopistomatematiikkaa tutkittaessa koulumatematiikan asioita, on muistettava, mistä kouluihin matematiikan opettajia tulee. Mitä suurimmalla todennäköisyydellä he ovat matemaattisen koulutuksensa saaneet yliopistoissa. Matematiikan opetussuunnitelmien laatijatkin ovat luultavasti saaneet matemaatikon koulutusta yliopistoissa. Sama pätee matematiikan oppikirjojen tekijöihin. Meillä on siis paljon syitä pysähtyä katsomaan, millainen matematiikka mielessään eri toimijat vaikuttavat koulumatematiikan sisältöihin.

Ei ole varmasti liioiteltua sanoa, että suhtautuminen todistamiseen on huomattavimpia eroja siirryttäessä lukiomatematiikasta yliopiston ”puhtaaseen” matematiikkaan. Se on kuin kulttuurinen ero kahden kovin eri tavalla käyttäytyvän kansan välillä. Mutta koska nämä kansat ovat ystävällisiä mieleltään, ovat yliopistojen matematiikan laitokset tarkkaan valikoineet oppimateriaalinsa, jolla perehdyttää tulokkaat uuteen kulttuuriin. Näitä on tietysti monia, mutta me tarkastelemme Salasin ja Hillen Calculusta [26], joka on tavanomainen kurssikirja matematiikan perusopintoihin kuuluvilla analyysin kursseilla. Salas ja Hille ovat kirjansa alkupuolelle sijoittaneet lyhyehkön kappaleen matemaattisesta todistuksesta ja matemaattisesta induktiosta, josta keräämme tähän muutamia pääkohtia. Todistamisen suuren ajatuksen Salas ja Hille kiteyttävät näin:

> Todistuksissa työskennellään deduktiivisessa järjestelmässä, jossa totuuksia perustellaan oletusten, määritelmien ja aiemmin todistettujen tulosten nojalla. Mitään ei voi väittää todeksi osoittamatta selkeästi millä perusteella niin väitetään. Teoreema on implikaatio, joka koostuu hypoteesista ja johtopäätöksestä: jos (hypoteesi) . . . , niin (johtopäätös) . . . [26, s. 53]

Salas ja Hille listaavat muutamia yleisiä virheitä, joihin tottumaton todistaja saattaa ajautua. Ensimmäinen virhetyyppi on hypoteesin unohtaminen tai huomiotta jättäminen. Esimerkiksi lauseessa "jos a ja b ovat positiivisia lukuja, niin ab on positiivinen" saattaisi erheellisesti kuvitella, että ab on positiivinen jo siksi, että a ja b ovat lukuja. Esimerkki on ehkä naiivi, mutta virhetyyppinä hypoteesin laiminlyönti on siis yleinen. Toinen virhetyyppi on lauseen "jos A, niin B" sekoittaminen lauseen "jos B, niin A" kanssa. Eihän yllä olevassa lauseessakaan tulon ab positiivisuus takaa sitä, että a ja b olisivat positiivisia. Kolmas yleinen virhetyyppi on tehdä se väärä oletus, että lauseen hypoteesi edustaisi ainoaa mahdollista tilannetta, jossa johtopäätös on totta. Jälleen lause jos a ja b ovat positiivisia lukuja, niin ab on positiivinen, on hyvinkin totta, mutta ab voi olla positiivinen myös muussa tapauksessa, nimittäin jos sekä a että b ovat negatiivisia. [26, s. 53-54]

Epäsuoran todistuksen idea käydään läpi: Todistettaessa tyyppiä "jos A, niin B" olevaa lausetta, oletetaan ensin, että "A pitää paikkansa ja B ei pidä paikkaansa" ja todetaan tämän johtavan ristiriitaan. Ristiriita osoittaa, että "jos A pitää paikkansa, niin välttämättä myös B pitää paikkansa." Matemaattisen induktion periaate selostetaan myös turvautuen induktioaksioomaan ja kuvailemalla induktiota eräänlaiseksi dominoteoriaksi. Hyvänä kommenttina todistamisesta ylipäätään poimittakoon: "Tosiasia, että nämä [ratkaisumenetelmät] antavat meille järkevältä tuntuvia vastauksia on lohdullista, mutta vain koska voimme todistaa lauseemme, voimme todella luottaa tuloksiin." [26, s. 54]

Esitellään esimerkkinä yliopistotasoisesta todistamisesta matematiikassa seuraava raja-arvotodistus Salas-Hillen kirjasta. Esimerkkiin liittyy sellaista mielenkiintoa, että raja-arvon käsitettä tutkitaan yliopistomatematiikassa ja lukiomatematiikassa varsin erilaisin keinoin. Keinojen erilaisuus johtuu erilaisista tavoista määritellä funktion raja-arvo. Määritelmä Salas-Hillen mukaan:

> Olkoon f funktio, joka on määritelty jossakin joukossa muotoa
>
> $$(c-p, c) \cup (c, c+p), \text{missä } p > 0.$$
>
> Silloin
>
> $$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ joss}$$
>
> jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että
>
> $$\text{jos } 0 < |x-c| < \delta, \text{ niin} |f(x) - L| < \epsilon. \text{ [26, s. 71]}$$

Tähän määritelmään nojautuen osoitetaan seuraava raja-arvoväite:

Osoita, että

$$\lim_{x \to 2} 2x - 1 = 3.$$

Etsitään δ. Olkoon $\epsilon > 0$. Etsimme sellaista lukua $\delta > 0$, että jos $0 < |x-2| < \delta$, niin $|2x-1-3| < \epsilon$.

Ensiksi on muodostettava yhteys itseisarvolausekkeiden $|2x-1-3|$ ja $|x-2|$ välille. Tämä on yksinkertaista:

$$|2x-1-3| = |2x-4|$$

ja edelleen

$$|2x-1-3| = 2|x-2|.$$

Jotta $|2x-1-3|$ olisi pienempi kuin ϵ, on oltava $2|x-2| < \epsilon$, mikä saadaan asettamalla $|x-2| < \frac{\epsilon}{2}$. Nyt valitsemme $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$.

Osoitetaan vielä, että δ on valittu hyvin. Jos $0 < |x-2| < \frac{1}{2}\epsilon$, niin $2|x-2| < \epsilon$, ja niin ollen $|2x-1-3| < \epsilon$. $\square$ [26]

Lukiomatematiikassa raja-arvo määritellään kevyemmin. Raja-arvo on olemassa, kun toispuoliset raja-arvot ovat olemassa ja ne ovat yhtäsuuret. Määritelmä kirjan *Pyramidi 7* mukaan: [13, s. 64]

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 -} f(x) = a \text{ ja } \lim_{x \to x_0 +} f(x) = a$$

Lisäksi funktio on jatkuva kohdassa x_0, joss sekä toispuoliset raja-arvot että funktion arvo kohdassa x_0 ovat yhtäsuuret. Edellä esitetty Salas-Hillen raja-arvotodistus olisi lukiomatematiikassa yksinkertainen toteamus, että polynomifunktiona $f(x) = 2x - 1$ on jatkuva kaikkialla määrittelyalueessaan ja erityisesti kohdassa $x = 2$, ja niin ollen

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2) = 3.$$

3 Pedagogisia näkökulmia todistamiseen

Tässä luvussa esitellään konstruktivististen teorioiden tärkeimmät piirteet ja tarkastellaan, millaisia vaikutuksia konstruktivismilla oppimisteoriana on ollut matematiikan opetukseen ja oppimiseen. Lopuksi vielä pohditaan ns. todistamisajattelun merkitystä ja mahdollisuuksia konstruktivistishenkisenä lähestymistapana matemaattisen todistuksen oppimiselle. Todistamisajattelua on tietysti erilaisissa muodoissa esiintynyt iät ja ajat, mutta tässä keskitymme tutkiskelemaan sitä siinä muodossa, jonka se on saanut modernien oppimiskäsitysten vallitessa.

3.1 Konstruktivismi ja matematiikka

3.1.1 Konstruktivismi oppimisteoriana

Yksinkertaisesti maallikon sanoin ilmaistuna konstruktivismi tarkoittaa modernia käsitystä oppimisesta, joka syrjäyttää vanhanaikaisen behavioristisen teorian, missä koulumestari takoo oppia hiljaa paikallaan istuvien oppilaiden päähän lukemattomilla toistoilla. Moderni oppilas on aktiivinen toimija ja tutkija, ja hänen opettajansa ei oikeastaan opeta, vaan ohjaa oppimistapahtumaa, antaa oppimisen tapahtua oppilaalle. Emme kuitenkaan tyydy näin naiiviin määritelmään, vaan pyrimme selvittämään tarkemmin, mistä konstruktivismissa on kysymys.

Olisi virheellistä väittää konstruktivismin olevan yksi ainoa koherentti teoria, joka olisi äärimmäisen helposti määriteltävissä. Paremminkin on kyse tietynkaltaisten teorioiden perheestä, johon kuuluvilla ajatuksilla on paljon yhteistä. Näitä yhtäläisyyksiä ymmärtämällä saamme vaivattomimmin riittävän selkeän käsityksen konstruktivismin luonteesta.

Konstruktivistisen oppimisteorian huomattavin kehittäjä oli sveitsiläinen Jean Piaget (1896-1980), joka pitkän uransa aikana julkaisi teoriaansa liittyviä kirjoituksia valtavasti, ja osa hänen myöhemmästä tuotannostaan on ristiriitaista hänen aikaisemmin kirjoittamansa kanssa, mikä on ollut omiaan aiheuttamaan monenlaisia tulkintoja lukijoiden parissa. Tärkeimpiä periaatteita, siten kuin ne yleisesti ymmärretään, ovat aktiivinen tiedonmuodostus, assimilaatio ja akkommodaatio. Tieto rakentuu ihmisen aktiivisen fyysisen tai mentaalisen toiminnan tuloksena. Oppiminen on tavoitteellista toimintaa, mikä antaa konstruoidulle tiedolle organisoidun järjestyksen ja merkityksellisyyden. Tämä merkitsee, että tieto ei ole jotakin sellaista, jota opettaja voisi yksinkertaisesti siirtää oppilaaseen, vaan oppilaan oma aktiivisuus aiheuttaa tiedon rakentumista. Minkä päälle kaikki tieto sitten rakennetaan? Konstruktivistisessa teoriassa ihmisen kokemusmaailma on tällainen perusta.

Tieto ja oppiminen ovat subjektiivisia konstruktioita, jotka saavat kullakin yksilöllä sellaisen merkityksen, joka parhaiten sopii yksilön kokemusmaailmaan. Assimilaatio on tärkeä käsite liittyen tapaan, jolla oppija käsittelee hänelle uutta tietoa. Useimpien tulkintojen mukaan assimilaatio on kokonaan uuden aineksen sovittamista aikaisempaan kokemusmaailmaan. Toisin sanoen assimilaatio on merkityksen luomista sille, mikä on vanhastaan tuntematonta. Radikaalia konstruktivismia kannattavan Ernst von Glasersfeldin [2] tulkinnan mukaan tosin minkäänlaisen käyttäytymisen kohtaaminen ei ole ihmiselle kokonaan uutta, vaan ainoastaan uudenlainen instanssi jostakin ennestään tunnetusta. Toinen konstruktivismin peruskäsite, akkommodaatio puolestaan merkitsee ennestään tunnetun tiedon uudelleenorganisointia. Akkommodaatiota tapahtuu, koska ihminen saattaa huomata aikaisemman käsityksensä jostakin asiasta olevan puutteellinen tai virheellinen ja siksi tätä käsitystä on muokattava soveltumaan paremmin yhteen muiden käsitysten kanssa. Esimerkki tällaisesta voisi olla lukukäsitteen kehittyminen. Pienelle lapselle luvun käsite saattaa merkitä positiivista kokonaislukua (jolla saattaa olla ylärajakin). Matematiikkaa oppiessa tulee kuitenkin pian tilanteita, joissa lukukäsitettä on laajennettava. [2]

Eräs konstruktivismin muodoista on sosiaalinen konstruktivismi, joka korostaa ihmisen vuorovaikutusta ympäristönsä kanssa. Merkitykset rakentuvat välttämättä kommunikaation kautta, eikä kukaan yksilö toimi täysin eristyksissä. Kommunikaatio välittää kielen merkityksiä yksilöltä toiselle ja auttaa muodostamaan yhteisesti ymmärrettyjä käsityksiä. [17]

Oppimistapahtuma on siis siirtynyt opettajan toiminnasta oppilaan toiminnaksi, mutta tämä ei silti tarkoita opettamisen olevan turhaa työtä. Opettajalla on tärkeä rooli oppimisen ohjaajana ja oppimiskokemusten tuottajana. Vaikka oppiminen on oppilaan toimintaa, ei hänen aktiivisuutensa välttämättä itsestään kohdistu sellaisiin asioihin, joiden oppimista pidetään tärkeänä. Tiedon subjektiivisuus saattaa huolestuttaa matemaatikoita, jotka perinteisesti uskovat matemaattisen tiedon olevan objektiivista, eikä sen totuus voi riippua siitä, millä tavalla oppija sen yksilönä ymmärtää. Mikä takaa, ettei käsite *totuus* kärsi jonkinlaisesta inflaatiosta konstruktivistisissa teorioissa? Tähän konstruktivisti vastaisi, että totuuden kriteerinä on vastaavuus todellisuuden kanssa. Matematiikan todellisuus on varmaankin luonteeltaan erilainen, kuin vaikkapa luonnontieteiden todellisuus. Sikäli kuin matematiikan todellisuus on yhteisesti sovittuihin määritelmiin perustuvaa konstruktiota, totuus ei nähdäkseni kärsi inflaatiosta. Tiedon subjektiivisuus merkinnee lähinnä vapautta konstruoida omia matemaattisia määritelmiä, mutta jos ne poikkeavat matematiikan konventiosta, niiden hyödyllisyys on kyseenalainen.

3.1.2 Oppimiskäsityksen muutoksen seurauksia koulumatematiikassa

Tarkastelemme seuraavaksi matematiikan opetusta oppimiskäsityksen muutoksen valossa. Pyritään luomaan kuva niistä seikoista, joita modernit oppimiskäsitykset ovat pitäneet ongelmallisina traditionaalisessa koulumatematiikassa. Selvitämme myös, millä keinoilla uusi didaktiikka on pyrkinyt kehittämään matematiikan opetusta vastaamaan paremmin modernia käsitystä oppimisesta. Lenni Haapasalo [3] on tarkastellut tätä kysymystä erityisesti opetussuunnitelmien laatimisen kannalta artikkelissaan Millaisia muutospaineita moderni käsitys matematiikan oppimisesta aiheuttaa opetussuunnitelmien laatimisella ja oppimisympäristöjen suunnittelemiselle? Tarkastelumme nojautuu erityisen vahvasti Haapasalon artikkeliin.

Konstruktivistisen oppimisteorian noustua perinteistä behavioristista teoriaa suositummaksi, myös kysymys matematiikan opetuksen uudistamisesta tuli ajankohtaiseksi. Painetta antoivat siis kasvatustieteen tulokset, mutta Haapasalon mukaan matemaatikkopiireissä suhtauduttiin uudistuksiin nihkeästi. Haapasalo kuvailee kuinka ”matematiikan opetus- ja oppimääräsuunnitelmat ovat - vaikkakin niihin on tehty pieniä kosmeettisia muutoksia - säilyneet ikään kuin postulaattien asemassa.”

Haapasalon havaitsee monien ongelmakohtien johtuvan nimenomaan vanhoillisista oppimiskäsityksistä. Erityisesti tällaisia ovat (1) oppiaineen liiallinen rajoittuminen symbolien varaan, (2) oppimäärän liian tiukka kumulatiivisuus, (3) valmiiden toimintakaavojen opettaminen aitojen ongelmien kustannuksella, ja (4) sosiaalisten työtapojen käytön vähäisyys. Tarkastellaan seuraavaksi, mitä näillä tarkoitetaan.

Symboleihin rajoittuminen Ongelma on Haapasalon mukaan historiallinen, nimittäin:

> Eri aikakausina ja koulumuodoista sekä luokka-asteesta riippumatta koulumatematiikkaa on ”opetettu” lähes yksinomaan symbolien varaan rakentuvana tietorakennelmana. Korkeintaan on uskallettu puhua matematiikan ”havainnollistamisesta”, ”konkretisoimisesta”, ”soveltamisesta” jne. [3]

Konstruktivistinen oppimisteoria suosittelee monipuolisten esitysmuotojen käyttämistä. Oppimista olisi symbolisen esitystavan lisäksi tuettava vaikkapa reaalimaailman konteksteihin liittämisellä, verbaalisilla sekä kuvallisilla esitysmuodoilla.

Tiukka kumulatiivisuus Käsitys matematiikasta kumulatiivisena oppiaineena, jossa uusi oppiaines on perustettava aiemmin opittuun, on yleinen. Tämän näkemyksen oikeellisuutta Haapasalo ei kiistä, mutta katsoo sen johtavan siihen, että opetettavat asiat luokitellaan vain ”uusiin” ja ”vanhoihin”. Ongelma tässä on se, että matematiikan ymmärtäminen perustuu käsitteiden ymmärtämiselle ja omaksumiselle, mikä on usein hyvin pitkällinen prosessi. Konstruktivistinen oppiminen on viime kädessä ”rakentamista”. Omaksutut käsitteet eivät ole välttämättä ikuisesti pysyviä, vaan niitä muokataan jatkuvasti. Oppiaineen liian tiukka kumulatiivisuus ei anna siihen riittävän hyviä mahdollisuuksia. [3]

Valmiit toimintakaavat Matemaattinen tieto on syntynyt pitkällisten ongelmanratkaisuprosessien kautta. Oppilaille on tarjottu lähinnä valmiita tuloksia, joita eksperttimatemaatikot ovat saaneet aikaan vuosisatojen ja -tuhansien ankaralla tutkimustyöllä. Näin ongelmanratkaisumenetelmien opettaminen on jäänyt Haapasalon sanonnan mukaan ”temppujen opettamiseksi” sen sijaan että olisi kehitetty sisällöstä riippumattomia menetelmällisiä strategioita. Tämä on mahdollisesti vaikuttanut matematiikkaan liittyvien kielteisten asenteiden kasvamiseen. [3]

Koko konstruktivistisen oppimiskäsityksen ydin onkin siinä, että oppijalle pystytään järjestämään tilanteita, jotka hän itse haluaa nähdä ongelmina. Oppimisen perustaminen oppilaan ongelmanratkaisuprosessien varaan edellyttää Haapasalon mukaan riittävän matemaattisen käsitteistön hallintaa.

Valmiisiin toimintakaavoihin tukeutuminen kuvastaa myös paljolti traditionaalista oppimiskäsitystä, jossa oppilas on passiivinen tiedon vastaanottaja, eikä tietoja konstruoiva, korjaileva ja täydentävä aktiivinen toimija.

Sosiaalisten työtapojen puutteellinen käyttö Perinteisesti matematiikan ja luultavasti monien muidenkin aineiden opetuksessa on suosittu suomalaiskansallista "yksin puurtamista". Keskinäiseen kommunikaatioon perustuva oppiminen on mahdollisuus, jota ei ole osattu käyttää tehokkaasti hyödyksi. Tämän mahdollisuuden käyttö edellyttäisi, että olisi luovuttava oppilaiden luokittelemisesta sen mukaan, mitä heidän oletetaan oppivan. Ajatus, että jotkut oppivat matematiikkaa ja jotkut taas eivät, on hyvin pulmallinen. Sosiaaliset työtavat ovat mielekkäimmät, kun jokaisella on periaatteessa yhtäläiset mahdollisuudet tietojen hankkimiseen ja omaksumiseen. Keskinäinen kommunikointi on tärkeää ongelmakeskeisessä oppimisessa, mutta myös eräs käsitteenmuodostuksen väline. [3]

3.2 Todistamisajattelu

Perinteinen matemaattinen todistaminen on todistamisajattelua täsmällisimmillään. Oletus-väitös-todistus -prosessin kirjaaminen ja sen päättäminen johtopäätöstä merkitsevään pieneen neliöön on tuttu kaikille matemaattista kirjallisuutta vähänkin silmäilleelle. Voidaan kuitenkin puhua todistamisajattelusta ilman, että vaaditaan tiukkoja formalismeja. Paavo Malinen [20] määrittelee todistamisajattelulle kaksi mallia:

1. Traditionaalinen malli tähtää systemaattiseen todistamiseen loogisten päättelysääntöjen ja matematiikan tieteellisessä tutkimuksessa hyväksyttyjen metodien mukaisesti.

2. Ongelmanratkaisun malli tähtää oppilaiden kannalta mielekkäiden ongelmien tutkimiseen. Kokeilujen ja arvailujen yhteydessä tulee varmistuksia ja toteen näyttämistä, mikä johtaa ongelman ratkaisuun. Siihen liittyy ajatuksia todistamisesta vaikka päättely ei ole yleensä matemaattisen todistamismallin mukaista. [20]

Malleista edellinen pitää todistamista omana selkeänä kokonaisuutenaan sekä rakenteena, jota säätelevät tarkat säännöt. Ongelmanratkaisun mallilla taas ei ole tiukasti määrättyjä rajoja, vaan se onkin ongelmien ratkaisemisen välineenä toimiva ajattelutapa. Näitä kahta eri linjaa kutsutaan kirjallisuudessa toisinaan nimillä ”proof” ja ”prove” (esimerkiksi Polya 1965), mutta tässä tutkielmassa käytämme mieluummin sanoja ”todistaminen” ja ”todistamisajattelu”, mikä toivottavasti ei aiheuta sekaannusta, sillä ”todistaminen” oikeastaan on ”todistamisajattelun” erikoistapaus. Erityisesti tässä alaluvussa puhuttaessa todistamisajattelusta tarkoitetaan silloin edellä mainittua ongelmanratkaisun mallia.

Miten voimme paremmin luonnehtia todistamisajattelua? Se käsittää ongelmanratkaisun päättelytapoineen ja yleensä koko ongelmanratkaisun sopivuuden koettelun. Päättelyä voidaan tehdä esimerkiksi piirtämällä, laskemalla tai mittaamalla [19], mikä merkitsee usein rajoittumista tilannesidonnaisuuteen. Tällaiset ratkaisujen koettelut ovat kuitenkin hyödyllisiä, ja jopa siinäkin tapauksessa, että tavoitteena olisi traditionaalisen matemaattisen todistuksen oppiminen. Perustelujen miettiminen ja esittäminen myötäilevät paitsi konstruktivismin henkeä, myös nykyisen koulutuksen tavoitteita kehittää oppilaita itsenäiseen ja johdonmukaiseen päättelyyn [20].

Vaikka todistamisajatteluun kuuluu paljon väljempiä ajatusmalleja kuin varsinaiseen todistamiseen, voi taustalla olla kuitenkin hyvin samanlaiset loogiset rakenteet. On todettu, että logiikan lausekalkyyli ja päättelysäännöt ovat useimmiten sopimattomia lähtökohtia inhimilliselle päättelylle, ja oppilaat muutenkin ymmärtävät moniin tautologioihin liittyvän deduktiivisen päättelyn idean [19]. Oppilaiden päättely siis sisältää elementtejä induktiosta ja deduktiosta, mutta oppilaat eivät välttämättä ole tietoisia omien päätelmiensä luonteesta, eivätkä aina osaa tai tahdo kommunikoida ajatuksenjuoksuaan opettajalle. Päättelytoimintaa kuitenkin tapahtuu ja se on eri asia kuin silkka arvaamalla ratkaiseminen. Malinen [19] lisää, että hyvin matematiikkaa oppineet antavat useammin selkeämpiä selityksiä päätelmilleen, mutta heikostikin menestyneet voivat kiinnostua analysoimaan päättelyjään.

Todistamisajatteluun on syytä kannustaa oppilaita jo varhain koulumatematiikassa. Väljiä ja epätäydellisiäkin päättelyjä pitää saada harjoitella. Ongelmanratkaisuun kuuluu hypoteesien muodostamista ja testaamista. Tilannesidonnaisuudesta ehtii pääsemään irti myöhemmässä koulutusvaiheessa. Ensisijaisempaa on antaa mahdollisuuksia oppilaille omien ajatusprosessien esittämiselle ja ymmärtämiselle. Koulumatematiikka ei saisi rajoittua mekaaniseen laskemiseen kun matematiikassa on suuret mahdollisuudet jalostaa mm. kirjallisen ja suullisen esittämisen taitoa todistamisajattelun keinoilla.

4 Todistaminen muuttuvassa koulumatematiikassa

4.1 Muutoksia koulumatematiikassa

Käsittelemme tässä luvussa tärkeimpiä pedagogisia tendenssejä, jotka ovat hyvin pitkälti määritelleet, millaista koulumatematiikka kulloinkin on ollut. Pienimuotoinen tarkastelumme käsittää merkittävimmät pääsuuntaukset 1900-luvun loppupuolella, ja niihin tutustumme erityisesti eri aikoina käytettyjen oppikirjojen avulla. Kutsukaamme *vanhaksi matematiikaksi* 1960-luvun lopulle, käytännössä peruskoulu-uudistukseen saakka vallitsevana säilynyttä matematiikan opetusta. Vanha koulumatematiikka oli vahvasti jakautunut eri osa-alueisiinsa laskuoppiin eli aritmetiikkaan, mittausoppiin eli geometriaan, ja algebraan. Eukleideen geometrialla oli hyvin huomattava rooli, ja opetuksessa käytettiin Alkeiden todistuksia, tosin Paavo Malisen [19] mukaan ”sekavassa muodossa”. Tällä Malinen ilmeisesti tarkoittaa sitä, että todistamista käytettiin kouluissa, ei niinkään geometrian aksiomaattisen järjestelmän strukturointiin, mikä oli sen pääasiallinen funktio matematiikassa alun perin, vaan siksi, että niin oli aina tehty, yleissivistyksen vuoksi siitä jaettiin oppilaille pieniä murusia.

Vanhaa koulumatematiikkaa seurasi *uusi matematiikka*. Trendin muutoksen syy oli sekä matemaattinen että pedagoginen, mutta myös poliittinen. Epäeuklidisten geometrioiden kehittely kävi kuumana jo 1800-luvulla, mutta vasta 1900-luvun puolivälissä alkoi euklidisen geometrian asema kouluopetuksessa hiipua. Lancelot Hogben [6] kommentoi geometrian rajoituksia kirjassaan Matematiikkaa kaikille vuonna 1937[3]:

> Puotivaaka on taloudessa hyödyllisempi kuin erinomaisen herkkä kemiallinen vaaka. Juuri viimeksimainitun liiallinen herkkyys tekee sen sopimattomaksi kotikäyttöön. Eukleideen geometriaa on yhä edelleen opeteltava kotikäyttöä varten – aivan kirjaimellisesti käsittäen. Hänen joonialaisten oppimestariensa geometria perustui alunperin rakennus- ja maanjakotapojen tarkkailuun. Se ei enää kelpaa, kun on määrättävä Otavan etäisimmän tähtisumun paikka.

Matemaattista järjestelmää – siinä mielessä kuin se kouluopetuksessa tunnettiin – laajennettiin käsittämään suuremmassa määrin joukko-oppia ja logiikkaa. Lisäksi euklidisen matematiikan kouluopetusta pidettiin tehottoma-

[3]Ilmestyi suomeksi vuonna 1949. Teoksen alkuperäinen nimi *Mathematics for the Million*. Lainaus suomenkielisestä teoksesta.

na. Geometrian todistukset Eukleideen järjestelmässä olivat ja ovat eräs täydentävä tekijä matematiikan rakenteen selkeyttä esiteltäessä. Kuten Malinen [19] toteaa, "valitettavasti tuollaisia tyylikkäitä kokonaisuuksia ei mahdu kunnolla kouluopetukseen" ja "todistaminen kuivui traditionaalisessa geometrian opetuksessa valmiin muodon harjoittelemiseksi".

Uuden matematiikan trendilläkin oli ongelmansa, Suomessa vieläpä erityisongelmansa samanaikaisesti toteutetun peruskoulu-uudistuksen syödessä henkisiä voimavaroja. Erityisesti ala-asteen luokanopettajien matemaattinen koulutus oli harvoin riittävä uuden matematiikan oppiaineksen opettamiseen. Kansainvälisesti matematiikkakasvatuksen alalla syntyi back-to-basics –liike. Kuitenkaan kyse ei varsinaisesti ollut halusta palata vanhaan, sillä uudella matematiikalla tunnustettiin olleen hyviäkin vaikutuksia, kuten koulumatematiikan monipuolistuminen. Uuden matematiikan kaudella logiikan ja joukko-opin raskas symboliikka ja lausekalkyyli nousivat liiankin voimakkaasti esille. Yhteyksien luominen matematiikan eri osa-alueiden välille oli ollut kuitenkin uuden matematiikan parhaita meriittejä. Todistamistakin oli harjoiteltu, mutta ne liian harvoin liittyivät oppilaan kannalta mielekkäisiin asiayhteyksiin. Back-to-basics –liike sivuutetaan tässä tutkielmassa, sillä se ei tarjonnut mitään mullistavaa uutta eikä vaikuttanut kouluissamme pitkään. Kyse oli oikeastaan uuden matematiikan ongelmien tunnistamisesta, ja niiden korjaamiseksi alettiin kouluissa harjoittaa *ongelmakeskeistä matematiikkaa*, jossa matemaattisten ongelmien tulisi olla mielekkäitä, oppilaan näkökulmasta todellisia ja mielenkiintoisia "ongelmia". Ongelmanratkaisun kauniisiin ajatuksiin kuuluu oppia valmiuksia ratkoa tulevia ongelmia, joiden luonnetta ei vielä osata aavistaa. Tuliko ongemakeskeinen matematiikka jäädäkseen, sen näyttää aika, mutta ongelmanratkaisun nimeen vannotaan yhä edelleen.

4.2 Vanha matematiikka

Mitä oli tämä vanhojen aikojen matematiikka? Vanhan matematiikan aikakaudelle on vaikeampaa määrittää alkamisajankohtaa kuin päättymistä. Puhuttaessa suomalaisesta koulumatematiikasta, voitaneen sopia vanhan matematiikan alkaneen silloin, kun ylipäätään muodollista koulutusta on alettu järjestää. Puuttumatta yksityiskohtaisiin muutoksiin oppimäärissä, katsomme tämän kauden jatkuneen aina vuoden 1970 peruskoulu-uudistukseen asti. Ominaista vanhalle matematiikalle oli sen jakautuminen eri oppiaineiksi: laskuopiksi, mittausopiksi ja algebraksi. Yhtymäkohtien luominen näiden välillä ei ollut järin rikasta. Muutokset oppimäärien matemaattisessa sisällössä olivat vähäiset, ja samoja Kouluhallituksen hyväksymiä oppikirjoja käytettiin vuosikymmeniä. Tarkastelemme näitä sisältöjä - tietenkin erityisesti todistamisen näkökulmasta - seuraavien oppikirjojen avulla: Kallion *Geometria I* [10] ja Väisälän *Algebran oppi- ja esimerkkikirja I* [27]. Kuvaavaa näille oppikirjoille on niiden pitkä käyttöikä. Ensimmäinen painos Kallion Geometria I -kirjasta ilmestyi jo vuonna 1934, ja tarkastelemamme vuoden 1966 painos on järjestyksessään jo yhdeksästoista. Väisälän algebran kirja ilmestyi vuonna 1945 ja tarkastelussamme on neljästoista painos vuodelta 1965. Mainittujen geometrian ja algebran kirjojen osat I olivat keskikoulun oppikirjoja ja niiden jatko-osat eli osat II lukion oppikirjoja. Osia II ei tässä yhteydessä tarkastella. Oppiaineksen sisältö on Kallion [10] ja Väisälän [27] keskikoulun kirjoissa jaettu seuraaviin lukuihin:

- Geometria I: (1) Kuvioista ja niiden piirtämisestä, (2) Aloista ja tilavuuksista, (3) Systemaattista geometriaa.
- Algebra I: (1) Rationaaliset luvut, (2) Polynomit, (3) Murtolausekkeet, (4) Neliöjuuret, (5) Funktiot ja niiden kuvaajat.

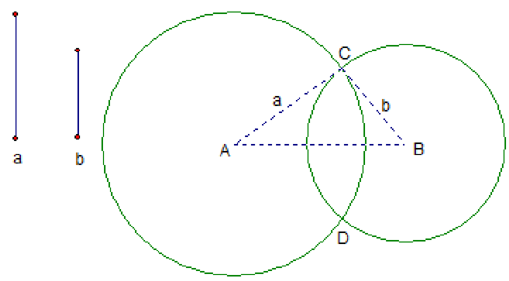
Samojen tekijöiden lukion kirjoissa geometrian ja algebran opinnot jatkuvat seuraavasti:

- Geometria II: (4) Janojen verrannollisuus ja kuvioiden yhdenmuotoisuus, (5) Algebran käyttö geometriassa, (6) Ympyränmitanto, (7) Avaruuskuvioiden ominaisuuksia, (8) Monitahokkaista ja pyöreistä kappaleista.
- Algebra II: (6) Yhtälöoppia, (7) Analyyttista geometriaa, (8) Juuri- ja logaritmioppi, (9) Sarjat - finanssilaskenta, (10) Differentiaalilaskenta, (11) Integraalilaskenta.

Keskikoulun geometriassa ei ensimmäisissä luvuissa puhuta todistamisesta, mutta sitä kylläkin harjoitetaan Eukleideen mallin mukaisesti, mutta epämuodollisella tavalla esittämällä tilanteita ”probleemina”, minkä jälkeen ne ”ratkaistaan”. Näin menetellään helposti todistettavien asioiden kohdalla. Joissakin tapauksissa ”probleeman” ratkaisun jälkeen todetaan saadun ”teoreeman”. Osa teoreemoista on annettu ilman siihen valmistelevaa probleemaa, eikä niitä myöskään aina todisteta jälkikäteen. Näin menetellään kuitenkin vain harvoin: lähes kaikkia teoreemoja vähintään perustellaan havainnollisesti. Täsmällisen todistamisen vaatimasta yleisyydestä on toki tingitty, ja miksi ei olisi? Kuten sanottua, kirjan esittämiä perusteluja ja koetteluja ei täsmällisiksi todistuksiksi kutsutakaan. Täsmällisyyden vaatimukset keskikoulun matematiikassa eivät voikaan olla yhtä tiukat kuin vaikkapa yliopistomatematiikassa. Pääajatuksena näyttää olevan joka tapauksessa, että teoreemat eivät tule tyhjästä taivaan lahjana, vaan niiden esittäjän on koeteltava väittämäänsä parhain käytössä olevin menetelmin.

Otteita oppikirjasta Geometria I, luku 1 [10]:

> **18. Probl. On määrättävä piste, jonka etäisyydet kahdesta tunnetusta pisteestä ovat määrättyjen janojen suuruiset.**
>
> *Oletus.* Tunnetaan pisteet A ja B sekä janat a ja b.
>
> *Vaatimus.* On määrättävä piste, jonka etäisyys pisteestä A on jana a ja pisteestä B jana b.

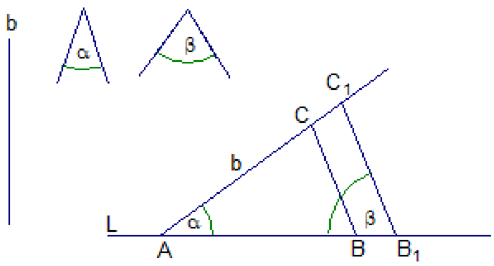


Kuva 3: Kuvio Probleemaan 18

> *Ratkaisu.* Koska ne pisteet, jotka ovat a:n etäisyydellä A:sta, ovat ympyränviivalla, jonka keskipiste on A ja säde = jana a, piirrämme tämän ympyräviivan. Samoin ne pisteet, jotka ovat b:n etäisyydellä B:stä, ovat eräällä ympyrällä. Keskipiste? Säde? Piirrä! Ympyräviivojen yhteiset pisteet ovat vaadittuja pisteitä.
>
> *Tarkastelu.* Pisteitä saadaan kaksi, yksi tai ei yhtään sen mukaan, kuinka monta yhteistä pistettä ympyröillä on.

Tässä esimerkki tilanteesta, jossa probleeman ratkaisusta saadaan teoreema:

> **78. Probl. Piirrä kolmio, jonka kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu tunnetaan.**
>
> *Olet.* Tunnetaan jana b ja kulmat α ja β.
>
> *Vaat.* On piirrettävä kolmio, jossa α ja β ovat kulmina ja β-kulman vastainen sivu = b.
>
> *Ratk.* Piirrämme suoran L (kuva 4) ja sen viereen pisteeseen A kulman α. Kulman toisesta kyljestä erotamme A:sta lähtien janan



Kuva 4: Kuvio Probleemaan 78

> $AC = b$. Siirrämme kulman β mielivaltaiseen pisteeseen B_1 suoran L viereen ja piirrämme C-pisteen kautta sen L-suorasta eroavan kyljen B_1C_1 suuntaisen suoran BC. Syntynyt kolmio ABC on vaadittu kolmio. Miksi kulma B on vaaditun suuruinen?
>
> *Tark.* Ratkaisu on mahdollinen, jos tunnettujen kulmien summa $< 180°$. Probleeman perusteella saamme seuraavan yhtenevyysteoreeman:
>
> **79. Teor. Jos kolmion kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, ovat kolmiot yhtenevät.** [10, s. 46-47]

Viimeisessä eli kolmannessa luvussa (Systemaattinen geometria) alkaa puhe todistamisesta:

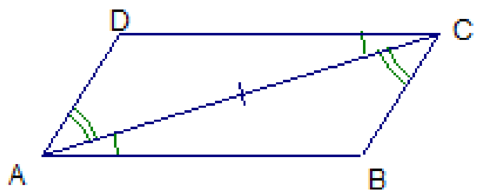
> Edellisissä luvuissa olemme tutustuneet useihin geometrisiin kuvioihin ja esittäneet niiden ominaisuuksia teoreemoina. Tällöin olemme pääasiassa nojautuneet havaintoon. Tämä ei kuitenkaan matematiikassa riitä. Kun seuraavassa jatkamme kuvioiden käsittelyä, todistamme esittämämme teoreemat, ts. osoitamme uuden teoreeman oikeaksi aikaisempien tietojemme perusteella. Näin syntyy geometrinen järjestelmä, jossa jokainen teoreema perustuu aikaisempiin teoreemoihin ja ensimmäiset teoreemat peruslauselmiin eli aksioomiin. Tässä oppikirjassa emme kuitenkaan enää aloita alusta, vaan nojaudumme seuraavassa jo esittämiimme teoreemoihin huolimatta siitä, ettei näitä ole oppikirjassa sitovasti todistettu. [10, s. 75]

Näin kirjassa esiteltiin aksiooman käsite. Muutamin sanoin kuvataan euklidista ja epäeuklidista geometriaa, minkä tässä yhteydessä sivuutan. Kirjan alkupuolen todistuksissa käytettiin termejä oletus, vaatimus ja ratkaisu. Nyt kielenkäyttöä täsmennetään, ja samoista asioista käytetään jatkossa sanoja oletus, väitös ja todistus.

> Teoreemojen käsittelyssä noudatetaan yleisesti seuraavaa järjestystä. Ensin mainitaan oletus, jossa ilmoitetaan minkälaista kuviota käsitellään ja mitä erityisiä seikkoja kuviosta tunnetaan. Sitten mainitaan väitös, ts. mitä kuviosta on todistettava. Kun lähtökohdat näin on esitetty, seuraa todistus, jossa oletuksesta lähtien sopivien teoreemojen avulla päädytään siihen, että esitetty väitös pitää paikkansa. [10, s. 75-76]

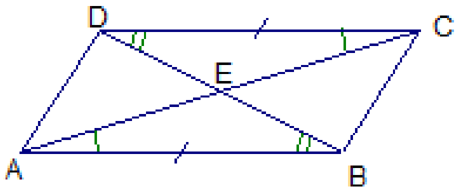
Kun todistamisen periaate on näin selostettu, seuraa kirjassa yli 20 uutta teoreemaa todistuksineen sekä muutamia teoreemoja, joiden todistukset on jätetty oppilaan taakaksi. Itse esitettäviin todistuksiin on toki annettu asianmukaisia vihjeitä. Otteita oppikirjasta Geometria I, luku 3:

> **126. Teor. Nelikulmio on suunnikas, jos sen kaksi vastakkaista sivua on yhtä suurta ja yhdensuuntaista.**
>
> *Olet.* Nelikulmiossa $ABCD$ (kuva 5) on $AB = DC$ ja $AB \parallel DC$.
>
> *Väit.* Nelikulmio on suunnikas.



Kuva 5: Kuvio Teoreemaan 126

> *Tod.* Piirrämme jälleen lävistäjän AC. Oletuksen mukaan on $AB = CD$. Koska $AB \parallel CD$, on $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$. Lisäksi on AC kolmioiden ABC ja CDA yhteinen sivu. Kolmiot ovat siis yhtenevät (sks), joten niiden vastinosina $BC = DA$. Nelikulmion $ABCD$ vastakkaiset sivut ovat siis yhtä suuret, joten nelikulmio on suunnikas, m.o.t.
>
> **127. Teor. Nelikulmio on suunnikas, jos sen lävistäjät puolittavat toisensa.**
>
> *Ohje.* Osoita kuviossa (kuva 6) olevat kolmiot parittain yhteneviksi ja niitten avulla nelikulmion vastakkaiset sivut yhtä suuriksi. Piirrä kuvio ja kirjoita oletus, väitös ja todistus täydellisesti vihkoosi. [10, s. 78]



Kuva 6: Kuvio Teoreemaan 127

Algebrassa ei todistamista harrastettukaan niin paljon kuin tehtiin geometriassa. Lauseita kyllä esitetään ja niitä kutsutaan "lauseiksi", mutta monet niistä ovat luonteeltaan "itsestäänselvyyksiä".

> 23 §Lause 3: Polynomin vastaluku eli "vastapolynomi" saadaan muuttamalla polynomin merkit.
> Esim. $-(x^3 - 2x^2 + 5x - 1) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 1$. [27]

Todistuksen perään ei kysellä, mutta perusteluna edelliselle viitataan aiemmin esitetty lause "Jos yhteenlaskettavien merkit muutetaan, niin summan merkki muuttuu". Täysin ilman todistuksia ei silti selvitty algebrasta keskikoulussa. Harjoitustehtävässä 386 oli oppilaan osoitettava oikeiksi yhtälöt

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Näitä tarkastelemalla saadaan aihe otaksua, että yleisesti on voimassa

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Kaava todistetaan oikeaksi suorittamalla kertolasku yhtälön vasemmalla puolella, mistä lopuksi päätellään seuraavan

> 40 §Lause 3: $a^n - b^n$ on jaollinen $(a-b)$:llä *aina.* [27, s. 60]

4.3 Uusi matematiikka

Matematiikan kouluopetuksen modernisointi levisi maailmalle Yhdysvalloista 1950-luvulla. Uudistamisintoa vauhdittivat matemaattiset, pedagogiset ja poliittiset syyt. Geometrian opetukseen syntyi muutospaineita, kun Eukleideen geometrian aksiomaattinen rakenne todettiin puutteelliseksi [19]. Tämän lisäksi uudistuspaineita antoivat Piaget'n konstruktivistiset ajatukset lasten matemaattisen ajattelun kehittymisestä [20]. Poliittinen ulottuvuus on myös mielenkiintoinen: Neuvostoliiton laukaistua sputnikin vuonna 1957, Yhdysvalloissa pelättiin oltavan koulumatematiikassa rajusti jäljessä Neuvostoliittoa, minkä tutkimukset pian osoittivat tosiasiaksi. [18, s. 120]

Suomessa matematiikan uudistaminen toteutettiin pohjoismaisen yhteistyön hengessä vuosikymmentä myöhemmin. Koulukokeiluja tehtiin uudistetun opetussuunnitelman laatimiseksi 1960-luvun alkupuolella ja vihdoin vuonna 1967 tuli valmiiksi Pohjoismaisen Matematiikan Opetuksen Uudistamistoimikunnan[4] mietintö, jonka pohjalta modernisointi pääsi kunnolla vauhtiin. Mietinnössä todettiin vanhan matematiikan laskentoon, geometriaan ja algebraan rajoitetun oppimäärän puutteelliseksi ajan vaatimuksiin nähden: "Sellainen opetus ei voi ilmeisesti vastata niitä vaatimuksia, joita tänään asetetaan matematiikan opetukselle, jolloin sen pitäisi kohtuullisessa määrin pystyä auttamaan oppilasta valmistumaan elämään ja toimimaan uudenaikaisessa yhteiskunnassa." [25, s. 8]

Vaikka konstruktivismista ei vielä PMOU:n mietinnössä puhutakaan, on sen hengessä jotakin samaa. Pedagogisia muutoksia peräänkuulutetaan ankarasti: "Koulu on avannut ovensa uusille aineille ja opettajan on syytä luopua opetuksen kaikkitietävän johtajan roolista. Se aika on jo ohi, jolloin täysin oikeat tai täysin väärät vastaukset opettajan kysymyksiin olivat leimaa-antavina tunnilla suoritetussa vuoropuhelussa. Opettaja voi pitää virhepäätelmää tai virheellistä yleistystä luonnollisena lähtökohtana matemaattiselle keskustelulle." [25, s. 21]

Konstruktivismia henkii uuden matematiikan pyrkimys tarjota oppilaille aitoja mahdollisuuksia konstruoida matemaattista tietoa itse. Martti Kaikkosen vanhemmille ja opettajille suunnattu tietovihkonen Uusi matematiikka kouluissamme [9] valaisee oppimateriaalillekin asetettuja ihanteita: "On pyritty löytämään työmenetelmiä, jotka tarjoaisivat lapsille tilaisuuden *keksiä itse matematiikkaa.* Tämä ns. keksimismetodi perustuu lähinnä sopivalla tavalla kirjoitettuihin oppikirjoihin."

Matematiikan ja muidenkin aineiden opetuksen tavoitteiden määrittelyssä korostetaan käytännön hyödyn sekä jatko-opintoihin valmistamisen rinnalla ilon ja kauneuden elämyksien saamista aineen parissa työskenneltäessä. Uudistusinnossa kenties sorruttiin hieman ylioptimistiseenkin hurmoshenkisyyteen. Lainaan tässä pitkähkösti PMOU:n mietinnön kappaletta *Työn ilo matematiikan parissa.*

> Suoritettavissa olevan rutiinityön loppuunsaattaminen on koulussa tunnetusti miellyttävänsävyistä työskentelyä. Monet opettajat tuntevat sen hyvän tunnelman, joka vallitsee oppilaiden as-

[4] Tästä lähtien: PMOU

> karrellessa ja loppuunsaattaessa samanlaisten laskutehtävien sarjaa. Tähän vaikuttavat monet lisätekijät: Opettajan kiitos hyvin suoritetusta työstä hyvien arvosanojen muodossa. Kilpailu toverien tai itsensä kanssa. (Ennätänkö 10 kpl ennenkuin...?) Ilo siitä, että hallitsee jotain omin päin jne.
>
> On suuri ero tällä ilolla ja sillä elämyksellä, jonka oppilas voi saada työskennellessään modernien projektien parissa matematiikassa. Tässä ajatellaan oppilaan tuntevan sitä samaa iloa, joka voi olla tutkijalla kun hän on onnistunut löytämään ratkaisun kiintoisaan probleemaan, tai sitä iloa, jota hän voi tuntea muotojen tai ideoiden kauneuden ja symmetrian takia. Oppilaalle voi olla elämys nähdä mallin syntyvän koordinaatistoon graafisena kuvana eräästä relaatiosta; voi olla ihastuttavaa, että voimme antaa matemaattisen teorian, joka pystyy selittämään hyvin koesarjan otettaessa 100 kpl otos astiassa olevia kuulia; voi olla motivoinnin kannalta kannustavaa etsiä luonnollista lukua, jolla on 317 jakajaa. Oppilaalle voi aiheuttaa voimakkaan tunteen se, että voimme todistaa alkulukuja olevan äärettömän paljon. Viimeksi mainittu todistus voidaan suorittaa 7. Kouluvuotena ja senjälkeen on aihetta ihmetellä, että kuitenkin voidaan löytää mielivaltaisen monta peräkkäistä luonnollista lukua, jotka ovat jaollisia, ja ettei tiedetä, onko alkulukukaksikoiden määrä ääretön. Oppilaiden kiinnostus ideoihin ja rakenteisiin, oppilaiden syventyminen probleematilanteisiin, oppilaiden paneutuminen "filosofisiin" kysymyksiin (kuten mikä on piste, mikä on suora tai mitä on todennäköisyys) - kaikki tämä pitäisi saada esiin koulumatematiikassa nykyaikana. [25, s. 32-33]

Työn ilosta puhuttaessa astuu siis todistaminenkin kuvaan. Modernisoidussa opetussuunnitelmaehdotuksessa ei todistamisesta puhuta mitään sen enempää peruskoulun kuin "lähinnä lukion tyyppistä koulumuotoa" olevien 10.-12. kouluvuosien kohdalla. Tästä emme päättele tietenkään, ettei todistamista olisi aiottu harjoittaa eri kouluvuosina kun se tarjoaa suurta iloakin. Todistamista vain ei pidetty opiskeltavana sisältönä sinänsä, vaan yhtenä matemaattisen tiedon esitysmuotona. Selvää oli kuitenkin, että geometriassa, jossa todistamista oli eniten harjoitettu, tultaisiin luopumaan paljosta. Siinä missä geometria oli ennen ollut oma oppiaineensa, nyt ehdotetussa uudessa opetussuunnitelmassa "lukion tyyppisen koulumuodon" edellyttävissä esitiedoissa euklidinen geometria on surkastunut lähinnä muotoon "yksinkertaisten geometristen kuvioiden alkeelliset ominaisuudet tasossa, niiden joukossa Pythagoraan lause". [25, s. 77]

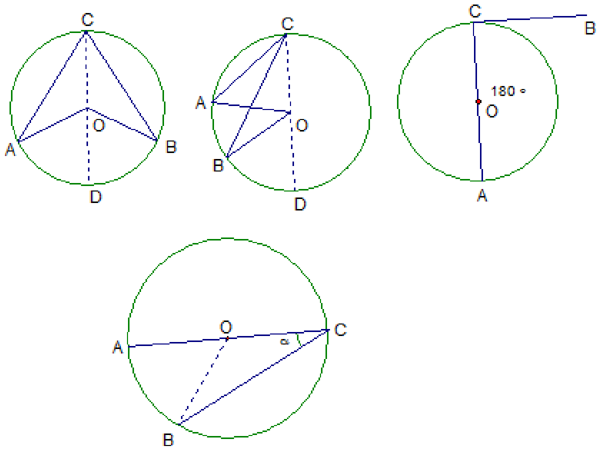
Pääsimme siis uuden matematiikan sisältöihin. Uutta siinä oli joukko-oppi, johon alettiin perehtyä jo ensimmäisenä kouluvuotena; logiikka, johon valmistautuminen alkaisi kolmannella luokalla toden ja epätoden lauseen sekä käsitteiden "ja" sekä "tai" parissa; relaatiot ja funktiot sekä todennäköisyyslaskenta. Uusia sisältöjä tuli siis "nykyajan vaatimusten" vuoksi. Näitä ei kuitenkaan ollut tarkoitus korostaa suhteettoman paljon vanhojen sisältöjen kustannuksella. Korhonen [15] arvelee, että sekä oppikirjatuotantoon liittyvistä kaupallisista syistä että puhtaan uudistusinnon vuoksi uusi oppiaines korostui liiaksi opetuksen kohteena, kun esimerkiksi joukko-opin ja logiikan oli määrä toimia lähinnä apuvälineinä perehdyttäessä matematiikan käsitteisiin täsmällisemmin.

Tarkastelemme seuraavaksi uuden matematiikan ajan oppikirjoja. Vastoin PMOU:n mietinnön haavekuvia työn iloa tuottavista alkulukutodistuksista, sellaisia ei ainakaan painettu Valistuksen Matematiikkaa-kirjasarjan seitsemännen eikä kahdeksannen luokan laajemman tasokurssin oppikirjoihin. Muutenkaan niistä ei löydy paljoa todistamiseen viittaavaa materiaalia. Geometrian osuus on kirjoissa pieni ja esimerkiksi seitsemännen luokan oppikirjassa [24] janan keskinormaali sekä kulman puolittaminen opetetaan konstruoimaan piirrosten avulla tyyliin "aseta harppi tällä tavalla ja tee pienet viivat kuvan osoittamiin kohtiin".

Todistamisen periaatteita ei näissä yläasteen kirjoissa esitellä. Joitakin "osoita laskemalla" -tyyppisiä tehtäviä kirjoissa on merkittynä tavallista vaativammiksi eriytystehtäviksi. Ympyrän geometriasta on annettu tällaiseksi lisätehtäväksi osoittaa kehäkulman suuruuden olevan puolet keskuskulman suuruudesta.

> (21) Osoita, että kehäkulma $ACB(=\alpha)$ on puolet keskuskulmasta AOB.
> Ohje: Tutki, minkälainen kolmio on BOC. Mitä tämän nojalla voit todeta kulmista B ja C. Näin saat kulman BOC asteluvun ja sen avulla kulman AOB asteluvun. [24, s. 150]

Lukion pitkän matematiikan kirjassa odotetusti puhutaan enemmän todistamisesta. Otavan Lukion matematiikka-sarjan kirjassa Pitkä kurssi 1 [1] selostetaan suoran ja epäsuoran todistuksen periaatteet luvussa Joukko-oppia ja logiikkaa. Asia tosiaankin esitetään joukko-opin ja logiikan avulla: Tämän jälkeen kirjassa useat lauseet esitetään todistuksen keralla ja myös harjoitustehtäviksi on annettu todistettavaa kirjan jokaisessa luvussa.



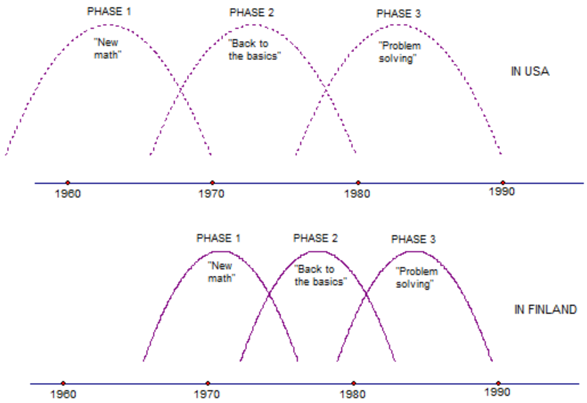
Kuva 7: Kuvio tehtävään 21

4.4 Kohti ongelmakeskeistä matematiikkaa

Uusi matematiikka oli kunnianhimoinen projekti kouluttaa koko väestö arvostamaan matematiikan teoreettista rakennetta. Siitä luovuttiin kuitenkin varsin nopeasti. Tämä vallankumouksellinen aate kaatui osittain omaan mahdottomuuteensa, mutta on myönnettävä, ettei uudelle matematiikalle annettu parhaita edellytyksiä onnistua. Opettajilla, erityisesti luokanopettajilla, ei ollut riittäviä valmiuksia opettaa heille itselleen täysin uusia matematiikan sisältöjä. Joukko-oppia, logiikkaa, relaatioita ja funktioita jouduttiin opettamaan muutenkin uudistuneiden tavoitteiden mukaisesti viikon tai parin kestäneiden kurssien pohjalta. Samaan aikaan uuteen koulujärjestelmään siirryttäessä matematiikan opetustunnit vähentyivät jopa 10-15 % [15, s. 53]. Opetukseen käytettävien tuntien niinkin dramaattinen vähentäminen aiheutti välttämättä oppiaineksen karsimista ja varsinkaan matematiikan soveltamiselle ei aikaa tahtonut riittää. Näin se, mitä vähässä ajassa oli mahdollista opettaa, jäi luonteeltaan liiankin teoreettiseksi matemaattis-loogisilla merkeillä temppuilemiseksi.

Kansainvälisten trendien mukaisesti uutta matematiikkaa seurasi vaihe, jota kutsuttiin back-to-basics –liikkeeksi. Sivuutan tämän vaiheen toteamalla sen olleen lyhytaikainen uudesta matematiikasta luopumisvaihe, jolloin ongelmakeskeinen matematiikka oli jo syntymässä ja haki muotoaan. Kaikki tärkeimmät koulumatematiikkaan liittyvät kansainväliset tendenssit rantautuivat Suomeen useita vuosia sen jälkeen, kun ne olivat jo laajasti toiminnassa maailmalla. Ongelmakeskeisen matematiikan aalto saapui kuitenkin lyhyemmällä viiveellä (ks. kuva 8).

Ongelmakeskeistä matematiikkaa ei pidä ymmärtää uuden matematiikan



Kuva 8: Koulumatematiikan tendenssit [16]

vastavallankumouksena. Jo uuden matematiikan tavoitteisiin kuului oppilaiden valmistaminen kykeneväksi ratkaisemaan ongelmia, joiden muoto tai luonne oli vielä tuntematon. Yhteiskunnan ja tieteiden sekä tietokoneiden kehittyminen enteilivät tarvetta soveltaa matemaattisia keinoja uusilla tavoilla käytännön elämään. Uuden matematiikan ideologiaan sisältyi ajatus, että on opittava yleisiä periaatteita, matematiikan teoreettista rakennetta, jotta sitä voi soveltaa erilaisiin tilanteisiin. Opetustuntien vähentäminen teki kuitenkin mahdottomaksi yhtälön, jossa oppilas sekä hallitsisi riittävästi käsitteistöä ja teoriaa että saisi tarpeeksi mahdollisuuksia soveltaa tietojaan käytäntöön. Kun lisää opetustunteja ei ollut tiedossa, ei ollut muuta mahdollisuutta kuin karsia opetettavaa ainesta. Haapasalokin [3] kysyy: ”Mitä tietoa oppilas soveltaisi, ellei hän ensin hallitse edes käsitteistöön liittyviä perustuntomerkkejä?”

Luultavasti kaikkina aikoina on arvostettu kykyä ratkaista ongelmia sekä soveltaa teoreettista tietoa käytännön pulmiin. Mikä sitten tekee erityisen ongelmanratkaisua painottavasta matematiikasta? Lähestytään tätä kysymystä ensin selvittelemällä, mitä ”ongelman” käsitteellä oikeastaan tarkoitetaan. Pehkonen, Hannula ja Björkqvist [23] nimittävät ongelmaksi tehtävää, jonka ratkaisu vaatii ennestään tunnettujen tietojen yhdistelemistä uudella tavalla. Näin ollen tehtävä, jonka piirteet ovat oppilaalle niin tutut, että hän välittömästi tunnistaa ratkaisuprosessin vanhasta muistista, ei ole ongelma, vaan rutiinitehtävä. Kuitenkaan ei ole aina mielekästä tehdä eroa näiden välillä, sillä voihan se, mikä on yhdelle rutiinitehtävä, olla toiselle ongelma, ja päinvastoin. Vastaavasti voi se, mikä on yhdellä hetkellä ongelma, tulla kokemuksen myötä jossakin vaiheessa rutiiniksi. Takertumatta ”ongelmuuden” suhteellisuuteen, määritellään ongelmanratkaisu prosessiksi, jossa aiemmin opittuja tietoja ja taitoja käytetään uudenlaisissa tilanteissa johonkin tavoitteeseen pääsemiseksi.

Koko ongelmanratkaisun idea on kovin ylimalkainen. Opetussuunnitelmat ovat myös muuttuneet vähemmän yksityiskohtaisiksi. Jääkö siis paikallistasolle opettajien ratkaistavaksi, miten ongelmanratkaisua matematiikassa on toteutettava? Kupari [16] huomauttaa, että ongelmanratkaisusta on kyllä puhuttu opetussuunnitelmissa ainakin uuden matematiikan ajasta lähtien, ja sen painoarvo on jatkuvasti kasvanut. Käytännön ongelmana(!) on ollut se, miten ongelmanratkaisu siirtyisi opetussuunnitelmien tavoitelausumista varsinaiseen opetustyöhön. Ei ole ehkä selvää, mikä on syytä ja mikä seurausta, mutta oppilaiden arviointimenetelmät ovat muuttuneet hyvin vähän. Perinteiset kokeet eivät vastaa kovin hyvin ongelmanratkaisun ihannetta. Koetehtäviä laadittaessa varmasti vältellään tulkinnanvaraisuutta, jota avoimet ongelmatehtävät helposti voisivat sisältää. Oppilaan itse ongelmana kokema tilanne voi olla hieno lähtökohta oppimiskokemukselle, jota opettaja taitavasti ohjailee, mutta kun on pantava arvosanoja todistukseen, vanhat hyväksi koetut menetelmät on vaikeasti syrjäytettävissä. Tilanne kuulostaa kovin tutulta konstruktivismin yhteydestä: onko mahdollista uskoa samaan aikaan matemaattisen tiedon objektiivisuuteen ja konstruktivistiseen oppimiseen? Entä miten näihin suhtautuu ongelmanratkaisu? Matemaattinen totuus on mitä se on, eikä se muutu sen mukaan, miltä se oppijasta vaikuttaa. Ongelmanratkaisu ja konstruktivistiset ideat ovat keskenään veljiä. Ne tulisi ymmärtää keinoina saavuttaa oppimista, vaikka sitten objektiivisenkin tiedon oppimista. Ei siis ole matematiikan opetuksen tarkoitus opettaa oppilaille asioita ongelmanratkaisusta, vaan opettaa matematiikkaa ongelmanratkaisua hyväksikäyttäen.

Matemaattisen todistamisen ystäville siirtyminen ongelmakeskeiseen koulumatematiikkaan ei ollut kovin edullinen. Inkilän ja Keskitalon [7] tutkielmassa Malisen [19] mukaan todettiin karu muutos: 1970-luvulla lukion laajan kurssin oppikirjoissa lähes kaikki lauseet oli todistettu ja todistustehtäviäkin löytyi runsaasti aiheesta kuin aiheesta, mutta vuoden 1985 opetussuunnitelmaa noudattavissa kirjoissa oli enää noin 30 % lauseista todistettu. Yleisen matematiikan oppikirjoissa todistettujen lauseiden osuus oli tällä aikavälillä romahtanut 70 prosentista lähes nollaan. Malinen katsoo todistamisen alasajoon olleen monia syitä kuten tuntimäärän pieneneminen, käytännön sovellusten osuuden lisääminen ja todistamisen kokemisen hankalaksi. Tämä on luonnollisesti heijastunut myös yliopistoissa matematiikan opintoja aloittaviin opiskelijoihin: kokemusta todistusajattelusta saa nykyisen lukiomatematiikan pohjalta vähemmän kuin ennen.

5 Todistaminen nykyisissä oppikirjoissa

Kääntäkäämme katseemme nyt niihin matematiikan oppikirjoihin, joita käytetään nykyään. Oppikirjat eivät ole aivan samanlaisia keskenään, mikä viime kädessä johtuu opetussuunnitelman perusteiden luonteesta. Yksityiskohtia oppiaineksen sisällöistä on siinä varsin vähän. Näin jää yksityiskohtien harkinta opetushenkilöstön vastuulle ja toisaalta tätä harkintaa saattaa osaltaan ohjata oppikirjojen laatijoiden tulkinta opetussuunnitelmasta. Pääasiassa oppi todistamisesta on sijoitettu lukion pitkän matematiikan kurssiin MAA11 Lukuteoria ja logiikka. Tämän kurssin oppikirjoista löytyykin paljonkin asiaa todistamisesta: koko todistamisen ideasta ylipäätään sekä erilaisista todistusmenetelmistä. Tässä ei varsinaisesti pyritä vertailemaan eri oppikirjojen kattavuutta aiheesta, vaan kootaan yhteenveto siitä, mitä kirjoilla yhdessä on sanottavaa todistamisesta. Tarkasteluun on otettu kolmen kirjasarjan kirjat: Pitkä matematiikka 11 [11], Matematiikan taito 11 [4] ja Lukion Calculus 6 [8].

5.1 Johdatusta todistamiseen

Johdannoksi matemaattiseen todistukseen kirjassa Pitkä matematiikka 11 esitetään seuraava ongelma ratkaisuineen: "Matti kertoo kuulleensa, että uudella supertietokoneella on löydetty kaksi paritonta kokonaislukua, joiden summa on pariton. Liisa tietää heti, että Matti on joutunut aprillipilan kohteeksi. Kuinka Liisa saa Matin vakuuttumaan, että tuollaisten lukujen löytäminen on mahdotonta?" [11]

> **Ratkaisu.** Liisan on esitettävä Matille seuraavan lauseen todistus:
> *Lause.* Oletetaan, että kokonaisluvut m ja n ovat parittomia. Tällöin kokonaisluku $m+n$ on parillinen.
> Merkitään $P(m)$ lausetta "m on pariton". Todistettava lause koskee kaikkia kokonaislukuja. Lauseen formalisointi kokonaislukujen joukossa on
>
> $$\forall m \forall n((P(m) \wedge P(n)) \rightarrow \neg P(m+n)).$$
>
> On siis todistettava, että implikaatio
>
> $$(P(m) \wedge P(n)) \rightarrow \neg P(m+n)$$
>
> on tosi kaikilla kokonaisluvuilla m ja n.

> Implikaation totuustaulun mukaan implikaatio on tosi silloin, kun etujäsen on epätosi, ja silloin, kun etujäsen ja takajäsen molemmat ovat tosia. Riittää siis, kun todistetaan, että takajäsen $\neg P(m+n)$ on tosi aina silloin, kun etujäsen $P(m) \wedge P(n)$ on tosi.
>
> Lause voidaan siis todistaa seuraavasti: Oletetaan, että m ja n ovat parittomia, ja päätellään väitös $m + n$ on parillinen.
>
> Liisan on todistettava, että oletuksesta "m ja n ovat parittomia" voidaan päätellä väitös "$m + n$ on parillinen". [11, s. 75]

Edellä esitetty esimerkki aloittaa kirjassa kappaleen "Matemaattinen todistus". Kuten huomataan, lähestymistapa todistamiseen om omaksuttu logiikasta. Pidän tätä johdantoa melko teknisenä, mutta todistamisen perimmäinen ajatus tulee selkeämmäksi kappaleen loppua kohti. Kirja käsittelee todistustehtäviä, jotka voidaan esittää implikaatioina $A \rightarrow B$, missä oletetaan A ja osoitetaan, että B pitää paikkansa. Menetelminä esitellään suora todistus, käänteinen todistus eli kontrapositiotodistus sekä yleinen ristiriitatodistus. Ratkaisu erottaa kontrapositiotodistus erikoistapaukseksi ristiriitatodistuksesta kirjassa Pitkä matematiikka 11 [11] on ainutlaatuinen tutkittujen kirjojen joukossa. Sen hyödyllisyyttä en käy tässä pohtimaan.

Lukion Calculus lähestyy todistamista näkökulmasta, joka on sukua tutkielman alussa alaluvussa 2.1 esitetyille Aristoteleen ajatuksille:

> Uudet käsitteet määritellään aikaisempien avulla. Käsitteisiin liitetään lauseita, ja lauseet voidaan jakaa kahteen ryhmään. Toinen ryhmä muodostuu rajoitetusta määrästä *perustotuuksia* eli *aksioomeja*. Ne ovat sellaisenaan uskottavia, "itsestään selviä", eikä niitä todisteta. Toisen ryhmän puolestaan muodostavat *teoreemat*. [8, s. 38]

Todistusmenetelmistä on Lukion Calculuksessa esitelty suora todistus, vastaesimerkin käyttö, epäsuora todistus ja induktiotodistus. Vastaesimerkistä ja induktiosta ei puhuta kirjassa Pitkä matematiikka 11 [11] mitään. Lukion Calculus korostaa vastaesimerkin rajallista käyttöalaa, nimittäin se soveltuu vain epätosien väitteiden kumoamiseen. Ja mainituksi tulee myös se, ettei vastaesimerkin löytymättömyys todista mitään [8, s. 39 -45]. Kappale induktiotodistuksesta on kirjan tekijöiden ehdotuksen mukaan käytävä, mikäli vain aikaa sille riittää. Kaikki muu aineisto todistamisesta kuuluu ydinkappaleisiin, jotka kuuluvat joka tapauksessa kurssin sisältöön. Myös Matematiikan taito [4] antaa saman aseman induktiotodistukselle, koska "induktio ei opetussuunnitelman mukaan kuulu kurssin keskeisiin sisältöihin".

Tarkastellut oppikirjat ovat siis järjestäneet matemaattisen todistuksen opetuksen kokoelmaksi erilaisia todistusmenetelmiä. Käymme läpi nämä menetelmät.

5.2 Suora todistus

Kirja Pitkä matematiikka [11] kiteyttää suoran todistuksen ajatuksen seuraavasti:

> Implikaatio $A \to B$ on tosi silloin, kun A on epätosi, ja silloin, kun A ja B ovat molemmat tosia. Siis sen todistamiseksi, että implikaatio $A \to B$ on tosi, riittää, kun osoitetaan, että B on tosi silloin, kun A on tosi. Tällaista todistusmenettelyä sanotaan *suoraksi todistukseksi.* [11]

Jatkoksi alaluvussa 5.1 esitetylle johdatukselle todistamiseen, kirja Pitkä matematiikka todistaa suorasti lauseen "Kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen."

> *Oletus.* Kokonaisluvut m ja n ovat parittomia.
>
> *Väitös.* $m + n$ on parillinen.
>
> *Todistus.* Oletuksen perusteella on olemassa sellaiset kokonaisluvut k ja l, että $m = 2k + 1$ ja $n = 2l + 1$. Lasketaan lukujen m ja n summa.
>
> $$\begin{aligned} m + n &= (2k + 1) + (2l + 1) \\ &= 2k + 2l + 2 \\ &= 2(k + l + 1) \end{aligned}$$
>
> Koska $k + l + 1$ on kokonaisluku ja $m + n = 2(k + l + 1)$, niin luku $m + n$ on parillinen. $\square$ [11, s. 78]

5.3 Vastaesimerkki

Vastaesimerkin käyttö epätoden väitteen kumoamiseksi on esitetty omana menetelmänään tutkituista kirjoista vain Lukion Calculuksessa, joka kuvailee menetelmää seuraavasti:

> Ellei lauseen totuusarvoa tunneta, lause voidaan yrittää todistaa oikeaksi tai vääräksi. Oletetaan, että on annettu tutkittavaksi muotoa $A \to B$ oleva lause. Jos pystytään osoittamaan, että lause $A \to \neg B$ on tosi, niin edellinen lause on epätosi, koska näillä kahdella lauseella ei voi olla samaa totuusarvoa. [8, s. 41]

Tätä tekniikkaa havainnollistetaan tutkimalla väitettä ”Jos n on luonnollinen luku, niin $n^2 - n + 41$ on alkuluku.”

> Lause on muotoa $A \to B$. Kokeilu luonnollisilla luvuilla $0, 1, 2, \ldots$ viittaisi siihen, että väite on tosi. (Kokeile!) Mutta vaikka kokeilu antaisi toistuvasti jaottoman luvun, se ei vielä osoittaisi väitettä oikeaksi. Jos sitä vastoin löydetään yksikin luonnollinen luku n, jolle $n^2 - n + 41$ ei ole alkuluku, väite on väärä eli annettu lause on epätosi. Huomataan, että kun $n = 41$, niin $n^2 - n + 41$ saa arvon 41^2, joka ei ole alkuluku. Luku 41 on vastaesimerkki, jolle päättely $A \to \neg B$ on tosi. Näin ollen alkuperäinen lause $A \to B$ on epätosi. [8, s. 41]

Lukion Calculuksen [8] selostus vastaesimerkistä on varsin heikko. Siinä opetetaan suorastaan virheellisesti, että lauseiden $A \to B$ ja $A \to \neg B$ totuusarvot eivät voi olla samat. Selvästi molemmat implikaatiot ovat tosia, jos A on epätosi. Ilmeisesti kirjan tekijät ovat tässä ajatelleet, että A on joka tapauksessa tosi, vaikka tätä ei ole mitenkään ilmaistu. Sen osoittamiseksi, että $A \to B$ on epätosi, olisi pikemminkin tutkittava lausetta $A \land \neg B$, sillä näillä kahdella lauseella ei voi olla samaa totuusarvoa. Lausetta $A \to \neg B$ ei tässä tarkastelussa tarvita.

5.4 Epäsuora todistus

Kirjassa Pitkä matematiikka epäsuora todistaminen on jaettu kahteen tyyppiin: käänteinen todistus ja yleinen ristiriitatodistus. Kummassakin tutkitaan lausetta, joka on muotoa $A \to B$. Käänteinen todistus tehdään osoittamalla, että implikaatio $\neg B \to \neg A$ on tosi, käyttämällä hyväksi vain vastaoletusta $\neg B$. Tätä kirjassa kutsutaan myös *kontrapositiotodistukseksi.* Yleinen ristiriitatodistus, jota kutsutaan myös nimellä *reductio ad absurdum* poikkeaa sikäli kontrapositiotodistuksesta, että siinä osoitetaan implikaatio $\neg B \to \neg A$ todeksi käyttämällä hyväksi paitsi vastaoletusta $\neg B$, myös oletusta A. [11, s. 78-83]

Tällaista eroa ei ole katsottu aiheelliseksi tehdä kirjassa Lukion Calculus. Siinä puhutaan epäsuorasta todistuksesta eli ristiriitatodistuksesta eli käänteisestä todistuksesta eli kontrapositiotodistuksesta [8, s. 43]. Epäsuoran todistamisen periaate esitetään seuraavalla tavalla:

> Epäsuorassa todistuksessa väite osoitetaan oikeaksi näyttämällä, että mikäli se ei pitäisikään paikkaansa, jouduttaisiin *ristiriitaan.* Tällöin ristiriidalla tarkoitetaan mitä tahansa asiantilaa, joka tiedetään vääräksi tai mahdottomaksi aikaisemman tiedon nojalla.

> Todistus alkaa niin, että tehdään *vastaväite* eli *antiteesi* olettamalla, että väite on väärä. Kun sitten näytetään, että tämä lähtökohta johtaa ristiriitaan, täytyy vastaväitteen olla paikkansa pitämätön ja siis alkuperäisen väitteen oikea. [8, s. 42]

Esimerkki epäsuorasta todistuksesta edelleen saman kirjan mukaan: On todistettava, että jos $a^2 - 3a + 2 < 0$, niin $a > 0$.

> *Oletus:* $a^2 - 3a + 2 < 0$
> *Väite:* $a > 0$
> *Todistus:* Tehdään vastaväite eli oletetaan, että $a \leq 0$. Silloin $-a \geq 0$, joten myös $-3a \geq 0$. Mutta koska $a^2 \geq 0$ ja $2 > 0$, niin $a^2 - 3a + 2 \geq 0$. Saatu tulos on ristiriidassa oletuksen kanssa. Näin ollen vastaväite on väärä ja siis alkuperäinen väite oikea. [8, s. 43]

5.5 Induktiotodistus

Matemaattiseen induktioon johdatellaan kirjassa Matematiikan taito aluksi vähemmän matemaattisilla esimerkeille, joissa tapahtuu induktiivista päättelyä. Tällainen on mm. kuviteltu ääretön jono ihmisiä, jossa ensimmäisen tietoon tulee jokin salaisuus. Tämä kertoo salaisuuden jonossa seuraavalle, ja jokainen kertoo sen edelleen seuraavalle. Päätellään, että kaikki jonon ihmiset saavat salaisuuden tietoonsa. [4, s. 41]

Muutaman vastaavan kaltaisen esimerkin jälkeen induktioperiaate selitetään hieman täsmällisemmin:

> Olkoot $p_0, p_1, \ldots$ (tai $p_m, p_{m+1}, \ldots$, missä $m \in \mathbb{Z}$) lauseita. Olkoon tehtävänä todistaa, että lause p_n on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}$ (tai kaikilla $n \in \{m, m+1, \ldots\}$). Menetellään seuraavasti.
>
> 1. (Perusaskel). Osoitetaan, että p_0 on tosi (tai p_m on tosi).
> 2. (Induktioaskel). Osoitetaan, että p_k:n totuudesta aina seuraa p_{k+1}:n totuus. Toisin sanoen tehdään *induktio-oletus*, että p_n on tosi arvolla $n = k$, ja todistetaan *induktioväite*, että p_n on tällöin tosi arvolla $n = k + 1$. (Vaihtoehtoinen induktioaskel on osoittaa, että p_{k-1}:n totuudesta aina seuraa p_k:n totuus.)
> 3. (Johtopäätös). Tämän jälkeen alkuperäinen väitös seuraa induktioperiaatteesta. [4, s. 44]

Tämän perään induktioperiaate vielä formalisoidaan logiikan kielellä esitysmuotoon:

$$\frac{\begin{array}{l} p_0 \\ \forall k \in \mathbb{N} : (p_k \to p_{k+1}) \end{array}}{\forall n \in \mathbb{N} : p_n}$$

Koska induktio opetetaan lukuteorian kurssilla, sitä halutaan soveltaa erityisesti jaollisuuden tutkimiseen. Esimerkkejä tästä on annettu ja niistä esitetään tässä yksi. On todistettava, että aina kun $n \in \mathbb{N}$, on $n^2 + n$ parillinen.

> Olisi helpointa kirjoittaa $n^2 + n = n(n + 1)$ ja todeta, että oikean puolen tekijöistä toinen on pariton ja toinen parillinen, joten niiden tulo on parillinen. Tarkkaan ottaen tämäkin yksinkertainen asia vaatisi induktiotodistuksen, sillä sen osoittamisessa, että kaikki kokonaisluvut ovat joko muotoa $2p$ tai $2p+1$, on käytettävä induktiota.
>
> Käsittelemme tehtävämme induktiolla. Merkitsemme $f(n) = n^2 + n$. Nyt $f(0) = 0$ on parillinen. Teemme induktio-oletuksen, että $f(k)$ on parillinen. Toisin sanoen on olemassa sellainen $p \in \mathbb{N}$, että $f(k) = 2p$. Tällöin
>
> $$\begin{aligned} f(k+1) &= (k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 \\ &= k^2 + k + 2(k+1) \overset{IO}{=} 2p + 2(k+1) = 2(p + k + 1), \end{aligned}$$
>
> joten $f(k + 1)$ on parillinen. Siis induktioväite ja samalla tehtävämme väite on todistettu. [4, s.46- 47]

Käytännössä kaikki oppi matemaattisesta todistamisesta on keskitetty yhteen pitkän matematiikan kurssiin, joka kaiken lisäksi on valinnainen kurssi. On vaikeaa arvioida, kuinka suuri osa lukiolaisista suorittaa kyseisen kurssin. Luultavasti alle puolet, mutta kuitenkin suurin osa koko pitkän kurssin suorittajista, mikä vastannee n. 20-30 % väestöstä.

6 Korealainen koulumatematiikka

6.1 Korealainen koulutusjärjestelmä

Pyrin esittelemään korealaista koulujärjestelmää sekä erityisiä maakohtaisia koulutuksen erityispiirteitä pintapuolisesti. On nimittäin syytä tuntea edes jossakin määrin sitä koulumaailmaa, jota tarkastellaan matematiikan ja todistamisen näkökulmasta. Näin voidaan katsoa tutkimuskohdetta hieman laajemmasta perspektiivistä, eikä kokonaisuus pakene näkökentästämme keskittäessämme tarkkailumme yksityiskohtiin. Kuten sanottua, en paneudu korealaiseen koulujärjestelmään syvällisesti, vaan tyydyn kuvailemaan sitä siinä määrin kuin on välttämätöntä, jotta voidaan ymmärtää mistä puhumme, kun puhumme korealaisesta koulutuksesta.

Itsenäistyttyään Japanin vallasta vuonna 1945, Korea alkoi kehittää voimakkaasti koulutusjärjestelmäänsä. Ensin tuli kuusivuotinen pakollinen ilmainen peruskoulutus, jonka täytäntöönpano tosin viivästyi Korean sodan vuoksi, mutta se toteutui 1950-luvun loppuun mennessä. Vuonna 1959 jo 96 % kouluikäisistä lapsista oli peruskoulutuksen piirissä. Alakoulun muuttumisesta pakolliseksi oli seurauksena tarve järjestää ylempiä koulutuksen muotoja entistä suuremmille oppilasmäärille. Yläkoulun oppilasmäärät kolminkertaistuivat vuosikymmenessä kun päästiin 1960-luvulle. Koulujärjestelmä oli tuskin valmis laajentumaan niin räjähtävällä nopeudella. Luokkakoot kasvoivat kohtuuttoman suuriksi, pätevistä opettajista tuli puutetta ja oppilaiden välinen kilpailu ylemmille koulutusasteille pääsemiseksi kävi ylikuumana. Vuonna 1968 luovuttiin yläkoulun pääsykokeista ja sen myötä pääsy yläkouluun oli avoin kaikille alakoulun suorittaneille. Ei ollut yllättävää, että tämän jälkeen kilpailu lukiokoulutukseen pääsystä tuli entistä ankarammaksi. Kolmevuotinen yläkoulu tuli pakolliseksi ensin maaseudulla vuonna 1985, minkä jälkeen pakollisuus astui voimaan vähittäin koko maassa vuoteen 2004 mennessä. [21]

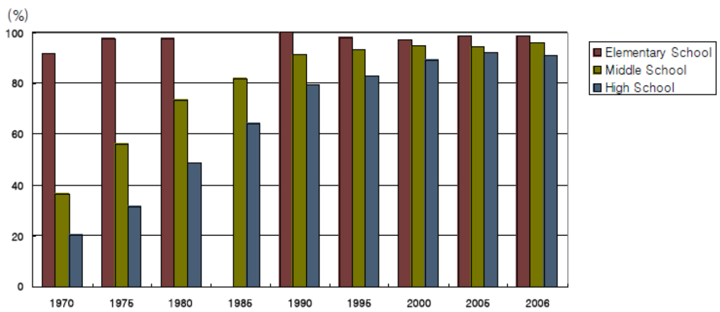
Oppilas- ja opiskelijamäärien kasvu heijastui kaikille koulutusasteille. Yliopistoissa opiskelevien määrä kasvoi vuoden 1945 vajaasta 8000 opiskelijasta yli 100 000 opiskelijaan vuoteen 1960 mennessä. Kymmenen vuotta myöhemmin luku oli jo 200 000 ja toiset kymmenen vuotta myöhemmin, siis vuonna 1980, maan yliopistoissa opiskeli jo yli 600 000 ihmistä. Tilastot kertovat (kuva 9), että huima kasvu on jatkunut aina siitä eteenpäin. [21, s. 20]

Väestön koulutusaste on nykyään sangen korkea. Pakollisten yhdeksän kouluvuoden jälkeen jonkinlaiseen keskiasteen koulutukseen siirtyvät lähes kaikki peruskoulun käyneet. Kuva 10 esittää peruskoulun ala- ja yläasteiden sekä lukion tai muun vastaavan koulutusmuodon piirissä olevaa osuutta väestöstä.

Table 2-6. Expansion of Higher(University / College) Education

Classification \ Year	1945	1960	1970	1980	1990	2000	2005
Schools	19	85	232	357	556	1,184	1,473
Teachers	1,490	3,808	10,435	20,900	41,920	79,136	68,448
Students	7,819	101,041	201,436	601,494	1,490,809	3,363,549	3,580,301

Kuva 9: Yliopistokoulutuksen kasvu [21]



Kuva 10: Koulutuksen yleistyminen Koreassa [12]

Huomattava piirre korealaisessa koulutuksen tarjonnassa on yksityisten oppilaitosten olemassaolo julkisten vaihtoehtona. Yksityisissä oppilaitoksissa kävi Korean opetusministeriön 2006 tilastojen mukaan 1,2 % ala-asteen oppilaista, 18,7 % yläasteen oppilaista, 48,1 % lukion ja ammattikoulujen opiskelijoista, ja 74,3 % korkeamman asteen opiskelijoista. Huomionarvoista on yksityisen sektorin selvästi kasvava osuus aina korkeammalle koulutustasolle siirryttäessä. [21]

Koulutuksen korkeasta tasosta antaa osviittaa mm. PISA-tutkimukset. Etelä-Korea saavutti vuoden 2006 tutkimuksessa tilastollisesti merkittävästi OECD-maiden keskiarvoja korkeammat tulokset niin luonnontieteissä, lukutaidossa kuin matematiikassakin. Lukutaidossa Etelä-Korean tulos oli kaikista mukana olleista maista korkein. Matematiikassa Korea sijoittui neljän parhaan joukkoon yhdessä Taiwanin, Suomen ja Hong Kongin kanssa. [22]

6.2 Matematiikan opetussuunnitelma ja oppikirjat

Teemme nyt katsauksen vuonna 2007 ilmestyneeseen, vuodesta 2009 alkaen käytettyyn versioon korealaisesta matematiikan opetussuunnitelmasta. Opetussuunnitelma on oppiainekohtainen ja normatiivinen kuvaus oppiaineksesta, jota opetetaan pakollisessa peruskoulussa luokilla 1– 9 sekä sitä seuraavassa kolmivuotisessa lukiokoulutuksessa. Näiden sisällöt ovat yhteiset koko sille väestölle, joka käy peruskoulun ja jatkaa lukioon. Lukioiksi kutsutaan tässä sekä akateemisemmin suuntautuneita yleislukioita, jotka lähinnä valmistavat korkeamman asteen opintoihin, että pikemminkin ammattikoulutukseen suuntaavia teknisiä lukioita. Vuonna 2006 opiskelijoita yleislukioissa oli n. 1,3 miljoonaa ja teknisissä lukioissa n. 0,5 miljoonaa. [21]

Matematiikan opetettavat asiat on jaoteltu eri osa-alueisiin kullakin kouluasteella. Ala-asteella jako on seuraava: Luvut ja laskeminen, Kuviot, Mittaaminen, Todennäköisyys ja tilastot, Ongelmanratkaisu. Yläasteella ja lukion ensimmäisellä luokalla on oppiaineksen jako seuraava: Luvut ja laskeminen, Algebra, Funktiot, Todennäköisyys ja tilastot, Geometria. [14]

Lukion toisesta vuodesta lähtien matematiikkaa opiskellaan opiskelijan suuntautumisesta riippuen enemmän tai vähemmän. Yleislukioissa kaikille pakollisena on vielä ”Matematiikka I”, joka sijoittuu toisen ja kolmannen lukiovuoden ajalle. Enemmän matematiikan opiskeluun suuntautuneille on tarjolla ”Matematiikka II”, ja muita valinnaisia jaksoja erityisesti differentiaali- ja integraalilaskennasta sekä tilastotieteestä. Jakso ”Matematiikka I” pitää sisällään aiheet: Matriisit ja graafit, Eksponentti- ja logaritmifunktiot, Lukujonot, Lukujonon raja-arvo. ”Matematiikka II” koostuu seuraavista osioista: Yhtälöt, Epäyhtälöt, Trigonometriset funktiot, Funktion raja-arvo, Derivaatta. [14]

Kunkin aihealueen kohdalla on ilmoitettu tärkeimmät oppimistavoitteet, oleellinen terminologia sekä joitakin notaatioon liittyviä seikkoja erikseen jokaiselle luokka-asteelle, minkä lisäksi myös ehdotuksenluonteisia ohjeita opettajille on annettu liittyen joidenkin asioiden opettamiseen. Seuraavien alaotsikkojen alta löytyy poimintoja sellaisista opetussuunnitelman kohdista, jotka liittyvät todistamiseen. Näiden yhteydessä tarkastellaan, millä tavalla asioita esitetään oppikirjoissa.

6.2.1 Todistamisen periaate

Todistamiseen tutustutaan ensimmäisen kerran yläasteen geometrian yhteydessä. Yläasteen toisen luokan eli kaikenkaikkiaan kahdeksannen luokan matematiikkaan kuuluu geometrian alueeseen mm. seuraavia oppimistavoitteita:

> Kolmioiden ja nelikulmioiden ominaisuuksista
>
> 1. On ymmärrettävä väitteen ja todistuksen merkitys.
> 2. On osattava todistaa kolmion ja nelikulmion ominaisuuksia käyttämällä kolmion määräämiseen riittäviä ehtoja. [14, s. 36]

Oppi todistamisesta alkaa siis geometriasta hyvin paljolti samaan tapaan kuin Suomessa ainakin vielä vanhan matematiikan aikoihin. Malli on Eukleideelta, mutta koulumatematiikka ei mene ylenpalttiseksi todistamisintoiluksi. Todistamisen periaatteisiin tutustutaan siis jo kahdeksannella luokalla, mutta todistukset ovat helpohkoja eikä niitä esitetä monenkaan lauseen yhteydessä matemaattisen täsmällisyyden vuoksi, vaan pikemminkin itse todistamisen ideaan tutustumisen vuoksi. Opetussuunnitelman kohtaan kolmioiden ja nelikulmioiden ominaisuuksista liittyy seuraavat otteet oppikirjasta ”Yläasteen matematiikkaa 2”. [28]

> Väite ”vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret” pitää paikkansa. Se voidaan osoittaa käyttämällä tietoa oikokulman asteluvusta 180°. Oheisessa kuvassa [Huom. kuva jätetty pois] kaksi suoraa AC ja BD leikkaavat pisteessä O, ja oikokulman suuruuden perusteella:
>
> $$AOB + BOC = 180^\circ \tag{1}$$
> $$BOC + COD = 180^\circ \tag{2}$$
>
> Kohdista (1) ja (2) saadaan
>
> $$AOB + BOC = BOC + COD$$

siis $AOB = COD$. Näin ollen vastakkaiset kulmat ovat yhtäsuuret.

Tällaista oletusten sekä jo tiedettyjen ominaisuuksien perusteella tehtävää väitteiden paikkansapitävyyden selvittämistä kutsutaan todistamiseksi.

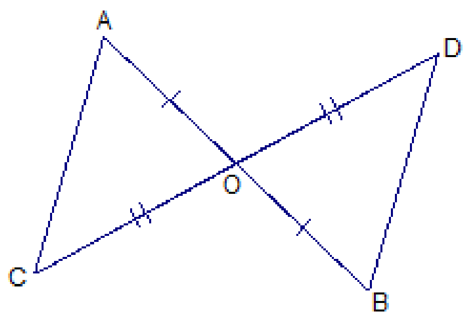
Esimerkki 1 Oheisessa kuvassa (kuva 11) kaksi janaa AB ja CD leikkaavat pisteessä O. Todista, että $AC = BD$, jos $OA = OB$ ja $OC = OD$.

Oletus: Kaksi janaa AB ja CD leikkaavat pisteessä O, $OA = OB$, $OC = OD$.

Pääteltävä: [5] $AC = BD$.

Todistus: Kolmioille ACO ja BDO pätee

$$OA = OB \tag{1}$$
$$OC = OD \tag{2}$$



Kuva 11: Kuvio esimerkkiin 1

Vastakkaisten kulmien yhtäsuuruuden perusteella

$$AOC = BOD \tag{3}$$

Kohtien (1), (2) ja (3) mukaan kolmioissa on kaksi paria yhtäpitkiä sivuja sekä yksi kulmista tiedetään yhtäsuuriksi, joten $ACO \cong BDO$. Siis $AC = BD$.

Tietoa vastakkaisten kulmien yhtäsuuruudesta ja kolmion kulmien summasta käytetään usein todistettaessa monikulmioiden ominaisuuksia. Tällaisia jo aiemmin todistettuja väitteitä kutsutaan lauseiksi.

[5] Alkuperäisen tekstin sana *kyollon* tarkoittaa johtopäätöstä.

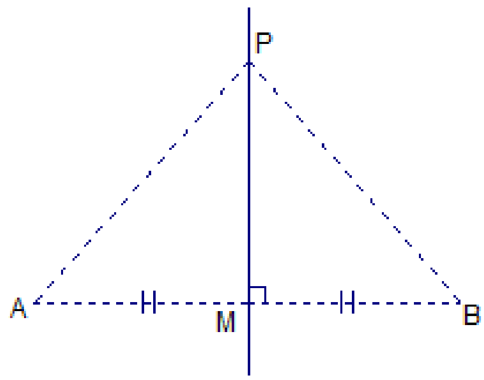
Tehtävä 5 Seuraavassa on esitetty todistus väitteelle ”Etäisyydet janan AB keskinormaalilla sijaitsevasta pisteestä P janan AB päätepisteisiin ovat yhtäsuuret.” Täydennä puuttuvat kohdat.

Oletus: M on janan AB keskipiste, $PM \perp AB$, ja $AM = \ldots$

Pääteltävä: $\ldots = PB$

Todistus: Kolmioista PAM ja PBM tiedetään

$$AM = \ldots \text{ (oletus)} \quad (1)$$
$$\angle PMA = \angle PMB = 90° \text{ (oletus)} \quad (2)$$
$$\ldots \text{ on yhteinen sivu} \quad (3)$$



Kuva 12: Kuvio tehtävään 5

Kolmioilla on kohtien (1), (2), ja (3) mukaan keskenään kaksi yhtäpitkää sivua ja yksi yhtäsuuri kulma, joten

$$PAM = \ldots$$

Siis $PA = PB$. [28, s. 198-202]

6.2.2 Epäsuora todistus ja vastaesimerkki

Epäsuoran todistamisen idea esitetään lukion ensimmäisellä luokalla. Silloin opitaan deduktiivista päättelyä tutkimalla mm. välttämättömän ja riittävän ehdon sekä kontraposition ideaa. Ehkä hieman erikoisesti tämä esiintyy osiossa ”Luvut ja laskeminen”. Oppimistavoitteet on kirjattu opetussuunnitelmassa seuraavasti:

Propositioista

1. On ymmärrettävä proposition ja ehtojen merkitys.
2. On ymmärrettävä väitteen ja sen kontraposition idea.
3. On ymmärrettävä välttämättömän ehdon ja riittävän ehdon ideat. [14, s. 40]

Nyt tarkastelemme huolellisesti, miten oppikirja ”Lukion matematiikkaa” [29] toteuttaa yllämainitun oppimistavoitteen 2 eli miten se opettaa kontraposition idean. On huomattava, että joukko-opin peruskäsitteistöä on opetettu aiemmin, ja sitä myös hyödynnetään tässä yhteydessä. Johdannoksi tutkitaan kasvien joukkoja ja tehdään niitä koskevia väittämiä. Kasvien luokittelu on onneksi annettu, eikä niitä tarvitse tuntea ennestään.

> Siemenkasvit jaetaan kahteen luokkaan, paljassiemenisiin ja koppisiemenisiin kasveihin, joista koppisiemeniset yhä jaetaan kahteen alaluokkaan, yksisirkkaisiin (esimerkiksi ruusu, krysanteemi) ja kaksisirkkaisiin (esimerkiksi riisi, ohra, bambu) kasveihin. Tarkastellaan seuraavien väitteiden totuusarvoja.
>
> 1. Jokainen kaksisirkkainen kasvi on koppisiemeninen.
> 2. Jokainen koppisiemeninen kasvi on kaksisirkkainen.
> 3. Jokainen kasvi, joka ei ole kaksisirkkainen, ei myöskään ole koppisiemeninen.
> 4. Jokainen kasvi, joka ei ole koppisiemeninen, ei myöskään ole kaksisirkkainen.
>
> Kaikki kaksisirkkaiset kasvit ovat koppisiemenisiä, mutta kaikki koppisiemeniset kasvit eivät ole kaksisirkkaisia. Lisäksi kasvi, joka ei ole kaksisirkkainen, voi silti olla yksisirkkainen koppisiemeninen kasvi, mutta kasvi, joka ei ole koppisiemeninen, ei voi olla kaksisirkkainen. Siis väitteet 1 ja 4 pitävät paikkansa, ja väitteet 2 ja 3 eivät pidä paikkaansa.
>
> **Huom.** Jos implikaatiossa vaihtaa etu- ja takalauseen paikkoja tai jos sekä etu- että takalauseen eteen laittaa negaation, näillä tavoilla saadut uudet lauseet voivat tilanteesta riippuen pitää paikkansa tai olla pitämättä paikkaansa. [29, s. 36]

Tämän jälkeen kirjassa tutkitaan tarkemmin, mitä tapahtuu kun implikaatiossa vaihtaa etu- ja takalauseen paikkoja tai kun lisätään negaatiot kummankin eteen. Tekemällä implikaatioon molemmat muutokset, sekä paikkojen vaihto että negaatioiden lisäys, huomataan saatavan lause, jonka totuusarvo on sama kuin alkuperäisellä lauseella. Vastaesimerkin käyttö epätosien väitteiden kumoamiseksi tulee nyt ajankohtaiseksi.

Esimerkki 1. Tarkastellaan muotoa $p \to q$ olevaa lausetta "Jos $x \geq 1$, niin $x^2 \geq 1$." Muodostetaan lauseet $q \to p$, $\neg p \to \neg q$ ja $\neg q \to \neg p$, ja tutkitaan niiden totuusarvoja.

Erotellaan annetusta lauseesta sen osat $p : x \geq 1$, $\neg p : x < 1$, $q : x^2 \geq 1$, $\neg q : x^2 < 1$. Tällöin

$q \to p :$ "Jos $x^2 \geq 1$, niin $x \geq 1$." (Epätosi)
Vastaesimerkki: Jos $x = -2$, niin $x^2 = (-2)^2 = 4 > 1$, mutta $x < 1$.

$\neg p \to \neg q :$ "Jos $x < 1$, niin $x^2 < 1$." (Epätosi)
Vastaesimerkki: Jos $x = -3$, niin $x < 1$, mutta $x^2 = (-3)^2 = 9 > 1$.

$\neg q \to \neg p :$ "Jos $x^2 < 1$, niin $x < 1$." (Tosi)

Huom. Väitteen vääräksi osoittamiseksi riittää, kun löytää yhden vastaesimerkin. [29, s. 37]

Opiskelijoita ohjataan huomaamaan, että lause ja sen kontrapositio ovat keskenään ekvivalentteja. Tämän havainnon tekemistä tuetaan kasaamalla vielä lisää todistusaineistoa tehtävien avulla.

Tehtävä 1. Kirjoita seuraavat lauseet muotoihin $q \to p$, $\neg p \to \neg q$ ja $\neg q \to \neg p$.

1. $p \to q :$ "Jos $2x + 1 > 3$, niin $x > 2$."
2. $p \to q :$ "Jos kaksi kolmiota ovat yhtenevät, niiden pinta-alat ovat samat."
3. $p \to q :$ "Jos $a^2 = b^2$, niin $a = b$."

Tehtävä 2. Tutki tehtävän 1 lauseiden kaikkien muotojen totuusarvoja. Mikä lauseista $q \to p$, $\neg p \to \neg q$ ja $\neg q \to \neg p$ saa aina saman totuusarvon kuin alkuperäinen lause $p \to q$? [29, s. 37]

Epäsuoran todistamisen periaatetta selitetään myös joukko-opin avulla:

Tarkastellaan implikaatiota $p \to q$. Olkoon joukko P niiden ehtojen joukko, joilla lause p on tosi, ja joukko Q niiden ehtojen joukko, joilla lause q on tosi. Lauseet $P \subset Q$ ja $Q^C \subset P^C$ ovat yhtäpitävät. Silloin myös lauseet $p \to q$ ja $\neg q \to \neg p$ ovat molemmat samanaikaisesti joko tosia tai epätosia. Toisin sanoen lauseen ja sen kontraposition totuusarvot ovat samat. Tämän vuoksi lauseen $p \to q$ voi osoittaa todeksi osoittamalla lauseen $\neg q \to \neg p$ todeksi. [29, s. 38]

6.2.3 Induktiotodistus

Matemaattinen induktio opetetaan kaikille yleislukion opiskelijoille suuntautumisesta riippumatta. Induktio sisältyy opintojakson "Matematiikka I" osioon "Lukujonot". Oppimistavoitteet on listattu opetussuunnitelmassa seuraavasti:

> Matemaattinen induktio
>
> 1. On ymmärrettävä lukujonon rekursiivinen määrittely.
> 2. On ymmärrettävä matemaattisen induktion periaate.
> 3. On osattava todistaa induktiolla väitteitä luonnollisista luvuista. [14, s. 60]

Kirjassa "Lukion matematiikkaa 1" [30] johdatus matemaattiseen induktioon tehdään monista kotimaisistakin oppikirjoista tutulla dominopalikka-esimerkillä. Kuvitellaan ääretön jono pystyyn asetettuja dominopalikoita, joista ensimmäinen kaadetaan, ja se kaataa toisen palikan, ja jokainen palikka aina kaataa jonossa seuraavan palikan. Induktiivisesti päätellään, että jonon kaikki palikat kaatuvat. Tämä ilmaistaan myös kahtena sääntönä: (1) ensimmäinen palikka kaatuu, ja (2) jos n:s palikka kaatuu, niin $(n+1)$:s palikka kaatuu. Tämän jälkeen hyökätään matemaattisesti täsmällisemmän esimerkin kimppuun:

> Kun yhtälöön
>
> $$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2 \qquad \text{(a)}$$

sijoitetaan lukuja $n = 1, 2, 3, 4, 5$ vuoronperään, saadaan

$$\begin{aligned}
&\text{Kun } n = 1,\ 1 = 1^2 \\
&\text{Kun } n = 2,\ 1 + 3 = 4 = 2^2 \\
&\text{Kun } n = 3,\ 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \\
&\text{Kun } n = 4,\ 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \\
&\text{Kun } n = 5,\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2
\end{aligned}$$

ja huomataan, että yhtälössä (a) yhtäsuuruus pätee aina, kun $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Mutta tämä ei kuitenkaan riitä osoittamaan, että yhtälö (a) pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla n. Tällä tavalla sijoittamalla yhtälöön (a) luonnollisia lukuja yksi kerrallaan ja jatkamalla sitä kuinka pitkälle tahansa, ei voida ratkaista yhtälön paikkansapitävyyttä.

Sen osoittamiseksi, että jotakin luonnollista lukua n koskeva väite pitää paikkansa kaikilla luonnollisilla luvuilla n, käytetään matemaattista induktiota. Sovelletaan sitä yhtälöön (a).
(i) Kun $n = 1$, niin yhtälössä (a)

$$(\text{vasen puoli}) = 1,\ (\text{oikea puoli}) = 1^2 = 1$$

ja näin ollen yhtälö pätee, kun $n = 1$.
(ii) Kun $n = k$, oletetaan, että yhtälö

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \tag{b}$$

pätee. Nyt lisäämällä yhtälön (b) molempiin puoliin $2k + 1$, saadaan

$$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+(2k+1) = (k+1)^2. \tag{c}$$

Sijoittamalla $n = k + 1$ yhtälöön (a) saadaan itse asiassa yhtälö (c). Samalla huomataan, että yhtälö (a) pätee, kun $n = k + 1$.

Kohdan (i) perusteella yhtälö (a) pätee, kun $n = 1$.
Nyt jos yhtälö (a) pätee, kun $n = 1$, kohdan (ii) perusteella se pätee myös, kun $n = 1 + 1 = 2$. Jos yhtälö pätee, kun $n = 2$, se pätee edelleen kohdan (ii) perusteella myös, kun $n = 2 + 1 = 3$. Vastaavalla tavalla päättelemällä havaitaan, että yhtälö (a) pätee,

kun $n = 4, 5, 6, \ldots$, joten voimme vakuuttua, että yhtälö (a) pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla n. Siis tarkistamalla, että kohdat (i) ja (ii) ovat voimassa, saadaan todistetuksi, että yhtälö (a) pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla n. Tällaista todistusta kutsutaan matemaattiseksi induktioksi. [30, s. 149]

Kirja käsittelee erikseen tapauksen, jossa on todistettava jokin lause, kun $n \geq m$, missä m ei välttämättä ole 1. Tämän selityksessä ei ole mitään erikoista mielenkiintoa, emmekä tutki sitä tässä tarkemmin. Haastavampana esimerkkinä esitetään kaksimuuttujaisen epäyhtälön todistus. Esimerkissä käytetään viittaustarkoituksessa tunnuksia (a) ja (b) merkitsemään tiettyjä epäyhtälöitä. Samat viitteet toistuvat kirjassa useissa esimerkeissä, mutta niitä ei pidä sekoittaa muiden esimerkkien viitteisiin.

Esimerkki 2. Olkoon $h > 0$. Todistetaan induktiolla, että epäyhtälö

$$(1+h)^n > 1 + nh \tag{a}$$

pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 2$.

(i) Kun $n = 2$,

(vasen puoli) $= (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h =$ (oikea puoli),

joten epäyhtälö (a) pätee, kun $n = 2$.

(ii) Kun $n = k (k \geq 2)$, oletetaan, että epäyhtälö (a) pätee, ja saadaan

$$(1+h)^k > 1 + kh \tag{b}$$

Kerrotaan epäyhtälön (b) molemmat puolet luvulla $1+h$, ja koska $1 + h > 0$,

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h).$$

Nyt

$$\begin{aligned}(1+kh)(1+h) &= 1 + (k+1)h + kh^2 \\ &> 1 + (k+1)h\end{aligned}$$

$$\therefore (1+h)^{k+1} > 1 + (k+1)h$$

Viimeisin epäyhtälö on sama kuin epäyhtälö (a), johon on sijoitettu $n = k + 1$. Siis epäyhtälö (a) pätee, kun $n = k + 1$.

Kohtien (i) ja (ii) perusteella epäyhtälö (a) on voimassa kaikilla lukua 2 suuremmilla luonnollisilla luvuilla.

Tehtävä 2. Todista induktiolla, että epäyhtälö $2^n > n^2$ pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 5$. [30, s. 151]

Todistaminen korealaisessa koulumatematiikassa on nyt käsitelty pinnallisin puolin. Tärkeimmät havainnot kootaan yhteen luvussa 7.

7 Yhteenveto

Olemme nyt käsitelleet suomalaista ja korelaista koulumatematiikkaa niiltä osin kuin ne koskevat todistamista. On tietenkin selvää, ettei ole mahdollista sanoa kaikkea todistamisesta, mutta tarkoituksena on ollut tehdä selvitys siitä, miten ja missä vaiheessa koulutusta todistamista opetetaan, sekä mitä todistamisesta opetetaan. Sen sijaan tässä tutkielmassa ei ole pyritty kattavasti selvittämään, missä laajuudessa oppikirjat esittävät valmiita lauseiden todistuksia. Myöskään ei ole pyritty edes suuntaa-antavasti arvioimaan, tekevätkö suomalaiset vai korealaiset opiskelijat koulu-uransa aikana lukion loppuun mennessä enemmän todistustehtäviä.

Jonkinlaista vertailua on kuitenkin syytä tehdä. Ainakin kahdenlaisia havaintoja voidaan turvallisesti tehdä tutkielmaan kootun aineiston perusteella:

1. Millä tavalla todistamisen asema on muuttunut suomalaisessa koulumatematiikassa aikojen saatossa?

2. Millä tavalla nykyinen koulumatematiikka Suomessa ja Koreassa eroavat todistamisen suhteen?

Ensimmäiseen kysymykseen on melko selkeä vastaus. Todistamisen opetusta on myöhäistetty, mutta monipuolistettu. Vanhan matematiikan aikana todistus oli oleellinen osa keskikoulun geometriaa. Todistuksia esitettiin runsaasti oppikirjoissa ja todistusten konstruoimista harjoiteltiin. Tyypillisesti todistukset olivat suoria todistuksia ja niitä esiintyi harvemmin muilla matematiikan osa-alueilla kuin geometriassa. Uuden matematiikan projekti monipuolisti koulumatematiikkaa ja antoi lisää työvälineitä todistamisen opettamiselle. Uusi matematiikka oli kunnianhimoinen ohjelma, mutta sen toteuttamiseen ei ollut valmiuksia. Uusin, ongelmakeskeinen matematiikka on saavuttanut pysyvämmän aseman realistisena tapana toteuttaa matematiikan kouluopetusta. Siinä todistaminen on jäänyt varsin pieneen asemaan. Opetussuunnitelman mukaisessa opetuksessa sitä opetetaan lukion pitkän matematiikan valinnaisella kurssilla. Alaluvussa 5.5 arvioitiin n. 20-30 % väestöstä saavan tällaisen koulutuksen.

Toinen kysymys on hieman monisyisempi. On kuitenkin selvää, että todistaminen on järjestetty eri tavalla opetussuunnitelmissa. Kuten edellä todettiin, Suomessa todistaminen on kasattu lukion pitkään matematiikkaan lähinnä logiikan yhteyteen. Korealaisessa matematiikan opetussuunnitelmassa todistaminen on sen sijaan hajautettu siten, että oppilas törmää todistamiseen eri yhteyksissä eri kouluasteilla. Pääasiassa jako on seuraava: (1) suora todistus geometriassa peruskoulun kahdeksannella luokalla, (2) epäsuoran todistamisen periaate lukion ensimmäisellä luokalla, (3) induktiotodistus myöhemmin lukiossa. Käytännössä koko väestö käy läpi ensimmäisen vaiheen ja ylivoimainen enemmistö käy toisen ja kolmannenkin vaiheen. Näin ollen voitaneen kuvainnollisesti sanoa, että Suomessa opetetaan yhtenäisempää pientä opintokokonaisuutta ”todistamisoppi”, jossa opetetaan kattava valikoima todistamistekniikkoja pienehkölle valikoidulle joukolle opiskelijoita. Suurimmalle osalle väestöä ei todistamista ainakaan virallisesti opeteta. Tosin opetussuunnitelmat eivät ole kovin yksityiskohtaisia, ja niitä saatetaan toteuttaa paikallistasolla eri tavoin. Vastaavasti Koreassa ”todistamisoppia” ei opeteta, vaan todistamista opetetaan matemaattisen ajattelun välineenä eri vaikeustason tilanteisiin. Kaikille opetetaan jonkin verran todistamisesta, mutta ei kovin syvällisesti. Vakavampaan ”todistamisoppiin” paneutuvat vain korkeakoulutasolla matematiikkaa opiskelevat. Opetussuunnitelma on tiukan yksityiskohtainen ja oletettavasti vaihtelua sen toteuttamisessa on vähemmän. Koreassa yksityisen koulutuksen tarjonta on tosin runsaampi, mikä saattaa luoda vaihtelua tarjottavan matemaattisenkin koulutuksen laatuun, mutta tämä kysymys jää tässä yhteydessä avoimeksi.

Viitteet

[1] Apajalahti Martti, Laine Yrjö, Tanskanen Raimo (1975). *Lukion matematiikka I. Pitkä kurssi.* 3. painos. Otava, Helsinki.

[2] von Glasersfeld, Ernst (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning.* The Falmer Press, London.

[3] Haapasalo, Lenni (1990). Millaisia muutospaineita moderni käsitys matematiikan oppimisesta aiheuttaa opetussuunnitelmien laatimiselle ja oppimisympäristöjen suunnittelemiselle? Teoksessa Hämäläinen, Seppo (toim.) *Opettajankoulutuksen uudistamisen ulottuvuuksia. Paavo Maliselle omistettu juhlakirja.* Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä.

[4] Halmetoja Markku, Häkkinen Kaija, Merikoski Jorma, Pippola Lauri (2006). *Matematiikan taito 11.* WSOY, Helsinki.

[5] Heath, Thomas L.(1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* 2. painos. Dover Publications, New York.

[6] Hogben, Lancelot (1937). *Matematiikkaa kaikille.* WSOY, Porvoo 1949, 3. painos.

[7] Inkilä ja Keskitalo (1991). *Looginen ajattelu ja todistusmenetelmät lukion matematiikassa.* Pro gradu -työ. Matematiikan laitos. Jyväskylän yliopisto.

[8] Jäppinen Paavo, Kupiainen Alpo, Räsänen Matti (2005). *Lukion Calculus 6.* Otava, Helsinki.

[9] Kaikkonen, Martti (1970). *Uusi matematiikka kouluissamme. Mitä ja miksi. Opas vanhemmille ja opettajille.* 2. painos. Valistus, Helsinki.

[10] Kallio, Niilo (1966). *Geometria 1. Keskikoulun oppimäärä.* 19. painos. Otava, Helsinki.

[11] Kangasaho Jukka, Mäkinen Jukka, Oikkonen Juha, Paasonen Johannes, Salmela Maija, Tahvanainen Jorma (2008). *Pitkä matematiikka 11.* WSOY, Helsinki.

[12] Korean Educational Development Institute. *Brief Statistics on Korean Education.* <http://cesi.kedi.re.kr>. Haettu 27.7.2010.

[13] Kontkanen Pekka, Lehtonen Jukka, Liira Riitta, Luosto Kerkko, Ronkainen Anja (2006). *Pyramidi 7.* Kustannusosakeyhtiö Tammi, Vammala.

[14] KOPS (2007).*Matematiikan opetussuunnitelma.* Opetusministeriön julkaisu nro 79 osa 8. Opetusministeriö, Seoul.

[15] Korhonen, Hannu (1982). ”Uusi” matematiikka ja sen seuraukset Suomessa. *Kasvatus* 13(1), s. 53-54.

[16] Kupari, Pekka (1989). Problem solving and applications in the Finnish school mathematics since 1970. Teoksessa *Mathematics Education Research in Finland. Yearbook 1987-88.* Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B 39, Jyväskylä.

[17] Leino, Jarkko (1993). Origins and Varieties of Constructivism. Teoksessa Kupari ja Haapasalo 1993. *Constructivist and Curriculum Issues in School Mathematics Education.* Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B 82, Jyväskylä.

[18] Malaty, George (1988). Matematiikan opetus Neuvostoliitossa. Teoksessa Kupari 1988. *Koulumatematiikka 1990-luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia.* Kasvatustieteiden julkaisusarja B 27, Jyväskylä.

[19] Malinen, Paavo (1996). Selkeyttä todistamiseen koulumatematiikassa. *Dimensio: matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti* 60(5), s. 22-24.

[20] Malinen, Paavo (1997). Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun. Teoksessa Räsänen, Kupari, Ahonen ja Malinen 1997. *Matematiikka – Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä.’

[21] MOE. *Education in Korea 2007-08.* Ministry of Education & Human Resources Development, Republic of Korea. <http://www.kice.re.kr/en/index.do>. Haettu 27.7.2010.

[22] OECD (2007). *PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow’s World. Executive Summary.* <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf>. Haettu 30.9.2010.

[23] Pehkonen Erkki, Hannula Markku, Björkqvist Ole (2007). Problem solving as a teaching method in mathematics education. Teoksessa Pehkonen, Ahtee ja Lavonen (toim.) 2007, s. 121-131. *How Finns Learn Mathematics And Science.* Sense, Rotterdam.

[24] Penttilä, Terttu (1975). *Matematiikkaa 7 a. Laajempi kurssi.* 2. painos. Valistus, Helsinki.

[25] PMOU (1967). *Pohjoismainen koulumatematiikka. Mietinnön suomenkielinen lyhennelmä.* Nordisk utredningsserie 1967:12, Tukholma.

[26] Salas, Hille, Etgen (1999). *Calculus. One And Several Variables.* 8. painos. Wiley & Sons, New York.

[27] Väisälä, K. (1965). *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 1.* 14. painos. WSOY, Porvoo.

[28] Woo Jungho, Park Kyosik, Park Kyungmi, Lee Kyunghwa, Kim Namhee, Im Jaehoon, Park In, Lee Youngran, Ko Hyeonju, Kim Eunkyung (2009). *Junghakkyo Suhak 2.* Doosan Dong-a, Seoul.

[29] Yoo Heechan, Cho Wanyoung, Cho Jungmook, Im Miseon, Yoo Ikseung, Han Myeongju, Nam Seonju, Park Wonkyoon, Jung Sungyoon (2009). *Kodeunghakkyo Suhak.* Mirae-n, Seoul.

[30] Yoo Heechan, Cho Wanyoung, Son Hongchan, Cho Jungmook, Lee Byungman, Kim Yongsik, Im Miseon, Seon Mihyang, Yoo Ikseung, Han Myeongju, Park Wonkyoon, Nam Seonju, Jung Sungyoon (2010). *Kodeunghakkyo Suhak 1.* Mirae-n, Seoul.